Proprietà della $\mathbb{P}$ Dedotte da Assiomi

PROPOSIZIONE: Dati A, B e C EVENTI (sottoinsiemi di Ω) allora:

a) se $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$ MONOTONIA DI $\mathbb{P}$

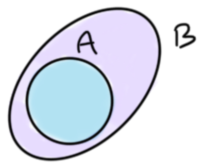
b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

c) $\mathbb{P}(A \cup B) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

d) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

OSSERVAZIONI:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona quando $x \le y \to f(x) \le f(y)$ oppure $x \le y \to f(x) \ge f(y)$
nella visione insiemistica invece possiamo approssimare il comportamento di $\mathbb{P}$ a quello di un'area

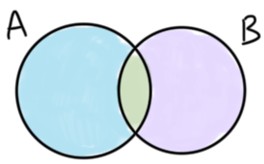


$B = A \cup (B \cap A^c)$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap A^c)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$

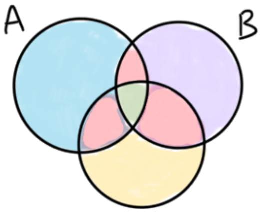
$\mathbb{P}$ è positiva ≥ 0
quindi $\mathbb{P}(B) \ge \mathbb{P}(A)$

b) Si parte dalla proprietà dell'additività di $\mathbb{P}$



Si intuisce che dopo aver sommato A e B è necessario sottrarne l'intersezione per ottenere $A \cup B$, sempre approssimando il comportamento di $\mathbb{P}$ a quello di un'area

c) Data (b) $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underbrace{\mathbb{P}(A\cap B)}_{\geq 0}$ quindi necessariamente l'unione sarà $\leq$ alla somma delle probabilità

d) 

Dal disegno è intuitivo il perchè sia necessari aggiungere l'intersezione dei tre insiemi