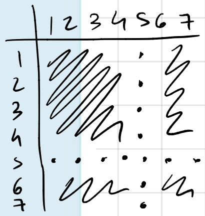
Test di autovalutazione

1.

Un'urna contiene sette palline numerate da 1 a 7. Se ne estraggono due con reimbussolamento. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

$\Omega = \{ (i,j) \text{ con } i,j \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \}$

Approssimare, se necessario, il risultato alla **seconda cifra decimale**.



13/49

1. E ="è stato estratto il numero 5". $P(E)$ = 0.27
2. F ="la somma dei due numeri estratti è pari". $P(F)$ = 0.51

   $F = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (2,2), (2,4), (2,6) \ldots$

3. G ="la somma dei due numeri estratti è dispari". $P(G)$ = 0.49

   $P(G) = P(F^c)$

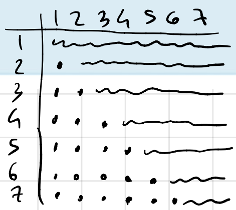
   $\# F = 25$

   $\# \Omega = 7^2 = 49$

   $P(F) = \frac{25}{49}$

4. H ="il primo numero estratto è maggiore (>) del secondo". $P(H)$ = 0.43

Verifica risposta

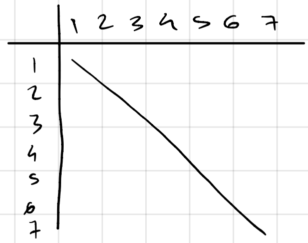


21/49

2.

Un'urna contiene sette palline numerate da 1 a 7. Se ne estraggono due senza reimbussolamento. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi

$49 - 7 = 42$



Approssimare, se necessario, il risultato alla **seconda cifra decimale**.

1. E ="è stato estratto il numero 5". $P(E)$ = 0.31

   $12/42 = \frac{6}{21}$

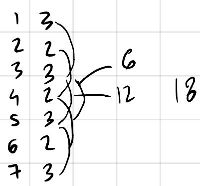
2. F ="la somma dei due numeri estratti è pari". $P(F)$ = 0.43

   $F = \{(1,3)(1,5),(1,7),(2,4)(2,6),(3,1),(3,5),(3,7) \ldots$

   18/42

3. G ="la somma dei due numeri estratti è dispari". $P(G)$ = 0.57

   $P(F^c)$



Verifica risposta

3. Il 60% di studenti di un corso è un genio, il 70% ama il cioccolato e il 40% cade in entrambe le categorie. Scegliendo a caso uno studente di questo corso, qual è la probabilità che non sia un genio e che non ami il cioccolato?

Risposta: 0.1

Verifica risposta

60% genio $\leftarrow \mathbb{P}(G)$
70% ama il cioccolato $\leftarrow \mathbb{P}(C)$
40% entrambi $\leftarrow \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(N) = ?$

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}([G \cup C]^c) = 1 - \mathbb{P}(G \cup C) = 1 - [\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(G \cap C)] = 0.1$$

4. Un dado a 6 facce è costruito in modo che ogni faccia segnata con un numero pari sia doppiamente probabile rispetto ad una faccia segnata con un numero dispari. Tutte le facce pari sono equiprobabili e tutte le facce dispari sono equiprobabili. Si lanci il dado una volta e si calcoli la probabilità che il risultato sia un numero inferiore (<) a 4. $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = \frac{4}{9}$
Approssimare, se necessario, il risultato alla **seconda cifra decimale**.

Risposta: 0.44

Verifica risposta

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots \mathbb{P}(A_6) = 1$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_5)$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_4) = \mathbb{P}(A_6)$$

$$\mathbb{P}(A_2) = 2\mathbb{P}(A_1)$$

$$3\mathbb{P}(A_1) + 3(2\mathbb{P}(A_1)) = 1$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{9} \qquad \mathbb{P}(A_2) = \frac{2}{9}$$

5.

Il tuo amico Giovanni ha due grandi passioni: il cinema e la montagna. La domenica si dedica esclusivamente a queste due attività. Le alterna a seconda delle condizioni meteo. Se non piove, va in motagna l' 85% delle volte. Se piove, si dedica al cinema con probabilità 0.7. In questa stagione le condizioni meteo sono abbastanza stabili su belle giornate di sole. In particolare la probabilità di pioggia è solo del 10%. Calcolare

$P(M|P^c) = 0.85$

$P(M^c|P) = 0.70$

$P(P) = 0.10 \qquad P(P^c) = 0.9$

1. la probabilità che Giovanni vada in montagna questa domenica 0.795

$P(M) = ?$

$P(M) = P(M|P)P(P) + P(M|P^c)P(P^c)$ (0.3)

$= 0.30 \cdot 0.10 + 0.85 \cdot 0.90 =$

$= 0.03 + 0.765 = 0.795$

2. la probabilità che Giovanni sia in montagna e che piova 0.03

$P(M \cap P) = P(M|P)P(P) = 0.03$

3. all'uscita del cinema hai appena incontrato Giovanni, con che probabilità piove? 0.34

P e P^c come partizione di S

$P(P|M^c) = \frac{P(M^c|P)P(P)}{P(M^c)} = \frac{0.07}{0.205} = 0.$

$P(M^c) \rightarrow 1 - 0.795$

6.

Stasera esci con la tua amica Anna. Vi piace andare sempre negli stessi due posti per cenare: il posto A e il posto B. Avete una leggera preferenza per il posto B dove andate infatti il 65% delle volte. Ultimamente hai qualche problema di digestione. Per ciascun piatto che mangi nel posto A, sai che la metà delle volte non lo digerisci. Il posto B ha una cucina più leggera e per ciascun piatto che mangi da loro, sai che solo una volta su quattro non lo digerisci. Hai parecchio appetito, quindi ordinerai due piatti per cena.

$P(A) = 0.35$

$P(A^c) = 0.65$

$\Omega_1 = \{DD, NN, DN, ND\}$

$P(D) = \frac{3}{4} \qquad P(N) = \frac{1}{4}$

Rispondere alle seguenti domande:

1. se mangiate nel ristorante B, con che probabilità stasera non digerirai almeno uno dei due piatti che hai mangiato? 0.5 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ 0.44
2. con che probabilità stasera li digerirai entrambi? 0.56 $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ 0.45
3. con che probabilità digerisci il primo piatto? 0.75 3/4 0.66
4. con che probabilità digerisci il secondo piatto? 0.75 3/4 0.66
5. gli eventi "digerire il primo piatto" e "digerire il secondo piatto" sono indipendenti? FALSO

Sbagliato perchè non so in che ristorante sono

Approssimare, se necessario, il risultato alla **seconda cifra decimale**.

3.

I computer in un lotto di 100 unità possono avere un hard drive esterno, un lettore DVD oppure entrambi secondo la seguente tabella

	HD esterno SI	HD esterno NO
DVD SI	15	80
DVD NO	4	1

Sia A = "il computer ha un HD esterno" e sia B = "il computer ha un lettore DVD". Se un computer viene scelto a caso, calcolare

1. $P(A)$ 0,19
2. $P(A \cap B)$ 0.15
3. $P(A \cup B)$ 0.99
4. $P(A^c \cap B)$ 0,80
5. $P(A \mid B)$ 0,16 $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.15}{0.95}$

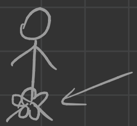
Approssimare, se necessario, il risultato alla **seconda cifra decimale.**

Verifica risposta

Pag 147 es. 34

$$\mathbb{P}(H|C^c) = .135$$

$$\mathbb{P}(H|C) = 0.268$$



$$\mathbb{P}(C) = 0.700$$

a) $\mathbb{P}(C|H) = ?$ $\qquad \mathbb{P}(C|H) = \dfrac{\mathbb{P}(H|C)\,\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(H)}$

b) $\mathbb{P}(C|H^c) = ?$

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H|C)\,\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(H|C^c)\,\mathbb{P}(C^c) = 0.268 \cdot 0.7 + 0.135 \cdot 0.3 =$$
$$= 0.2281$$

$$\mathbb{P}(C|H) = \frac{0.268 \cdot 0.7}{0.2281} = \boxed{0.822}$$

$$\mathbb{P}(C|H^c) = \frac{\mathbb{P}(H^c|C)\,\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(H^c)} = \frac{0.732 \cdot 0.7}{1-0.2281} = 0.664$$

$$\mathbb{P}(H^c|C) = 1 - \mathbb{P}(H|C) = 1 - 0.268 = \boxed{0.732}$$

Pag 180 nr 39

a) A = "i primi tre lanci sono gli stessi"

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ che esca croce $\frac{1}{8}$ che esca testa

Quindi $\frac{1}{4}$

b) B = "i primi tre lanci uguali o gli ultimi tre"

$B = \{(CCCCT), (CCCTC), (CCCCC), (CCCTT),$
$(TTTCT), (TTTTC), (TTTCC), (TTTTT),$
$(CTCCC), (TCCCC), (TTCCC),$
$(CTTTT), (TCTTT), (CCTTT)\}$

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \text{ con } x_i \in \{C, T\}\}$

$\#\Omega = 2^5 = 32$

$\mathbb{P}(B) = \frac{14}{32} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$

$\mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(A \cap X)$

con X = "le ultime tre sono uguali"

c) $C = \{(TTTCC), (TTCCC), (TTCCT), (CTTCC),$
$(TCTCC), (TTCTC)\}$

$\frac{3}{16} = 0.1875$

Consegna 1

1 - $P(A) = 0.56 \qquad P(A^c) = 1 - 0.56 = 0.44$

$P(A \cup B) = 0.71 \qquad P(A \cap B) = 0.52$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.52}{0.56} = 0{,}93$$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \qquad P(B) = 0.67$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = 0{,}78$$

2 - $P(C|A^c) = 0.45 \qquad P(A) = 0.55$

$P(C|A) = 0.88$

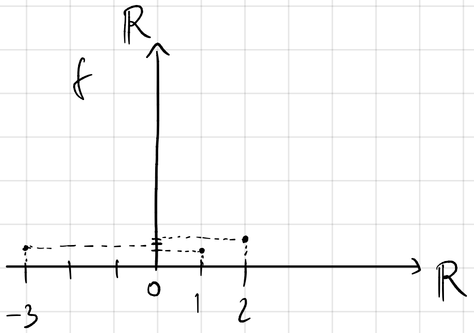
$$P(C) = P(C|A)\,P(A) + P(C|A^c)\,P(A^c) =$$

$$= 0.484 + 0.2025 = 0.6865$$

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)\,P(A)}{P(C)} = 0{,}71$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } x = -3, 0 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

1. è una possibile PMF?
2. si chiami X la v.a. con PMF data da f



$p_X : \quad Im(X) \to \mathbb{R}$

$\qquad x \mapsto p_X(x) = P(X = x)$

a) $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \quad \forall x \in Im(X)$

b) $Im(X)$

$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = x\}$

$\bigcup_{x \in Im(X)} \{X = x\} = \Omega$ e sono a due a due disgiunti

$\sum_{x \in Im(X)} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in Im(X)} \{X = x\}\right) = P(\Omega) = 1$

a) $p_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in Im(x)$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x$

$p_X(x) \leq 1 \quad \forall x$

$f(x) \leq 1 \quad \forall x$

b) $\sum_{x} f(x) = 1 \qquad x = -3, 0, 1, 2$

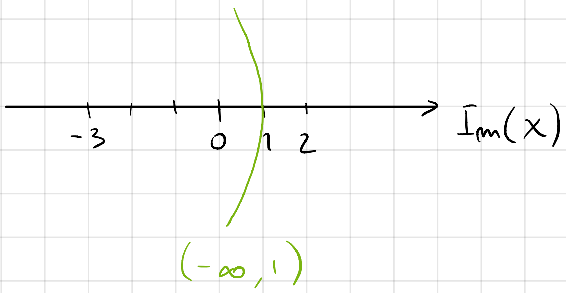
$f($

2. X la PMF data da f, calcolare $P(X<1)$ e $P(X\geq 0)$

$Im(X) = \text{Dominio}(f) = \{-3, 0, 1, 2\}$

$$p_X(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } x = -3, 0 \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

$P(X<1) = P(\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) < 1\}) = P(\{X=0\} \cup \{X=-3\}) = P(X=0$



ESERCIZIO

(2)

Una macchina produce pezzi che, in condizioni normali, sono difettosi con probabilità 0.04. Ogni ora l'addetto al controllo estrae 10 pezzi con reimbussolamento e se non ce ne sono di difettosi non ferma la macchina. Con che probabilità la macchina non viene fermata pur avendo iniziato a produrre pezzi difettosi con probabilità 0.1?

$p = 0.1$ probabilità che un pezzo sia difettoso

A = " la macchina non viene fermata

X v.a. che conta il N° di pezzi difettosi tra i 10 estratti

$A = \{X = 0\}$

$P(A) = P(X=0) = ?$

I pezzi sono either difettosi o non → Bernulli
Estraggo 10 con reimbussolamento → Binomiale

$X \sim \text{Binomiale}(N, p)$ $N = 10$ $p = 0.1$

$p_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ $k \in Im(X) = \{0, \dots, N\}$

$$p_X(0) = \binom{10}{0} 0.1^0 (0.9)^{10} = 0.9^{10} = 0.3486\ldots$$

ESERCIZIO

Si considerino due urne. La prima contiene 2 palline bianche e 3 palline nere. La seconda contiene 1 pallina bianca e 4 palline nere. Scelgo a caso una delle due urne e poi procedo ad estrarre palline con reimbussolamento fino a che non ottengo la prima pallina bianca.

- Calcolare la PMF della v.a. X che conta il numero di estrazioni fatte.
- Se ho fatto due estrazioni, con quale probabilità ho estratto le palline dalla seconda urna?

4

Un giornalaio vende, in un'ora, un numero di giornali che è distribuito come una v.a. di Poisson di parametro 0.5. Calcolare la probabilità che venda più di 3 giornali in due ore.

Un prodotto viene classificato a seconda del numero di difetti che contiene e a seconda della fabbrica che lo produce.
X_1 è la V.A. che conta il numero di difetti per unità.
X_2 è la V.A. che codifica la fabbrica di provenienza (1 o 2).
La PMF congiunta è data in tabella:

$X_2 \backslash X_1$	0	1	2	3
1	1/8	1/16	3/16	1/8
2	1/16	1/16	1/8	1/4

a) Trovare la marginale di X_1
b) Calcolare $\mathbb{E}(X_1)$
c) X_1 e X_2 sono indipendenti?

a) p_{X_1} $\quad Im(X_1) = \{0,1,2,3\}$

$p_{X_1}(0) = \mathbb{P}(X_1=0) = \mathbb{P}(X_1=0,\ X_2=1) + \mathbb{P}(X_1=0,\ X_2=2) = 1/8 + 1/16 = 3/16$

$p_{X_1}(1) = 1/16 + 1/16 = 1/8$

$p_{X_1}(2) = 3/16 + 1/8 = 5/16$

$p_{X_1}(3) = 1/8 + 1/4 = 3/8$

b) $\mathbb{E}(X_1) = \sum_{x \in Im(X_1)} x \cdot \mathbb{P}(X=x) = 0 \cdot 3/16 + 1 \cdot 2/16 + 2 \cdot 5/16 + 3 \cdot 6/16$

c) $\mathbb{P}(X_1=x,\ X_2=y) = \mathbb{P}(X_1=x) \cdot \mathbb{P}(X_2=y) \quad \forall x \in Im(X_1) \wedge \forall y \in Im(X_2)$

- $\mathbb{P}(X_1=0,\ X_2=1) \overset{?}{=} \mathbb{P}(X_1=0) \cdot \mathbb{P}(X_2=1)$ sommo la riga

$$\underbrace{\mathbb{P}(X_1=0,\ X_2=1)}_{=1/8} \neq \underbrace{\mathbb{P}(X_1=0)}_{=3/16} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_2=1)}_{=1/2}$$

Non sono indipendenti

esercizio:

$X \sim \text{Binomiale}(n, p)$

Con $\mathbb{E}(X) = 7$ e $\text{Var}(X) = 2.1$

Calcolare

a) $\mathbb{P}(X = 4)$
b) $\mathbb{P}(X > 12)$

$\mathbb{E} = n \cdot p$
$\text{Var}(X) = np(1-p)$

$$\begin{cases} np = 7 \\ np(1-p) = 2.1 \end{cases}$$

$n = 7/p$

$\frac{7}{\cancel{p}} \cdot \cancel{p}(1-p) = 2.1$

$7 - 7p = 2.1$
$7p = 4.9$
$p = 0.7$

$$1-(p(4)+p(5)) \rightarrow 0.346$$

$$\binom{5}{2} 0.76^2 (1-0.76)^3$$

$$10\cdot(0.5776)\cdot(0.013824) = 0.0798$$

$$\frac{5!}{2!\,3!} \qquad \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2}}{2\cdot \cancel{3\cdot 2}}$$

$$\frac{5!}{4!} \qquad 5\cdot(p^4)(1-p)$$

$$1.6681088\cdot(0.24) = 0.400346112$$

$$+$$

$$1\,(p^5)(1-p)^0 = 0.2535525376$$

$$\Downarrow$$

$$0.6538986496$$

$$\frac{\binom{4}{0}\binom{12-4}{5-0}}{\binom{12}{5}}$$

$$\frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!}} \qquad \begin{matrix}8\\5\end{matrix} \qquad \frac{\frac{8!}{5!\,3!}}{\frac{12!}{5!\,7!}}$$

$$20\cdot 6$$

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} \Big/ \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot} \qquad 60$$

$$56/792 \qquad 0.777$$

$8/17$

$$\left(1-\frac{8}{17}\right)^{5-1}\frac{8}{17}$$

$$(0.529)^4 \cdot 0.4706$$

$$0.0368$$

$$p(\text{POSITIVO} \mid \text{MALNUTRITO}) = 0.75$$
$$p(\text{POSITIVO} \mid \text{MALNUTRITO}^c) = 0.03$$

$$p(M) = 0.5$$

$$p(P^c)$$

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P|M)\cdot\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|M^c)\cdot\mathbb{P}(M^c)$$
$$= 0.75\cdot 0.5 + 0.03\cdot 0.5$$
$$= 0.375 + 0.015 = 0.39$$

$$\mathbb{P}(P^c) = 1-\mathbb{P}(P) = 0.61$$

$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{\mathbb{P}(P|M)\,\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)} =$$

$$= \frac{0.75\cdot 0.5}{0.39} = 0.96$$

$1-0.03$

$$\mathbb{P}(M^c|P^c) = \frac{\mathbb{P}(P^c|M^c)\cdot\mathbb{P}(M^c)}{\mathbb{P}(P^c)} =$$

$$= \frac{0.97\cdot 0.5}{0.61} = 0.7951$$

$$\mathbb{P}(M^c|P) = \frac{\mathbb{P}(P|M^c)\,\mathbb{P}(M^c)}{\mathbb{P}(P)} =$$

$$= \frac{0.03\cdot 0.5}{0.39} = 0.0385$$

$$3\left(\cancelto{1}{3}\cdot\frac{\cancelto{4}{8}}{\cancelto{3}{\cancelto{6}{18}}}+\cancelto{1}{3}\cdot\frac{\cancelto{2}{4}}{\cancelto{3}{\cancelto{6}{18}}}+\cancelto{1}{6}\cdot\frac{4}{\cancelto{3}{18}}+\cancelto{1}{6}\cdot\frac{2}{\cancelto{3}{18}}\right)$$

$$3\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=\cancel{3}\left(\frac{12}{\cancel{3}}\right)=12$$

es. 8.10 Verzoni pag. 282 ESEMPIO IC x DIFF. PROPORZIONI

$n_1 = 1000$ ← taglia campionaria
$n_2 = 1200$

n° successi_n_1 = 560
n° successi_n_2 = 570

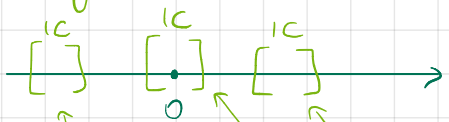
IC $(1-\alpha) = 0.95$

```
prop.test(c(560,570), c(1000,1200), conf.level = 0.95)
```

↓

[0.0423, 0.1277]

Posso dire che sono diverse quando faccio l'intervallo di confidenza della differenza di due proporzioni?



confident al 95% che $p_1 < p_2$

prima > seconda

non posso escludere che $p_1 = p_2$