Espressioni e Linguaggi Regolari
(RE)

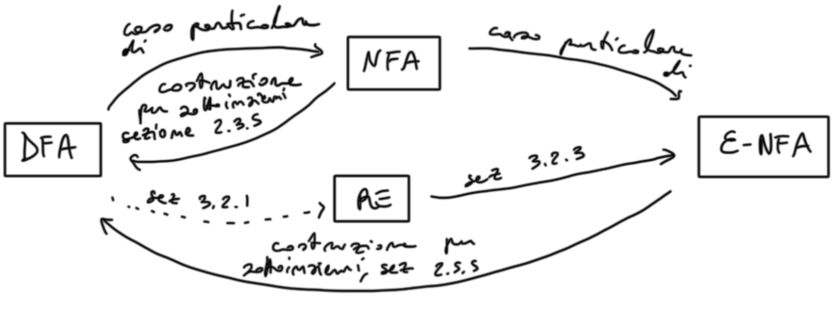
Le espressioni regolari su Σ sono definite come:

- $\emptyset$ ed ε sono espressioni regolari
- se $a \in \Sigma$ allora a RE
- se E ed F ER, allora $E+F$ ed EF sono RE
- se E espressione regolare, allora E^* espressione regolare

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&L(\emptyset) = \emptyset \\
&L(\varepsilon) = \{\varepsilon\} \\
&L(a) = \{a\} \\
&L(E+F) = L(E) \cup L(F) \\
&L(EF) = L(E)L(F) \\
&L(E^*) = L(E)^*
\end{aligned}
}
$$

esempio

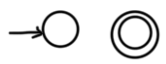
$$L((ab)^*) = L(ab)^* = (L(a)L(b))^* = (\{a\}\{b\})^* = \{ab\}^* = \{\varepsilon, ab, abab, \dots\}$$



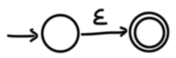
Data un'espressione regolare E, esiste un ε-NFA A t.c. $L(A) = L(E)$

Dimostrazione:

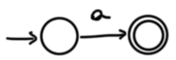
- Caso $\emptyset$



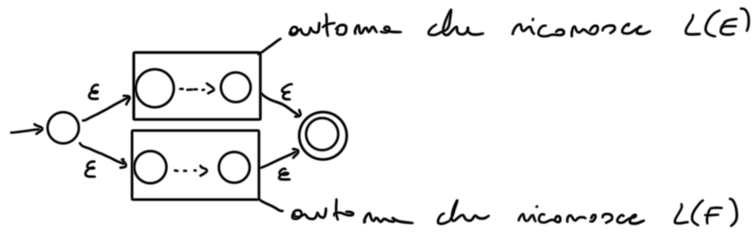
- Caso ε



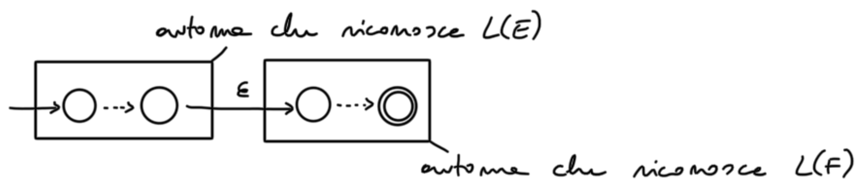
- Caso a



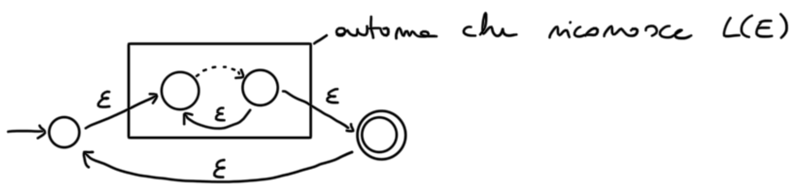
- Caso $E+F$



- Caso EF



- Caso E^*



PROPRIETÀ

Se due linguaggi L ed L' sono regolari allora lo sono anche:

- $L \cup L'$
- $L \cap L'$
- LL'
- $\overline{L}$
- $L - L'$
- L^R

TEOREMI:

> I linguaggi regolari sono chiusi per complemento

> I linguaggi regolari sono chiusi per intersezione

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$ — per le leggi di de Morgan

oppure possiamo eseguire entrambi gli automi in parallelo e rispondere affermativamente solo se entrambi gli automi rispondono sì

$B = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta(q_1, q_2), F_1 \times F_2)$ dove $\delta((p,q), a) = (\delta_1(p,a), \delta_2(p,a))$

> I linguaggi regolari sono chiusi per differenza

$$L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

> I linguaggi regolari sono chiusi per inversione

$$\emptyset^R = \emptyset$$
$$\varepsilon^R = \varepsilon$$
$$a^R = a$$
$$(E_1 + E_2)^R = E_1^R + E_2^R$$
$$(E_1 E_2)^R = E_2^R E_1^R$$
$$(E^*)^R = (E^R)^*$$

Dunque $L(E^R) = L(E)^R$ e quindi L è regolare