Probabilità Condizionata

> Includere informazioni parziali nel calcolo della $\mathbb{P}$

evento condizionato

DEFINIZIONE: $\mathbb{P}$ di A condizionata a B, anche detta $\mathbb{P}$ di A dato B

evento condizionante

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \text{con } \mathbb{P}(B) \neq 0$$

CALCOLO DELL' INTERSEZIONE:

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A|B)\cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\cdot \mathbb{P}(A)$$

es. Lancio di un dado a 6 facce

$A = \{2\}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$

informazione parziale

Voglio calcolare $\mathbb{P}(A)$ sapendo che è uscito un numero pari

Quindi:

B = "è uscito un numero pari" = $\{2,4,6\} \subseteq \Omega$ $\qquad A,B \subseteq \Omega$

Come calcolo $\mathbb{P}$ dato B?

$A\cap B = \{2\} \cap \{2,4,6\} = \{2\}$

$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{6}$

quindi $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{3}$ perché $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

$\frac{3}{6}$

PROPOSIZIONE: $\mathbb{P}(\cdot|B)$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathbb{P})$

$\forall A \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \mathbb{P}(\cdot|B): \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$

Dobbiamo controllare

1) $\mathbb{P}(A|B) \geq 0$?
2) $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$?
3) ADDITIVITÀ ?

1) $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0}{\mathbb{P}(B) > 0} \Big] > 0$

è importante ricordare che non stiamo cambiando lo spazio campionario

2) $\mathbb{P}(\Omega|B) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$

3) $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 | B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$, con $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

- quindi valgono anche le proprietà dedotte dagli assiomi

ALCUNI RISULTATI SULLE P CONDIZIONATE

① REGOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE GENERALIZZATA

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_{n-1} | A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_1)$$

② FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Prendo $(A_i)_{i=1}^{n}$ partizione di Ω

$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$

per la definizione di P condizionata

③ TEOREMA DI BAYES

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

perché $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$