Media e Varianza delle V.A.

DEFINIZIONE: Chiamo MEDIA della V.A X la seguente quantità:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot p_X(x) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$ ← PESO ≥ 0

$\mathbb{E}(X)$ è la media pesata di X

DEFINIZIONE: Definisco MOMENTO DI ORDINE K della V.A. X la media di X^k e la calcolo:

$$m_k(X) = \mathbb{E}(X^k) = \sum_{x \in Im(X)} x^k \cdot p(x) = \sum_{x \in Im(X)} x^k \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in Im(X)} g(x)\, \mathbb{P}(X = x)$$

DEFINIZIONE: Definisco VARIANZA di X la seguente quantità:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \sum_{x \in Im(X)} \underbrace{(x - \mathbb{E}(X))^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X = x)}_{\geq 0}$$

media degli scarti quadratici, mi dice quanto posso trovare valori lontani dalla media

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x - \mathbb{E}(X))^2$$ FUNZIONE DI SCARTO QUADRATICO

$$\sqrt{Var(X)} = StDev(X)$$ STANDARD DEVIATION

esempio

X: $Im(X) = \{1, -1\}$
$p_X(x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in Im(X)$

Y: $Im(Y) = \{-100, 100\}$
$p_Y(y) = \frac{1}{2} \quad \forall y \in Im(Y)$

$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X=-1) = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$

$Var(X) = (1 - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \mathbb{P}(X=1) + (-1 - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \mathbb{P}(X=-1) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Im(Y)} y \cdot \mathbb{P}(Y=y) = 100 \cdot \mathbb{P}(Y=100) + (-100) \cdot \mathbb{P}(Y=-100) = 100 \cdot \frac{1}{2} - 100 \cdot \frac{1}{2} = 0$

$Var(Y) = (100-0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (-100-0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 100^2 = 10\,000$

PROPRIETÀ DI MEDIA E VARIANZA

① $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$

La media è un operatore lineare

② $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$

③ $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

MEDIA E VARIANZA DELLE V.A. NOTE

$X \sim$ Bernoulli (p)	$\mathbb{E}(X) = p$	$Var(X) = p(1-p)$
$X \sim$ Binomiale (n, p)	$\mathbb{E}(X) = np$	$Var(X) = np(1-p)$
$X \sim$ Geometrica (p)	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$	$Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$
$X \sim$ Poisson (λ)	$\mathbb{E}(X) = \lambda$	$Var(X) = \lambda$

($X \sim$ Ipergeometrica (N, S, n) $\quad \mathbb{E} = n\frac{S}{N}$)