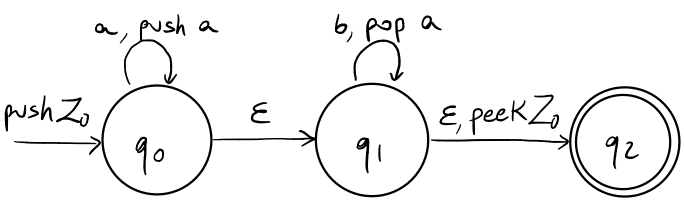
Automi a Pila

Riconoscono una classe di linguaggi più alta dei DFA

Non poniamo limite alla dimensione della memoria per far sì che possano descrivere linguaggi liberi.

PILA: posso solo aggiungere o rimuovere dati dalla cima della pila

ESEMPIO INFORMALE:



- Z_0 serve come sentinella per segnalare la fine della pila
- q_0 accumula "a" sulla pila, passa a q_1 quando "scommette" di aver letto tutte le "a"
- q_1 controlla che per ogni "b" ci sia un "a" e la rimuove, se vede Z_0 vuol dire che ha raggiunto la fine e passa a q_2
- q_2 accettazione

DEFINIZIONE:

Un automa a pila (PDA: Push Down Automaton) è una SETTUPLA $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ dove:

- Q è un insieme finito di stati
- Σ è l'alfabeto di input
- Γ è l'alfabeto della pila
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ è la funzione di transizione
- $Z_0 \in \Gamma$ è il simbolo iniziale
- $F \subseteq Q$ è l'insieme di stati finali

DESCRIZIONI ISTANTANEE

- È intesa per specificare completamente la configurazione di un PDA in un momento durante il processo di riconoscimento di una stringa

È una TRIPLA (q, w, α) con

- $q \in Q$ è lo stato in cui si trova l'automa
- $w \in \Sigma^*$ è ciò che rimane da riconoscere nella stringa di input
- $\alpha \in \Gamma^*$ è il contenuto della pila dalla cima al fondo

MOSSE

Diciamo che P fa mossa da I a J (con I, J D.I.) se $I \vdash_P J$ dove la relazione $\vdash_P$ è definita come:

$$(q, aw, X\beta) \vdash_P (p, w, \alpha\beta) \quad \text{se} \quad (p, \alpha) \in \delta(q, a, X)$$
$$(q, w, X\beta) \vdash_P (p, w, \alpha\beta) \quad \text{se} \quad (p, \alpha) \in \delta(q, \varepsilon, X)$$

vuol dire che l'automa può passare da una D.I. all'altra con 0 o più mosse

$\vdash_P^*$ (chiusura riflessiva e transitiva) è la relazione tale che:

- $I \vdash_P^* I$
- se $I \vdash_P^* K$ e $K \vdash_P^* J$, allora $I \vdash_P^* J$

LINGUAGGIO ACCETTATO DA UN PDA

- Il linguaggio accettato per STATO FINALE è:

$$L(P) \stackrel{def}{=} \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \varepsilon, \alpha), q \in F \}$$

- Il linguaggio accettato per PILA VUOTA è:

$$N(P) \stackrel{def}{=} \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \}$$

Dato P PDA

RELAZIONE TRA CFG E PDA

TEOREMA:

① $\forall$ CFG G $\exists$ PDA P $|$ $N(P) = L(G)$
② $\forall$ PDA P $\exists$ CFG G $|$ $L(G) = N(P)$

Intuizione per ①

Data $G = (V, T, Q, S)$ definiamo il PDA P corrispondente come:
$P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \emptyset)$

dove δ:

$$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \to \beta \in Q\} \quad \forall A \in V$$
$$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\} \quad \forall a \in T$$

AUTOMI A PILA DETERMINISTICI (DPDA)

(non devono esserci scelte possibili a partire dalla stessa D.I.)

È un PDA $= (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ in cui, $\forall q \in Q$, $a \in \Sigma \wedge X \in \Gamma$, l'insieme $\delta(q, a, X) \cup \delta(q, \varepsilon, X)$ contiene al massimo un elemento

Ogni linguaggio regolare è riconosciuto da un DPDA, possiamo definire un DPDA strutturalmente identico ad $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$ che non usa la pila

Per ogni DPDA P esiste una CFG non ambigua G t.c. $L(G) = N(P)$, non vale il viceversa

POTERE ESPRESSIVO DEI DIVERSI FORMALISMI

- DFA = NFA = ε-NFA = RE
- DFA $\subsetneq$ DPDA $\subsetneq$ CFG non ambigue $\subsetneq$ CFG = PDA