

PROBABILITÀ

Si occupa di fenomeni ALEATORI | CASUALI, ovvero esperimenti con esito NON PREVEDIBILE

QUALCHE RICHIAMO

- **Insieme**: collezione di oggetti - detti elementi
Utilizzati in probabilità per rappresentare gli esiti degli esperimenti

$S = \{1, 2\}$ è FINITO

$S = \{1, 2, 3, \dots\}$ è NUMERABILE

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [0, 1]\}$ è PIÙ CHE NUMERABILE, È CONTINUO

DISCRETO

$\forall x \in T \Rightarrow x \in S \quad T \subseteq S \quad T$ è sottoinsieme di S

OPERAZIONI:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} S_i = \{x \mid \exists i \text{ tale che } x \in S_i\}$$
$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} S_i = \{x \mid \forall i \text{ tale che } x \in S_i\}$$

- **Leggi di de Morgan**

$$\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} S_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{+\infty} S_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} S_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{+\infty} S_i^c$$

MODELLO PROBABILISTICO

Il modello probabilistico è un oggetto matematico composto da:

① SPAZIO CAMPIONARIO Ω

Ovvero l'insieme che contiene una rappresentazione di tutti i possibili esiti dell'esperimento

② LEGGE DI PROBABILITÀ \mathbb{P}

È una funzione che associa sottoinsiemi di Ω a numeri reali

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

è la famiglia delle parti di Ω

\mathbb{P} deve essere tale che:

① \mathbb{P} è positiva

evento
 $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) \geq 0$

② $\mathbb{P}(\Omega)$ è finita

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

deve valere anche per infinità numerabili

③ \mathbb{P} è additiva

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$(A_i)_{i=1}^{+\infty} \text{ con } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

oss.

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) \rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Ω		EVENTO CERTO
\emptyset		EVENTO IMPOSSIBILE
$A \neq \emptyset$	$\mathbb{P}(A) = 0$	EVENTO QUASI IMPOSSIBILE
$B \neq \Omega$	$\mathbb{P}(B) = 1$	EVENTO QUASI CERTO

ESEMPI DI MODELLI PROBABILISTICI

① LANCIO UNA MONETA EQUA

Ω : $\Omega = \{T, C\}$ oppure $\Omega = \{0, 1\}$, l'importante è explicitare l'etichetta

P : $P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dove la P è dire quanto vale la probabilità di ciascun sottoinsieme di Ω

$$P(\Omega) = \{ \{T\}, \{C\}, \emptyset, \Omega \}$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\{T\}) = .5$$

$$P(\{C\}) = .5$$

$P(\{T\}) = P(\{C\})$ per l'ipotesi dell'equità della moneta
 $1 = P(\Omega) = P(\{T\} \cup \{C\}) = P\{T\} + P\{C\}$
e dato che $P(\{T\})$ e $P(\{C\})$ sono positivi devono valere 0.5

② LANCIO DI UN DADO A N FACCE

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, N\}$$

$$P = ?$$

$$P = \{ \emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \dots, \{N\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, N\}, \dots, \{N, N\}, \dots \}$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$\text{EQUITÀ} \iff P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{N\})$$

$$\Omega = \{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{N\}$$

$$\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$$

$$\{i\} \cap \{j\} = \emptyset \quad \forall i \neq j = 1 \dots N$$

$$1 = P(\Omega) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{N\}) \stackrel{\text{per il principio di additività}}{=} P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{N\})$$

→ sto cercando N numeri ≥ 0 , uguali e che sommati danno 1

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{N\}) = \frac{1}{N}$$

per quanto riguarda gli altri sottoinsiemi:

$$P(\{1, 2\}) = P(\{1\} \cup \{2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N}$$

quindi:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}$$

③ LANCIO UNA MONETA EQUA 3 VOLTE

$$\Omega: \quad \Omega = \{TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC\}$$

"stringhe lunghe 3 con alfabeto $\{T, C\}$ quindi 2^3 "

P :

$$\text{EQUITÀ} \iff P(\{TTT\}) = P(\{TTC\}) = \dots = P(\{CCC\})$$

quindi cerco 8 numeri uguali che sommati tra loro danno 1 quindi ogni singoletto vale $1/8$