Linguaggi non Regolari

- Cerchiamo una proprietà P valida per tutti i linguaggi regolari in maniera tale da dimostrare per CONTRAPPOSIZIONE che un determinato linguaggio NON è regolare.

PUMPING LEMMA PER LINGUAGGI REGOLARI

Per ogni linguaggio regolare L esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $w \in L$ con $|w| \geq n$, esistono x, y e z tali che $w = xyz$ e inoltre:

1. $y \neq \varepsilon$
2. $|xy| \leq n$
3. $xy^k z \in L \quad \forall\, k \geq 0$

esempio:

- Dimostriamo che $L = \{a^k b^k \mid k \geq 0\}$ non è regolare

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

Considero la stringa $w = a^n b^n$ con $|w| = 2n \geq n$

2. $$w = \underbrace{\overbrace{a \dots a}^{n}}_{xy \,\leq\, n} \overbrace{b \dots b}^{n}$$

3. $xy^k z \in L \rightarrow xz \in L$ ma $y \neq \varepsilon$ per il punto 1 quindi xz contiene una a in meno

- Dimostriamo che a^k con k primo non è regolare

supponiamo che esista n che soddisfi le condizioni che lo renderebbero un linguaggio regolare

$w = a^p$ con p primo $p \geq n+2$
w è in L e $|w| \geq n$

$\exists\ x, y, z \mid w = xyz$

$m = |y|$ quindi $|xz| = p-m$
dalle condizioni 1-2 $1 \leq m \leq n$
dalla condizione 3 $xy^{p-m}z \in L$

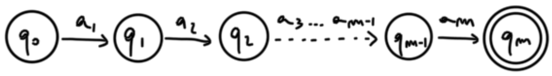
$|xy^{p-m}z| = |xz| + (p-m)|y| = p-m + (p-m)m = (p-m)(m+1)$

ma quindi $|xy^{p-m}z|$ non è primo in quanto:

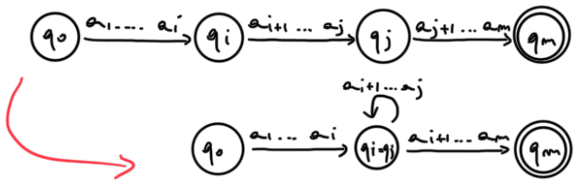
- $1 \leq m \rightarrow 2 \leq m+1$
- $m \leq n \wedge p \geq n+2 \rightarrow p-m \geq 2$

DIMOSTRAZIONE DEL PUMPING LEMMA

Sia L un linguaggio regolare, $\exists\ A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ t.c. $L = L(A)$
poniamo $n = |Q|$
prendiamo $w \in L$ t.c. $|w| \geq n$. Quindi $w = a_1 a_2 \dots a_m$ con $m \geq n$



L'automa passa attraverso $m+1$ stati
$m \geq n \rightarrow m+1 \geq n$ quindi gli stati attraversati non possono essere tutti distinti perchè l'automa ne ha solo n



con $q_i = q_j$ e $i < j$

Definiamo x, y e z come:

- $x = a_1 a_2 \dots a_i$
- $y = a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j$
- $z = a_{j+1} a_{j+2} \dots a_m$

Notiamo che:

1. $y \neq \varepsilon$ in quanto $i < j$ dunque in y c'è almeno un simbolo (DFA)
2. $|xy| \leq n$ in quanto $q_i = q_j$ e quindi gli stati da q_0 a q_j sono al massimo $n+1$, attraversati leggendo al massimo n simboli di w
3. $xy^k z \in L \quad \forall\, k \geq 0$ in quanto tutti i cammini etichettati con $xy^k z$ portano l'automa da q_0 a q_m