# Variabili Aleatorie

DEFINIZIONE: Una variabile Aleatoria è una funzione di $\Omega$ in $\mathbb{R}$

- VARIABILI ALEATORIE DISCRETE hanno immagine discreta (FINITA e AL PIÙ NUMERABILE)
- VARIABILI ALEATORIE CONTINUE hanno immagine che è sottinsieme di $\mathbb{R}$ continuo

NOTAZIONE

$X, Y, Z \dots$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

$X(\omega) = x$

esempio:

- Lancio una moneta equa 5 volte e sono interessato al numero di teste

$A =$ "ottengo 3 teste"

$\mathbb{P}(A)$

è la controimmagine

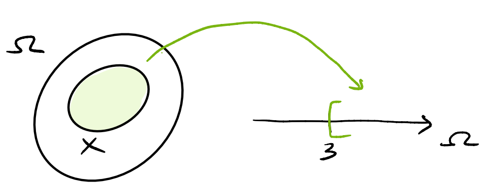
$A = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = 3\} = X^{-1}(\{3\})$

conto il n° di teste

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 3)$

$B =$ "ottengo almeno 3 teste"

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \geq 3\}) = \mathbb{P}(X^{-1}([3, +\infty)) = \mathbb{P}(X \geq 3) = \mathbb{P}(\{X=3\} \cup \{X=4\} \cup \{X=5\})$




$\{X \geq 3\} \cap X^{-1}(\text{Im}\, X)$

$X^{-1}([3, +\infty))$ $\qquad$ $\text{Im}(X) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \exists\, \omega \in \Omega \text{ t.c. } X(\omega) = x\}$

# STRUMENTI PER CALCOLARE $\mathbb{P}$ CON VARIABILI ALEATORIE

DEFINIZIONE: La funzione della massa di probabilità (probability mass function) (PMF) di una v.A. è definita come:

$$p_X : Im(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{x \in \Omega \ / \ X(\omega) = x\})$$

Prendo l'esempio di prima

$Im(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ← quante teste possono uscire su 5 tiri?

$x = 0 \qquad p_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = 0\}) = \mathbb{P}(\{c,c,c,c,c\}) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

quindi la PMF in $x=0$ vale $\frac{1}{32}$

Con lo stesso procedimento:

PMF in 1 $\longrightarrow$ $p_X(1) = \frac{5}{32}$

$p_X(2) = \dfrac{\binom{5}{2}}{32} = \dfrac{10}{32}$ ← coefficiente binomiale

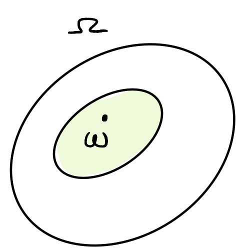
"il numero di stringhe fatte con un alfabeto binario con esattamente K simboli di TIPO 1 è in biiezione con il n° di sottoinsiemi di taglia K estratti da una popolazione di taglia N"

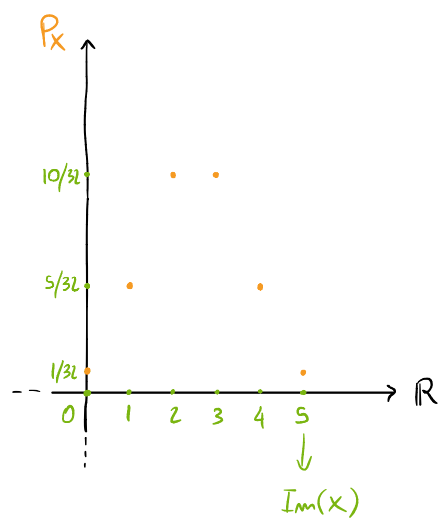
$\binom{N}{K}$

$p_X(3) = \dfrac{\binom{5}{3}}{32} = \dfrac{5!}{3!2!} \cdot \dfrac{1}{32} = \dfrac{10}{32}$

$p_X(4) = \frac{5}{32}$

$p_X(5) = \frac{1}{32}$




Come uso la PMF per calcolare $\mathbb{P}$ di eventi scritti con le V.A.?

B: "almeno 3 teste"

$\mathbb{P}(X \geq 3)$ ← posso sempre scriverlo come unione perché gli insiemi sono discreti

$\underbrace{\{X = x_1\} \cup \{X = x_2\}}_{\text{SEMPRE DISGIUNTI}}$

$$\mathbb{P}(X\geq 3)=\mathbb{P}(\{X=3\}\cup\{X=4\}\cup\{X=5\})=\underbrace{\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=5)}=$$

sono disgiunti quindi posso sfruttare l'additività

$$=P_X(3)+P_X(4)+P_X(5)=\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X\in S)=\sum P_X(x) \quad \text{con} \quad x\in S$$

# VARIABILI ALEATORIE NOTE

## Variabili Aleatorie di Bernulli

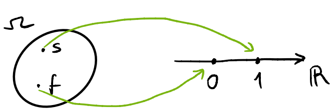
Definiamo una prova Bernulliana come un esperimento probabilistico con esito DICOTOMICO

(es. testa o croce, vero o falso ecc...)

Usiamo come etichette per gli esiti SUCCESSO (s) / FALLIMENTO (f) $\quad \Omega=\{s,f\}$

Definizione della variabile:

$X$: associa 1 al successo e 0 all'insuccesso




$X(\{s\})=1$
$X(\{f\})=0$

0 e 1 definite come variabili degeneri

$X \sim \text{Bernulli}(p)$ con $p\in(0,1)$

tilde: ha legge di prob.
ha distribuzione di
è distribuita come

PMF:

$$p_X: \text{Im}(X)\to\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto P_X(x)=\mathbb{P}(X=x)$$

$$\text{Im}(X)=\{0,1\}$$

$$p_X(0)=\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X^{-1}(\{0\}))=\mathbb{P}(\{f\})=1-p$$
$$p_X(1)=\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X^{-1}(\{1\}))=\mathbb{P}(\{s\})=p$$

$$p_X(x)=\begin{cases} p & \text{se } x=1 \\ 1-p & \text{se } x=0 \end{cases}$$

**Esempio: lancio di una moneta equa**

$X: \quad X(\{T\}) = 1, \quad X(\{C\}) = 0$

$Y: \quad X(\{C\}) = 1, \quad X(\{T\}) = 0$

perché abbiamo due possibili scommesse

$X$ e $Y$ non rappresentano la stessa funzione di $\Omega$ in $\mathbb{R}$ però:

PMF di $X$:

$$p_X \quad Im(X) \to \mathbb{R}$$
$$p_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{C\}) = \frac{1}{2}$$
$$p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{T\}) = \frac{1}{2}$$

PMF di $Y$:

$$p_X \quad Im(Y) \to \mathbb{R}$$
$$p_Y(0) = \mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(\{T\}) = \frac{1}{2}$$
$$p_Y(1) = \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(\{C\}) = \frac{1}{2}$$

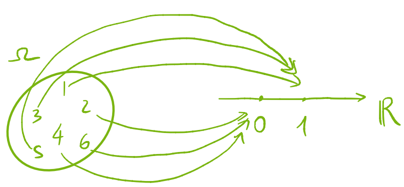
Inducono la stessa legge su $\mathbb{R}$ ma non sono la stessa funzione

**Esempio: lancio un dado equo a 6 facce e considero come successo un esito dispari, stessa X di prima**

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$Y(\{1\}) = Y(\{3\}) = Y(\{5\}) = 1$

$Y(\{2\}) = Y(\{4\}) = Y(\{6\}) = 0$




PMF di $Y$:

$$Im(Y) \to \mathbb{R}$$
$$y \mapsto p_Y(y) = \mathbb{P}(Y=y)$$
$$Im(Y) = \{0, 1\}$$

$$p_Y(\{0\}) = \mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(Y^{-1}(\{0\})) = \mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p_Y(\{1\}) = \mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y^{-1}(\{1\})) = \mathbb{P}(1,3,5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

# Variabili Aleatorie Binomiali

Definiamo l'esperimento probabilistico come $n$ prove INDIPENDENTI e IDENTICAMENTE DISTINTE ripetute e di tipo Bernulliano

(ogni prova non influenza le altre e la $\mathbb{P}$ di successo è costante in tutte le prove)

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n) \text{ con } \omega_i \in \{s, f\} \text{ con } i=1,\dots,n\}$$

Definizione di X:

X: conta il numero di successi in $n$ prove

es. $X(s,f,f) = 1$ $\quad X(s,s,f) = 2$

PMF di X:

$$Im(X) = \{0,1,2,\dots n\}$$
$$x \longmapsto p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

$X \sim Binomiale(n,p)$

$p_X(K) = \mathbb{P}(X=K) \qquad K = 0,1,2,\dots n$

$$p_X(K) = \mathbb{P}(X=K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

$K \in Im(X) = \{0,1,2,\dots,n\}$
$p$: probabilità di successo in ogni prova

Il numero di sottoinsiemi di taglia $K$ che si possono estrarre da un insieme di taglia $n$, numero di stringhe in cui si hanno esattamente $K$ successi

Esempio di grafico

# Variabili Aleatorie Geometriche

Svolgiamo prove ripetute di tipo Bernulliano fino a quando non otteniamo il primo successo

regola di arresto

$$\Omega = \{ s, (f,s), (f,f,s), (f,f,f,s) \dots \} = \{ s, (\underbrace{f,\dots,f}_{n-1}, s) \quad \forall n = 2,3,4\dots \}$$

**Definizione di X:**

X : numero di prove effettuate

es. $X((f,f,s)) = 3$

**PMF di X:**

$$Im(X) = \{1,2,3\dots\}$$
$$x \longmapsto p(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

$X \sim$ Geometrica $(p)$

$p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{\omega \in \mathbb{R} \mid X(\omega) = 1\}) = \mathbb{P}(\{s\}) = p$ → è un parametro che indica la probabilità di successo della singola prova

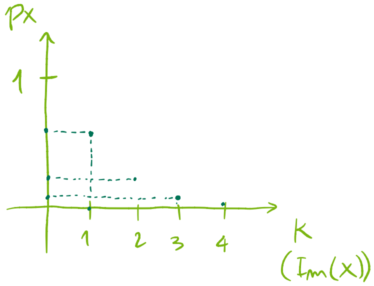
$p_X(2) = \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\{(f,s)\}) = (1-p)p$ ← legge prodotto

...

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\{(\underbrace{f,\dots,f}_{k-1\ f}, s)\}) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad \forall k \in \{1,2,\dots\}$$

## Esempio di grafico

$p = 0.7$




$p_X(1) = 0.7$

$p_X(2) = 0.3 \cdot 0.7$

$p_X(3) = 0.3^2 \cdot 0.7$

...

# Variabile Aleatoria di Poisson

Osservo il verificarsi di un evento di interesse (bassa frequenza)

es. conto gli incidenti stradali nel tratto stradale $x$ in tempo $t$
es. conto i refusi nelle bozze di un testo in una pagina

Definizione di X:

X: numero di successi che si sono verificati nella finestra di osservazione

PMF di X:

$Im(X) = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\qquad X \sim Poisson(\lambda)$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$\lambda$ è un PARAMETRO DI INTENSITÀ

esempio:

$\lambda = 3 \qquad p_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} = e^{-3} \approx 0.05$

$\qquad\qquad p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{1!} e^{-3} = 3e^{-3} \approx 0.15$

PROPRIETÀ:

se $X \sim Poisson(\lambda)$ su una finestra di osservazione data e cambiamo questa finestra con un parametro $K$ continuo ad avere una Poisson ma dilatato come la finestra $\rightarrow Y \sim Poisson(\mu = K \cdot \lambda)$

es. n° di refusi nella pagina definito come $X \sim Poisson(0.1)$

$\downarrow$

n° di refusi nel testo (134 pagine) $\qquad Y \sim Poisson(134 \cdot 0.1)$

## Variabili Aleatorie Ipergeometriche

Estraggo senza reimbussolamento n oggetti da una scatola che ne contiene N dei quali C hanno una caratteristica che ci interessa

Definizione di X:

X : conto il numero di oggetti con caratteristica x che ho estratto

Paradigma di prove ripetute NON Bernulliane perchè non reimbussolo e quindi le prove non sono indipendenti

PMF di X:

$$Im(X) = \{0, 1, 2, \dots, \min(n, C)\}$$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{C}{k}\binom{N-C}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{con } k \in Im(X)$$

# Indipendenza

## DEFINIZIONE:

- Le V.A. X e Y sono indipendenti se $\forall x \in Im(X)$ e $\forall y \in Im(Y)$ gli EVENTI:

$$\{X=x\} \quad e \quad \{Y=y\}$$

sono INDIPENDENTI

OSSERVAZIONI

$$\mathbb{P}(\{X=x\} \cap \{Y=y\}) = \mathbb{P}(X=x) \cdot \mathbb{P}(Y=y)$$

$\forall x \in Im(X)$
$\forall y \in Im(Y)$

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

|| La PMF CONGIUNTA è il prodotto delle PMF MARGINALI

|| X e Y indipendenti è l'unico caso in cui la PMF congiunta contiene le stesse informazioni delle PMF marginali

## DEFINIZIONI:

- Se X e Y sono indipendenti

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

- Se X e Y sono indipendenti

$$Var(X,Y) = Var(X) + Var(Y)$$