Indipendenza

due sottoinsiemi di Ω

DEFINIZIONE: Diciamo che due eventi A e B sono indipendenti se:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

OSSERVAZIONI:

① $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

$\quad$ ‖ probabilità condizionata

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

quindi A è indipendente da B e viceversa

② $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

$\quad$ ‖ teorema di Bayes

$$\frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \cancel{\mathbb{P}(A)}}{\mathbb{P}(B)} = \cancel{\mathbb{P}(A)} \quad \rightarrow \quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

③ se $A \cap B = \emptyset$ con $\mathbb{P}(A) > 0 \wedge \mathbb{P}(B) > 0$

allora A e B non sono mai indipendenti

$\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ ma $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) > 0$ quindi $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

es. lancio di un dado equo a 4 facce

a) A_i = " il primo dado restituisce i "
B_j = " il secondo dado restituisce j "

Sono indipendenti?

$\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \longrightarrow \{(i,j)\}$

$\Omega = \{ (i,j) \text{ con } i,j \in \{1,2,3,4\}\}$
$\mathbb{P}$ = uniforme discreta

$\mathbb{P}(A_i) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \longrightarrow \{(i,1),(i,2),(i,3),(i,4)\}$
$\mathbb{P}(B_j) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \longrightarrow \{(1,j),(2,j),(3,j),(4,j)\}$

$\mathbb{P}(A \cap B) \overset{?}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ ✓

Sono due eventi indipendenti

b) A_1
B = " la somma fa 5 "
A_1 e B sono indipendenti?

$\mathbb{P}(A \cap B) \overset{?}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \longrightarrow \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{16} \longrightarrow \{(1,4)\}$

Quindi sostituendo nella relazione sopra osserviamo che i due eventi sono indipendenti. Possiamo osservare che è un risultato meno intuitivo perchè l'indipendenza in probabilità è un concetto applicato sulle misure

c) A_1

C = "la somma fa 4"

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(C) = \frac{3}{16} \rightarrow \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

$\mathbb{P}(A_1 \cap C) = \frac{1}{16} \rightarrow \{(1,3)\}$

$\mathbb{P}(A_1 \cap C) \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(C)$

Non sono indipendenti

d) D = "Il massimo tra i due lanci è 2" $= \{(2,1),(2,2),(1,2)\}$

E = "Il minimo tra i due lanci è 2" $= \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(4,2)\}$

$\mathbb{P}(D) = \frac{3}{16}$

$\mathbb{P}(E) = \frac{5}{16}$

$\mathbb{P}(D \cap E) = \frac{1}{16}$

$\mathbb{P}(D \cap E) \neq \mathbb{P}(D) \cdot \mathbb{P}(E)$

I due eventi non sono indipendenti

PROPOSIZIONE Se A e B sono indipendenti allora lo sono anche

A e B^c — dato dal fatto che $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

A^c e B — e $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$

A^c e B^c

COSTRUZIONE DI $\mathbb{P}$ SU PRODOTTI CARTESIANI

esperimento probabilistico:

Lancio due dadi a 4 facce truccati nella seguente maniera:

DADO 1: il 4 esce con probabilità $\frac{1}{2}$
1,2,3 hanno probabilità $\frac{1}{6}$

DADO 2: 1 esce con probabilità $\frac{1}{2}$
2,3,4 hanno probabilità $\frac{1}{6}$

DADO 1 $\Omega^1 = \{1,2,3,4\}$

$$\mathbb{P}^1(\{4\}) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}^1(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{6}$$

DADO 2 $\Omega^2 = \{1,2,3,4\}$

$$\mathbb{P}^2(\{1\}) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}^2(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{6}$$

$\mathbb{P}^1 \neq \mathbb{P}^2$

Lanciando due dadi abbiamo che

$$\Omega = \{(i,j) \text{ con } i,j \in \{1,2,3,4\}\} = \Omega^1 \times \Omega^2$$

Come faccio ad ottenere la $\mathbb{P}$ di Ω?

i due lanci sono indipendenti

$$\mathbb{P}(\{3,1\}) = \mathbb{P}^1(\{3\}) \cdot \mathbb{P}^2(\{1\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$\mathbb{P} = \mathbb{P}^1 \odot \mathbb{P}^2$ moltiplica il valore che $\mathbb{P}^1$ prende sul primo elemento della coppia per il valore che $\mathbb{P}^2$ prende sul secondo elemento della coppia

1) $\mathbb{P}$ deve essere una misura su Ω
2) ci deve essere consistenza tra $\mathbb{P}, \mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^2$

$\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^2$ devono essere le proiezioni di $\mathbb{P}$ su Ω

② $\mathbb{P}'(\{1\}) = \frac{1}{6}$

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}) =$$
$$= \mathbb{P}(\{1,1\}) + \mathbb{P}(\{1,2\}) + \mathbb{P}(\{1,3\}) + \mathbb{P}(\{1,4\})$$
$$= \mathbb{P}'(\{1\}) \cdot \mathbb{P}^2(\{1\}) + \mathbb{P}'(\{1\}) \cdot \mathbb{P}^2(\{2\}) + \mathbb{P}'(\{1\}) \cdot \mathbb{P}^2(\{3\}) +$$
$$+ \mathbb{P}'(\{1\}) \cdot \mathbb{P}^2(\{4\}) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} =$$
$$= \mathbb{P}'(\{1\})$$

procedimento $\longrightarrow$ da ripetere per ogni A_i e B_j e verificare l'uniformità

$$\mathbb{P}(A_i \cap B_j) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B_j)$$
$$\downarrow$$
$$\mathbb{P}'(A_i) \cdot \mathbb{P}^2(B_j)$$

A_i = "lancio dado 1, ottengo i"

B_j = "lancio dado 2, ottengo j"

per la consistenza abbiamo già verificato che $\mathbb{P}'(A_i) = \mathbb{P}(A_i)$, stessa cosa vale per B_j

Quindi, dato che vale la relazione, vale l'indipendenza

A_1

C = "la somma fa 5" $= \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap C) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(C)$$
$$\shortparallel$$
$$\mathbb{P}'(\{1\}) \cdot \mathbb{P}^2(\{4\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\{1,4\}) + \mathbb{P}(\{2,3\}) + \mathbb{P}(\{3,2\}) + \mathbb{P}(\{4,1\}) = \mathbb{P}'(\{1\}) \cdot \mathbb{P}^2(\{4\}) +$$
$$+ \mathbb{P}'(\{2\}) \cdot \mathbb{P}^2(\{3\}) + \mathbb{P}'(\{3\}) \cdot \mathbb{P}^2(\{2\}) + \mathbb{P}'(\{4\}) \cdot \mathbb{P}^2(\{1\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{3}{36} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$$

NON SONO EVENTI INDIPENDENTI

INDIPENDENZA PER COLLEZIONI DI EVENTI

DEFINIZIONE 1: Dico che la collezione di eventi $(A_i)_{i=1}^{n}$ è una collezione di eventi a due a due indipendenti se A_i e A_j sono indipendenti $\forall i \neq j$ $\not\Rightarrow$ indip. mutua

DEFINIZIONE 2: Dico che la collezione di eventi $(A_i)_{i=1}^{n}$ è una collezione di eventi mutuamente indipendenti se vale che:

Definizione più forte della prima e che la implica

- preso un qualunque sottoinsieme S di indici $\{1,2,3,\dots,n\}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} \mathbb{P}(A_i)$$

La $\mathbb{P}$ dell'intersezione è uguale al prodotto delle $\mathbb{P}$

Scatola con 4 palline

A_i = "prendo una pallina casualmente e ottengo il numero i"

CLAIM: A_1, A_2 e A_3 sono a due a due indipendenti ma non mutuamente indipendenti

la pallina presenta sia 1 che 2 ergo $\frac{1}{4}$

va bene sia la pallina ① che ⑫ ergo $\frac{1}{2}$

ⓐ $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$

ⓑ $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3)$

ⓒ $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$

ⓐ $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

ⓑ $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

ⓒ $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

SONO A DUE A DUE INDIPENDENTI

$$\overset{\frac{1}{4}}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)} \overset{?}{=} \overset{\frac{1}{2}}{\mathbb{P}(A_1)} \cdot \overset{\frac{1}{2}}{\mathbb{P}(A_2)} \cdot \overset{\frac{1}{2}}{\mathbb{P}(A_3)}$$

$$\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

<u>NON</u> SONO MUTUAMENTE INDIPENDENTI