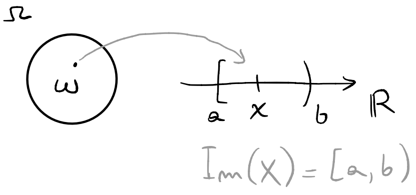
Variabili Aleatorie Continue

X è una V.A. continua se $Im(X)$ è un insieme continuo (più che numerabile)

sottoinsieme di $\mathbb{R}$



DEFINIZIONE: Una V.A. X continua ammette una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ detta DENSITÀ (PDF - Probability Density Function) tale che:

$$P(X \in A) = \int_A f_X(t)\, dt$$

in particolare se $A = [a, b]$

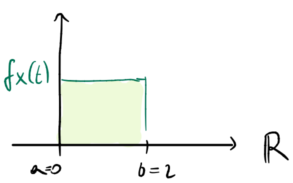
$P(X \in A) = P(a \le x \le b) = \int_a^b f_X(t)\, dt$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE NOTE

$X \sim$ Uniforme (a, b)

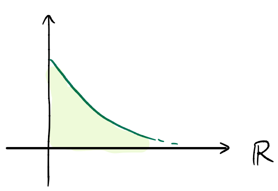
è una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & t \in [a,b] \end{cases} \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



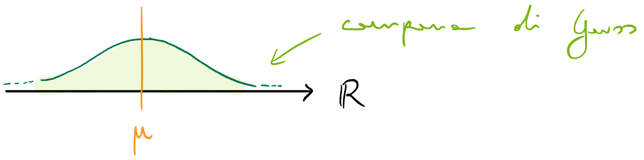
$X \sim$ Esponenziale (λ)

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } t \ge 0 \end{cases} \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$



$X \sim \text{Normale}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad \mathbb{E}(X) = \mu \qquad \text{Var}(X) = \sigma^2$$



σ piccolo

σ grande

– Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ $\quad Y \sim \text{Normale}(0,1)$ è la normale STANDARD

PROPRIETÀ: La normalità è preservata per trasformazioni lineari

MEDIA E VARIANZA DI V.A. CONTINUE

Def • Chiamo MEDIA di una V.A. continua la seguente quantità:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

Def • Chiamo VARIANZA di una V.A. continua la seguente quantità:

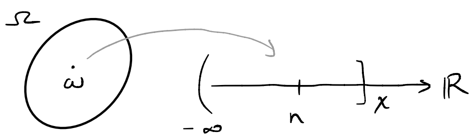
$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot f_X(x)\, dx$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE COMULATA

Definiamo uno strumento che è comune alle V.A. discrete e continue

Def • La funzione di distribuzione cumulata (CDF - Cumulative Distribution Function) di una V.A. X è così definita:

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto P(X \le x) = F_X(x)$$
$$\| $$
$$P(X \in (-\infty, x])$$



X discreta: $P(X \le x) = \sum_{k \le x} p_X(k)$ $\qquad$ X continua: $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt$