UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

RECONOCIMIENTO DE PATRONES EN IMÁGENES TICS 585

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS
UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

SEGUNDO SEMESTRE 2021

PROFESOR: MIGUEL CARRASCO

CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

- Extracción de características
  - Geométricas
  - Cromáticas
  - Otras

- ¿Por qué el reconocimiento de patrones no es fácil?






¿Son todos autos?

Extracción de características

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

- Problema

- La BD es enrome (sino infinita)
- Distintos puntos de vista
- Distintas condiciones de iluminación
- Escenarios distintos
- Cambios de forma

- Solución
  - Extraer características que describan regiones de la imagen cuantitativamente.
  - Emplear sólo las características que provean más información
  - Clasificar según información de características.

Extracción de características

- Geométricas
  - Centro de masa
  - Tamaño
  - Perímetro
  - Redondez
  - Momentos binarios
  - Descritores de Fourier
  - Elipse
  - Distancia al borde

- Cromáticas
  - Color promedio
  - Gradiente promedio
  - Promedio segunda derivada
  - Contraste
  - Momentos de color
  - Textura

- Otros descriptores
  - PHOG
  - SURF
  - SIFT
  - GPD

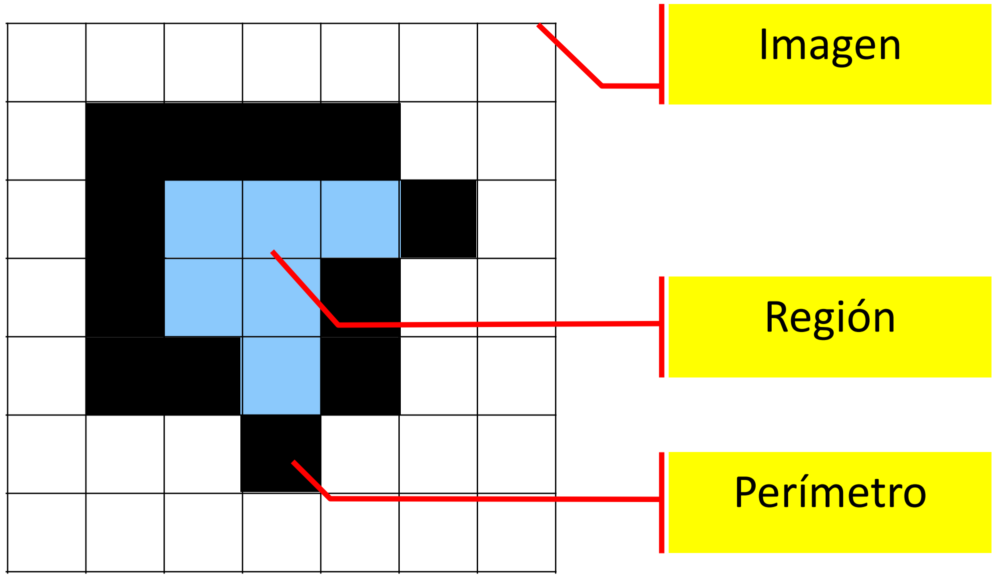
- Geométricas

  - Centro de masa
  - Tamaño
  - Perímetro
  - Redondez
  - Momentos binarios
  - Descriptores de Fourier
  - Elipse
  - Distancia al borde

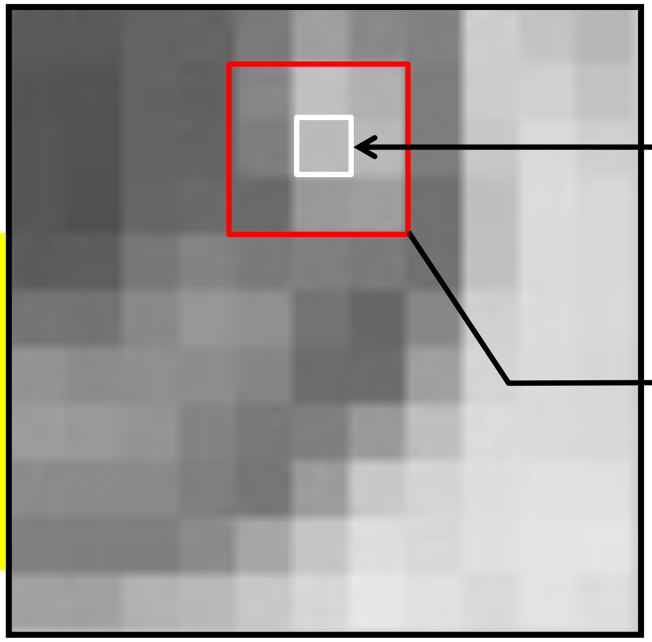
Definición

Las características geométricas entregan información de tamaño, forma, posición y orientación de la región.

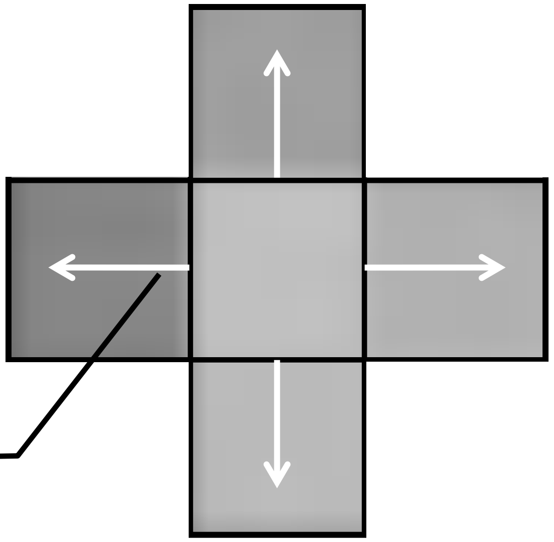
Se entiende por región un conjunto de píxeles que pertenecen a una zona de la imagen y está limitado por bordes.



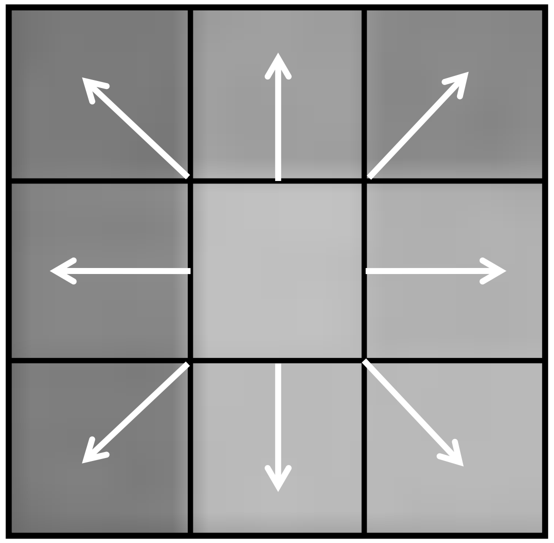
- Definición de conectividad



Conectividad - 4



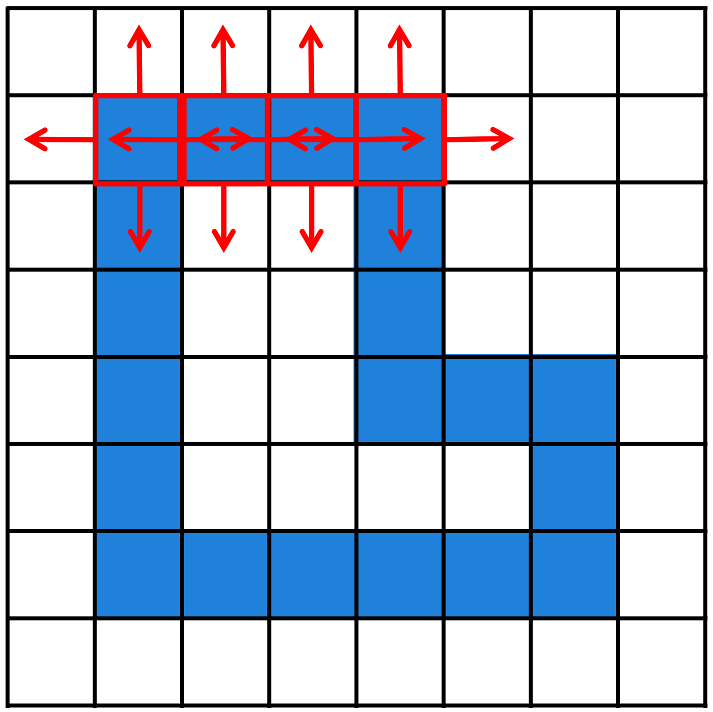
Conectividad - 8



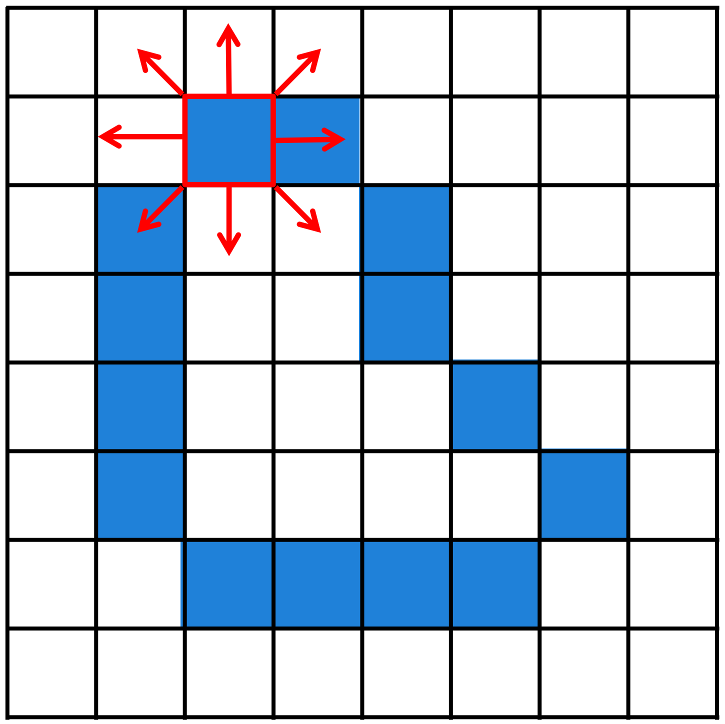
- Definición de conectividad

  - Conectividad: Dos píxeles p y q están conectados si existe un camino que lleve de p a q y cuyos píxeles pertenezcan al objeto

  - Camino: Es una secuencia de píxeles tal que $[i_{\mathrm{k}}, j_{\mathrm{k}}]$ es vecino de $[i_{\mathrm{k+1}}, j_{\mathrm{k+1}}]$ para todo $k = 0 \ldots n-1$



4- Conectado



8- Conectado

Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- Momentos
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

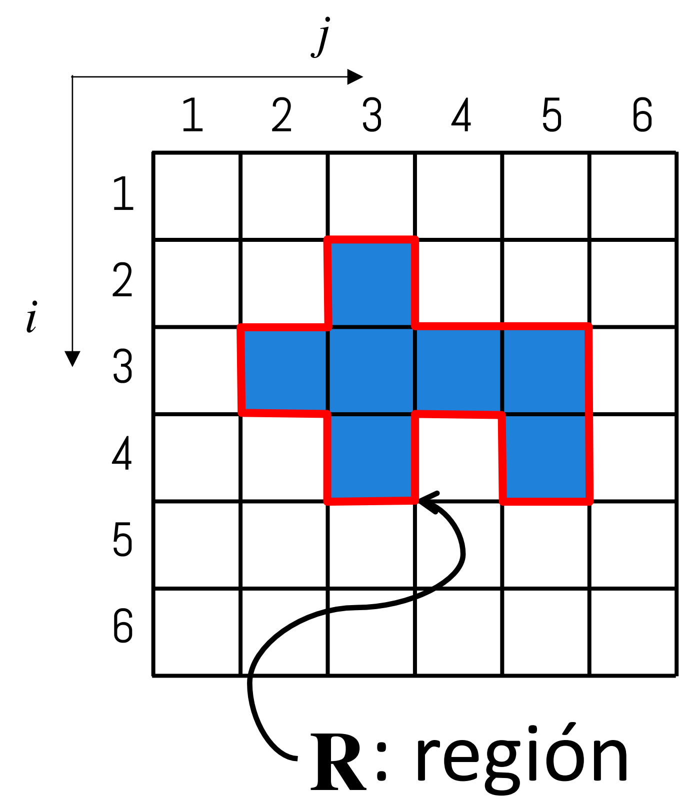
- El centro de masa corresponde al punto geométrico sobre el cual se ejercen todas las fuerzas externas del sistema.

Momento $r+s$

$$m_{rs} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} i^r \cdot j^s$$

Centro de masa

$$\left(\bar{i}, \bar{j}\right) = \left(\frac{m_{10}}{m_{00}}, \frac{m_{01}}{m_{00}}\right)$$



Ejemplo

$$m_{00} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} i^0 \cdot j^0 = 2^0 \cdot 3^0 + 3^0 \cdot 2^0 + 3^0 \cdot 3^0 + 3^0 \cdot 4^0 + 3^0 \cdot 5^0 + 4^0 \cdot 3^0 + 4^0 \cdot 5^0$$

$$m_{00} = 1+1+1+1+1+1+1 = 7$$

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UAI UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

- Características geométricas

- **Centro de Masa**
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- Momentos
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

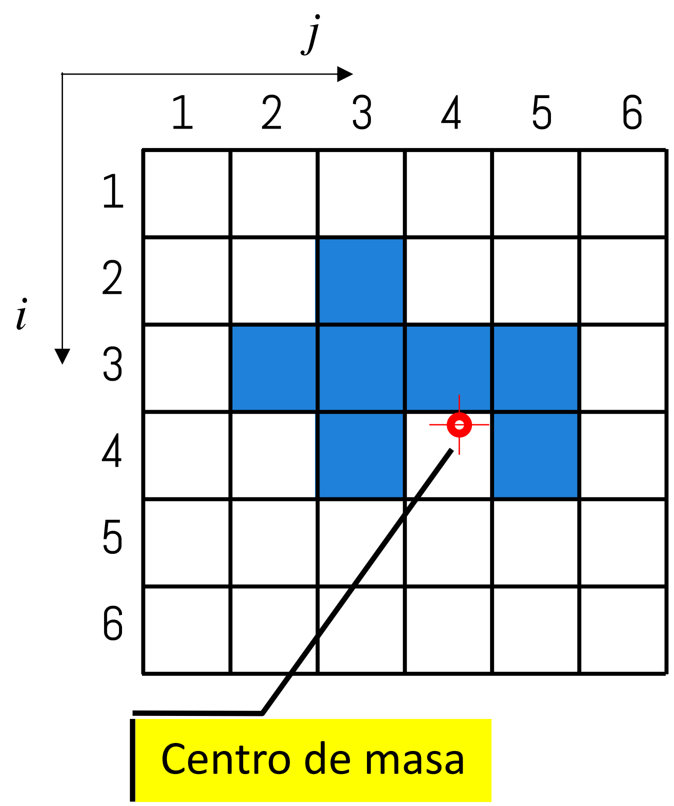
- El centro de masa corresponde al punto geométrico sobre el cual se ejercen todas las fuerzas externas del sistema.

Momento estadísticos.

$$m_{rs} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} i^r \cdot j^s$$

Centro de masa

$$(\bar{i}, \bar{j}) = \left(\frac{m_{10}}{m_{00}}, \frac{m_{01}}{m_{00}} \right)$$



Ejemplo

$$m_{00} = 7$$

$$m_{10} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} i^1 \cdot j^0 = 2+3+3+3+3+4+4 = 22$$

$$m_{01} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} i^0 \cdot j^1 = 2+3+3+3+4+5+5 = 25$$

$$(\bar{i}, \bar{j}) = \left(\frac{m_{10}}{m_{00}}, \frac{m_{01}}{m_{00}} \right) = \left(\frac{22}{7}, \frac{25}{7} \right) = (3.1, 3.6)$$

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UAI UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- Momentos
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- El centro de masa corresponde al punto geométrico sobre el cual se ejercen todas las fuerzas externas del sistema.

coordenadas ordenadas	
2	3
3	2
3	3
3	4
3	5
4	3
4	5

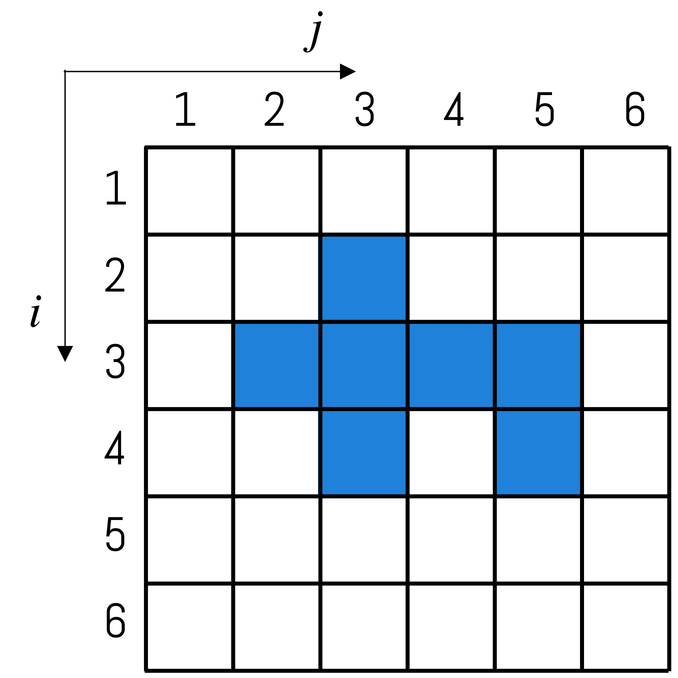
```python
import numpy as np

BW = [ [0, 0, 0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 1, 0, 0, 0],
       [0, 1, 1, 1, 1, 0],
       [0, 0, 1, 0, 1, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0]]

BW = np.array(BW)

cij = np.argwhere(BW==1)

print(cij)
```



El comando `argwhere` retorna las posiciones que cumplen con la condición lógica del argumento

- Características geométricas

Centro de Masa

Tamaño

Perímetro

Redondez

Momentos

Descriptores de Fourier

Elipse

Distancias

- El centro de masa corresponde al punto geométrico sobre el cual se ejercen todas las fuerzas externas del sistema.

```
import numpy as np

BW = [ [0, 0, 0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 1, 0, 0, 0],
       [0, 1, 1, 1, 1, 0],
       [0, 0, 1, 0, 1, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0]]

BW = np.array(BW)
cij = np.argwhere(BW==1)

m00 = mrs(0,0,cij[:,0], cij[:,1]))
```

Momento $r+s$.

$$m_{rs} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} i^r \cdot j^s$$

Note como se realiza el llamado a la función. Observe los parámetros de entrada y salida

```
def mrs(r, s, I, J):
   i = I**r
   j = J**s
   return np.sum(i*j)
```

Función mrs que recibe las coordenadas y el orden los momentos r y s

Características geométricas

- **Centro de Masa**
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- Momentos
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- El centro de masa corresponde al punto geométrico sobre el cual se ejercen todas las fuerzas externas del sistema.

```python
import numpy as np

def mrs(r, s, I, J):
     i = I**r
     j = J**s
     return np.sum(i*j)

BW =[[0, 0, 0,  0, 0, 0],
     [0, 0, 1,  0, 0, 0],
     [0, 1, 1,  1, 1, 0],
     [0, 0, 1,  0, 1, 0],
     [0, 0, 0,  0, 0, 0],
     [0, 0, 0,  0, 0, 0]]
BW= np.array(BW)
coords = np.argwhere(BW==1)

m00 = mrs(0,0,coords[:,0], coords[:,1])
m10 = mrs(1,0,coords[:,0], coords[:,1])
m01 = mrs(0,1,coords[:,0], coords[:,1])

ci = m10/m00
cj = m01/m00
print(ci, cj)
```

Momento $r+s$.

$$m_{rs} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} i^r \cdot j^s$$

Centro de masa.

$$\left(\bar{i},\bar{j}\right) = \left(\frac{m_{10}}{m_{00}}, \frac{m_{01}}{m_{00}}\right)$$

En estas variables almacenamos los centros de masa

Características geométricas

- Centro de Masa
- **Tamaño**
- Perímetro
- Redondez
- Momentos
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- El tamaño corresponde a las dimensiones de largo y ancho de la región

Medidas

área: $m_{00} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} i^0 \cdot j^0$

ancho: $w = j_{\max} - j_{\min} + 1$

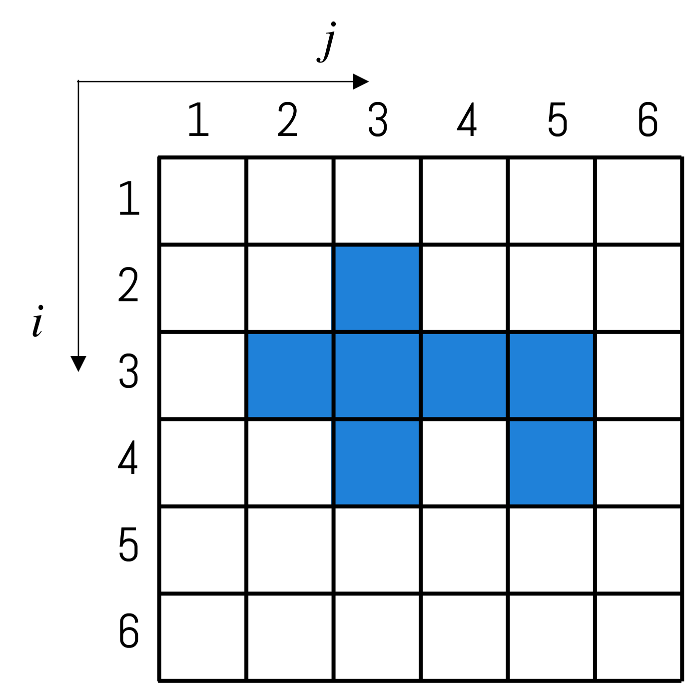
alto: $h = i_{\max} - i_{\min} + 1$

Ejemplo

área: $m_{00} = 7$

ancho: $w = 5 - 2 + 1 = 4$

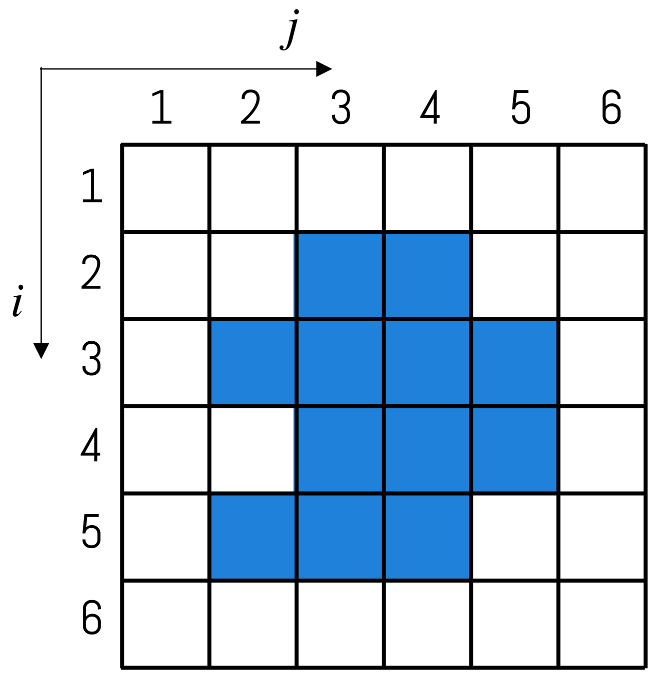
alto: $h = 4 - 2 + 1 = 3$



Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- **Perímetro**
- Redondez
- Momentos
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- El perímetro de una región puede ser definido de varias formas. Un forma simple (aunque no exacta) es tomar cómo perímetro el número de pixeles que pertenecen al borden de la región.
- Otra forma es aproximar a polígonos.



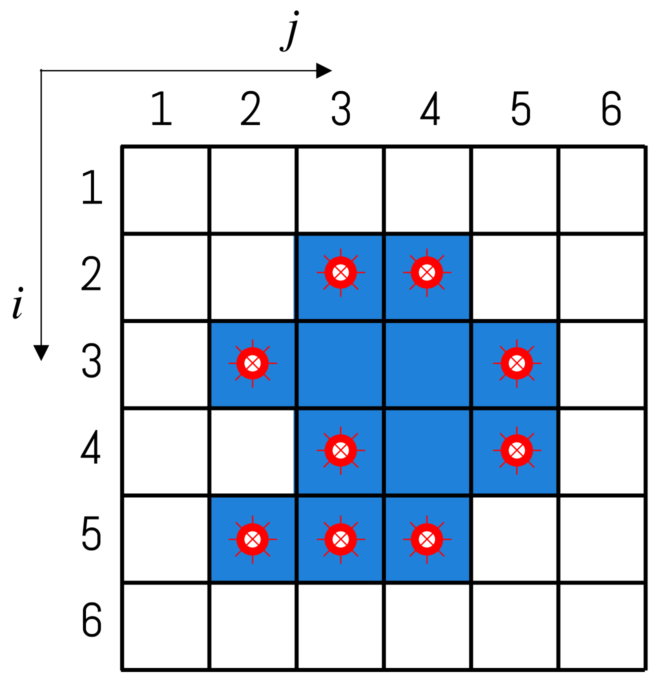
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- **Perímetro**
- Redondez
- Momentos
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

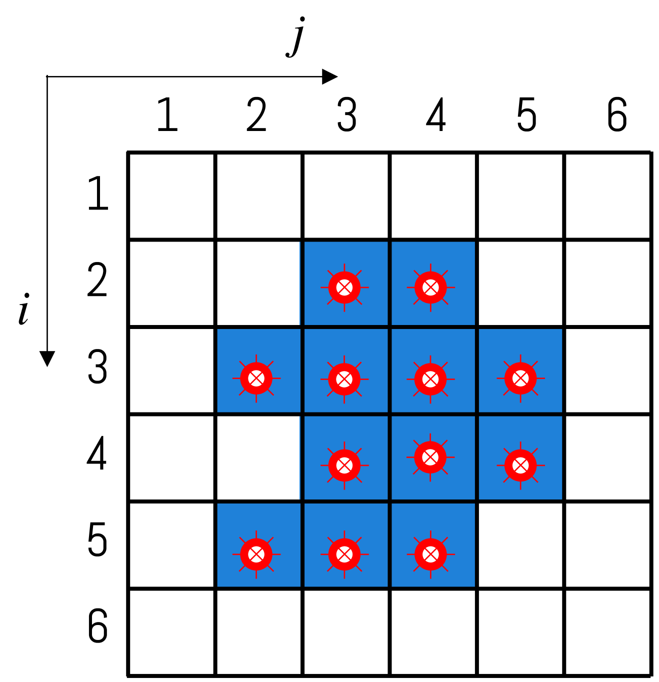
- El perímetro de una región puede ser definido de varias formas. Un forma simple (aunque no exacta) es tomar cómo perímetro el número de pixeles que pertenecen al borden de la región.
- Otra forma es aproximar a polígonos.



Características geométricas

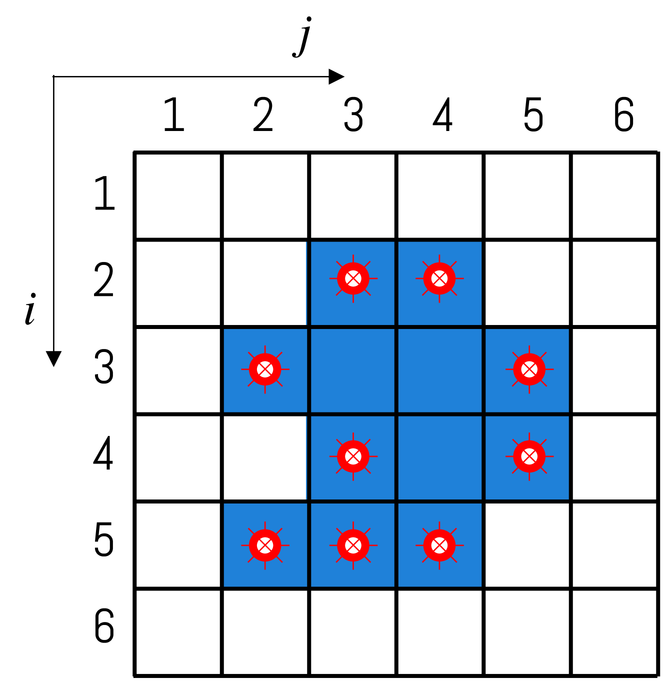
- Centro de Masa
- Tamaño
- **Perímetro**
- Redondez
- Momentos
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- El perímetro de una región puede ser definido de varias formas. Un forma simple (aunque no exacta) es tomar cómo perímetro el número de pixeles que pertenecen al borden de la región.
- Otra forma es aproximar a polígonos.



Forma 1 (con conectividad 4)

$L = 12$



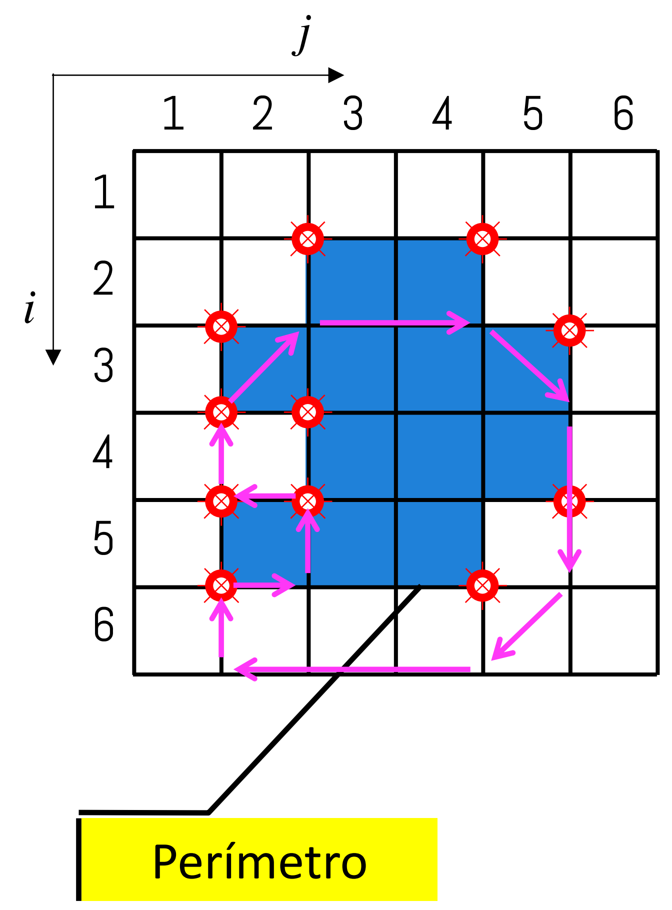
Forma 1 (con conectividad 8)

$L = 9$

Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- **Perímetro**
- Redondez
- Momentos
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- El perímetro de una región puede ser definido de varias formas. Un forma simple (aunque no exacta) es tomar cómo perímetro el número de pixeles que pertenecen al borden de la región.
- Otra forma es aproximar a polígonos.



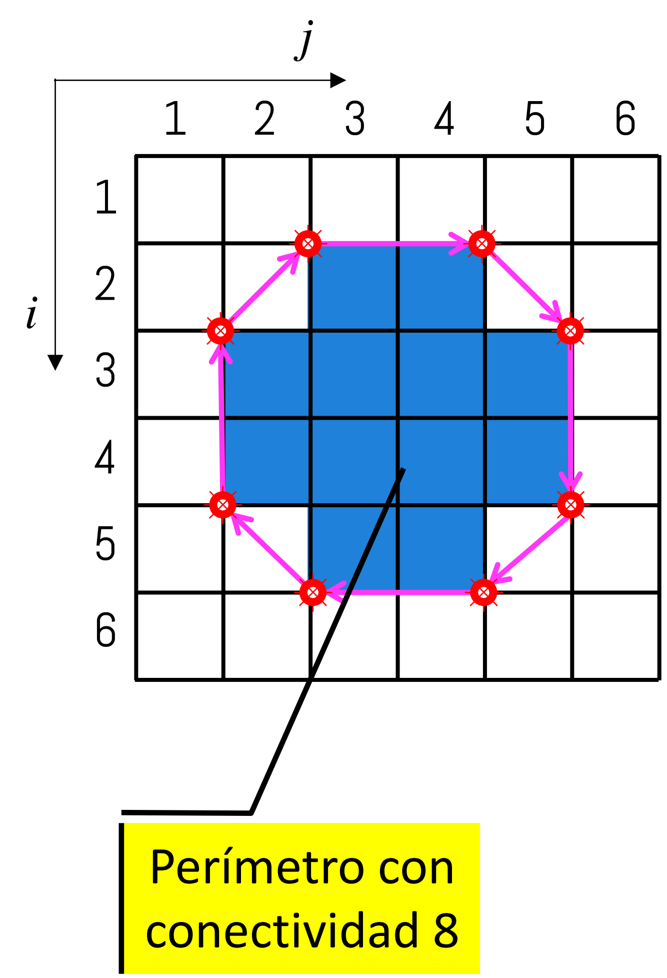
Forma 2 (Polígonos)

$$L = 12 + 3 \cdot \sqrt{2} = 16.24$$

Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- **Redondez**
- Momentos
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- Esta característica mide el grado de redondez de una región. Si la región es redonda, este valor tiende a 1. En caso contrario, este valor tiende a cero



Redondez

$$R = \frac{4A\pi}{L^2}$$

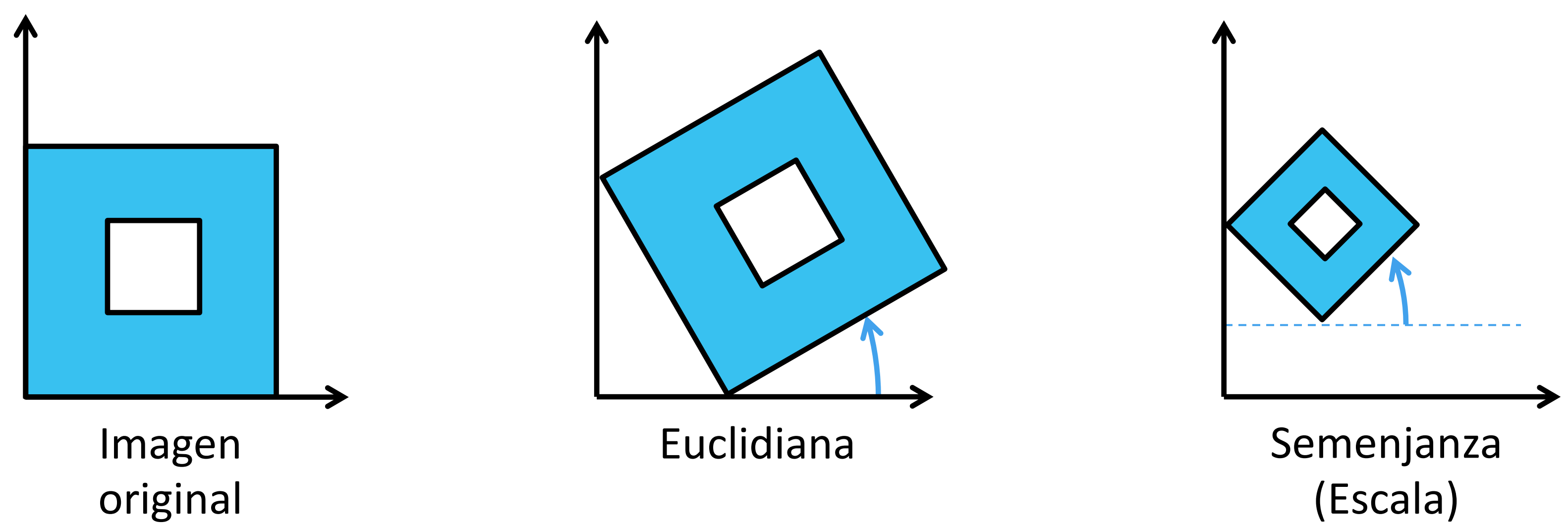
Ejemplo

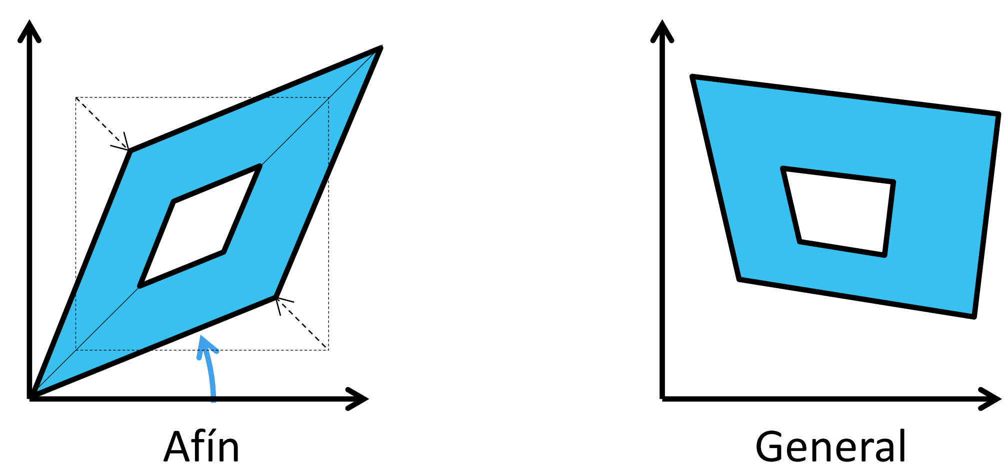
$$R = \frac{4 \cdot 12 \cdot \pi}{\left(8 + 4\sqrt{2}\right)^2} = 0.81$$

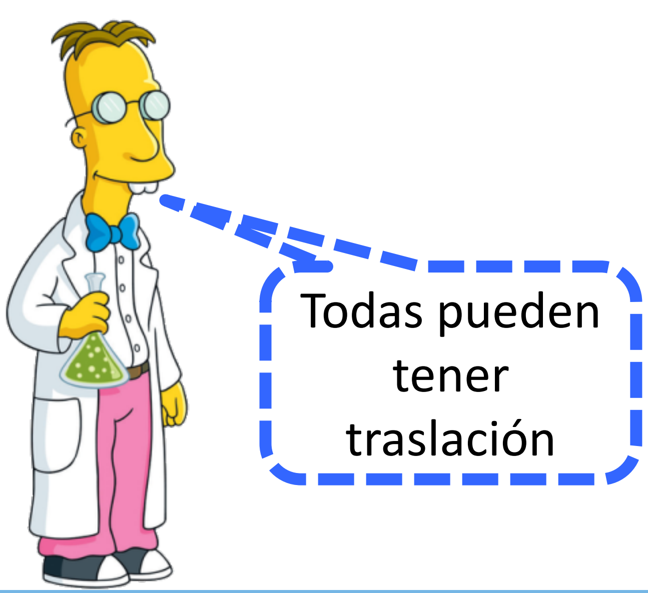
Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- **Momentos**
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- Los momentos son descriptores que pueden ser invariantes a transformaciones isométricas, traslación, y afines.







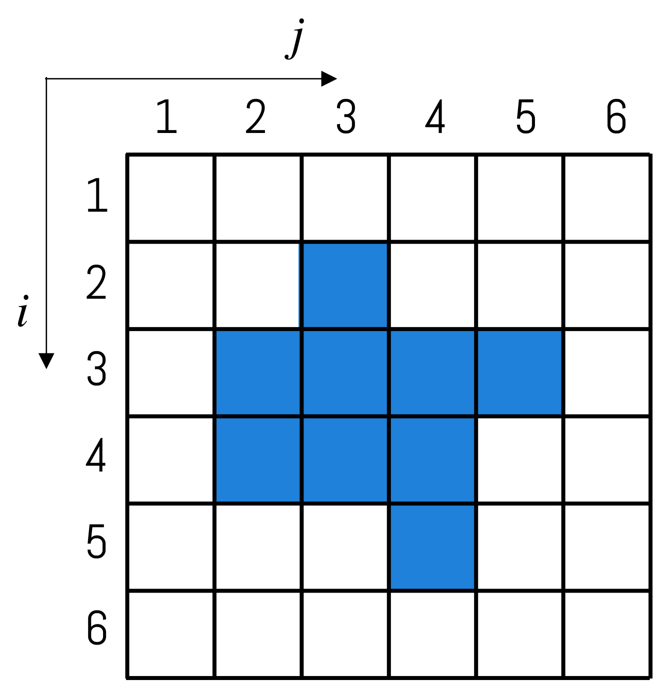
Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- **Momentos**
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- Los momentos son descriptores que pueden ser invariantes a transformaciones isométricas, traslación, y afines.

Momento estadísticos

$$m_{rs} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} i^r \cdot j^s$$



Centro de masa.

$$\left(\bar{i}, \bar{j}\right) = \left(\frac{m_{10}}{m_{00}}, \frac{m_{01}}{m_{00}}\right)$$

Momentos centrales

$$\mu_{rs} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} \left(i - \bar{i}\right)^r \left(j - \bar{j}\right)^s$$

Los momentos centrales son muy empleados en el reconocimiento de patrones por que de ellos se derivan múltiples descriptores

Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- **Momentos**
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- Uno de los momentos más conocidos son los momentos de Hu (1962) los cuales son invariantes a la traslación, rotación y escala

Momento centrales

$$\mu_{rs} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} \left(i - \bar{i}\right)^r \left(j - \bar{j}\right)^s$$

Momentos de Hu

$$\eta_{rs} = \frac{\mu_{rs}}{\mu_{00}^t} \qquad t = \frac{r+s}{2} + 1$$

$$\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$

$$\phi_2 = \left(\eta_{20} - \eta_{02}\right)^2 + 4\eta_{11}^2$$

$$\phi_3 = \left(\eta_{30} - 3\eta_{12}\right)^2 + \left(3\eta_{21} - \eta_{03}\right)^2$$

$$\phi_4 = \left(\eta_{30} + \eta_{12}\right)^2 + \left(\eta_{21} + \eta_{03}\right)^2$$

$$\phi_5 = \left(\eta_{30} - 3\eta_{12}\right)\left(\eta_{30} + \eta_{12}\right)\left(\left(\eta_{30} + \eta_{12}\right)^2 - 3\left(\eta_{21} + \eta_{03}\right)^2\right) + \left(3\eta_{21} - \eta_{03}\right)\left(\eta_{21} + \eta_{03}\right)\left(3\left(\eta_{30} + \eta_{12}\right)^2 - \left(\eta_{21} + \eta_{03}\right)^2\right)$$

$$\phi_6 = \left(\eta_{20} - \eta_{02}\right)\left(\left(\eta_{30} + \eta_{12}\right)^2 - \left(\eta_{21} + \eta_{03}\right)^2\right) + 4\eta_{11}\left(\eta_{30} + \eta_{12}\right)\left(\eta_{21} + \eta_{03}\right)$$

$$\phi_7 = \left(3\eta_{21} - \eta_{03}\right)\left(\eta_{30} + \eta_{12}\right)\left(\left(\eta_{30} + \eta_{12}\right)^2 - 3\left(\eta_{21} + \eta_{03}\right)^2\right) - \left(\eta_{30} - 3\eta_{12}\right)\left(\eta_{21} + \eta_{03}\right)\left(3\left(\eta_{30} + \eta_{12}\right)^2 - \left(\eta_{21} + \eta_{03}\right)^2\right)$$

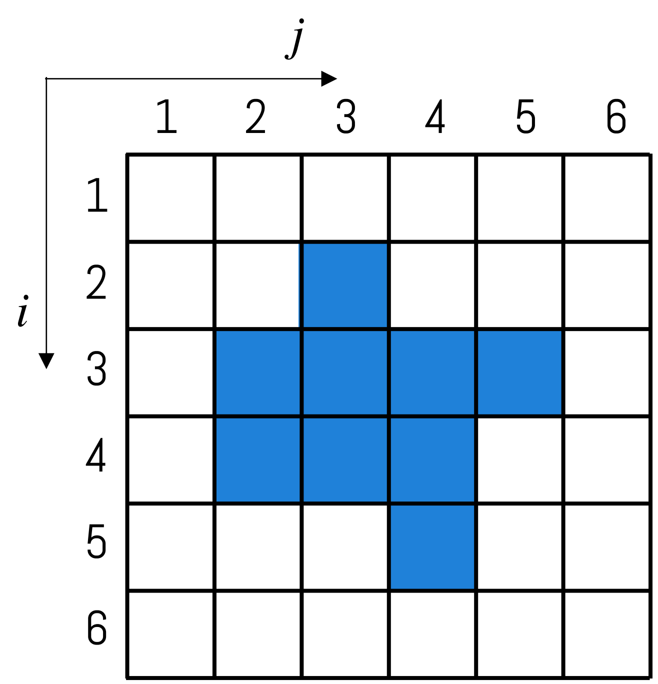
Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- **Momentos**
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- Uno de los momentos más conocidos son los momentos de Hu (1962) los cuales son invariantes a la traslación, rotación y escala

Momento estadísticos

$$m_{rs} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} i^r \cdot j^s$$



Momento estadísticos

$$m_{00} = 9$$

$$m_{10} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 31$$

$$m_{01} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 30$$

Centro de masa

$$(\bar{i}, \bar{j}) = \left(\frac{m_{10}}{m_{00}}, \frac{m_{01}}{m_{00}} \right) = \left(\frac{31}{9}, \frac{30}{9} \right)$$

$$(\bar{i}, \bar{j}) = (3.44, 3.33)$$

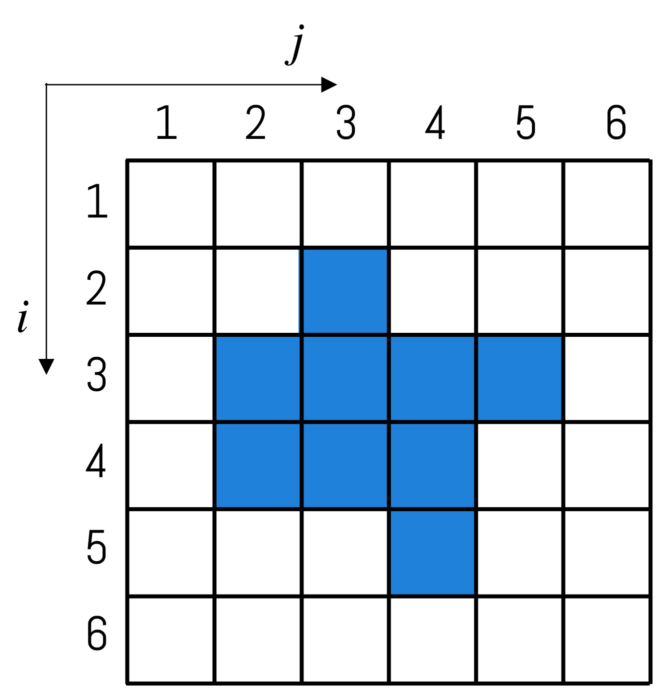
Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- **Momentos**
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- Uno de los momentos más conocidos son los momentos de Hu (1962) los cuales son invariantes a la traslación, rotación y escala

Momento centrales

$$\mu_{rs} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} \left(i - \bar{i}\right)^r \left(j - \bar{j}\right)^s$$



Centro de masa.

$$\left(\bar{i}, \bar{j}\right) = \left(\frac{31}{9}, \frac{30}{9}\right)$$

Momentos central 0+0

$$\mu_{00} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} \left(i - \bar{i}\right)^0 \left(j - \bar{j}\right)^0$$

$$\mu_{00} = 9$$

Momentos central 2+0

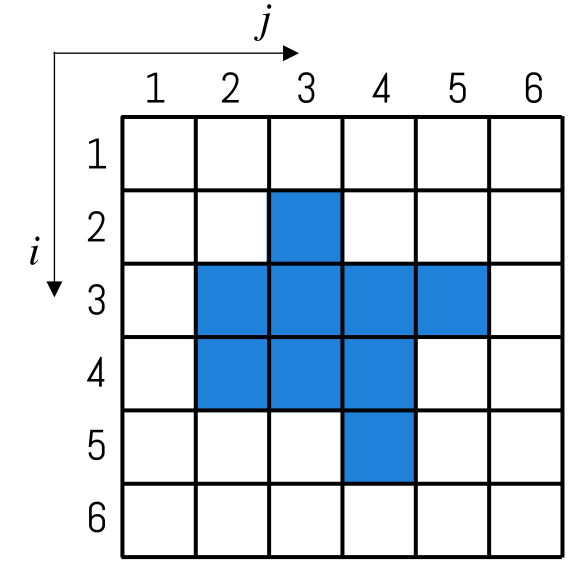
$$\mu_{20} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} \left(i - \bar{i}\right)^2 \left(j - \bar{j}\right)^0$$

$$\mu_{20} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} \left(i - \bar{i}\right)^2$$

Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- **Momentos**
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- Uno de los momentos más conocidos son los momentos de Hu (1962) los cuales son invariantes a la traslación, rotación y escala



Centro de masa.

$$(\bar{i},\bar{j})=\left(\frac{31}{9},\frac{30}{9}\right)$$

Momentos central 0+0

$$\mu_{00}=9$$

Momentos 2+0

$$\mu_{20}=\sum_{i,j\in\mathbf{R}}\left(i-\bar{i}\right)^2$$

$$\mu_{20}=\left(2-\frac{31}{9}\right)^2+4\cdot\left(3-\frac{31}{9}\right)^2+3\cdot\left(4-\frac{31}{9}\right)^2+\left(5-\frac{31}{9}\right)^2=6.22$$

Momentos 0+2

$$\mu_{02}=\sum_{i,j\in\mathbf{R}}\left(j-\bar{j}\right)^2$$

$$\mu_{02}=2\cdot\left(2-\frac{30}{9}\right)^2+3\cdot\left(3-\frac{30}{9}\right)^2+3\cdot\left(4-\frac{30}{9}\right)^2+\left(5-\frac{30}{9}\right)^2=8$$

- Características geométricas

Centro de Masa
Tamaño
Perímetro
Redondez
Momentos
Descriptores de Fourier
Elipse
Distancias

- Uno de los momentos más conocidos son los momentos de Hu (1962) los cuales son invariantes a la traslación, rotación y escala

Momentos

$$\mu_{00} = 9$$
$$\mu_{20} = 6.22$$
$$\mu_{02} = 8$$

Primer momento de HU

$$\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$

Eta

$$\eta_{rs} = \frac{\mu_{rs}}{\mu_{00}^{t}}$$
$$t = \frac{r+s}{2} + 1$$

Eta 2+0

$$\eta_{20} = \frac{\mu_{20}}{\mu_{00}^{2}} \qquad t = \frac{2+0}{2} + 1 = 2$$
$$\eta_{20} = \frac{\mu_{20}}{\mu_{00}^{2}} = \frac{6.22}{9^2} = 0.0768$$

Eta 0+2

$$\eta_{02} = \frac{\mu_{02}}{\mu_{00}^{2}} \qquad t = \frac{0+2}{2} + 1 = 2$$
$$\eta_{02} = \frac{\mu_{02}}{\mu_{00}^{2}} = \frac{8}{9^2} = 0.0988$$

Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- **Momentos**
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

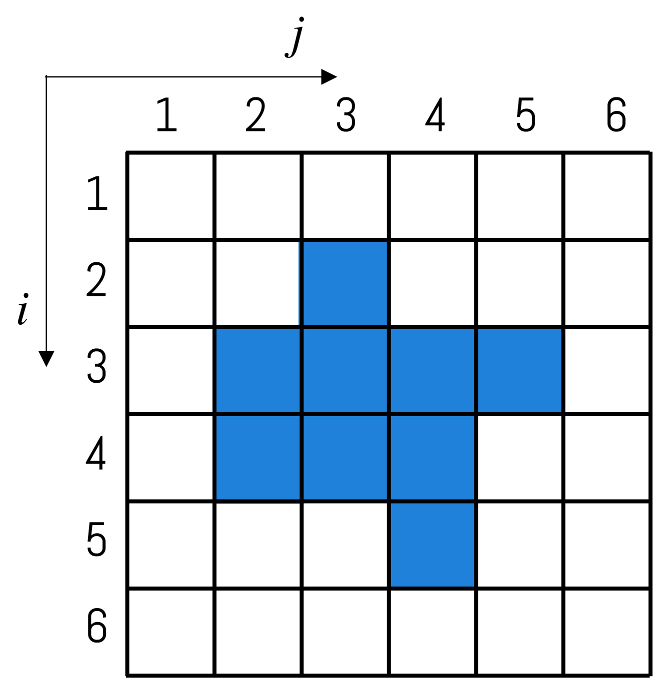
- Uno de los momentos más conocidos son los momentos de Hu (1962) los cuales son invariantes a la traslación, rotación y escala

Momento centrales

$$\mu_{00} = 9$$

$$\mu_{20} = 6.22$$

$$\mu_{02} = 8$$



Eta

$$\eta_{20} = 0.0768$$

$$\eta_{02} = 0.0988$$

Primer momento de HU

$$\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$

$$\phi_1 = 0.0768 + 0.0988$$

$$\phi_1 = 0.1756$$

Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- **Momentos**
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- Uno de los momentos más conocidos son los momentos de Hu (1962) los cuales son invariantes a la traslación, rotación y escala

Momentos de Hu

$$\phi_1 = 1.755830e^{-1}$$

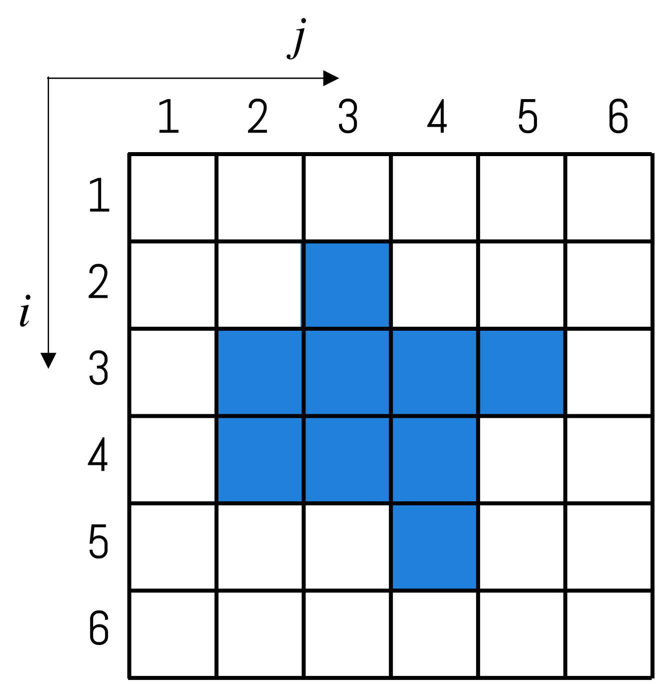
$$\left.\begin{array}{l}\phi_2 = 7.526706e^{-4} \\ \phi_3 = 1.264776e^{-4}\end{array}\right\} *$$

$$\phi_4 = 3.727216e^{-6}$$

$$\phi_5 = -2.55907e^{-9}$$

$$\phi_6 = 6.463563e^{-7}$$

$$\phi_7 = -2.3951298e^{-9}$$

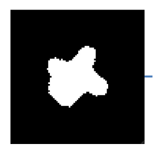


* Los momentos 2 y 3 son dependientes. Por lo tanto no son muy buenos para el reconocimiento de patrones. (Flusser and Suk)

Características geométricas

- Centro de Masa
- Tamaño
- Perímetro
- Redondez
- **Momentos**
- Descriptores de Fourier
- Elipse
- Distancias

- Uno de los momentos más conocidos son los momentos de Hu (1962) los cuales son invariantes a la traslación, rotación y escala



85 × 85

$\phi_1 = 0.1811$
$\phi_2 = 0.0006$

85 × 85

$\phi_1 = 0.2240$
$\phi_2 = 0.0078$

1200 × 1200.
Rotado 45°

$\phi_1 = 0.1824$
$\phi_2 = 0.0007$

1200 × 1200.
Rotado 45°

$\phi_1 = 0.2235$
$\phi_2 = 0.0076$

- Características geométricas

Centro de Masa
Tamaño
Perímetro
Redondez
Momentos
Descriptores de Fourier
Elipse
Distancias

- Uno de los momentos más conocidos son los momentos de Hu (1962) los cuales son invariantes a la traslación, rotación y escala

función eta

```
def eta(r, s, I, J):
    t = (r+s)/2 + 1
    a =  m_central(r,s,I,J)
    b =  m_central(0,0,I,J)

    return a/(b**t)
```

función momento central

```
def  m_central(r, s, I, J):
    m00 = mrs(0,0,I,J)
    m10 = mrs(1,0,I,J)
    m01 = mrs(0,1,I,J)

    ci = m10/m00
    cj = m01/m00
    i = (I-ci)**r
    j = (J-cj)**s

    return np.sum(i*j)
```

Momento centrales

$$\mu_{rs} = \sum_{i,j \in \mathbf{R}} \left(i - \bar{i}\right)^r \left(j - \bar{j}\right)^s$$

Eta

$$\eta_{rs} = \frac{\mu_{rs}}{\mu_{00}^t} \qquad t = \frac{r+s}{2} + 1$$

función mrs

```
def mrs(r, s, I, J):
    i =  I**r
    j = J**s

    return np.sum(i*j)
```

- Características geométricas

- Otro conjunto de momentos que además es invariante a transformaciones afines, y además a rotación, escala, traslación es el siguiente conjunto (Sonka, Hlavac, Boyle, 1998)

Momentos invariantes a transformaciones afines

$$I_1 = \frac{\mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2}{\mu_{00}^4}$$

$$I_2 = \frac{\mu_{30}^2\mu_{03}^2 - 6\mu_{30}\mu_{21}\mu_{12}\mu_{03} + 4\mu_{30}\mu_{12}^3 + 4\mu_{21}^3\mu_{03} - 3\mu_{21}^2\mu_{12}^2}{\mu_{00}^{10}}$$

$$I_3 = \frac{\mu_{20}\left(\mu_{21}\mu_{03} - \mu_{12}^2\right) - \mu_{11}\left(\mu_{30}\mu_{03} - \mu_{21}\mu_{12}\right) + \mu_{02}\left(\mu_{30}\mu_{12} - \mu_{21}^2\right)}{\mu_{00}^7}$$

$$I_4 = \frac{\begin{pmatrix} \mu_{20}^3\mu_{03}^2 - 6\mu_{20}^2\mu_{11}\mu_{12}\mu_{03} - 6\mu_{20}^2\mu_{02}\mu_{21}\mu_{03} + 9\mu_{20}^2\mu_{02}\mu_{12}^2 + 12\mu_{20}\mu_{11}^2\mu_{21}\mu_{03} \\ +6\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}\mu_{30}\mu_{03} - 18\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}\mu_{21}\mu_{12} - 8\mu_{11}^3\mu_{30}\mu_{03} - 6\mu_{20}\mu_{02}^2\mu_{30}\mu_{12} \\ +9\mu_{20}\mu_{02}^2\mu_{21} + 12\mu_{11}^2\mu_{02}\mu_{30}\mu_{12} - 6\mu_{11}\mu_{02}^2\mu_{30}\mu_{21} + \mu_{02}^3\mu_{30}^2 \end{pmatrix}}{\mu_{10}^{11}}$$