

DISEÑO DE EXPERIMENTOS INDUSTRIALES

Prof. Dr Héctor Allende O.
Prof. Dr Enrique Canessa T.
Prof. Dr Jorge Galbiati R.

21 de septiembre de 2005

Prólogo

El presente libro entrega a sus lectores una introducción al Diseño de Experimentos y Diseño Robusto. Su enfoque es eminentemente práctico, por lo que los autores hemos seleccionado el material para mostrar los beneficios concretos que se obtienen al aplicar Diseño de Experimentos y Robusto en el ámbito industrial. El libro muestra la forma práctica de aplicar dicha metodología a la mejora de procesos industriales, por lo cual se incluye una gran cantidad de ejemplos. Por lo mismo, hemos omitido un tratamiento matemático formal de muchos conceptos, prefiriendo un enfoque más aplicado. Sin embargo, el tratamiento de los temas es lo suficientemente riguroso, como para ser utilizado como texto guía en un primer curso de Diseño de Experimentos en Ingeniería.

Cabe destacar que aunque en Europa, Japón y USA los métodos de Diseño de Experimentos y Diseño Robusto han tenido una amplia difusión en la empresa y su aplicación ha sido de gran aporte a la mejora en la calidad de productos y servicios en los últimos treinta años, en nuestro país es poco conocido y aplicado en las empresas. Nuestra convicción es que su uso puede permitir a las empresas elevar la calidad de sus productos y servicios, aumentando su competitividad, lo que es fundamental en un mundo cada vez más globalizado. Creemos que el presente libro ayudará a difundir dichos métodos en las empresas nacionales. Esta es la principal motivación que han tenido los autores para confeccionar el libro.

El libro se estructura de la siguiente forma, el Capítulo 1 entrega las definiciones básicas y conceptos que se emplean en el Diseño de Experimentos. Esto posibilita una introducción al tema y establece el vocabulario básico que se usará a través del texto. Además, en este capítulo se introduce el diseño experimental “un factor a la vez” que es el diseño más intuitivo, permitiendo al lector asimilar fácilmente los conceptos básicos.

Una vez que el lector ha asimilado los conceptos básicos, el Capítulo 2 analiza el diseño experimental con dos factores a dos niveles. Aunque este diseño es sencillo, es muy usado en las primeras etapas del mejoramiento continuo de un proceso. A través de este diseño, se introducen los conceptos de efectos principales, interacciones y la forma de calcularlos, haciendo énfasis en que el lector comprenda el significado práctico de cada uno de ellos. Por ello, se utilizan ampliamente gráficos para explicar lo anterior.

Como una extensión natural del material abordado por el Capítulo 2, el Capítulo 3

presenta los diseños con tres factores a dos niveles. Nuevamente aquí el énfasis se pone en que el lector aprecie que este nuevo tipo de diseño es una extensión natural de lo visto con anterioridad. Con la lectura de los tres primeros capítulos, el lector debería adquirir una visión que le permita utilizar estos diseños básicos en la mejora de procesos.

El Capítulo 4 aborda los diseños factoriales fraccionados. Introduciendo la noción de efectos confundidos, la forma de calcularlos y fraccionar un diseño factorial, terminando con presentar el concepto de resolución y su implicancia práctica. El enfoque de este capítulo está en que el lector entienda el uso de diseños fraccionados y quede capacitado para elegir una fracción de diseño, sabiendo las consecuencias que dicha decisión acarreará. En general, no pretendemos que un lector realice el fraccionamiento de un diseño, pero sí que sepa seleccionar informadamente un cierto diseño empleando alguna tabla u otra fuente donde se entregan diferentes diseños fraccionados.

El Capítulo 5 extiende los conceptos de diseños factoriales a los diseños 3^2 (dos factores a tres niveles) que el lector puede generalizar fácilmente a más niveles. Esto nos permite abordar el tópico desde una perspectiva más práctica, enfatizando en las razones que se tienen para emplear diseños cuyo tratamiento es más complejo, pero que permiten analizar efectos cuadráticos en las variables de respuesta. También abordamos brevemente el fraccionamiento de dichos diseños.

Una vez que el lector se ha familiarizado con el uso de diseños factoriales, en el Capítulo 6 introducimos algunos elementos de Análisis de Varianza (ANOVA), como una metodología que nos permite cuantificar la importancia de los efectos de los factores de un experimento sobre la respuesta.

Los Capítulos 7 y 8 presentan los conceptos más importantes desarrollados por Genichi Taguchi, comenzando por su definición de calidad y la forma de medirla, y además se introduce una técnica de reducción de variancia, mostrando a través de un caso real, la forma de implementar los conceptos de dicha técnica y los beneficios que puede obtener la industria con su aplicación.

El Capítulo 9 presenta diseños factoriales fraccionados ampliamente usados en el análisis práctico de procesos industriales, conocidos como Arreglos Ortogonales. Enfatizamos su uso en el Diseño de Parámetros y el empleo de gráficas lineales para asignar los factores en el diseño.

El último capítulo del libro, el Capítulo 10, introduce el Diseño de Parámetros. Esta técnica permite agregar robustez a un proceso industrial. Entrega un procedimiento sistemático para tratar de minimizar el impacto negativo sobre la respuesta de un proceso industrial, de aquellas variables que no podemos controlar y que causan gran variabilidad. A su vez, esa gran variabilidad causa una gran pérdida de calidad. Por ello, el poder agregar robustez a un proceso industrial, eleva drásticamente la calidad de los productos y servicios. Aunque conservamos nuestro enfoque práctico, ilustrando el Diseño de

Parámetros con varios ejemplos de casos reales, creemos que un análisis matemático de dicha técnica es fundamental para que el lector pueda hacer un uso informado del método y comprenda sus limitaciones. Además de lograr que el lector pueda apreciar más profundamente las bondades y limitaciones del Diseño de Parámetros.

Finalmente, deseamos agradecer a todas las personas cuyo anónimo trabajo y apoyo nos han permitido confeccionar el presente libro. Aunque no podemos mencionar explícitamente a todas ellas, queremos agradecer a Sergio Ahumada por su paciente trabajo en la confección de la versión en \LaTeX , a Pabla Valdebenito por su ayuda en labores administrativas ligadas a la publicación del libro y a los estudiantes que han tomado el curso de Diseño Avanzado de Experimentos, cuyas valiosas sugerencias han permitido mejorar significativamente el libro.

Valparaíso, Septiembre de 2005.

Los autores.

Índice general

1. Diseños Experimentales Factoriales	1
1.1. Definiciones.	2
1.2. Diseños “uno-a-la-vez”	5
Ejercicios	8
2. Diseños Factoriales 2^2, con dos factores a dos niveles	9
2.1. Gráfico de Interacción.	15
2.2. Matriz de Diseño del Experimento 2^2	17
2.3. Tabla de Respuestas.	18
2.4. Diagrama de Efectos.	19
2.5. Aleatorización.	20
2.6. Réplicas.	20
Ejercicios	24
3. Diseños Factoriales con Tres Factores a Dos Niveles	27
3.1. Matriz de Diseño del Experimento 2^3	31
3.2. Tabla de Respuestas y Diagrama de Efectos del Experimento 2^3	37
3.3. Gráficos de Interacción.	39
Ejercicios	46
4. Diseños Factoriales Fraccionados	53
4.1. Efectos Confundidos.	57
4.2. Construcción de Bloques en Diseños 2^K	63
4.3. Resolución de un Diseño Factorial Fraccionado.	67
Ejercicios	68
5. Diseños Factoriales con más de Dos Niveles	75
5.1. Diseños Factoriales 3^2 , con dos Factores a Tres Niveles.	77
5.2. Diseños 3^2 fraccionados.	86
Ejercicios	93
6. Elementos de Análisis de Varianza	101
6.1. El Modelo Lineal.	101
6.2. Análisis de Varianza a un factor.	105

6.3. Tabla de análisis de varianza a un factor.	110
6.4. Análisis de Varianza de dos factores.	112
6.5. Tabla de Análisis de Varianza Para Dos Factores.	115
Ejercicios	121
7. Fundamentos del Diseño de Parámetros	123
7.1. Tipos de Características de Calidad.	125
7.2. Función de Pérdida.	128
7.2.1. Función de Pérdida para una Pieza Nominal es Mejor.	130
7.2.2. Función de Pérdida para n Piezas (Nominal es Mejor.)	132
7.2.3. Función de Pérdida (Característica del Tipo Menor es Mejor.)	134
7.2.4. Función de Pérdida (Característica del Tipo Mayor es Mejor.)	135
7.3. Razón Señal-Ruido (Signal-To-Noise Ratio.)	136
7.3.1. Característica Nominal es Mejor (SNR)	137
7.3.2. Característica Menor es Mejor (SNR)	138
7.3.3. Característica Mayor es Mejor (SNR)	139
Ejercicios	141
8. Ingeniería de la Calidad	143
8.1. Identificando y distinguiendo los tipos de factores.	145
8.2. Estudio de Caso: Experimento en una fábrica de cerámica	147
8.2.1. Análisis utilizando Tabla de Respuestas	151
8.2.2. Estimación de la respuesta óptima	151
8.2.3. Elección de condiciones óptimas	154
Ejercicios	156
9. Arreglos Ortogonales y Gráficas Lineales	159
9.1. Historia del DoE.	160
9.2. Arreglos Ortogonales y el Diseño de Parámetros.	161
9.2.1. Arreglo Producto.	163
9.2.2. El Rol de los OA en el Diseño de Parámetros.	164
9.3. Gráficas Lineales.	166
Ejercicios	170
10. Diseño de Parámetros	173
10.1. Etapas del Diseño de Parámetros.	176
10.1.1. Estrategia para Seleccionar los Factores de Ruido.	177
10.2. Caso Característica del Tipo Menor es Mejor.	177
10.3. Caso Característica del Tipo Mayor es Mejor.	179
10.4. Caso Característica del Tipo Nominal es Mejor.	181
10.4.1. Diagrama en Bloques (para un problema simple de Diseño de Parámetros, para el caso Nominal es Mejor).	182
10.4.2. Objetivo del Diseño de Parámetros.	183
10.4.3. Postulado Fundamental.	183

10.4.4. Razón Señal-Ruido y Procedimientos Alternativos.	184
10.4.5. Medida de Desempeño Independiente de los Parámetros de Ajuste PerMIA(Performance Measure Independent of Adjustment)	184
10.4.6. Procedimiento de Optimización a Dos Etapas de Taguchi.	185
10.4.7. Observaciones.	186
10.4.8. Transformaciones.	187
Ejercicios	198
A. Tabla F	201
B. Glosario de Términos	203
C. Gráficas de Dos Niveles más frecuentes	207
Bibliografía	209

Índice de tablas

2.1. Tabla de Combinaciones de Tratamientos del Diseño Experimental 2^2 . . .	11
2.2. Tabla de Respuestas del Experimento de las Placas de Madera	14
2.3. Matriz de Diseño del Experimento 2^2	17
2.4. Tabla de Respuestas del Experimento 2^2 , del Ejemplo 2.1	19
3.1. Tabla de Combinaciones de Tratamientos del Diseño Experimental 2^3 . . .	28
3.2. Matriz de Diseño del Experimento 2^3	35
3.3. Respuestas obtenidas en el Experimento 2^3	37
3.4. Tabla de Respuestas del Experimento 2^3 , del Ejemplo 3.1	38
3.5. Tabla de Respuestas para la Construcción de Gráficos de Interacción . . .	39
4.1. Distribución de los cuatro Bloques en un Diseño Balanceado 2^{2-1}	54
4.2. Distribución de los cuatro Bloques en un Diseño Balanceado 2^{3-1}	54
4.3. Distribución de los cuatro Bloques en un Diseño Balanceado 2^{3-2}	54
4.4. Bloques de un Diseño 2^{7-4}	57
4.5. Matriz de Diseño del Experimento 2^{3-1}	57
4.6. Matriz de Diseño del Experimento 2^{3-2}	59
4.7. Cálculo de Efectos Confundidos en el Diseño 2^{3-1}	59
4.8. Respuestas del Experimento 2^3	60
4.9. Respuestas del Experimento 2^3 , Bloque I	61
4.10. Respuestas del Experimento 2^3 , Bloque II	61
4.11. Respuestas del Experimento 2^3	62
4.12. Respuestas del Experimento 2^{3-1} , Bloque I	63
4.13. Respuestas del Experimento 2^{3-1} , Bloque II	63
4.14. Construcción de Bloques	65
5.1. Matriz de Diseño para Analizar un Experimento 3^2	77
5.2. Respuestas para el Diseño 3^2 . Primera parte.	79
5.3. Respuestas para el Diseño 3^2 . Segunda parte.	79
5.4. Resultados de corridas experimentales de resistencia a la flexión de ladrillos	84
5.5. Multiplicación de efectos para el diseño 3^2	86
5.6. Combinación de Degradación de Aceite	87
5.7. Bloques de un diseño 3^{2-1}	88
5.8. Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Primera parte.	88

5.9. Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Segunda parte.	89
5.10. Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque I, Primera parte. . .	89
5.11. Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque I, Segunda parte. .	90
5.12. Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque II, Primera parte. .	90
5.13. Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque II, Segunda parte. .	90
5.14. Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque III, Primera parte. .	91
5.15. Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque III, Segunda parte. .	91
6.1. Notación para el análisis de varianza a un factor.	106
6.2. Grados de libertad para el Análisis de Varianza a un Factor.	107
6.3. Respuestas del Ejemplo 6.1, totales y promedios globales y por nivel del factor.	109
6.4. Análisis de varianza a un factor.	111
6.5. Análisis de varianza del Ejemplo 6.1	111
6.6. Distribución de operadoras por período	112
6.7. Notación para el análisis de varianza a dos factores.	113
6.8. Grados de libertad para el análisis de varianza de dos factores.	114
6.9. Análisis de varianza a dos factores.	115
6.10. Respuestas y cálculos parciales del Ejemplo 6.2	116
6.11. Tabla de Análisis de Varianza del Ejemplo 6.2	116
6.12. Respuestas experimento Obtención cobre de lixiviación de bateas	118
6.13. Análisis de Varianza	120
7.1. Datos de cuatro fábricas.	134
7.2. Función de pérdida y razón SR para un conjunto de n observaciones . . .	139
8.1. Arreglo ortogonal $L_8(2^7)$, 7 factores, 2 niveles, 8 corridas experimentales. .	149
8.2. Tabla del experimento de azulejos	150
8.3. Tabla de respuestas del experimento de azulejos	150
9.1. Arreglo ortogonal $L_8(2^7)$	162
9.2. Diseño de Taguchi $L_8(2^7)$	163
9.3. Diseño equivalente a un $L_8(2^7)$	163
9.4. Factores y niveles de experimento fuerza desactivación válvula al vacío . .	167
9.5. Arreglo Ortogonal L_8 para el Ejemplo 9.2	168
9.6. $OA L_8$ ajustado para el Ejemplo 9.2	169
10.1. OA interno y externo para un diseño robusto	174
10.2. $OA L_8$ para diseño robusto, Ejemplo 10.1	178
10.3. Respuestas \overline{SNR} para Ejemplo 10.1	178
10.4. OA interno y externo para Ejemplo 10.2	180
10.5. Tabla de respuesta \overline{SNR} para Ejemplo 10.2	181
10.6. Arreglo interno y externo para Ejemplo 10.3	189
10.7. Tabla de respuestas \overline{SNR} para Ejemplo 10.3	190
10.8. Respuesta media \bar{y}	190

10.9. Settings inicial y de prueba para cada parámetro de control.	192
10.10 Arreglos de control para el experimento del proceso epitaxial.	193
10.11 Matriz de control para diseño robusto capa epitaxial	194
10.12 Media y logaritmo de la varianza del espesor epitaxial para cada corrida de prueba	195
10.13 Valor promedio de $\log s^2$ para diferentes <i>test setting</i> (niveles)	195
10.14 Propuestas experimento confirmación capa epitaxial	196
10.15 Valor promedio de \bar{y} para diferentes <i>test setting</i> (niveles)	196
A.1. Distribución F para un nivel de significación $\alpha = 5\%$ y diferentes valores para grados de libertad	202

Índice de figuras

1.1. Dureza del pegamento epóxico, versus presión, a 50°C	6
1.2. Dureza del pegamento epóxico, versus temperatura, a 25 Psi	7
1.3. Curvas de nivel de la dureza del pegamento epóxico, versus presión y temperatura	7
2.1. Representación gráfica del experimento 2^2	12
2.2. Rigidez versus tipo de Resina, estratificado por Granulado	16
2.3. Rigidez versus Granulado, estratificado por tipo de Resina	16
2.4. Diagrama de Efectos del Ejemplo 2.1	20
2.5. Diagrama de Efectos del experimento de Secado de Sanitarios	23
2.6. Gráficos de Interacción del experimento de Secado de Sanitarios	23
3.1. Representación Gráfica del Experimento 2^3	29
3.2. Diagrama de Efectos del Experimento Factorial 2^3	38
3.3. Gráfico de interacción de Índice de dureza vs Presión estratificado por Temperatura	40
3.4. Gráfico de interacción de Índice de dureza vs Tiempo de aplicación estratificado por Presión	40
3.5. Gráfico de interacción de Índice de dureza vs Temperatura estratificado por Tiempo de aplicación	41
3.6. Diagrama de efectos del Experimento Optimización de la plasticidad del Caucho de Neumáticos	43
3.7. Grafico de interacción Delta Torque vs Tipo caucho estratificado por Tipo acelerante	44
3.8. Gráfico de interacción Delta torque vs Tipo acelerante estratificado por Activador del acelerante	44
3.9. Gráfico de interacción Delta torque vs Activador del acelerante estratificado por Tipo caucho	45
5.1. Diagrama de Efectos para el Experimento 3^2	80
5.2. Gráfico de Interacción del Experimento 3^2 , factor A en el eje de las abscisas.	81
5.3. Gráfico de Interacción del Experimento 3^2 , factor B en el eje de las abscisas	81
5.4. Diagrama efectos de resistencia a la flexión de ladrillos	84

5.5. Gráfico Interacción Resistencia v/s Temperatura estratificado por Tiempo cocido	85
5.6. Gráfico Interacción Resistencia v/s Tiempo cocido estratificado por Temperatura	85
6.1. Diagrama de Efectos Ciclo lixiviación	118
6.2. Gráficos de interacción Ciclo lixiviación	119
7.1. Capacidad del Proceso.	126
7.2. Diferencia en calidad de la producción entre Japón y Estados Unidos . . .	127
7.3. (a) Función escalón (b) Función cuadrática	128
7.4. Espesor del plástico.	129
7.5. Función de pérdida característica Nominal es Mejor.	130
7.6. Gráfico de cálculo de k (ajuste de parábola)	131
7.7. Característica Menor es Mejor.	135
7.8. Característica Mayor es Mejor.	136
7.9. Relación funcional de un equipo de telecomunicaciones.	137
8.1. Ingeniería de la calidad: Fuera de línea	144
8.2. Ingeniería de la calidad: En línea	145
8.3. Ingeniería de la calidad	147
8.4. Distribución de salida de los azulejos	148
8.5. Proceso de manufactura de azulejos	149
8.6. Distribución de la salida de azulejos.	155
9.1. Evolución del Diseño de Experimentos	160
9.2. Arreglo Ortogonal Producto	164
9.3. Gráficas lineales de una tabla L_8	166
9.4. Estructura gráfica de un experimento	167
9.5. Gráfica lineal para el Ejemplo 9.2	168
9.6. Gráficas lineales estándar de una tabla L_8	169
9.7. Gráfica lineal L_8 ajustada para el Ejemplo 9.2	169
9.8. Algunas gráficas lineales para Arreglos Ortogonales de 2 niveles	170
10.1. Diagrama de relación entre factor y características.	174
10.2. Gráficas \overline{SNR} para Ejemplo 10.1	179
10.3. Gráfica \overline{SNR} para Ejemplo 10.2	181
10.4. Diagrama en bloques caso Nominal es Mejor	182
10.5. Gráfico de \overline{SNR} para Factores a dos niveles	190
10.6. Gráfico de Factores para ajuste de la media	191
10.7. Variación del espesor de la capa epitaxial en galletas de sílice	192
10.8. Valores promedios de $\log s^2$ para cada settings de parámetros de control. .	195
10.9. Valores promedios de \bar{y} para cada setting de parámetros de control	197
C.1. Algunas gráficas lineales para Arreglos Ortogonales de 2 niveles	207

Capítulo 1

Diseños Experimentales Factoriales

Introducción

Todo fenómeno que podemos observar, y que presenta características susceptibles de ser medidas, exhibe un comportamiento variable. Sea este fenómeno un proceso llevado a cabo en un laboratorio de precisión, en que se puede tener un alto grado de control sobre los factores que causan variación, sea un proceso de fabricación con avanzada tecnología, o sea un fenómeno en que interviene en forma importante el ser humano, como los de tipo social, psicológico o económico. En el primer caso la variación es muy pequeña, casi imperceptible, pero aún así existe. En el caso de los fenómenos de tipo humano, donde las fuentes de variación son numerosas, cuesta distinguirlas, y sus causas son difíciles de aislar y más aún de medir, la variación es muy grande.

La variabilidad y la calidad son conceptos que se contraponen; puede definirse la calidad como la reducción de la variabilidad. Consecuentemente, el logro del mejoramiento de la calidad de lo que entrega un proceso, depende en gran medida del grado con que se pueden identificar y cuantificar las fuentes de variación de cada una de las etapas del proceso. Sólo reduciendo la variabilidad y logrando diseñar procesos estables se puede mejorar la calidad de los productos y servicios.

La estadística es la tecnología desarrollada específicamente para el estudio, análisis y comprensión de la variabilidad de los procesos. De ahí que prácticamente todos los métodos estadísticos sean útiles para el desarrollo de sistemas de mejoramiento de la calidad.

Pero tal vez el tipo de situación en que, potencialmente, hay más aplicación de la tecnología estadística, es la determinación de factores que causan variación, en el resultado de un proceso de producción o de servicio; la cuantificación del efecto que cada uno de ellos tiene sobre esa variación, y el estudio de la forma en que se combinan

y afectan conjuntamente la variación. Todo esto conforma un experimento, y la manera de llevarlo a cabo es hacer variar los factores que potencialmente influyen sobre un fenómeno, y observar su efecto, de modo de poder determinar si efectivamente son causa de variación. Y si lo son, cuantificar el grado de influencia de cada uno, comparando los efectos que se producen, como respuesta a diferentes cantidades o calidades de los factores.

1.1. Definiciones.

En relación a un estudio del tipo descrito anteriormente, se pueden definir los siguientes conceptos:

Experimento: Un estudio en el que el investigador tiene un alto grado de control sobre las fuentes de variación importantes, se denomina experimento. Si se tiene poco control sobre los factores, se habla de un estudio observacional.

Factores: Los fenómenos que potencialmente causan variación, y que son controlados por el experimentador, se denominan factores. También se denominan tratamientos.

Niveles de un factor: Son los valores que toma un factor. En general toman valores que se miden en escala categórica, aunque a veces suelen ser medidos en escalas numéricas.

Combinación de Tratamientos: Cada una de las combinaciones de niveles de todos los factores involucrados en el experimento.

Corrida Experimental: Cada una de las fases en que se lleva a cabo el experimento. Cada corrida experimental corresponde a una realización del experimento, bajo una determinada combinación de tratamientos, y produce una observación.

Réplicas: Todas las corridas experimentales que corresponden a una misma combinación de tratamientos. Son repeticiones del experimento, bajo idénticas condiciones de los factores. Tienen un doble objetivo: Lograr mayor precisión en la estimación de los efectos de los factores y de sus interacciones, y estimar el error experimental.

Experimento Balanceado: Es un experimento en que todos los niveles de cada factor aparece el mismo número de veces. Si no se da esta situación, el experimento es desbalanceado.

Diseño: La estructura constituida por los factores y los niveles que se les asignan, en la experimentación. El diseño es la parte que controla el experimentador.

Respuesta: La variable objetivo, que se pretende optimizar, y que depende poten-

cialmente de los factores. La respuesta es lo que se mide como resultado de la experimentación, no es controlada por el experimentador. Es una variable medida en escala numérica.

Efecto Principal: Un efecto principal es la variación en la respuesta, atribuida al cambio en un factor determinado, a través de sus distintos niveles.

Interacción: El efecto producido por la acción de un factor, influido por la presencia de otro. Es un efecto combinado de dos o más factores. Si no existe un efecto de interacción, se dice que los efectos de los factores son aditivos.

Error Experimental: La parte de la variabilidad que no está explicada por los factores involucrados en el experimento.

ESTUDIO DE CASO: Resistencia de un mortero.

Mortero es el material que resulta de la mezcla de agua, arena, cemento, eventualmente aditivo, en proporciones adecuadas, y que al fraguar y endurecer, adquiere resistencia. Desde la fabricación de los primeros cementos en el mundo, se han realizado infinitudes de ensayos para determinar cuáles son las mejores dosificaciones y los mejores elementos para la fabricación de un mortero, para que satisfaga las necesidades de una determinada aplicación. Se sabe que son muchas las variables que afectan el proceso de endurecimiento, o fraguado, del mortero. Entre las variables que afectan la resistencia a la flexión y compresión de un mortero, sin duda que las más importantes son la característica del cemento que se está utilizando y la cantidad del mismo.

Dentro de los diferentes tipos de cementos que se pueden utilizar, existen los Pulzolánicos y los Siderúrgicos, y dentro de los mismos, unos de alta resistencia y otros de resistencias normales.

El Cemento Pulzolánico es aquel en cuya fabricación se utiliza Pulzolana, una ceniza volcánica decantada durante milenios. El Cemento Siderúrgico utiliza escoria producida en un Alto Horno, durante el proceso de fabricación de acero.

Entre los factores que influyen sobre la resistencia del mortero, están el tipo de arena y el tipo de agua que se utilizan. De acuerdo a la zona geográfica, varía la granulometría de la arena, las sales minerales y materias orgánicas que contiene. Estos últimos elementos también varían según la procedencia del agua.

Se hizo un estudio para observar el efecto de algunos de los factores controlables que afectan la resistencia de un mortero, a la flexión y la compresión. Para efectos de este estudio, se consideraron sólo tres variables: Cantidad de Cemento Siderúrgico (resistencia normal), tipo de arena y cantidad de agua.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO: El objetivo del experimento es determinar en qué medida afectan las tres variables mencionadas, la resistencia de un mortero, y cómo interaccionan entre ellas.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: Es un experimento a tres factores, con dos niveles cada uno, según la siguiente descripción:

FACTORES		NIVELES	
A :	Cantidad de Cemento Siderúrgico de resistencia normal.	a_1 :	300 kg de cemento por m^3 de mortero
		a_2 :	450 kg de cemento por m^3 de mortero
B :	Granulometría de arena utilizada.	b_1 :	Diámetro máximo 2,5 mm
		b_2 :	Diámetro máximo 1,25 mm
C :	Razón de agua - cemento	c_1 :	0,8
		c_2 :	1,2

RESPUESTA: La respuesta es la resistencia a la flexión y compresión, en Kg/cm^2 de probetas de mortero del tipo Rilem (de $4 \times 4 \times 16$ cm). Los ensayos se realizaron en equipos normalizados para medir resistencias a la flexión y compresión.

Se asume que las características de la Arena y del Agua utilizada, en cuanto a su composición química, son similares.

PREPARACIÓN DE MUESTRAS: Determinadas la materias primas con las que se confeccionaron las probetas para los ensayos, se realizó una homogeneización de cada una de ellas. Se determinó cuáles son sus componentes, composición química, presencia de sales, presencia de material orgánico.

Una de las variables que también es muy influyente en el fraguado de morteros es la condición ambiente en que se realiza el fraguado; luego, durante el experimento fue necesario mantener las probetas que estaban en proceso de fraguado, en una condición climática estable y controlada. Se hicieron fraguar al aire por 24 horas, con una humedad relativa constante sobre el 90 %. Posterior a esto, se continuó su proceso de fraguado sumergidas en agua, a una temperatura entre 20 y 21 °C, por los días necesarios para realizar el ensayo.

Las probetas se fabricaron bajo un mismo procedimiento. Se confeccionaron 5 probetas para cada combinación de tratamientos, con el objeto de realizar pruebas de resistencia a la flexión y compresión, transcurridos 1, 2, 3, 7, y 28 días.

En la medida que las probetas cumplían con la edad para su ensayo, se extrajeron directamente de la piscina de agua para someterlas a la prueba. Primero se les realizó el ensayo de flexión y luego el de compresión. Estos ensayos son de tipo destructivo por lo que una vez realizado el ensayo de flexión, a los dos trozos que quedaban se les realizó la prueba de compresión. El valor representativo es el promedio de los dos valores.

LIMITACIONES: Como mencionamos anteriormente, existen muchos factores que influyen sobre las resistencias finales de los morteros. Una gran limitante que puede tener el experimento es la presencia de algún elemento contaminante que no sea detectable con los equipos de laboratorio con que se cuenta. Esto podría traer como consecuencia distorsiones en los resultados observados.

1.2. Diseños “uno-a-la-vez”

Consisten en mantener constante los valores de todos los factores que potencialmente inciden en el efecto que se quiere observar, menos uno de ellos, que es el que está siendo analizado. Esto se debe repetir para cada uno de los factores que se han identificado. Este es un tipo de experimentación bastante utilizado, pero que adolece de muchas limitaciones. Son adecuados cuando se presentan condiciones como las siguientes:

1. El resultado es una función compleja del factor, por lo que se deben emplear múltiples valores o niveles distintos del factor para determinar el comportamiento de la respuesta.
2. Los efectos resultantes no presentan interacciones. Esto significa que la forma del comportamiento de uno de ellos no es afectado por el nivel en que se encuentran los demás. En este caso se dice que los efectos son aditivos.

Estas situaciones se dan muy rara vez. Por lo general se presentan, en cambio, condiciones como las siguientes:

1. En la región experimental, es decir, el rango en que varían los valores de los factores, el efecto resultante presenta muy poca curvatura, y ésta no cambia de sentido, como sería, por ejemplo, el cambio de una región cóncava a una región convexa.
2. Los efectos resultantes no son aditivos. El nivel en que está un factor influye sobre la forma en que otro factor afecta la respuesta.

Bajo estas condiciones, el método de experimentación “uno-a-la-vez” da resultados poco satisfactorios, muchas veces con conclusiones erróneas. En general, es conveniente estudiar simultáneamente el efecto de dos o más factores, en un mismo experimento. Las ventajas de este procedimiento, sobre el hacer un experimento individual para cada factor, son, que se pueden estudiar las interacciones entre los factores, se ahorra tiempo y esfuerzo, y las conclusiones a que se lleguen tienen mayor aplicabilidad, debido a que cada factor se estudia bajo condiciones variables de los otros.

Ejemplo 1.1

Supóngase que se desea investigar qué efecto tiene sobre la dureza de un pegamento epóxico, la presión a que están sometidos los elementos que se han de adherir, y la temperatura, durante el tiempo de endurecimiento. Se mantiene la temperatura constante,

a 50°C, por decisión del experimentador, durante el experimento. A la presión se le dan los valores 5, 10, 15, 20, 25, 30, y 35 Psi., y se mide la dureza resultante en cada uno de los 7 casos. Los resultados se ilustran en la siguiente figura:

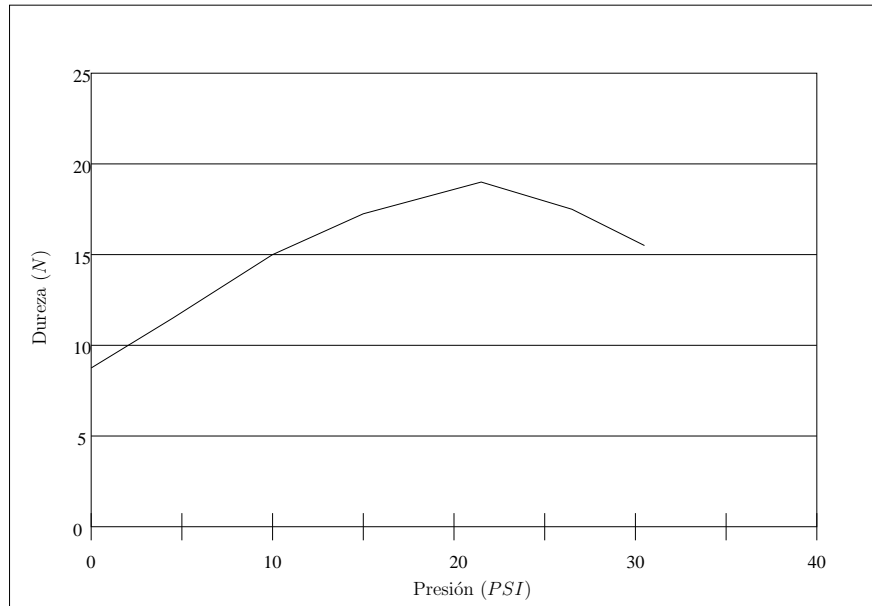


Figura 1.1: Dureza del pegamento epóxico, versus presión, a 50°C

Se observa que el mejor resultado se obtiene si se fija la presión en 25 Psi. Después se realiza un experimento separado para determinar la temperatura óptima. Se fija la presión en 25Psi y a la temperatura se le da los valores 10, 20, 30, 40, 50, y 60 grados. El efecto sobre la dureza se ilustra en la siguiente figura, que muestra que el óptimo se obtiene con una temperatura de 30°C. El valor máximo de dureza es 25.

Sin embargo, si conociéramos la forma de la respuesta, como función de los dos factores combinados, presión y temperatura, como se muestra en la figura siguiente, veríamos que el punto encontrado, presión = 25 Psi., temperatura = 30°C, no es el óptimo. El óptimo está en el valor (15 grados, 14 Psi), y el valor máximo de dureza, en ese punto, es 35.

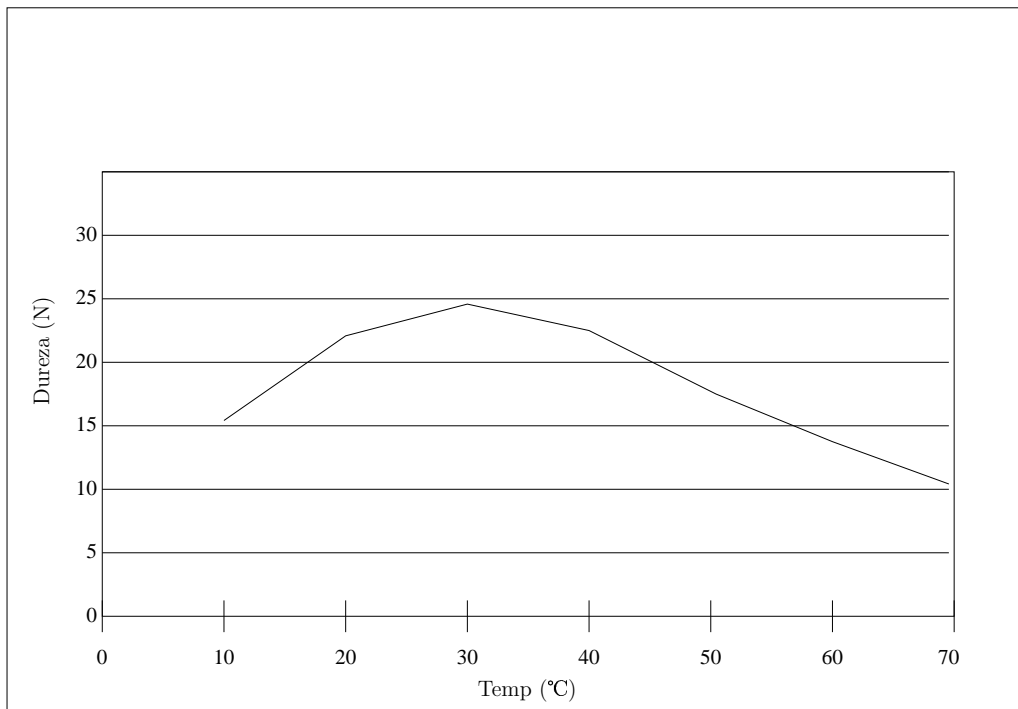


Figura 1.2: Dureza del pegamento epóxico, versus temperatura, a 25 Psi

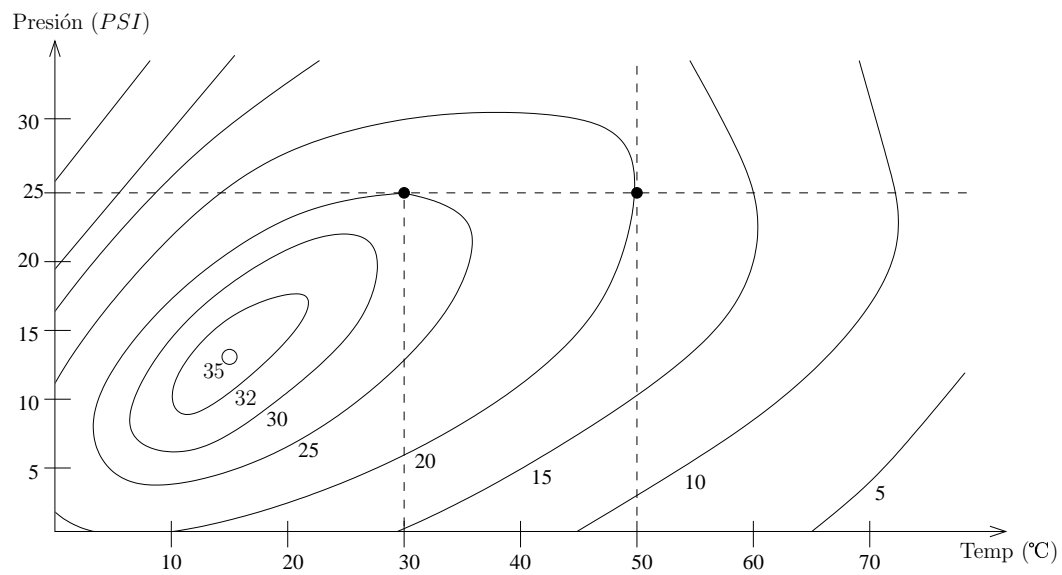


Figura 1.3: Curvas de nivel de la dureza del pegamento epóxico, versus presión y temperatura

EJERCICIOS.

Ejercicio 1.1

Dé una definición de cada uno de los siguientes conceptos, relacionados con diseños experimentales:

- a) Niveles de un factor.
- b) Combinación de tratamientos.
- c) Corrida experimental.
- d) Respuesta.

Ejercicio 1.2

En la fabricación de retenes para ser utilizados en motobombas (entre la bomba y el motor a gasolina), es importante la calidad del pulido del interior de la pieza móvil. Se puede utilizar dos técnicas de pulido, que llamaremos pulido 1 y pulido 2, respectivamente. El metal de la camisa interior puede ser de tres aleaciones distintas, aleación 1, aleación 2, y aleación 3. También interesa observar el efecto de variar el ancho de la pieza; se le dan cuatro valores, 9mm, 10mm, 11mm, y 12mm.

Se diseña un experimento para determinar qué combinación produce el mejor resultado. La respuesta es la presión a la cual comienza a filtrar el retén. Esta se mide utilizando el mecanismo, mientras se aumenta la presión del agua que debe retener. A mayor presión, mejor. El experimento se diseña de tal modo que se observe el efecto de cada combinación de tratamientos dos veces.

- a) Identifique los siguientes elementos, en este experimento:
 - I) Todos los factores.
 - II) Los niveles de cada factor.
 - III) La respuesta, y la unidad en que se mide.
 - IV) Las combinaciones de tratamientos.
 - V) El número de corridas experimentales.
 - VI) El número de réplicas, por cada combinación de tratamientos.
 - g) ¿Es balanceado el experimento?
 - h) Describa los efectos principales.
 - i) ¿Cuáles son las posibles interacciones?
-

Capítulo 2

Diseños Factoriales 2^2 , con dos factores a dos niveles

Introducción

Una fase inicial de un estudio tiene por objeto efectuar un diagnóstico, por esa razón, basta con utilizar sólo dos niveles para cada factor. La conveniencia de fijar sólo dos niveles por factor, está en la economía del experimento y en la simplicidad del análisis de los resultados. El diagnóstico no nos entregará la combinación de los niveles óptima, de ambos factores, sino que nos permitirá determinar si cada uno de ellos afecta o no la respuesta, y en qué medida, así como nos dirá si existe o no interacción entre ambos factores. Los diseños con dos factores a dos niveles son diseños experimentales extremadamente simples, pero a través de su análisis se pueden ilustrar los principios de la experimentación.

En estos diseños hay $2^2 = 4$ combinaciones de tratamientos posibles, pues por cada uno de los dos niveles de un factor hay dos niveles del otro. Por eso suele hablarse de diseños experimentales 2^2 , o simplemente experimentos 2^2 . A los factores los designaremos Factor A y Factor B , respectivamente.

De los dos niveles que definimos para cada factor, a uno lo llamaremos nivel bajo y al otro nivel alto. En general, ésta es sólo cuestión de nombres, pues no siempre se puede cuantificar el factor. En ciertas situaciones se prefiere hablar de ausencia y presencia del factor. Por ejemplo, los niveles pueden ser dos distintos procesos de producción, o pueden ser la utilización o no utilización de un dispositivo.

Los niveles de los factores, en general, se miden en escala categórica nominal. Esta, eventualmente, puede ser ordinal o numérica. La respuesta siempre debe medirse en escala numérica.

ESTUDIO DE CASO: Fabricación de mermelada de uva a partir de los descartes de la selección de uva de mesa; Estudio de la acidez y la consistencia.

Una industria se propone fabricar mermelada de uva, aprovechando los descartes de uva de mesa, producidos por el proceso de selección.

En la fabricación de mermelada, la adición de ácido cítrico aumenta la acidez del producto, y la adición de pectina, aumenta la consistencia.

El descarte de uva es una materia prima no tradicional, por lo que se requiere estudiar la formulación óptima del producto.

El proceso de la elaboración de la mermelada sigue el siguiente esquema:

1. Recepción
2. Pesaje
3. Calentamiento
4. Adición solución de pectina
5. Calentamiento
6. Enfriamiento
7. Adición solución de ácido cítrico
8. Envasado

En una etapa inicial del estudio de formulación, se requiere conocer la forma como influyen la acidez y la consistencia, en la aceptación del producto.

Para ello se diseñó un experimento con dos factores, la concentración de ácido cítrico y de pectina, a dos niveles cada uno.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: Se hizo con dos factores, a dos niveles cada uno, con ocho réplicas.

FACTORES	NIVELES
A: Ácido Cítrico	a_1 : 0,43 %
	a_2 : 1,29 %
B: Pectina	b_1 : 0,86 %
	b_2 : 1,71 %

Este es un experimento 2^2 , a dos factores con dos niveles cada uno. Tiene cuatro combinaciones de tratamientos, que son:

a_1b_1 :	Ácido cítrico 0,43 %;	Pectina 0,86 %
a_2b_1 :	Ácido cítrico 1,29 %;	Pectina 0,86 %
a_1b_2 :	Ácido cítrico 0,43 %;	Pectina 1,71 %
a_2b_2 :	Ácido cítrico 1,29 %;	Pectina 1,71 %

Para medir sus efectos sobre la respuesta, se utilizó un panel de degustación, en que participó un grupo de ocho jueces, a los que se les dio a probar cada uno de los productos, en orden diferente, para su evaluación. El orden en que se efectuaron fue determinado al azar.

RESPUESTA: Puntaje promedio, resultado de la evaluación sensorial del producto por un grupo de panelistas, utilizando la escala hedónica (escala de puntuación de preferencia).

Introduciremos un tipo especial de notación utilizada en experimentos factoriales, y que ha sido una de las notaciones tradicionales que se ha empleado. Los niveles de A los designamos por a_1 y a_2 , los de B por b_1 y b_2 , respectivamente. El siguiente esquema muestra los elementos principales de este sencillo experimento:

1	2	3	4	5
CORRIDA EXPERIMENTAL	DISEÑO		COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
	FACTOR A	FACTOR B		
1	a_1	b_1	a_1b_1	Y_{11}
2	a_2	b_1	a_2b_1	Y_{21}
3	a_1	b_2	a_1b_2	Y_{12}
4	a_2	b_2	a_2b_2	Y_{22}

Tabla 2.1: Tabla de Combinaciones de Tratamientos del Diseño Experimental 2^2

Cada una de las cuatro filas es una corrida experimental. La segunda y tercera columnas constituyen lo que controla el experimentador, y es el diseño del experimento. La cuarta columna es una representación simbólica de cada combinación de niveles de ambos factores. Cada uno de sus elementos es una combinación de tratamientos. La última columna es lo que se mide, como resultado de cada corrida experimental, y está constituida por números, que son las respuestas.

A veces se utilizan los símbolos de la columna 4 para las respuestas, en lugar de los símbolos de la columna 5. Por lo que, a_1b_2 puede representar el nombre de la combinación de tratamientos constituida por A al nivel bajo y B al nivel alto, como también puede

representar el número Y_{12} , indistintamente. Según el contexto en que se encuentra, se sabrá que está simbolizando.

El siguiente diagrama ilustra, en forma esquemática, los elementos que constituyen el experimento 2^2 :

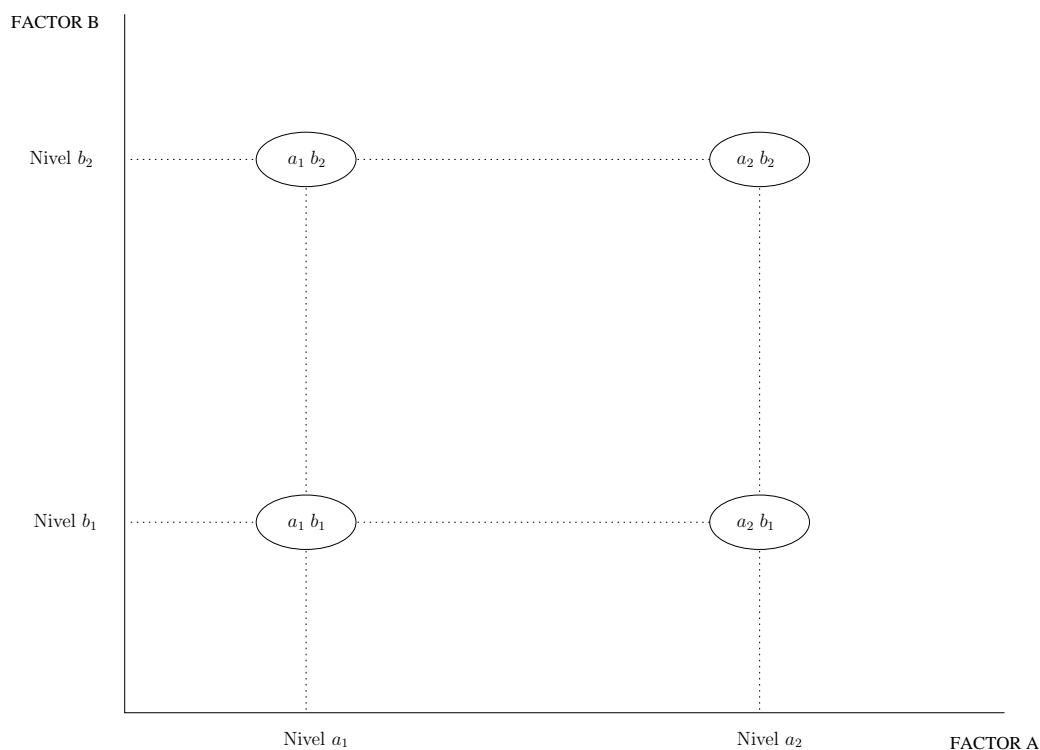


Figura 2.1: Representación gráfica del experimento 2^2

ESTUDIO DE CASO: Precisión del test de disolución utilizado en la industria farmacéutica.

La industria farmacéutica tiene que asegurar al paciente la entrega de medicamentos de elevada calidad. Uno de los requisitos de calidad de un medicamento es que sea efectivo. Para medir este parámetro se han diseñado diversas pruebas de laboratorio. En el caso de las formas farmacéuticas sólidas, específicamente comprimidos, se ha difundido ampliamente el uso del *test de disolución*. Se trata de un test diseñado para simular de la manera más fidedigna posible, aquellas condiciones *in vivo* que afectan la velocidad de disolución y por lo tanto de biodisponibilidad del medicamento. El objetivo de este test, entonces, es dar una aproximación a la evaluación de la disponibilidad fisiológica

de la droga y proveer un medio de control para asegurar que todos los lotes muestran similar efectividad clínica.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO: El objetivo del presente experimento es evaluar el efecto que tienen algunos componentes del test de disolución, sobre la velocidad de la disolución de comprimidos del medicamento Prednisona.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: Se diseñó a dos factores, el tipo de aparato y la velocidad de rotación, con dos niveles cada uno. Se hicieron seis réplicas, por cada combinación de tratamientos.

FACTORES	NIVELES
A: Tipo de aparato	a_1 : Canastillo rotatorio a_2 : Paleta
B: Velocidad de rotación	b_1 : 50 revoluciones por min. b_2 : 100 revoluciones por min.

RESPUESTA: La respuesta es el porcentaje del contenido de Prednisona declarado (50 mg.) que se disuelve en un tiempo de 30 minutos. Al tiempo 30 minutos se extrae una cantidad de fluido de disolución desde cada uno de seis vasos, y se cuantifica la Prednisona mediante técnicas espectro fotométricas.

LIMITACIONES: Las posibles limitaciones del experimento se deben a la presencia de factores no deseados. Estos factores, y la forma de reducir su influencia, se indican a continuación:

FACTOR	REDUCCIÓN DE SU INFLUENCIA
Montaje del equipo:	Controlar verticalidad de los ejes.
Centrado de los vasos:	Controlar con accesorios específicos, que cada vaso esté centrado.
Regulación de la altura de la paleta o canastillo:	Controlar con regulador de altura y fijar con mecanismo de soporte.
Volumen del fluido:	Medir exactamente el volumen.
Evaporación:	Tapar el vaso durante la experiencia.

Ejemplo 2.1

En la fabricación de placas de madera aglomerada, se utiliza viruta combinada con resina de urea-formaldeido. Una característica deseable del producto terminado, es su rigidez. Se piensa que hay dos factores que inciden en esta característica, y que pueden controlarse.

Uno es el tipo de resina, y el otro es el granulado de la viruta. Se diseña un experimento en que los dos factores tienen dos niveles. La respuesta es la fuerza necesaria para que una placa, de dimensiones determinadas, sufra una deformación de 5 milímetros. La siguiente tabla resume los factores y niveles del experimento:

FACTORES	NIVELES
$A :$ Tipo de resina	$a_1 :$ Resina Standard $a_2 :$ Resina Nueva
$B :$ Granulado de la viruta	$b_1 :$ Fino $b_2 :$ Grueso

RESPUESTA: Rigidez de la placa. (medida en Kg.). Peso necesario para producir una deformación de 5 milímetros.

Supóngase que realizó el experimento, y la medición de las respuestas dieron los siguientes resultados:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
a_1b_1	$Y_{11} = 16$
a_2b_1	$Y_{21} = 17$
a_1b_2	$Y_{12} = 10$
a_2b_2	$Y_{22} = 23$

Tabla 2.2: Tabla de Respuestas del Experimento de las Placas de Madera

Podemos estimar un efecto promedio global, igual a

$$\begin{aligned}
 \bar{1} &= \frac{1}{4}(a_1b_1 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_2b_2) \\
 &= \frac{16 + 17 + 10 + 23}{4} = 16,5
 \end{aligned}$$

Utilizaremos el número 1 para simbolizar este efecto. Más adelante justificaremos el haber elegido este símbolo.

También podemos estimar un efecto debido al factor A , consistente en la diferencia entre el promedio del nivel a_2 de A menos el promedio al nivel a_1 , diferencia que también podemos llamar pendiente del factor A . Usaremos el símbolo A para designar este efecto:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} [(a_2b_1 + a_2b_2) - (a_1b_1 + a_1b_2)] \\ &= \frac{17 + 23 - 16 - 10}{2} = 7 \end{aligned}$$

Se observa que hay un efecto atribuible al factor A . El signo positivo indica que el valor de la respuesta aumenta cuando pasamos del nivel a_1 al nivel a_2 del factor. Nótese que nuevamente estamos usando un mismo símbolo para dos cosas diferentes: La letra A se utiliza para identificar el factor, así como para simbolizar el valor numérico de su efecto.

Análogamente, podemos calcular un efecto debido al factor B :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} [(a_1b_2 + a_2b_2) - (a_1b_1 + a_2b_1)] \\ &= \frac{10 + 23 - 16 - 17}{2} = 0 \end{aligned}$$

El cero se interpreta como que no hay efecto de B .

La magnitud de la interacción se puede calcular como la mitad de la diferencia entre las pendientes correspondientes al factor A . Las pendientes son las diferencias entre las durezas debido a los dos niveles del factor B .

El símbolo que usamos para la interacción entre A y B es AB . Entonces,

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{2} [(a_2b_2 - a_2b_1) - (a_1b_2 - a_1b_1)] \\ &= \frac{23 - 17 - 10 + 16}{2} = 6 \end{aligned}$$

Este resultado muestra que hay un efecto de interacción.

2.1. Gráfico de Interacción.

Continuando con el Ejemplo 2.1, graficaremos estos resultados para apreciar mejor su comportamiento. El siguiente gráfico representa Rigidez versus Resina, estratificado por Granulado:

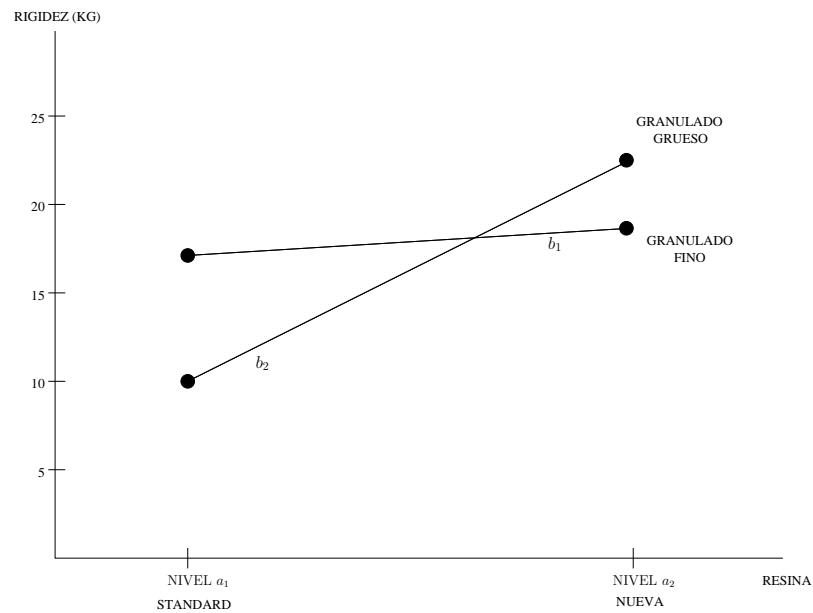


Figura 2.2: Rigidez versus tipo de Resina, estratificado por Granulado

El gráfico que sigue representa Rigidez versus Granulado, estratificado por Resina:

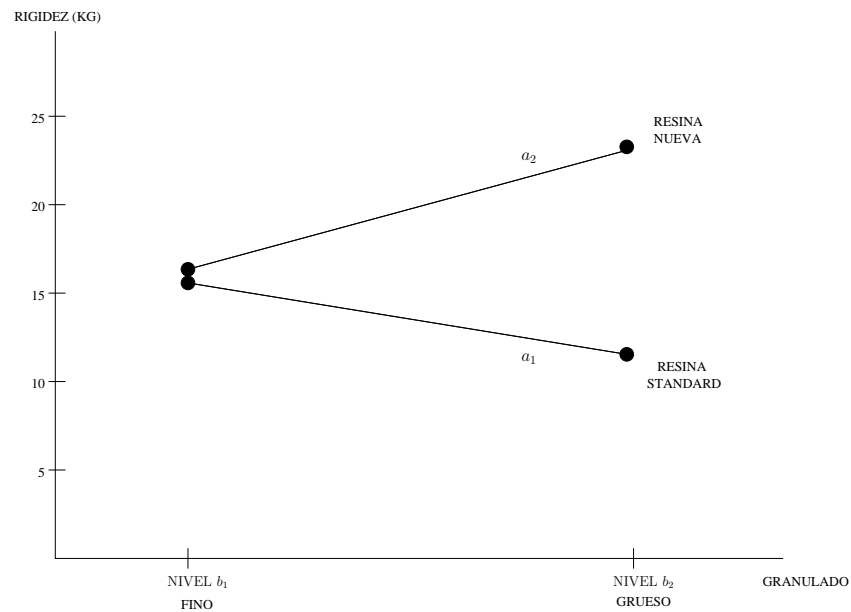


Figura 2.3: Rigidez versus Granulado, estratificado por tipo de Resina

La diferencia en las pendientes de las dos curvas, en ambos gráficos, indica que hay interacción, puesto que muestra gráficamente que la variación de la dureza debido a un factor, es distinta según el nivel a que está el otro factor.

2.2. Matriz de Diseño del Experimento 2^2 .

Los cálculos anteriores, para cuantificar los efectos, se pueden efectuar en forma resumida en una tabla, en la que, en el sentido horizontal, se representa cada uno de los efectos 1, A , B , y AB , y en el sentido vertical, cada uno de las combinaciones de tratamientos. En el interior de la tabla se pone un signo (+) cuando la correspondiente respuesta va sumada, y un signo (−) cuando va restada, en el calculo del efecto. La tabla se denomina Matriz de Diseño, y se muestra a continuación:

RESPUESTA	EFECTO			
	1	A	B	AB
a_1b_1	+	−	−	+
a_2b_1	+	+	−	−
a_1b_2	+	−	+	−
a_2b_2	+	+	+	+

Tabla 2.3: Matriz de Diseño del Experimento 2^2

Nótese que aquí los símbolos a_1b_1 , etc., representan los valores numéricos de las respuestas asociadas a las respectivas combinaciones de tratamientos, que también se simbolizan Y_{11} , etc. Cada columna (vertical) representa un efecto, y es una colección ordenada de los símbolos (+) y (−), que indican el signo que se da a la particular respuesta. En adelante las denominaremos también efectos. Así (+, +, −, −) es un efecto. Hay que convenir en el orden de las combinaciones de tratamientos para saber que mide cada uno. Mantengamos el orden introducido en la representación anterior, llamado orden standard, es decir, a_1b_1 , a_2b_1 , a_1b_2 , a_2b_2 (el primer subíndice varía mas rápidamente que el segundo).

Un efecto es un contraste si tiene tantos (+) como (−). Los efectos correspondientes a A , B y AB son contrastes. El efecto 1 no lo es.

Dos efectos se pueden “multiplicar” de la siguiente forma: Se comparan dos componentes que están en la misma posición relativa en ambos efectos que se están multiplicando. Al resultado se le asigna, en la misma posición relativa, un (+) si ambas componentes de los multiplicandos son iguales, y un (−) si son distintos. Esto se repite para cada componente. De esta manera, $A \times B$ es igual a

$$(-, +, -, +) \times (-, -, +, +) = (+, -, -, +)$$

Obsérvese que el resultado de multiplicar A por B es precisamente la interacción AB . Esta es una bondad de la notación que estamos usando. Entonces podemos escribir

$A \times B = AB$, sin olvidar que esta expresión sólo se refiere a la construcción de la matriz de diseño.

Si el resultado de multiplicar dos contrastes es un contraste, como en el ejemplo anterior, se dice que los contrastes que se multiplicaron son **ortogonales**. Los dos contrastes A y B son ortogonales. Sin embargo, A no es ortogonal consigo mismo, pues el producto es igual a $(+, +, +, +)$, que no es contraste, y que es el efecto promedio, simbolizado por 1. Lo mismo ocurre si multiplicamos cualquier efecto por sí mismo, el resultado es 1. También se puede verificar que al multiplicar el efecto 1 por cualquier efecto, da el mismo como resultado, por ejemplo, $1 \times AB = AB$. Por esa razón se ha escogido el 1 para designar a este efecto promedio.

Otra bondad notacional es la siguiente: Supongamos, por un momento, que hacemos los productos algebraicos entre una de las expresiones $(a_2 + a_1)$ o $(a_2 - a_1)$, por una de las expresiones $(b_2 + b_1)$, o $(b_2 - b_1)$. Obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}(a_2 + a_1)(b_2 + b_1) &= a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_1b_1 \\(a_2 - a_1)(b_2 + b_1) &= a_2b_2 + a_2b_1 - a_1b_2 - a_1b_1 \\(a_2 + a_1)(b_2 - b_1) &= a_2b_2 - a_2b_1 + a_1b_2 - a_1b_1 \\(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) &= a_2b_2 - a_2b_1 - a_1b_2 + a_1b_1\end{aligned}$$

Las expresiones de la derecha son precisamente las fórmulas para calcular los efectos 1, A , B y AB , respectivamente, faltando sólo los divisores, determinadas por la matriz de diseño. Por lo tanto, las expresiones de la izquierda nos permiten construir la matriz de diseño: El signo menos determina el efecto que se está midiendo; el signo más indica que se está promediando sobre los niveles de ese factor; en la interacción se está midiendo el efecto simultáneo de los dos factores. Estos cálculos son sumamente útiles cuando se está trabajando con un número elevado de factores.

Nótese que las expresiones de la izquierda son sólo notación, pues no tiene sentido interpretar, por ejemplo, $(a_2 + a_1)$, como una suma, ya que a_2 y a_1 son valores de una variable categórica.

2.3. Tabla de Respuestas.

Los cálculos numéricos que se hicieron, para determinar los efectos 1, A , B , y AB , se pueden efectuar en forma tabular, por cada efecto, anotando las respuestas en columnas separadas, según su signo. Se promedian ambas columnas y se hace la diferencia, de acuerdo al signo de los números de la columna respectiva. El resultado es una cuantificación del efecto correspondiente. La tabla se denomina Tabla de Respuestas, y se muestra más adelante, para los datos del Ejemplo 2.1.

La fila *Verificación* contiene las sumas de ambas columnas. Sirve como una comprobación parcial, pues debe ser igual a la suma de todas las respuestas. La fila *Neto* contiene el valor absoluto de la suma de los valores de la fila *Total* por los respectivos de la fila *Factor*. La fila *Divisor* se obtiene contando todos los números que hay en la columna respectiva. La fila *Efecto* contiene el cociente entre el Neto y el Divisor respectivo. Los *Rangos* indican el orden de cada efecto, de mayor a menor.

COMPONENTE	IDENTIDAD 1	RESINA A		GRANULADO B		INTERACCION AB	
a_1b_1	16	16		16			16
a_2b_1	17		17	17		17	
a_1b_2	10	10			10	10	
a_2b_2	23		23		23		23
TOTAL	66	26	40	33	33	27	39
VERIFICACIÓN	66		66		66		66
FACTOR		-1	+1	-1	+1	-1	+1
NETO	66		14		0		12
DIVISOR	4		2		2		2
EFFECTO	16,5		7		0		6
RANGO			1		3		2

Tabla 2.4: Tabla de Respuestas del Experimento 2^2 , del Ejemplo 2.1

2.4. Diagrama de Efectos.

El Diagrama de Efectos es una representación gráfica de los efectos, que tiene por objeto comparar sus magnitudes. Se dibuja una línea horizontal, que representa el promedio global, o identidad, que en el caso del Ejemplo 2.1 es igual a 16,5. Luego se trazan verticales, centradas en la horizontal, cuyas longitudes son proporcionales a los efectos. Estos trazos se posicionan de tal forma que sus extremos estén todos sobre una recta diagonal; de esta manera, se visualiza mejor la forma en que se agrupan, de acuerdo a sus magnitudes.

El resultado, para el Ejemplo 2.1, es el siguiente, en el que se aprecia un fuerte efecto del factor *A*, y de la interacción *AB*, y ningún efecto del factor *B*.

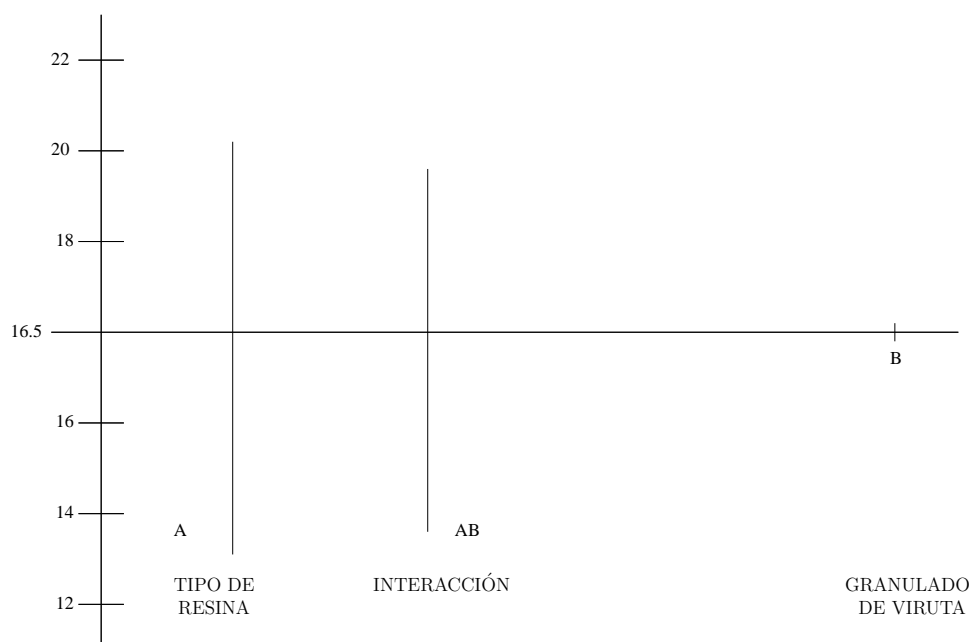


Figura 2.4: Diagrama de Efectos del Ejemplo 2.1

2.5. Aleatorización.

El orden en que se hacen las cuatro corridas experimentales puede influir en los resultados, por diversos otros factores, desconocidos para el experimentador, como, por ejemplo, el aprendizaje que va adquiriendo el operador, una deriva de los instrumentos de medición, la variación en los materiales experimentales asignados a cada una de las corridas, u otros posibles factores que afectan el resultado, en pequeña medida.

Por esta razón, el orden en que se efectúan los experimentos no es el orden en que aquí se presentan las combinaciones de tratamientos, y que se llama orden standard. El orden debe ser aleatorio, determinándose por sorteo o utilizando números tomados de una tabla de números aleatorios o generados por una calculadora. Esto es un seguro que protege contra efectos producidos por factores escondidos, que el experimentador desconoce.

2.6. Réplicas.

El grado de precisión con que se estiman los diversos efectos, como resultado de un experimento, se puede aumentar repitiendo las corridas experimentales que corresponden a cada combinación de tratamientos, un número determinado de veces. También el hecho de tener réplicas permite estimar el efecto del error experimental, al disponer de medidas tomadas bajo las mismas condiciones experimentales.

Es deseable que el número de réplicas sea igual para cada combinación de tratamientos. En tal caso se dice que el experimento está *balanceado*. Hay casos en que no es posible, o parte de la información se perdió, como por ejemplo, en un experimento agrícola, con plantas, algunas de las cuales se mueren durante el desarrollo de la experimentación, o bien por razones de costo, algunas corridas pueden ser muy caras, por lo que pueden repetirse menos veces. En tales casos se dice que el experimento está *desbalanceado*.

El cálculo de los efectos principales e interacciones, con réplicas, en el caso balanceado, se hace de manera similar a la forma mostrada en el ejemplo anterior, solo que en lugar de la respuesta de cada combinación de tratamientos, se pone el promedio, a través de las réplicas. El caso desbalanceado también permite hacer estas estimaciones, tomando los promedios.

ESTUDIO DE CASO: Secado de sanitarios.

Una empresa productora de loza tiene tres plantas: Vajillería, Azulejos y Sanitarios. En la planta de sanitarios existe una nave de proceso que incluye una subnave denominada de *colaje*.

En esta subnave hay 100 moldes de yeso, que se llenan de pasta líquida, una mezcla de arcilla con agua, más aditivos. Pasado cierto tiempo se produce el colaje, que consiste en que la pasta líquida se seca parcialmente dentro de los moldes, lo que da la forma al sanitario. Luego se desmoldan, y el operario colajero les hace el despunte, consistente en pulir la pieza y afinar sus dimensiones.

Terminadas las operaciones anteriores, se dejan secar los 100 sanitarios con sus respectivos moldes durante 24 horas, para extraer el agua en exceso que aún contienen.

Para efectuar el secado de los sanitarios y los moldes, se le inyecta aire caliente a la subnave, que está aislada térmicamente. El croquis de la página siguiente ilustra el proceso.

El proceso de secado debe ser capaz de extraer el máximo contenido de agua de los artefactos, en el menor tiempo posible. Afectan a esta variable, el caudal de aire inyectado a la subnave y la temperatura interior.

Para hacer más eficiente el proceso, se diseñó el experimento factorial que se describe a continuación.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO: El objetivo es optimizar el proceso de secado, en función de los factores controlables.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: Los factores son dos, con dos niveles cada uno, según

se describe a continuación:

FACTORES	NIVELES
A : Caudal de aire inyectado	a_1 : 15000 m ³ por hora a_2 : 18000 m ³ por hora
B : Temperatura interior	b_1 : 30 °C b_2 : 40 °C

RESPUESTA: Cantidad de agua evaporada por día, en litros. Esta se mide pesando una muestra de sanitarios y moldes a las cero horas de cada día de secado. La diferencia entre los pesos de dos días consecutivos, es el peso del agua evaporada en el día.

El experimento se condujo con cinco réplicas por combinación de tratamientos.

Los resultados se dan en la siguiente tabla:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA		
	REPLICA 1	REPLICA 2	PROMEDIO
a_1b_1	790	810	800,0
a_2b_1	874	903	888,5
a_1b_2	835	853	844,0
a_2b_2	927	945	936,0

El resultado del experimento, como se ve en el diagrama de efectos y en los gráficos de interacción, mostró una fuerte influencia del caudal de aire inyectado. También hay efecto de la temperatura ambiente, aunque más débil. La interacción fue casi nula, lo que se aprecia en ambos gráficos. En los gráficos de interacción, se manifiesta en el paralelismo de las rectas. El efecto del factor caudal de aire se observa por la fuerte inclinación de las rectas del primer gráfico de interacción. En el otro, la inclinación es menor. A partir de estos resultados, se diseñaron nuevos experimentos, con el objeto de afinar el estudio.

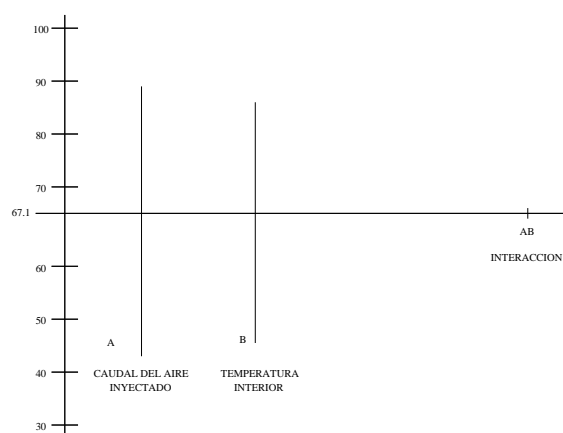


Figura 2.5: Diagrama de Efectos del experimento de Secado de Sanitarios

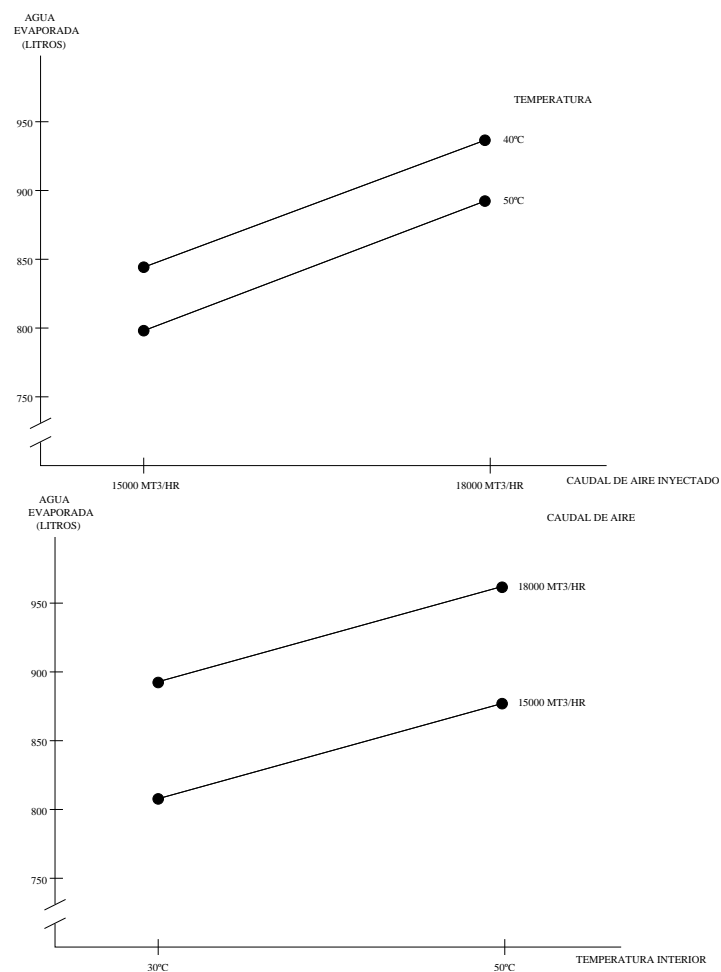


Figura 2.6: Gráficos de Interacción del experimento de Secado de Sanitarios

EJERCICIOS.

Ejercicio 2.1

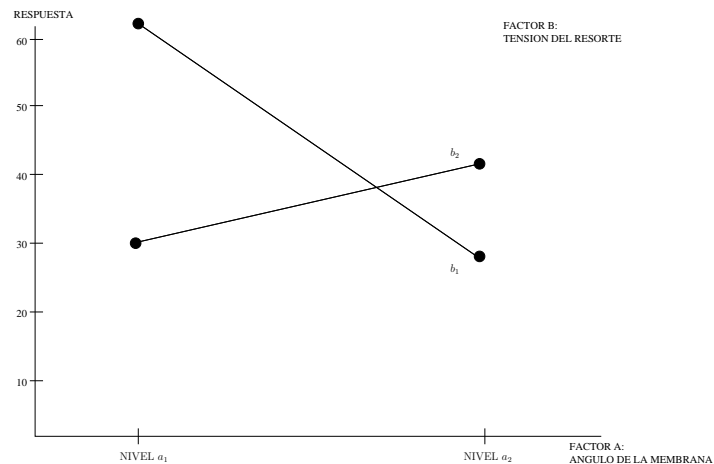
Una distribuidora de productos químicos, compra sus productos en partidas grandes, los reenvasa y los vende al detalle. Dispone de una máquina para vaciar compuestos líquidos oleaginosos, desde sus contenedores metálicos, a envases plásticos de un litro. Se desea modificar el dispositivo que controla el vaciado, de modo de lograr mayor precisión en la cantidad de líquido vertida en los envases plásticos. Para ello, se ha determinado que hay dos elementos que pueden modificarse sin gran dificultad, y que potencialmente inciden sobre la variable que se quiere controlar. Estos son, el ángulo de la membrana que cierra el conducto de salida y la tensión del resorte que la cierra.

Se realiza un experimento para probar el efecto de estos dos factores, con dos niveles cada uno. Los factores y sus niveles son:

FACTORES	NIVELES
A : Ángulo de la membrana	a_1 : 30 a_2 : 45
B : Tensión del resorte	b_1 : Simple b_2 : Doble

RESPUESTA: Es una medida de variabilidad de la cantidad de líquido vertido, el rango intercuartílico.

El siguiente gráfico de interacciones muestra las respuestas, versus el factor A , estratificado por B :



- a) Construya el gráfico de interacción de la respuesta versus el factor B , estratificado por A . Agregue, en línea punteada, el gráfico de la respuesta versus el factor B , promediado sobre A (sin estratificar).
- b) De la observación de cualquiera de los gráficos, determine si hay efecto de A , de B , y de interacción.

Ejercicio 2.2

Un experimento consiste en observar el efecto del turno y del supervisor, sobre la calidad, en la fabricación de muebles. Hay dos turnos (mañana y tarde), y dos supervisores (supervisor 1 y supervisor 2). Se observa el número de fallas (imperfecciones) en los muebles producidos bajo cada una de las cuatro combinaciones de tratamientos, en tres réplicas cada una. La respuesta es el total de fallas observadas en las tres réplicas. La siguiente tabla resume las observaciones:

TURNO	SUPERVISOR	NÚMERO DE FALLAS
MAÑANA	1	19
	2	23
TARDE	1	19
	2	21

- a) Construya la tabla de respuestas y obtenga los valores de los efectos.
- b) Dibuje el diagrama de efectos e interprete los resultados, en términos de si hay o no efectos principales e interacciones.
- c) Construya los gráficos de interacción e interpréte los. ¿Hay consistencia con lo observado en b)?

Ejercicio 2.3

Repita lo del Ejercicio 2.2, para los siguientes datos:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
a_1b_1	27
a_2b_1	30
a_1b_2	31
a_2b_2	34

Ejercicio 2.4

El proceso de producción de cátodos de cobre entrega un producto que no está libre de contaminantes. Uno de ellos es el cloruro, que no afecta las características físicas del

cobre, sino que en el proceso de moldeo posterior, contribuye en forma importante a contaminar el ambiente, razón por la cual se debe controlar la cantidad de este compuesto, de modo que no sobrepase un límite especificado. Para determinar la influencia del laboratorio que hace el análisis y de la técnica analítica utilizada, se diseñó un experimento a dos factores con dos niveles cada uno. El experimento consistió en analizar cátodos producidos en una misma partida, y por lo tanto de características similares. Los factores y sus niveles son:

FACTORES	NIVELES
A : Laboratorio	a_1 : Testlab a_2 : Omega
B : Técnica Analítica	b_1 : Método Directo b_2 : Método Indirecto

La respuesta es el contenido de cloruro, en partes por millón. El experimento se hizo con tres replicas. Los resultados son los siguientes:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
a_1b_1	312
a_2b_1	421
a_1b_2	211
a_2b_2	450

- Construya la tabla de respuestas y obtenga los valores de los efectos.
- Dibuje el diagrama de efectos e interprete los resultados, en términos de si hay o no efectos principales e interacciones.

Capítulo 3

Diseños Factoriales con Tres Factores a Dos Niveles

Introducción

Los diseños 2^3 son diseños en que hay tres factores, cada uno con dos niveles. El número de combinaciones de tratamientos ahora es 8 ($= 2^3$). Al introducir un tercer factor en el experimento, con dos niveles, se duplica el número total de corridas. Identificaremos al tercer factor con la letra C , y sus niveles los designamos c_1 y c_2 , respectivamente.

ESTUDIO DE CASO: Efecto de catalizadores en la emisión de SO_2 a la atmósfera, en una planta de producción de ácido sulfúrico.

En la producción de ácido sulfúrico, hay emisión de dióxido de azufre (SO_2), compuesto polucionante de la atmósfera. El uso de catalizadores en los convertidores de plantas de Acido Sulfúrico, que permiten la transformación de SO_2 a trióxido de azufre (SO_3) dentro del proceso de producción, disminuye la emisión de SO_2 a la atmósfera.

Los catalizadores son cilindros de 10 mm de diámetro y 10 mm de alto, que contienen pentóxido de vanadio. Estos son colocados en capas, en el convertidor catalítico de la planta, que permite oxidar el SO_2 contenido en los gases de alimentación, transformándolo en SO_3 .

Normalmente los catalizadores tienen las especificaciones requeridas, de acuerdo a la información entregada por los proveedores. Por ello la decisión de comprar una marca específica, queda determinada por el precio.

Se diseñó un experimento, con el objeto de que la decisión tenga un soporte técnico, basado en los resultados operacionales obtenidos.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO: El objetivo del experimento es evaluar el comportamiento de dos marcas de catalizadores, utilizados en los convertidores de plantas de Ácido Sulfúrico.

DISEÑO: El experimento se diseñó a tres factores, con dos niveles cada uno, que se describen a continuación:

FACTORES	NIVELES
A : Catalizador.	a_1 : Catalizador tipo I. a_2 : Catalizador tipo II.
B : Tiempo de operación.	b_1 : 1 mes. b_2 : 12 meses.
C : Flujo de gas.	c_1 : 348 a 891 m ³ /hora. c_2 : 1139 a 1867 m ³ /hora.

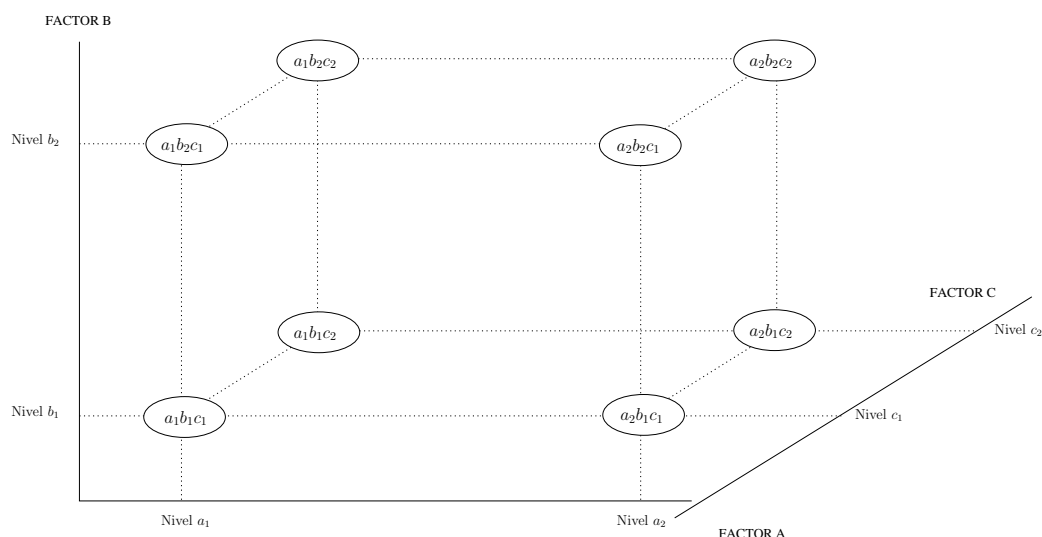
RESPUESTA: Factor de emisión de SO₂ a la atmósfera, expresada en porcentaje. Este es medido instantáneamente, con instrumentación en línea. Se hicieron siete réplicas de cada combinación de tratamientos, lo que dio 56 corridas experimentales.

En un experimento 2^3 , el número de combinaciones distintas de niveles de los tres factores, o combinaciones de tratamientos, que se pueden aplicar, los simbolizamos de la forma siguiente:

CORRIDA EXPERIMENTAL	COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
1	$a_1b_1c_1$	Y_{111}
2	$a_2b_1c_1$	Y_{211}
3	$a_1b_2c_1$	Y_{121}
4	$a_2b_2c_1$	Y_{221}
5	$a_1b_1c_2$	Y_{112}
6	$a_2b_1c_2$	Y_{212}
7	$a_1b_2c_2$	Y_{122}
8	$a_2b_2c_2$	Y_{222}

Tabla 3.1: Tabla de Combinaciones de Tratamientos del Diseño Experimental 2^3 .

Al igual que en el caso 2^2 , los símbolos de la segunda columna pueden usarse para representar, además de la particular combinación de tratamientos, el valor numérico de la respuesta respectiva, en lugar de utilizar los símbolos de la tercera columna. Por lo tanto el símbolo $a_1b_2c_1$ representa a la combinación de tratamientos en que el factor A está al nivel a_1 , B está al nivel b_2 y C está al nivel c_1 . O bien, también representa al número Y_{121} , la respuesta de esa particular combinación de tratamientos. El gráfico siguiente ilustra en forma esquemática, los elementos de este diseño.

Figura 3.1: Representación Gráfica del Experimento 2^3 **ESTUDIO DE CASO: Ley de cal libre en el proceso de producción de cal.**

El proceso de producción de cal comienza con la introducción de carbonato de calcio (CaCO_3) en un horno rotatorio de velocidad variable, en cuyo extremo de salida hay un quemador que produce una temperatura de alrededor de 1200°C en la zona de calcinación.

Con el objeto de mejorar la calidad del producto, es necesario controlar las fuentes de variación de la ley de cal libre, CaO .

Para este fin, se diseñó un experimento para medir el efecto de tres variables de operación, sobre la calidad del producto.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: Se diseñó a tres factores, a dos niveles cada uno: Tamaño de la carga, Velocidad de Giro y Calor, de acuerdo a la siguiente descripción:

FACTORES	NIVELES
A : TAMAÑO DE LA CARGA	a_1 : Granulometría de $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$ plg. a_2 : Granulometría de $\frac{3}{4}$ a $1\frac{1}{2}$ plg.
B : VELOCIDAD DE GIRO	b_1 : Bajo 1,5 rpm. b_2 : Sobre 1,5 rpm.
C : CALOR	b_1 : Bajo 1200°C . b_2 : Sobre 1200°C .

RESPUESTA: La respuesta es la ley de cal libre, medida en porcentaje de ley.

LIMITACIONES: Algunos posibles factores no deseados que puedan afectar la respuesta son:

- I El CaCO_3 introducido al horno puede variar su concentración de CaO , con lo cual los resultados serían afectados. Si se analiza la concentración de CaO en el CaCO_3 , este efecto puede ser minimizado corrigiendo la respuesta.
- II El tiempo de residencia del CaCO_3 en el horno debe ser considerado antes de cada corrida, a fin de que la respuesta medida corresponda realmente a lo que se desea medir y no a residuos del experimento anterior. Por ello se efectúa una corrida experimental en un día completo, y se observan los resultados de todo un día.

ESTUDIO DE CASO: Análisis de laboratorio para la determinación de contenido de cloruro en cátodos de cobre.

El cátodo de cobre es el principal producto que produce una compañía productora de cobre. Es obtenido electrolíticamente, por alguno de los siguientes tres procedimientos: De soluciones provenientes de los procesos cuyos minerales son directamente solubles en ácido sulfúrico, o bien, por una preconcentración del deshecho de la etapa anterior, por un sistema de percolación *in situ* y posterior separación con un solvente orgánico. El tercer procedimiento consiste en la refinación de cobre blister de los procesos en que se trata el cobre provenientes de minerales insolubles en ácido sulfúrico, y que se concentran en etapas de flotación y fusión.

Aparte de la pureza en el contenido del elemento principal, son importantes algunos elementos que no es posible eliminar del todo, y que se llaman impurezas. La naturaleza y cantidad de éstas, de alguna manera determina el destino final que se le da a este producto.

Dependiendo del uso que se le dará al producto, hay especificaciones sobre los porcentajes máximos de contenido de determinados elementos. A mayores concentraciones de impurezas, menor es el precio de venta del producto.

Por esa razón, es preocupación importante de la empresa, poder contar, en sus procesos, con sistemas que reduzcan en forma importante la cantidad de impurezas. Uno de los elementos que interesa controlar es el cloruro, cuya presencia produce contaminación ambiental, durante los procesos de moldeo, laminado, etc.

Para poder controlar la presencia de este elemento, se debe contar con un sistema de análisis de laboratorio confiable. Para analizar, se selecciona una muestra aleatoria de cátodos, los que se perforan para obtener virutas, que son disueltas en ácido nítrico. La presencia del ión plata precipita el cloruro en forma de cloruro de plata.

Se puede pesar el cloruro de plata sólido, para cuantificar el contenido de cloruro. Este se denomina método directo. Como alternativa, se puede disolver el cloruro de plata

en exceso de ácido clorhídrico, y así cuantificar el cloruro. Este se denomina Método Indirecto.

Un problema que existe, es la no homogeneidad en la distribución del cloruro en el cátodo. Esto ocasiona serias dificultades para lograr una buena precisión en los resultados del análisis.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO: El objetivo es conocer la influencia de los potenciales factores que afectan la precisión de la cuantificación del cloruro en muestras de cátodos de cobre.

DISEÑO: Se diseñó a tres factores, con dos niveles cada uno. El primer factor es el laboratorio, a fin de investigar el efecto de que la muestra sea tratada en diversos ambientes. El segundo factor es la masa de muestra; se piensa que el aumentar su tamaño, tiende a homogeneizar su contenido. El tercero es el método de análisis, directo o indirecto.

FACTORES	NIVELES
$A :$ Laboratorio.	$a_1 :$ Laboratorio Chuquicamata. $a_2 :$ Laboratorio Antofagasta.
$B :$ Masa de muestra.	$b_1 :$ 50 gramos. $b_2 :$ 10 gramos.
$C :$ Técnica analítica.	$c_1 :$ Método directo. $c_2 :$ Método indirecto.

RESPUESTA: La respuesta es la concentración cuantitativa del cloruro, en partes de cloruro por millón de partes de cátodo de cobre.

Para asegurar la homogeneidad del material a analizar, se obtuvieron 10 muestras distintas, y cada una se dividió en ocho porciones, cada una de las cuales se utilizó para una combinación de tratamientos. Las diez muestras constituyeron diez réplicas.

3.1. Matriz de Diseño del Experimento 2^3 .

En forma similar a como se hizo en el caso del diseño 2^2 , podemos combinar las respuestas en diversas formas, para estimar los diferentes efectos. Por ejemplo, el número

$$A = \frac{1}{4}(a_2b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_2b_1c_2 + a_2b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2 - a_1b_2c_2)$$

es la diferencia entre todas las respuestas que resultan de aplicar el nivel alto del factor A , menos todas las respuestas que resultan de aplicar el nivel bajo del mismo factor.

Es, pues, una medida del efecto del factor A . Usaremos el símbolo A para indicar esta medida, que llamamos efecto A . De forma análoga, el efecto del factor B , es

$$B = \frac{1}{4}(a_1b_2c_1 + a_2b_2c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_1 - a_1b_1c_2 - a_2b_1c_2)$$

y el efecto del factor C es

$$C = \frac{1}{4}(a_1b_1c_2 + a_2b_1c_2 + a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_1)$$

Observemos que si hacemos un poco de álgebra con estas expresiones, como si fueran expresiones algebraicas, lo que en realidad no son, podemos factorizarlas, obteniendo notaciones formales que utilizaremos en forma equivalente. Ellas son,

$$A = \frac{1}{4}((a_2 - a_1)(b_2 + b_1)(c_2 + c_1))$$

$$B = \frac{1}{4}((a_2 + a_1)(b_2 - b_1)(c_2 + c_1))$$

$$C = \frac{1}{4}((a_2 + a_1)(b_2 + b_1)(c_2 - c_1))$$

Pero hay más expresiones similares que podemos formar, y que trataremos de interpretar, como por ejemplo,

$$\frac{1}{4}(a_1b_1c_1 + a_2b_1c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_1 - a_1b_1c_2 - a_2b_1c_2)$$

que podemos escribir como

$$\frac{1}{4}([(a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_2 + a_2b_1c_2)] - [(a_1b_2c_1 + a_2b_2c_1) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_1)])$$

El primer paréntesis cuadrado es una diferencia entre el resultado de aplicar el factor B al nivel alto menos el resultado de aplicarlo al nivel bajo, todo bajo el nivel alto de C . En resumen, es el efecto de B bajo la presencia de C . El segundo paréntesis es lo mismo, pero al nivel bajo de C , o el efecto de B en ausencia de C . Entonces la expresión completa mide la diferencia entre los efectos del factor B bajo los dos niveles del factor C , promediada a través de todos los niveles del factor A . Esta medida se denomina interacción entre B y C , y la simbolizamos BC . Observemos que la podemos expresar también, siguiendo el análogo algebraico, como

$$BC = \frac{1}{4}((a_2 + a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1))$$

De manera similar,

$$AB = \frac{1}{4}((a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 + c_1))$$

$$\text{y } AC = \frac{1}{4}((a_2 - a_1)(b_2 + b_1)(c_2 - c_1))$$

representan las interacciones entre A y B , y entre A y C , respectivamente. Las tres primeras expresiones, es decir A , B y C , representan lo que se denominan efectos principales. Por último, quedan dos expresiones más que es posible formar, y que sería interesante tratar de interpretar. Ellas son

$$\frac{1}{4}((a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1))$$

y

$$\frac{1}{4}((a_2 + a_1)(b_2 + b_1)(c_2 + c_1))$$

La primera corresponde al número

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(a_2b_1c_1 + a_1b_2c_1 + a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2 - a_2b_2c_1 - a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 - a_1b_1c_1) \\ &= \frac{1}{4}([(a_2b_1c_1 - a_2b_2c_1) - (a_1b_1c_1 - a_1b_2c_1)] - [(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_2 - a_1b_2c_2)]) \end{aligned}$$

y es la diferencia (bajo los dos niveles de C), entre las diferencias de los efectos de B , bajo los dos niveles de A . Es lo que se denomina interacción entre A , B y C , o interacción triple. La simbolizamos ABC .

Observemos que las siete expresiones vistas hasta aquí, los efectos principales, las interacciones dobles y la interacción triple, tienen la particularidad de que al desarrollarlas, tienen cuatro términos o componentes positivas y cuatro negativas. Al igual que en el caso del diseño 2^2 , una expresión que tiene el mismo número de componentes positivas que negativas se denomina contraste.

La última expresión,

$$\frac{1}{8}((a_2 + a_1)(b_2 + b_1)(c_2 + c_1))$$

es igual a

$$\frac{1}{8}(a_1b_1c_1 + a_2b_1c_1 + a_1b_2c_1 + a_2b_2c_1 + a_1b_1c_2 + a_2b_1c_2 + a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2)$$

y no es un contraste, pues todos los términos aparecen con signo positivo. La simbolizamos por 1, y no es una comparación entre los efectos provocados por diversas combinaciones de tratamientos. Tiene 8 términos con signo (+), en lugar de 4, como los contrastes. Por eso lo dividimos por 8 y no por 4, como los anteriores; ahora promediamos 8 cantidades, antes promediábamos 4 diferencias. Proporciona una medida del efecto promedio de todos los tratamientos.

Construiremos una matriz de diseño, como en el caso 2^2 . La expresión para un efecto consiste en una colección ordenada de los símbolos (+) y (−), que indican el signo de la componente asociada a la correspondiente combinación de tratamientos. Hay que convenir en el orden de las combinaciones de tratamientos para saber qué mide cada una. Mantengamos el orden introducido en la representación anterior, llamado orden standard, es decir,

$$a_1b_1c_1, a_2b_1c_1, a_1b_2c_1, a_2b_2c_1, a_1b_1c_2, a_2b_1c_2, a_1b_2c_2, a_2b_2c_2$$

Igual que antes, una expresión es un contraste si tiene tantos (+) como (-). De esta forma

$$(-, +, -, +, -, +, -, +), (-, -, +, +, -, -, +, +) \text{ y } (-, -, -, -, +, +, +, +)$$

son contrastes. Estos contrastes son A , B y C , respectivamente. Esto se puede verificar fácilmente, recordando que donde hay un (+), la respectiva combinación de tratamientos va con un signo más, y donde hay un (-), con signo menos.

Como en el caso 2^2 , dos contrastes se pueden “multiplicar” comparando los pares de componentes que están en la misma posición relativa en ambos contrastes que se están multiplicando. Al resultado se le asigna, en la misma posición relativa, un (+) si ambas componentes de los multiplicandos son iguales, y un (-) si son distintos. Esto se repite para cada componente. De esta manera, $A \times B$ es igual a

$$(-, +, -, +, -, +, -, +) \times (-, -, +, +, -, -, +, +) = (+, -, -, +, +, -, -, +)$$

Obsérvese que aquí también el resultado de multiplicar A por B es precisamente la interacción AB . Si “ \times ” representa la multiplicación de contrastes, definida arriba, podemos decir que $A \times B = AB$, igualdad que facilita la construcción de la Matriz de Diseño.

Si el resultado de multiplicar dos contrastes es un contraste, como en el ejemplo anterior, se dice que los contrastes son ortogonales entre sí, tomados de a pares, lo que se puede verificar fácilmente. Sin embargo, A no es ortogonal con el contraste $(-, +, +, +, -, -, -, +)$, pues el producto es igual a $(+, +, -, +, +, -, +, +)$, que no es contraste por tener seis (+) y dos (-).

Con paciencia se puede ver que si se multiplican los contrastes A , B y C , de a pares, y después los resultados se multiplican entre si y por los originales, y así sucesivamente, sólo aparecerán 7 contrastes distintos, todos los demás estarán repetidos. En realidad, en un experimento 2^3 el máximo número de contrastes ortogonales que se puede encontrar es 7. En un experimento 2^2 es 3, en un 2^4 es 15, etc. En general, en un experimento 2^k , el número de contrastes ortogonales que se puede encontrar es $2^k - 1$. Podemos completar el conjunto, para que sean 2^k , con la expresión que tiene sólo (+), que llamamos identidad, y que designamos por 1. No es contraste, pero tiene la particularidad de que al multiplicarlo por otro contraste da ese mismo contraste, por eso el uso del 1 como símbolo. Además, un contraste multiplicado por si mismo da la identidad. De esta forma, por ejemplo, $A \times A$ es igual a 1, $AB \times AB$ es igual a 1, $ABC \times C$, que se puede denotar como ABC^2 , es lo mismo que AB , A^2BC^2 es igual a B , etc.

Todas las expresiones contenidas en un conjunto ortogonal tienen interpretación. En el experimento 2^3 , el conjunto de contrastes ortogonales está constituido por los efectos principales A , B y C , las interacciones dobles AB , AC y BC , y la interacción triple ABC . También contiene la identidad (que no es contraste). La tabla siguiente contiene el conjunto de los siete contrastes ortogonales de 2^3 y su identidad. Se agregó una columna con las combinaciones de tratamientos que intervienen en las expresiones, para verificar que efectivamente miden lo que se señala con el símbolo con que se designa cada contraste. La tabla permite efectuar los productos. Se denomina *Matriz de Diseño* del experimento 2^3 .

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	CONTRASTES							
	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
$a_1b_1c_1$	+	-	-	+	-	+	+	-
$a_2b_1c_1$	+	+	-	-	-	-	+	+
$a_1b_2c_1$	+	-	+	-	-	+	-	+
$a_2b_2c_1$	+	+	+	+	-	-	-	-
$a_1b_1c_2$	+	-	-	+	+	-	-	+
$a_2b_1c_2$	+	+	-	-	+	+	-	-
$a_1b_2c_2$	+	-	+	-	+	-	+	-
$a_2b_2c_2$	+	+	+	+	+	+	+	+

Tabla 3.2: Matriz de Diseño del Experimento 2^3

ESTUDIO DE CASO: Materiales aislantes de ruido, para encerramiento de una máquina de forja.

Se efectuó un estudio con el objeto de evaluar el comportamiento de materiales absorbentes de ruido, tales como goma de 1/2 de pulgada de espesor, y virutilla de 1/4 de pulgada de espesor, combinada con Internit de 4 mm de espesor, con la finalidad de determinar el o los materiales más adecuados para fabricar un encerramiento de una fuente sonora, consistente en una máquina de forja. Además se requiere probar estos materiales en función de dos niveles de frecuencias críticas de sonido, que son 500 y 4000 Hz.

Al mismo tiempo se quiso comprobar que el nivel de presión sonora es inversamente proporcional a la distancia de la fuente sonora. Se consideraron distancias a 1 y 4mts.

OBJETIVOS DEL EXPERIMENTO: Investigar el comportamiento de materiales absorbentes de ruido, factibles de ser usados en encerramiento de las fuentes sonoras para la atenuación de las frecuencias fundamentales de 500 y 4000 Hz.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: Es un experimento a tres factores, con dos niveles cada uno, a una réplica por cada combinación de tratamientos, según la siguiente descripción:

FACTORES	NIVELES
A : Material Absorbente.	a_1 : Goma de 1/2 pulgada de espesor. a_2 : Virutilla de 1/4 de pulgada de espesor entre dos placas de Internit de 4 mm de espesor.
B : Frecuencia de Sonido.	b_1 : 500 Hz. b_2 : 4000 Hz.
C : Distancia a la Fuente Emisora.	c_1 : 1 mt. c_2 : 4 mts.

RESPUESTA: La respuesta es el nivel de decibeles del ruido. Se usó un sonómetro de precisión Bruel Kjaer 2203, que cumple con las normas de sonómetro. El equipo se utilizó con un micrófono con la extensión UAD 196 de acuerdo a normas. Este instrumento lleva incorporado el analizador de frecuencia 1613 que posee una gama de frecuencias centrales de 31,5 Hz a 31,5 KHz. Tipo de análisis, de bandas de octavas.

REALIZACIÓN DEL EXPERIMENTO: Todas las mediciones se realizaron un día domingo en la madrugada, desde las 01:00 a las 06:00 hrs. El ruido de fondo era de baja intensidad, aproximadamente 40 decibeles. Antes y después de usar el sonómetro, se verificó la calibración acústica, utilizando un pistófono 4220, dando siempre la lectura de 124 decibeles en 250 Hz.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
$a_1 b_1 c_1$	$Y_{111} = 96$ db.
$a_2 b_1 c_1$	$Y_{211} = 91$ db.
$a_1 b_2 c_1$	$Y_{121} = 90$ db.
$a_2 b_2 c_1$	$Y_{221} = 92$ db.
$a_1 b_1 c_2$	$Y_{112} = 92$ db.
$a_2 b_1 c_2$	$Y_{212} = 89$ db.
$a_1 b_2 c_2$	$Y_{122} = 86$ db.
$a_2 b_2 c_2$	$Y_{222} = 90$ db.

3.2. Tabla de Respuestas y Diagrama de Efectos del Experimento 2^3 .

Como en el caso 2^2 , introduciremos una forma tabular de presentar las respuestas, es decir, los valores observados de la variable Y , bajo las distintas combinaciones de tratamientos. Esta tabla permite efectuar los cálculos necesarios para medir los efectos de cada factor y de sus interacciones.

La tabla se organiza de la forma como indica la matriz de diseño, dejando dos columnas por cada contraste. La columna de la izquierda se utiliza para copiar las respuestas en que los contrastes tienen un signo (+), la de la derecha para copiar las respuestas en que hay un signo (-). El valor que se copia en las casillas de cada fila (horizontal) es la respuesta Y , correspondiente a la respectiva combinación de tratamientos. Abajo de la tabla se agregan filas para las sumas, promedios, efectos, y otros cálculos que se desee efectuar. El divisor corresponde al número de términos que hay en cada columna.

Ejemplo 3.1

Construiremos la Tabla de Respuestas con un ejemplo numérico. Supongamos que para el Ejemplo 1.1 a las distintas combinaciones de tratamientos, Presión (A), Temperatura (B), le agregamos un tercer factor, Tiempo de Aplicación (C), con dos niveles. Como respuesta, se obtienen los siguientes índices de Dureza (Y):

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	ÍNDICE DE DUREZA RESULTANTE (Y)
$a_1b_1c_1$	49
$a_2b_1c_1$	43
$a_1b_2c_1$	69
$a_2b_2c_1$	67
$a_1b_1c_2$	46
$a_2b_1c_2$	23
$a_1b_2c_2$	66
$a_2b_2c_2$	61

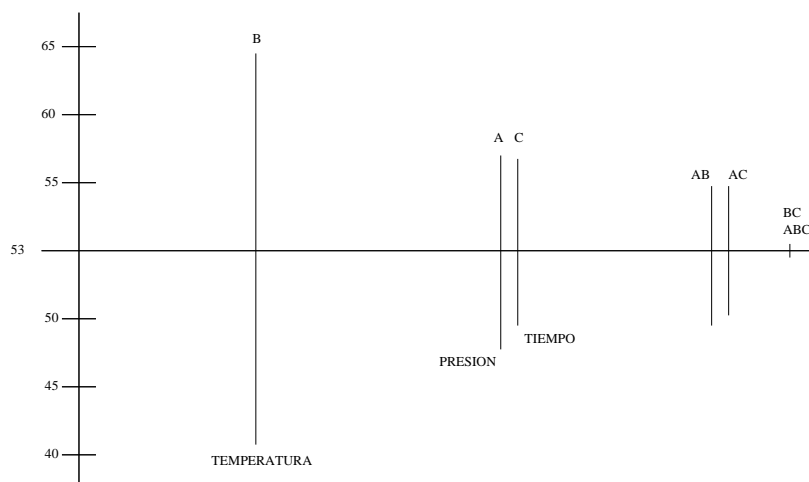
Tabla 3.3: Respuestas obtenidas en el Experimento 2^3

La Tabla de Respuestas completa es la siguiente:

COMPONENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_1b_1c_1$	49	49		49		49		49		49		49		49	
$a_2b_1c_1$	43		43	43		43		43		43		43		43	
$a_1b_2c_1$	69	69			69	69		69		69		69		69	
$a_2b_2c_1$	67		67		67		67		67		67		67		67
$a_1b_1c_2$	46	46		46		46		46		46		46		46	
$a_2b_1c_2$	23		23	23		23		23		23		23		23	
$a_1b_2c_2$	66	66			66	66		66		66		66		66	
$a_2b_2c_2$	61		61		61		61		61		61		61		61
TOTAL	424	230	194	161	263	201	223	228	196	222	202	205	219	205	219
VERIF.		424		424		424		424		424		424		424	
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	424		36		102		22		32		20		14		14
DIVISOR	8		4		4		4		4		4		4		4
EFFECTO	53,0		9,0		25,5		5,5		8,0		5,0		3,5		3,5
RANGO			2		1		4		3		5		6		6

Tabla 3.4: Tabla de Respuestas del Experimento 2^3 , del Ejemplo 3.1

La fila de verificación debe dar la misma suma en todas las casillas, y es igual al total de la columna de la identidad. El Neto es el valor absoluto de la suma ponderada por el respectivo factor. El Divisor es el número de sumandos con el mismo factor. El Efecto es el Neto dividido por el Factor. El Rango es el orden de magnitud del Efecto. El siguiente es el Diagrama de Efectos de estos resultados. Se ve que hay un fuerte efecto de B , efectos moderados de A y C , una débil interacción AB y AC ; y una muy débil interacción BC e interacción triple ABC .

Figura 3.2: Diagrama de Efectos del Experimento Factorial 2^3

3.3. Gráficos de Interacción.

Otra forma de visualizar los efectos principales y las interacciones dobles, es mediante los gráficos de interacción. Para construirlos, se hace una tabla similar a la Tabla de Respuestas, pero sólo con la columna de la identidad y las columnas de las interacciones dobles. El resultado es el siguiente:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTO	1	AB				AC				BC			
		a_1b_1	a_2b_1	a_1b_2	a_2b_2	a_1c_1	a_2c_1	a_1c_2	a_2c_2	b_1c_1	b_2c_1	b_1c_2	b_2c_2
$a_1b_1c_1$	49	49				49				49			
$a_2b_1c_1$	43		43				43			43			
$a_1b_2c_1$	69			69		69					69		
$a_2b_2c_1$	67				67		67				67		
$a_1b_1c_2$	46	46						46				46	
$a_2b_1c_2$	23		23						23			23	
$a_1b_2c_2$	66			66				66					66
$a_2b_2c_2$	61				61				61				61
TOTAL	424	95	66	135	128	118	110	112	84	92	136	69	127
VERIFICACIÓN					424				424				424
PROMEDIO	53,0	47,5	33,0	67,5	64,0	59,0	55,0	56,0	42,0	46,0	68,0	34,5	63,5

Tabla 3.5: Tabla de Respuestas para la Construcción de Gráficos de Interacción

Cada una de las columnas de las interacciones dobles se disgrega en cuatro columnas en lugar de dos, como se hizo en la tabla anterior. La columna AB se divide en una columna donde van las respuestas correspondientes a las combinaciones de tratamientos en que $A = a_1$ y $B = b_1$; otra donde $A = a_2$ y $B = b_1$; otra donde $A = a_1$ y $B = b_2$; y la última, donde $A = a_2$ y $B = b_1$.

Los cuatro promedios que aparecen en cada una de las interacciones, se usan para construir los respectivos gráficos de interacción que se presentan a continuación. En el gráfico de AB , las líneas llenas muestran, en sus extremos, las respuestas promedio de a_1 y de a_2 , cada una bajo los dos distintos niveles de B . La línea punteada muestra el promedio a través de ambos niveles de B . Los valores para la línea punteada se pueden obtener de la Tabla de Respuestas original.

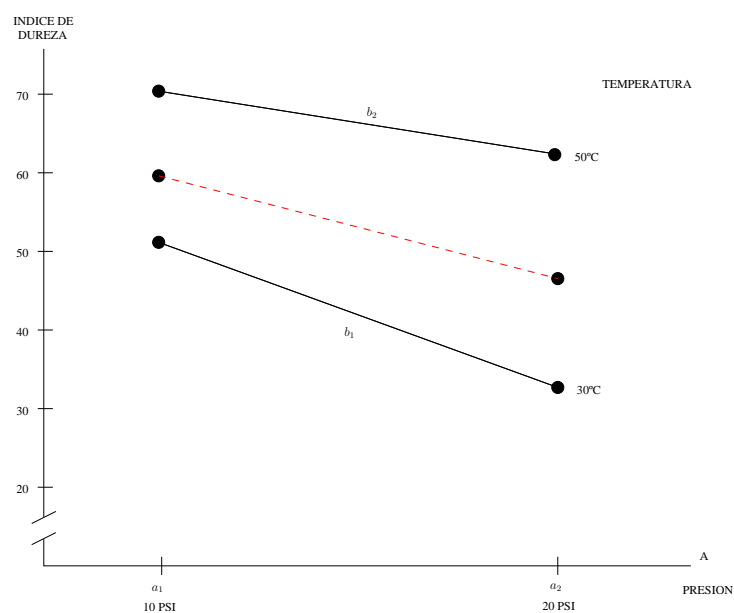


Figura 3.3: Gráfico de interacción de Índice de dureza vs Presión estratificado por Temperatura

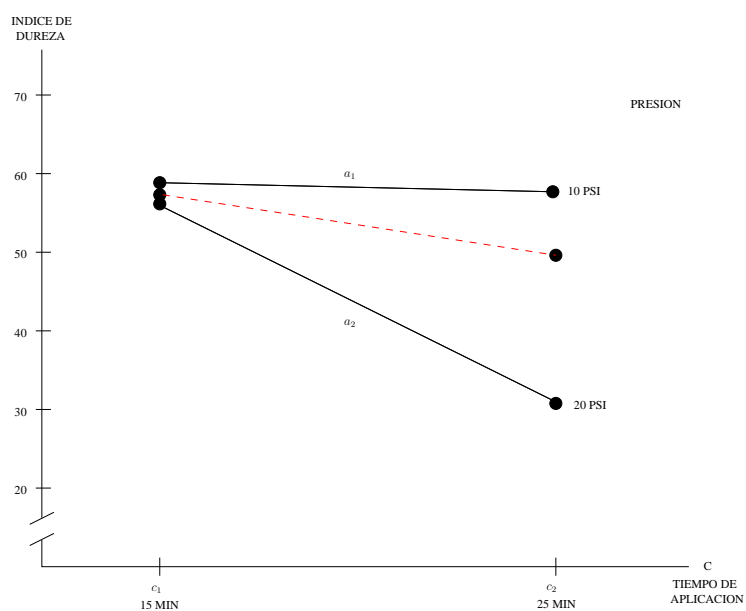


Figura 3.4: Gráfico de interacción de Índice de dureza vs Tiempo de aplicación estratificado por Presión

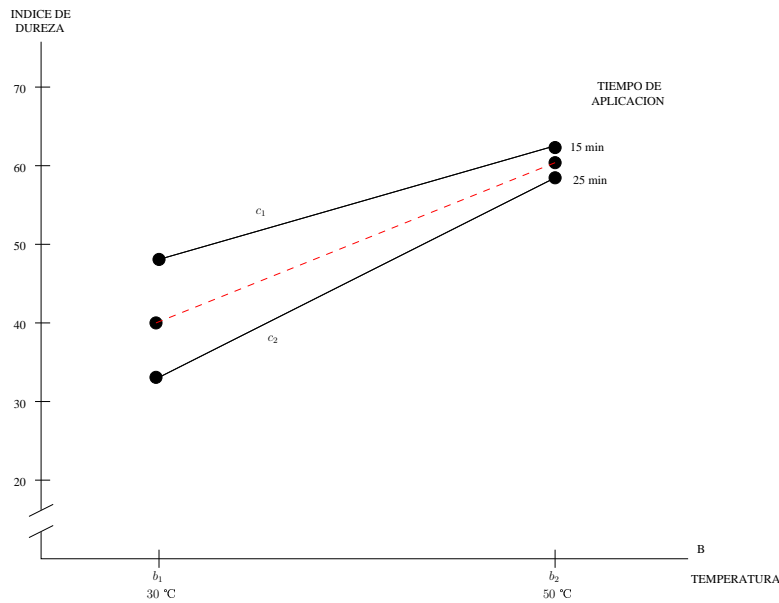


Figura 3.5: Gráfico de interacción de Índice de dureza vs Temperatura estratificado por Tiempo de aplicación

Los gráficos de interacción se interpretan de la siguiente forma: Si la línea punteada es horizontal, entonces no hay efecto del factor que se muestra en el eje horizontal; si tiene pendiente, entonces hay efecto. Si las líneas llenas están a la misma altura, entonces no hay efecto del otro factor mostrado en el gráfico. Si las líneas tienen igual pendiente, entonces no hay interacción; si la pendiente de ambas es distinta, si la hay.

En los gráficos mostrados, podemos observar que: Casi no hay efecto de A , ni hay interacción BC . La interacción AC es muy pequeña, hay efectos de B y de C , y finalmente, hay una fuerte interacción entre A y B .

ESTUDIO DE CASO: Optimización de la plasticidad de un compuesto de caucho de la banda de rodamiento de neumáticos.

Se diseñó una experiencia para mejorar las propiedades del compuesto para banda de rodamiento de neumáticos, durante la fase de vulcanización, buscando optimizar la plasticidad del compuesto. Se sabe que la calidad del compuesto depende del tipo de caucho utilizado, y de los acelerantes. Los acelerantes son compuestos que ayudan a la vulcanización de los cauchos, y los activadores del acelerante actúan como catalizadores.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO: El objetivo es buscar una combinación de compuesto que permita disminuir los ciclos de vulcanización de los neumáticos que utilicen este compuesto, a fin de hacer el proceso más eficiente.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: El experimento se diseñó a tres factores con dos niveles

cada uno, con dos réplicas por combinación de tratamientos, según la siguiente descripción:

FACTORES		NIVELES	
A :	Tipo de Caucho.	a_1 :	Caucho Natural SMR5.
		a_2 :	Caucho Natural SMR20.
B :	Tipo de Acelerante.	b_1 :	Sulfenamida (Di-Benzotiazol Disulfuro).
		b_2 :	Mercaptano (2-Mercapto-Benzotiazol).
C :	Activador del Acelerante.	c_1 :	Oxido de Zinc.
		c_2 :	Ácido esteárico.

RESPUESTA: El delta torque, expresado en Newton Metro [Nm]. El delta torque es la diferencia entre el torque mínimo y el torque máximo. El torque mínimo se mide cuando la goma comienza a vulcanizar y el torque máximo, cuando el compuesto alcanza la máxima vulcanización. Se mide con un equipo llamado rehómetro, el cual, a través de un rotor, le aplica un torque al compuesto a una temperatura fija, en este caso 191 °C. Cada corrida experimental dura 60 minutos, aproximadamente, y se efectuó una por día.

LIMITACIONES: Pueden haber factores no deseados, que influyan sobre la respuesta. Estos son:

- i) Alguna posible falla del equipo mezclador al momento de realizarse el experimento.
- ii) Variaciones debido a la procedencia de alguno de los componentes. Por ejemplo, un caucho natural SMR5 puede ser de Indonesia, Malasia o Venezuela y los tres tienen comportamientos distintos, debido a los factores climáticos de los países. Por lo tanto, el experimento se hizo con componentes de una misma procedencia. También los acelerantes y catalizadores fueron del mismo proveedor.

RESULTADOS: Se corrió el experimento, dando las siguientes respuestas, promediadas a través de las dos réplicas. Los resultados son los siguientes:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
$a_1b_1c_1$	10,1
$a_2b_1c_1$	14,3
$a_1b_2c_1$	10,8
$a_2b_2c_1$	15,6
$a_1b_1c_2$	11,8
$a_2b_1c_2$	15,1
$a_1b_2c_2$	15,1
$a_2b_2c_2$	17,7

El siguiente es el diagrama de efectos, que muestra una importante influencia del factor A , tipo de caucho, y una influencia más moderada de los dos factores restantes, tipo del acelerante y activador del acelerante. Las interacciones son muy poco importantes.

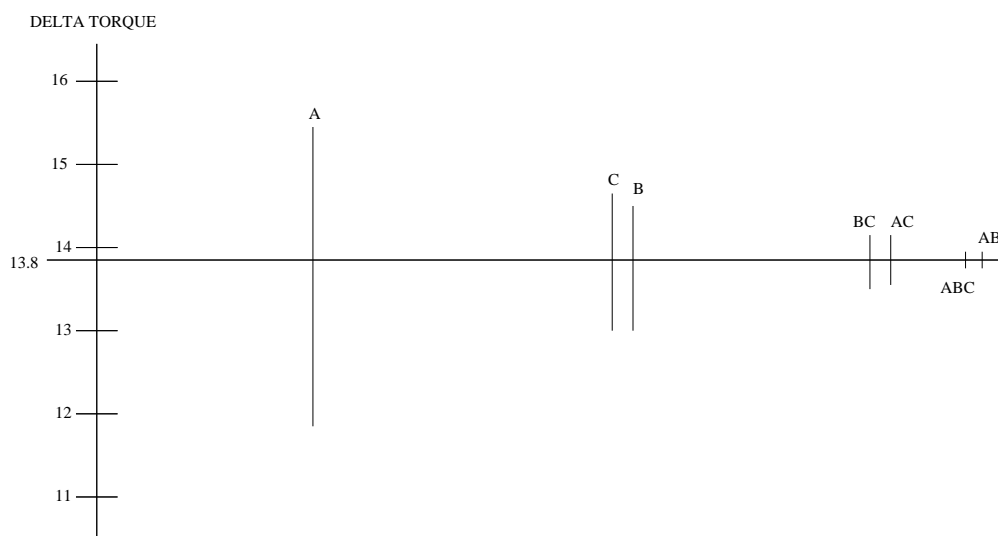


Figura 3.6: Diagrama de efectos del Experimento Optimización de la plasticidad del Caucho de Neumáticos

Los gráficos de interacción, que se presentan a continuación, muestran los efectos de los tres factores, por las pendientes de las rectas, sobre todo el del factor A . El paralelismo de las rectas del gráfico de AB indica que esta interacción es nula. Los otros pares de rectas, cuyas pendientes son similares, muestran un grado menor de interacción BC y AC .

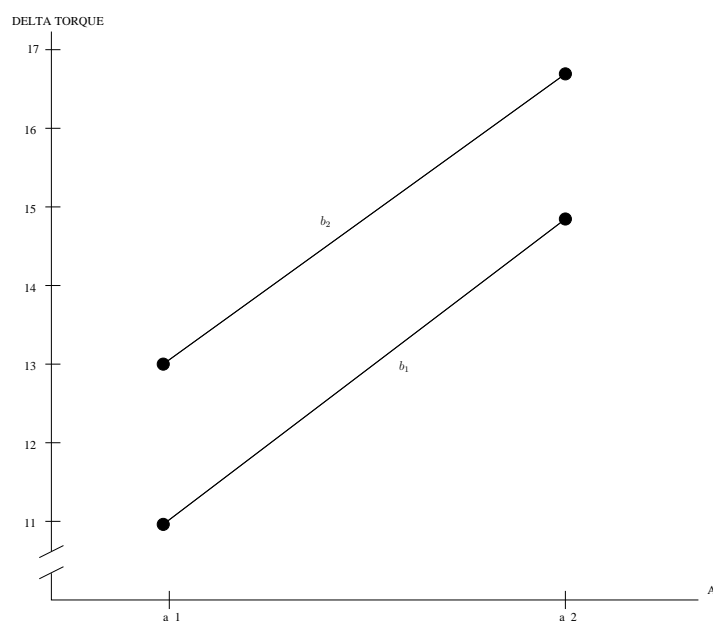


Figura 3.7: Grafico de interacción Delta Torque vs Tipo caucho estratificado por Tipo acelerante

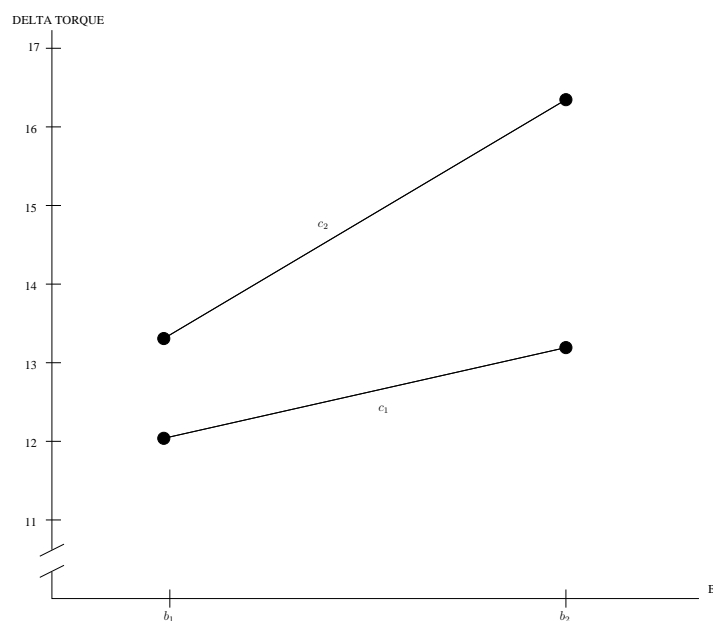


Figura 3.8: Gráfico de interacción Delta torque vs Tipo acelerante estratificado por Activador del acelerante

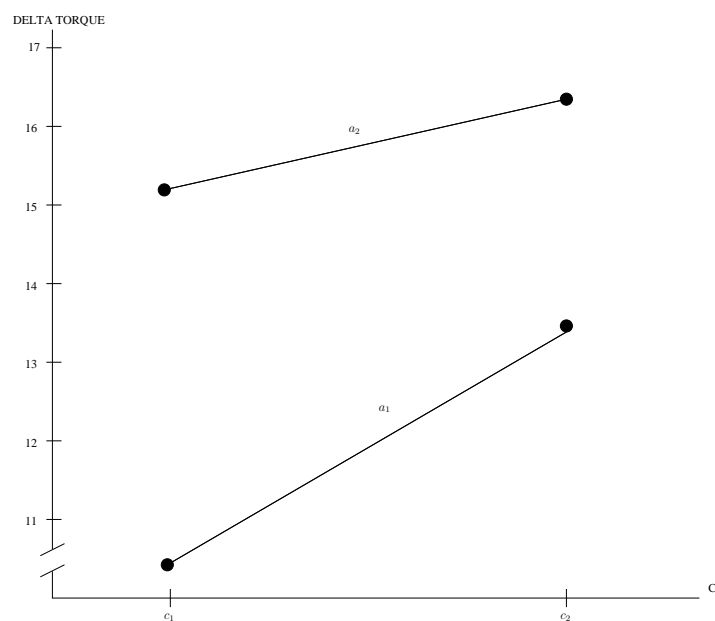


Figura 3.9: Gráfico de interacción Delta torque vs Activador del acelerante estratificado por Tipo caucho

EJERCICIOS.

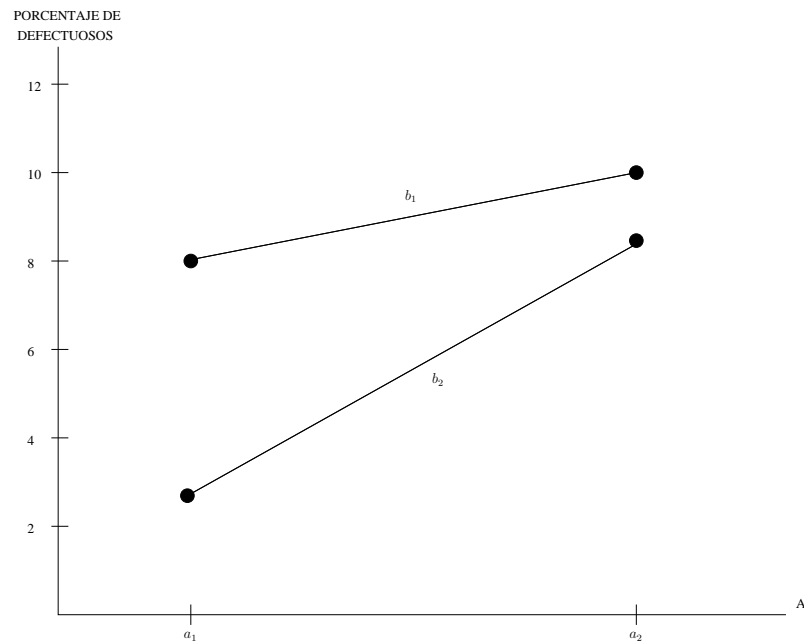
Ejercicio 3.1

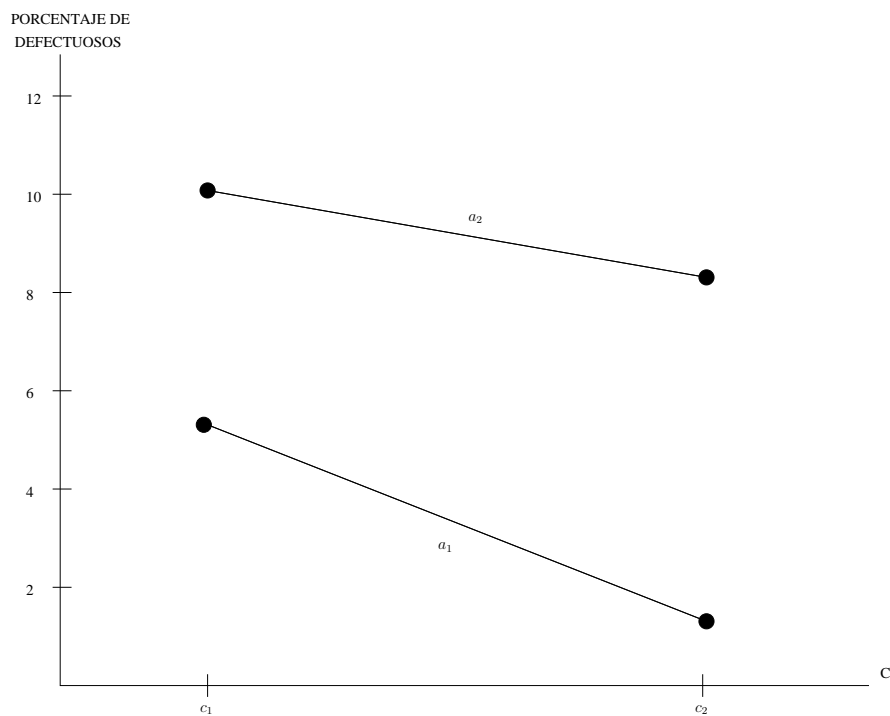
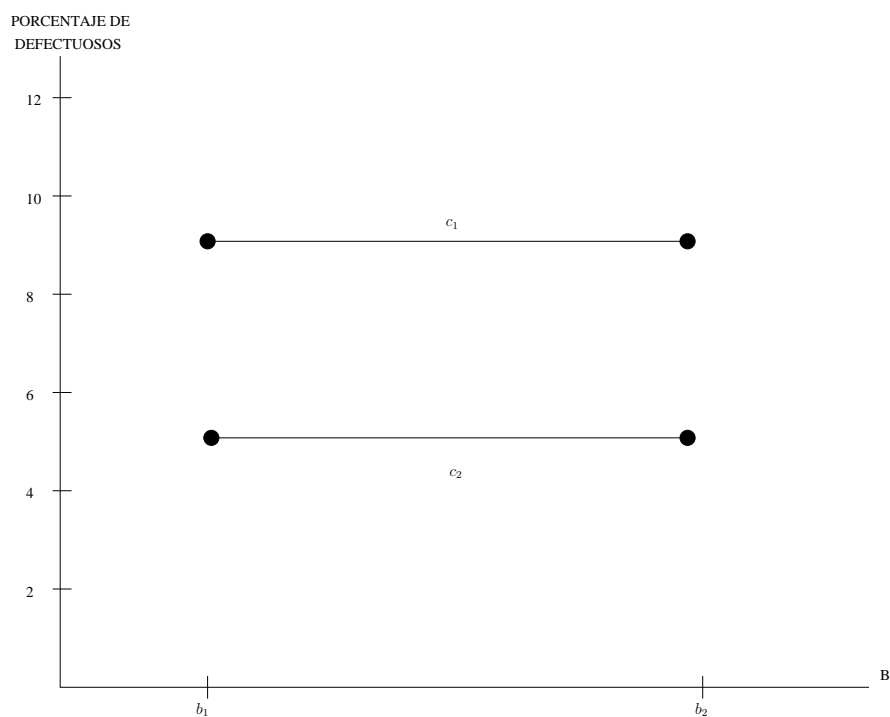
Se corrió un experimento con tres factores, a dos niveles cada uno. Los factores, con sus respectivos niveles, son:

FACTORES	NIVELES
A : Máquina	a_1 : Máquina antigua. a_2 : Máquina nueva.
B : Método Operativo	b_1 : Standard. b_2 : Modificado.
C : Material	c_1 : Baja granulosidad. c_2 : Granulosidad media.

RESPUESTA: Porcentaje de ítemes producidos fuera de especificaciones.

De las respuestas obtenidas, se hicieron los tres gráficos de interacción que se muestran a continuación:

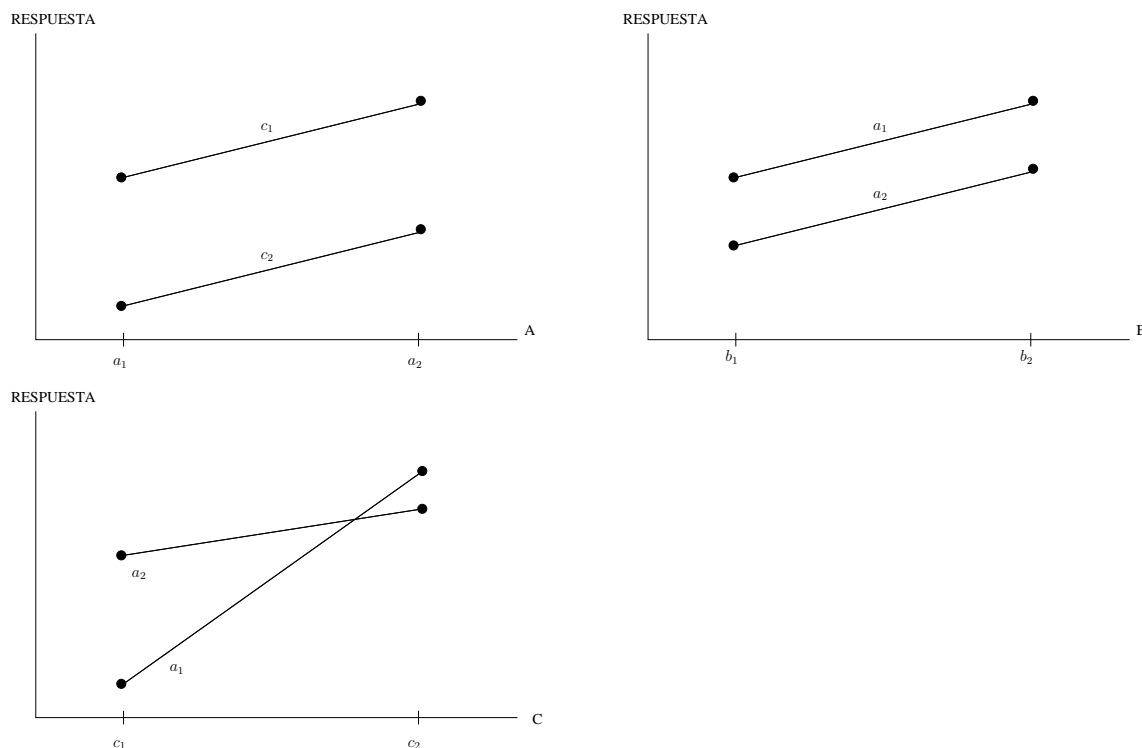




Interprete los resultados, en términos de si hay o no, efectos principales de A, de B o de C, y si hay o no, interacciones dobles AB, AC y BC.

Ejercicio 3.2

Se diseña un experimento para controlar la elasticidad de una lámina metálica utilizada en termostatos. Los factores son tres, con dos niveles cada uno. El primero corresponde a la aleación, el segundo al grosor de la lámina y el tercero al templado. Designaremos los factores por A , B y C , y sus niveles respectivos son a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , y c_2 . Los siguientes son los gráficos de interacción:



Interprete los gráficos, en el sentido de si hay o no efectos principales de A , de B o de C , y si hay o no interacciones dobles AB , AC o BC .

Ejercicio 3.3

Un dispositivo para colocar sellos plásticos en cilindros de oxígeno consiste en una pieza de material aislante, de forma cilíndrica, abierta por debajo, con una resistencia eléctrica enrollada en su interior. Se diseña un experimento para estudiar el efecto de la forma y tipo de la pieza de aislante y la posición de la resistencia, sobre el tiempo que toma el sello en alcanzar la temperatura necesaria para contraerse. Los factores son tres, a dos niveles cada uno:

FACTORES	NIVELES
A : Tipo de material aislante	a_1 : Alta densidad. a_2 : Baja densidad.
B : Diámetro de la pieza aislante	b_1 : 15 cm. b_2 : 20 cm.
C : Posición de la Resistencia	c_1 : Al fondo del cilindro. c_2 : En mitad del cilindro.

RESPUESTA: Tiempo de calentado, del sello, en segundos. Los resultados de llevar a cabo el experimento son los siguientes:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
$a_1b_1c_1$	6
$a_2b_1c_1$	8
$a_1b_2c_1$	7
$a_2b_2c_1$	9
$a_1b_1c_2$	7
$a_2b_1c_2$	9
$a_1b_2c_2$	11
$a_2b_2c_2$	13

- a) Construya los siguientes tres gráficos de interacción:
- Respuesta versus A , estratificado por B (promediado a través de los niveles de C).
 - Respuesta versus B , estratificado por C (promediado a través de los niveles de A).
 - Respuesta versus C , estratificado por A (promediado a través de los niveles de B).
- b) Interprete los gráficos, en el sentido de si hay efectos principales de A , B , o C , y si hay interacciones dobles AB , BC , o AC .

Ejercicio 3.4

En una planta química se produce ácido nítrico, por oxidación de amoníaco. Se desea minimizar el porcentaje de amoníaco que no se oxida, y que se pierde. Los factores a controlar son tres: A , flujo de aire; B , temperatura del refrigerante; C , concentración del

compuesto. Se diseñó el experimento a dos niveles por cada factor. Construya la tabla de respuestas, el diagrama de efectos y dibuje los gráficos de interacción. Interprete los resultados obtenidos. Las respuestas del experimento, en porcentajes $\times 10$, están dadas en la tabla siguiente:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
$a_1b_1c_1$	38
$a_2b_1c_1$	37
$a_1b_2c_1$	29
$a_2b_2c_1$	30
$a_1b_1c_2$	35
$a_2b_1c_2$	34
$a_1b_2c_2$	24
$a_2b_2c_2$	25

Ejercicio 3.5

El proceso de producción de cal comienza con la introducción de carbonato de calcio a un horno rotatorio de velocidad variable, en cuyo extremo de salida hay un quemador que produce una temperatura de alrededor de 1200°C en la zona de calcinación. Se hizo un experimento para medir el efecto de tres variables de operación, sobre la calidad del producto. Los factores son tres, a dos niveles cada uno:

FACTORES	NIVELES
<i>A:</i> Tamaño de la Carga.	a_1 : Granulometría de 1/4 a 3/4 plg. a_2 : Granulometría de 3/4 a 11/2 plg.
<i>B:</i> Velocidad de Giro.	b_1 : Bajo 1,5 rpm. b_2 : Sobre 1,5 rpm.
<i>C:</i> Calor.	c_1 : Bajo 1200°C . c_2 : Sobre 1200°C .

RESPUESTA: Ley de la cal libre que presenta reactividad para los procesos, medida en porcentaje de ley.

La tabla siguiente entrega los resultados del experimento, realizado con dos réplicas:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA	
	RÉPLICA 1	RÉPLICA 2
$a_1b_1c_1$	84	92
$a_2b_1c_1$	87	91
$a_1b_2c_1$	92	90
$a_2b_2c_1$	98	86
$a_1b_1c_2$	96	90
$a_2b_1c_2$	97	99
$a_1b_2c_2$	94	94
$a_2b_2c_2$	96	98

Construya la tabla de respuestas, el diagrama de efectos y dibuje los gráficos de interacción. Interprete los resultados obtenidos.

Ejercicio 3.6

En las plantas de producción de ácido sulfúrico se utilizan catalizadores en los convertidores que permiten la transformación de trióxido de azufre (SO_3) a dióxido de azufre (SO_2), como una etapa dentro del proceso de producción. Una parte del SO_3 no se transforma y es lanzado a la atmósfera. Se desea probar el efecto de dos tipos de catalizadores, del tiempo de utilización de éstos, y de los niveles de alimentación de ácido sobre el porcentaje de emisión de SO_3 a la atmósfera, que se busca minimizar. Se diseña un experimento con tres factores, a dos niveles cada uno, como se describe a continuación:

FACTORES	NIVELES
A: Catalizador	a_1 : Tipo 1 a_2 : Tipo 2
B: Tiempo de Operación	b_1 : 1 mes b_2 : 12 meses
C: Nivel de Alimentación	c_1 : Nivel 1 c_2 : Nivel 2

RESPUESTA: Factor de emisión de SO_3 a la atmósfera, en partes por cada 100000, medida con instrumentos en línea.

Se corrió el experimento, dando por resultado los siguientes valores:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
$a_1b_1c_1$	100
$a_2b_1c_1$	116
$a_1b_2c_1$	125
$a_2b_2c_1$	178
$a_1b_1c_2$	100
$a_2b_1c_2$	138
$a_1b_2c_2$	157
$a_2b_2c_2$	148

Construya la Tabla de Respuestas, el Diagrama de Efectos, y los Gráficos de Interacción. Dé una interpretación del Diagrama de Efectos y de los Gráficos de Interacción, en términos de los elementos dados en el planteo del problema. Compare lo mostrado por ambos.

Capítulo 4

Diseños Factoriales Fraccionados

Introducción

Se vio que el número de combinaciones de tratamientos para llevar a cabo un experimento factorial de k factores a dos niveles cada uno, es 2^k . Así, si $k = 2$, se requieren $2^2 = 4$ combinaciones de tratamientos; si $k = 3$, 2^k aumenta a 8, después a 16, a 32, a 64, y a 128 si hay 7 factores. No es un número muy inusual el de 7 factores. Sin embargo, disponer de 128 combinaciones de tratamientos es sumamente costoso.

Afortunadamente, es posible realizar el experimento con menos combinaciones de tratamientos que las indicadas arriba. En tal caso se habla de un diseño factorial fraccionado. El precio que se paga por este ahorro es el hecho que algunos contrastes miden no un solo efecto (efecto principal o interacción), sino más de uno a la vez, siendo imposible obtener información individual sobre la influencia que cada uno de ellos tiene, separadamente, sobre la respuesta. En tal caso se dice que esos efectos están confundidos.

Al planear un experimento en forma fraccionada, se debe tratar de que cada nivel de los factores aparezca el mismo número de veces en el total de combinaciones de tratamientos, de modo que se puedan medir sus efectos con igual precisión. En tal caso se dice que el diseño está balanceado. Nos remitiremos a este tipo de situaciones. Para lograrlo, se debe dividir el total de combinaciones de tratamientos por una potencia de dos, y utilizar una de esas fracciones para el experimento. Las fracciones se denominan bloques.

Por ejemplo, un experimento 2^3 puede dividirse en 2, lo que nos da dos bloques de $2^3/2 = 2^2 = 4$ combinaciones de tratamientos; o puede dividirse en cuatro bloques de $2^3/4 = 2^1 = 2$ combinaciones de tratamientos. En general, para lograr un experimento fraccionado de un experimento factorial 2^k , que esté balanceado, se debe escoger un bloque que sea una fracción de $1/p$ del total de combinaciones de tratamientos (con $p < k$). Este hecho no garantiza que esté balanceado. Se debe tener cuidado, además, que los niveles de todos los efectos aparezcan el mismo número de veces. Se usa el símbolo 2^{k-p}

para designar un experimento fraccionado a $1/2^p$.

Los siguientes ejemplos muestran posibles fraccionamientos balanceados de experimentos 2^2 y 2^3 .

Ejemplo 4.1

La siguiente figura muestra el diseño 2^2 fraccionado en dos bloques parciales de dos combinaciones de tratamientos.

BLOQUE I	BLOQUE II
a_1b_1	a_2b_1
a_2b_2	a_1b_2

Tabla 4.1: Distribución de los cuatro Bloques en un Diseño Balanceado 2^{2-1}

Ejemplo 4.2

La siguiente figura muestra el diseño 2^3 fraccionado en dos bloques de cuatro combinaciones de tratamientos.

BLOQUE I	BLOQUE II
$a_1b_1c_1$	$a_2b_1c_1$
$a_2b_2c_1$	$a_1b_2c_1$
$a_2b_1c_2$	$a_1b_1c_2$
$a_1b_2c_2$	$a_2b_2c_2$

Tabla 4.2: Distribución de los cuatro Bloques en un Diseño Balanceado 2^{3-1} .

Ejemplo 4.3

La siguiente figura muestra el diseño 2^3 fraccionado en cuatro bloques de dos combinaciones de tratamientos.

BLOQUE I	BLOQUE II	BLOQUE III	BLOQUE IV
$a_1b_1c_1$	$a_2b_1c_1$	$a_1b_2c_1$	$a_1b_1c_2$
$a_2b_2c_2$	$a_1b_2c_2$	$a_2b_1c_2$	$a_2b_2c_1$

Tabla 4.3: Distribución de los cuatro Bloques en un Diseño Balanceado 2^{3-2} .

ESTUDIO DE CASO: Precisión del resultado del análisis químico para medir el contenido de oro en concentrado de cobre.

La metalurgia es la ciencia que estudia la forma de extraer los metales de las minas, y los prepara para una posterior utilización. En el caso del cobre, éste se encuentra en la naturaleza en los minerales, formados por especies mineralógicas valiosas de cobre,

mezcladas con grandes cantidades de materiales de deshecho o ganga.

Una vez extraído el mineral de la mina, el primer paso consiste en separar físicamente las especies mineralógicas de cobre de la ganga, triturando y moliendo los minerales; el segundo paso consiste en concentrar las especies valiosas por flotación por espuma. Estas operaciones no modifican las características químicas de las especies que han sido separadas y concentradas. El producto obtenido en esta etapa se denomina *concentrado de minerales o concentrado de cobre*.

La etapa siguiente es la eliminación de las impurezas obtenidas en la flotación junto al cobre. La primera consiste en un proceso piro metalúrgico realizado en hornos a altas temperaturas, dando origen a un ánodo de cobre, de ley aproximadamente 99,5 %. A continuación este ánodo es tratado electroquímicamente, dando como producto el denominado cátodo de cobre, de ley aproximadamente 99,98 %, el cual es comercializado mayoritariamente en los mercados de Europa y Estados Unidos.

Los productos obtenidos en las distintas etapas mencionadas, requieren de un control operacional. Es así como adquiere una real importancia el departamento de control de calidad, a través de sus distintas áreas (laboratorio químico, laboratorio físico, muestreras, control de pesaje). Junto a este control se destaca también el control a los productos, llamado control de certificación.

El análisis químico de oro en concentrados de cobre, se lleva a cabo a través de dos técnicas combinadas: Extracción orgánica por solventes y espectrofotometría de absorción atómica. El siguiente diagrama muestra en detalle el procedimiento analítico:

- Muestreo.
- Tratamiento de la muestra.
- Separación de la solución de oro del material insoluble.
- Decantación en embudo de decantación.
- Separación del oro en fase orgánica de fase inorgánica.
- Registro de datos del instrumental.
- Evaluación.

Los resultados del análisis presentan una alta variabilidad, por lo que se sospecha que el método de análisis influye sobre éste, lo que redundaría en valores poco confiables.

Se hizo un estudio, enmarcado dentro de estos procesos de control, que corresponde al análisis químico de oro contenido en concentrados de cobre, para observar la variabilidad de los resultados. Los factores que potencialmente influyen sobre el resultado son:

- I. Tamaño de la muestra.
- II. Temperatura de reacción.
- III. Tiempo de reacción.
- IV. Volumen extraído.
- V. Acidez del medio.
- VI. Capacidad del extractante.
- VII. Forma de calibrar el instrumento de medición.

Con el objeto de estudiar la influencia de estos factores sobre el resultado del análisis, se tomo una muestra homogeneizada de concentrado de cobre, la que se dividió en porciones, para utilizar en cada corrida experimental.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO: Diseñar un experimento para controlar las fuentes de variación más relevantes, en la determinación de oro en concentrados de cobre.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: Siete factores, con dos niveles cada uno, según la siguiente descripción:

FACTORES		NIVELES	
A :	Tamaño de la Muestra	a_1 :	Partícula fina.
		a_2 :	Partícula gruesa.
B :	Temperatura de Reacción	b_1 :	Baja.
		b_2 :	Alta.
C :	Tiempo de Reacción	c_1 :	2 horas 30 minutos.
		c_2 :	3 horas 30 minutos.
D :	Volumen Extraído	d_1 :	10 ml.
		d_2 :	12 ml.
E :	Acidez del Medio	e_1 :	20 % de HCl.
		e_2 :	15 % de HCl.
F :	Capacidad del Extractante	f_1 :	Alta extracción.
		f_2 :	Baja extracción.
G :	Forma de calibrar el Instrumento de Medición	g_1 :	Estándar alto en concentración de oro.
		g_2 :	Estándar bajo en concentración de oro.

RESPUESTA: Concentración de oro en gramos por tonelada.

Dado que el experimento completo requeriría el excesivo número de $2^7 = 128$ corridas experimentales, se decidió fraccionarlo a $1/16$, es decir, un diseño 2^{7-4} , y correr dos bloques distintos, de 8 combinaciones de tratamiento cada una. Al ser distintos los bloques, se pudo contrastar los resultados, para ver si hay evidencia de pérdida de información por efectos confundidos. Los bloques que se corrieron son los siguientes:

BLOQUE I								BLOQUE II							
a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1		a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	
a_1	b_1	c_1	d_2	e_2	f_2	g_2		a_1	b_1	c_2	d_2	e_2	f_2	g_1	
a_1	b_2	c_2	d_1	e_1	f_2	g_2		a_2	b_2	c_1	d_1	e_2	f_2	g_1	
a_1	b_2	c_2	d_2	e_2	f_1	g_1		a_2	b_2	c_2	d_2	e_1	f_1	g_1	
a_2	b_1	c_2	d_1	e_2	f_1	g_2		a_1	b_2	c_1	d_2	e_1	f_2	g_2	
a_2	b_1	c_2	d_2	e_1	f_2	g_1		a_1	b_2	c_2	d_1	e_2	f_1	g_2	
a_2	b_2	c_1	d_1	e_2	f_2	g_1		a_2	b_1	c_1	d_2	e_2	f_1	g_2	
a_2	b_2	c_1	d_2	e_1	f_1	g_2		a_2	b_1	c_2	d_1	e_1	f_2	g_2	

Tabla 4.4: Bloques de un Diseño 2^{7-4}

4.1. Efectos Confundidos.

Observemos la matriz de diseño del experimento 2^3 , que se muestra a continuación, pero esta vez con las combinaciones de tratamientos agrupadas en dos bloques, según el diseño 2^{3-1} del Ejemplo 4.2.

		CONTRASTES							
	COMPONENTE	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
BLOQUE I	$a_1 b_1 c_1$	+	-	-	+	-	+	+	-
	$a_2 b_2 c_1$	+	+	+	+	-	-	-	-
	$a_2 b_1 c_2$	+	+	-	-	+	+	-	-
	$a_1 b_2 c_2$	+	-	+	-	+	-	+	-
BLOQUE II	$a_2 b_1 c_1$	+	+	-	-	-	-	+	+
	$a_1 b_2 c_1$	+	-	+	-	-	+	-	+
	$a_1 b_1 c_2$	+	-	-	+	+	-	-	+
	$a_2 b_2 c_2$	+	+	+	+	+	+	+	+

Tabla 4.5: Matriz de Diseño del Experimento 2^{3-1}

Si nos fijamos en un solo bloque cualquiera, veremos que es lo mismo probar el efecto A que el efecto de la interacción BC . Por lo tanto, al querer medir uno de estos efectos, estaremos midiendo ambos a la vez. Se dice que los efectos A y BC están

confundidos. También vemos que están confundidos B con AC , C con AB y ABC con 1 .

Hay una forma simple de determinar cuáles grupos de efectos están confundidos entre sí, sin tener que construir la matriz de diseño completa. Consiste en identificar el o los efectos que aparezcan confundidos con la identidad 1 , dentro de cada bloque (y por lo tanto, están confundidos con los bloques).

El símbolo de cada uno de éstos se “multiplica” por los símbolos correspondientes a cada uno de los demás efectos, respetando la convención de que una letra elevada al cuadrado es igual a 1 . Entonces el efecto que se multiplica por él está confundido con el efecto resultado de la “multiplicación”.

En el ejemplo con el diseño 2^{3-1} , visto más arriba, vimos en la Matriz de Diseño del BLOQUE I, que sólo ABC está confundido con 1 , pues si se mide ABC dentro de ese bloque, es lo mismo que medir la identidad (sólo aparecen cambiados los signos, pero eso no altera la situación); lo mismo ocurre en el BLOQUE II. Si multiplicamos ABC por cada uno de los efectos, obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{array}{llll}
 ABC \times 1 & = & ABC & \\
 ABC \times A & = & A^2BC & = BC \\
 ABC \times B & = & AB^2C & = AC \\
 ABC \times AB & = & A^2B^2C & = C \\
 ABC \times C & = & ABC^2 & = AB \\
 ABC \times AC & = & A^2BC^2 & = B \\
 ABC \times BC & = & AB^2C^2 & = A \\
 ABC \times ABC & = & A^2B^2C^2 & = 1
 \end{array}$$

En resumen, podemos concluir que:

$$\begin{array}{ll}
 1 & \text{está confundido con } ABC \\
 A & \text{está confundido con } BC \\
 B & \text{está confundido con } AC \\
 C & \text{está confundido con } AB
 \end{array}$$

Ejemplo 4.4

Veamos qué pasa con el experimento 2^{3-2} , del Ejemplo 4.3, según la distribución en bloques mostrada más arriba. La matriz de diseño, agrupando las combinaciones de tratamientos en los 4 bloques, es la que se presenta a continuación:

		CONTRASTES							
	COMPONENTE	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
BLOQUE I	$a_1b_1c_1$	+	-	-	+	-	+	+	-
	$a_2b_2c_2$	+	+	+	+	+	+	+	+
BLOQUE II	$a_2b_1c_1$	+	+	-	-	-	-	+	+
	$a_1b_2c_2$	+	-	+	-	+	-	+	-
BLOQUE III	$a_1b_2c_1$	+	-	+	-	-	+	-	+
	$a_2b_1c_2$	+	+	-	-	+	+	-	-
BLOQUE IV	$a_1b_1c_2$	+	-	-	+	+	-	-	+
	$a_2b_2c_1$	+	+	+	+	-	-	-	-

Tabla 4.6: Matriz de Diseño del Experimento 2^{3-2}

Aquí vemos que AB , AC y BC aparecen confundidos con la identidad 1. Entonces debemos multiplicar cada uno de ellos por todos los efectos, como se muestra seguidamente:

MULTIPLICACIÓN POR AB		MULTIPLICACIÓN POR AC		MULTIPLICACIÓN POR BC	
$AB \times 1$	$= AB$	$AC \times 1$	$= AC$	$BC \times 1$	$= BC$
$AB \times A$	$= B$	$AC \times A$	$= C$	$BC \times A$	$= ABC$
$AB \times B$	$= A$	$AC \times B$	$= ABC$	$BC \times B$	$= C$
$AB \times AB$	$= 1$	$AC \times AB$	$= BC$	$BC \times AB$	$= AC$
$AB \times C$	$= ABC$	$AC \times C$	$= A$	$BC \times C$	$= B$
$AB \times AC$	$= BC$	$AC \times AC$	$= 1$	$BC \times AC$	$= AB$
$AB \times BC$	$= AC$	$AC \times BC$	$= AB$	$BC \times BC$	$= 1$
$AB \times ABC$	$= C$	$AC \times ABC$	$= B$	$BC \times ABC$	$= A$

Tabla 4.7: Cálculo de Efectos Confundidos en el Diseño 2^{3-1}

Observando todas las igualdades, de las cuales hay varias repetidas, nos encontramos con que hay dos grupos de efectos confundidos, que son

$$AC, AB, BC \text{ y } 1$$

$$A, B, C \text{ y } ABC$$

Este no es un buen diseño, pues todos los efectos principales están confundidos entre ellos, de modo que sería imposible cuantificar cuánta influencia tiene cada uno sobre la

respuesta.

Generalizando los resultados obtenidos, podemos decir que en un experimento 2^{k-p} hay 2^{k-p} grupos de efectos confundidos, y cada grupo tiene 2^p efectos. En experimentos con más de tres factores, dado un número de bloques, hay más de una forma de definir bloques balanceados, por lo que se puede tener más de una estructura de confundidos.

Generalmente se prefiere aquellas estructuras en que no aparezcan confundidos los efectos principales, sino que éstos estén confundidos con interacciones de orden superior. Los resultados obtenidos son buenos bajo el supuesto de que los efectos de las interacciones son poco significativos, frente a los efectos principales. Este supuesto, con frecuencia es válido, puesto que en situaciones reales es normal que los efectos de más bajo orden tiendan a ser más significativos que los de orden más alto, aunque no siempre es así.

Para el análisis de los experimentos 2^{k-p} se usan los Diagramas de Efectos, en la misma forma que para los experimentos 2^k . Veamos un ejemplo de un diseño 2^{3-1} , en que sólo se usó el que llamamos BLOQUE I, más arriba, y que contiene las combinaciones de tratamientos $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_1$, $a_2b_1c_2$ y $a_1b_2c_2$.

Ejemplo 4.5

Supongamos que los valores de las respuestas coinciden con los del experimento completo, que dimos anteriormente, en el Ejemplo 3.1 del Capítulo 3, es decir, $a_1b_1c_1 = 49$, $a_2b_2c_1 = 67$, $a_2b_1c_2 = 23$ y $a_1b_2c_2 = 66$. Recordemos que la Tabla de Respuestas del experimento completo es la siguiente:

COMPONENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_1b_1c_1$	49	49		49		49		49		49		49		49	
$a_2b_1c_1$	43		43	43		43		43		43		43		43	
$a_1b_2c_1$	69	69			69	69		69		69		69		69	
$a_2b_2c_1$	67		67		67		67	67		67		67		67	
$a_1b_1c_2$	46	46		46		46		46		46		46		46	
$a_2b_1c_2$	23		23	23		23		23		23		23		23	
$a_1b_2c_2$	66	66			66	66		66		66		66		66	
$a_2b_2c_2$	61		61		61		61	61		61		61		61	
TOTAL	424	230	194	161	263	201	223	228	196	222	202	205	219	205	219
VERIF.			424		424		424		424		424		424		424
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	424		36		102		22		32		20		14		14
DIVISOR	8		4		4		4		4		4		4		4
EFFECTO	53,0		9,0		25,5		5,5		8,0		5,0		3,5		3,5
RANGO			2		1		4		3		5		6		6

Tabla 4.8: Respuestas del Experimento 2^3

La Tabla de Respuestas para las combinaciones de tratamientos del BLOQUE I es la siguiente:

COMPONENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_1b_1c_1$	49	49		49		49		49		49		49		49	
$a_2b_2c_1$	67		67		67		67		67		67		67		67
$a_2b_1c_2$	23		23		23		23		23		23		23		23
$a_1b_2c_2$	66	66			66	66			66	66			66		66
TOTAL	205	115	90	72	133	89	116	116	89	133	72	90	115	205	0
VERIF.			205		205		205		205		205		205		205
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	205		25		61		27		27		61		25		205
DIVISOR	4		2		2		2		2		2		2		4
EFFECTO	51,3		12,5		30,5		13,5		13,5		30,5		12,5		51,3
RANGO			4		2		3		3		2		4		1

Tabla 4.9: Respuestas del Experimento 2^3 , Bloque I

Podemos observar algunos resultados interesantes: Primero, que los efectos principales coinciden con sus respectivos confundidos (aparte del signo). En segundo lugar, las estimaciones de los efectos A , B y C no son muy buenas, si se comparan con los valores que habíamos obtenido del experimento completo: 12,5, 30,5 y 13,5, respectivamente, comparados con los valores dados por el experimento completo. Los valores eran 9,0, 25,5 y 8,0, respectivamente. La razón es que las interacciones BC (confundida con A) y AB (confundida con C) son muy grandes. Otro aspecto que podemos notar, es que la estimación del efecto de la interacción triple no se puede hacer. Está confundido con la identidad, (y por lo tanto sus promedios coinciden). Si hubiésemos realizado el experimento en el BLOQUE II, nos hubiéramos encontrado con la Tabla de Respuestas dada a continuación:

COMPONENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_2b_1c_1$	43		43		43		43		43		43		43		43
$a_1b_2c_1$	69	69			69	69			69		69		69		69
$a_1b_1c_2$	46	46			46		46		46		46		46		46
$a_2b_2c_2$	61		61		61		61		61		61		61		61
TOTAL	219	115	104	89	130	112	107	112	107	89	130	115	104	219	
VERIF.			219		219		219		219		219		219		219
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	219		11		41		5		5		41		11		219
DIVISOR	4		2		2		2		2		2		2		4
EFFECTO	54,8		5,5		20,5		2,5		2,5		20,5		5,5		54,8
RANGO			3		2		4		4		2		3		1

Tabla 4.10: Respuestas del Experimento 2^3 , Bloque II

Nuevamente vemos que los efectos de A , B y C están muy lejos, tanto de los valores dados por el experimento completo, como por el experimento fraccionado realizado en el BLOQUE I: los nuevos valores son 5,5, 20,5 y 2,5, respectivamente.

Ejemplo 4.6

Mostramos una situación similar a la anterior, con el mismo tipo de fraccionamiento, pero en que las respuestas dieron otros valores distintos. En primer lugar se muestra la Tabla de Respuestas del experimento completo 2^3 .

COMPONENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_1b_1c_1$	24	24		24		24		24		24		24		24	
$a_2b_1c_1$	42		42	42		42		42		42		42		42	
$a_1b_2c_1$	47	47			47	47		47		47		47		47	
$a_2b_2c_1$	75		75		75	75		75		75		75		75	
$a_1b_1c_2$	58	58		58		58		58		58		58		58	
$a_2b_1c_2$	80		80	80		80		80		80		80		80	
$a_1b_2c_2$	86	86			86	86		86		86		86		86	
$a_2b_2c_2$	103		103		103	103		103		103		103		103	
TOTAL	515	215	300	204	311	255	260	188	327	261	254	260	255	265	250
VERIF.			515		515		515		515		515		515		515
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	515		85		107		5		139		7		5		15
DIVISOR	8		4		4		4		4		4		4		4
EFFECTO	64,4		21,3		26,8		1,3		34,8		1,8		1,3		3,8
RANGO			3		2		6		1		5		6		4

Tabla 4.11: Respuestas del Experimento 2^3

Se puede ver que las interacciones no parecen significativas, frente a los efectos principales. Como consecuencia de esto, al efectuar el experimento en forma fraccionada, como 2^{3-1} , en cualquiera de los dos bloques, las estimaciones de los efectos principales son muy parecidas a las obtenidas con el experimento completo.

Además, en ambos bloques, los efectos aparecen con los mismos rangos. Esto se puede apreciar en las dos Tablas de Respuestas que se muestran más abajo, correspondientes al experimento fraccionado, efectuado separadamente en cada uno de los dos bloques.

COMPONENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_1b_1c_1$	24	24		24		24		24		24		24		24	
$a_2b_2c_1$	75		75		75		75		75		75		75		75
$a_2b_1c_2$	80		80		80		80		80		80		80		80
$a_1b_2c_2$	86	86			86	86			76	86			86		86
TOTAL	265	110	155	104	161	166	99	99	166	161	104	155	110	265	0
VERIF.			265		265		265		265		265		265		265
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	265		45		57		57		67		57		45		265
DIVISOR	4		2		2		2		2		2		2		4
EFFECTO	66,3		22,5		28,5		28,5		33,5		28,5		22,5		66,3
RANGO			4		3		3		2		3		4		1

Tabla 4.12: Respuestas del Experimento 2^{3-1} , Bloque I

COMPONENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_2b_1c_1$	42		42		42		42		42		42		42		42
$a_1b_2c_1$	47	47			47	47		47		47		47		47	
$a_1b_1c_2$	58	58		58		58		58		58		58		58	
$a_2b_2c_2$	103		103		103		103		103		103		103		103
TOTAL	250	105	145	100	150	89	161	89	161	100	150	105	145	0	250
VERIF.			250		250		250		250		250		250		250
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	250		40		50		72		72		50		40		250
DIVISOR	4		2		2		2		2		2		2		4
EFFECTO	62,5		20,0		25,0		36,0		36,0		25,0		20,0		62,5
RANGO			4		3		2		2		3		4		1

Tabla 4.13: Respuestas del Experimento 2^{3-1} , Bloque II

4.2. Construcción de Bloques en Diseños 2^K .

Para definir bloques, en un diseño factorial fraccionado, en que se tiene determinado el número de factores, k , el experimentador debe decidir previamente sobre dos elementos. Pero antes de introducir estos dos elementos, definiremos dos nuevos conceptos que son importantes para la comprensión del procedimiento:

Interacciones Generalizadas: Una interacción generalizada de dos o más efectos, es la que resulta de “multiplicar” esos efectos, como se mostró anteriormente. Por ejemplo, si los efectos son AB y ACD , en un diseño 2^4 , su interacción generalizada es el efecto $AB \times ACD = A^2BCD = BCD$; La interacción generalizada de B y BC es C ; etc.

Efectos Independientes: Un conjunto de efectos son independientes si ninguno de ellos es interacción generalizada de algunos de los restantes. Por ejemplo, el conjunto A , AC , ABC es un conjunto de efectos independientes, pues ninguno es interacción generalizada de los demás. Sin embargo A , AC , ABC , C no lo es, pues el producto de A por AC es C .

Dadas estas definiciones, enumeramos las decisiones que debe tomar el experimentador, para definir su estructura de diseño experimental fraccionado:

1. Debe decidir qué fracción del diseño completo va a utilizar, sea $1/2$, $1/4$, $1/8$, etc. Es decir, va a utilizar un diseño 2^{k-p} y tiene que decidir cuál va a ser el valor de p . Esto dependerá de los recursos de que dispone. Mientras más económico deba ser el diseño, más pequeña la fracción, es decir, más grande el p , pero más restringida será la información que obtenga el investigador.
2. Debe decidir qué efectos independientes va a confundir con 1. Es decir, qué efectos está dispuesto a no poder cuantificar. Es deseable que no sean efectos principales, ni, en lo posible, interacciones dobles. Se prefiere confundir interacciones de alto orden, siguiendo la regla de que, en la práctica, mientras más alto es el orden de la interacción, probablemente su efecto sobre la respuesta será menos significativo.

Algunos resultados numéricos: En un diseño 2^{k-p} , hay k factores a 2 niveles cada uno. El número de combinaciones de tratamientos es 2^k , distribuidas en 2^p bloques de 2^{k-p} combinaciones de tratamientos en cada una. El número de efectos independientes que quedan confundidos con 1 es igual a p . Se forman 2^{k-p} grupos de 2^p efectos confundidos entre sí.

Por ejemplo, si la fracción de diseño es $1/2$, son dos bloques, $p = 1$, y por lo tanto es un efecto que se debe confundir con 1; hay dos efectos confundidos. Si la fracción es $1/4$, son cuatro bloques, y son dos los efectos independientes a confundir con 1. Los grupos de confundidos constan de 2 efectos cada uno. Todo lo anterior se puede verificar en los ejemplos dados al principio del capítulo. Si la fracción es $1/8$, ocho bloques, son tres los efectos independientes a confundir con 1, y los grupos de confundidos tienen 8 efectos.

Una vez tomadas sus decisiones, el siguiente procedimiento le permitirá construir los bloques, que ya quedan totalmente determinados. Para mayor claridad, se presentará el procedimiento a través de un ejemplo.

Ejemplo 4.7

Supóngase que se trata de un diseño 2^3 , y se va a fraccionar a $1/2$, es decir, dos bloques de cuatro combinaciones de tratamientos cada uno. Entonces se debe definir un sólo efecto a confundir con 1. Supóngase que el experimentador decide confundir AB .

Se construye una ecuación definitoria, del tipo

$$L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

en que α_1 es igual a 1 si A está presente en el efecto a confundir, 0 si no lo está; α_2 es 1 si B está, 0 en caso contrario, y lo mismo para α_3 . Si se desea confundir ABC , $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 1$. En nuestro caso queremos confundir AB , luego $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 0$, y la ecuación definitoria es

$$L = x_1 + x_2$$

Los términos x_1 , x_2 y x_3 toman el valor del subíndice de a , b y c , respectivamente, de cada combinación de tratamientos: 1 si el factor está al nivel bajo, 2 si está al nivel alto, en cada una de las combinaciones de tratamientos del experimento completo. Luego de calculado el valor de L , para cada combinación de tratamientos, se forma un bloque con todas aquellas combinaciones para las cuáles L resultó ser un número par, y el otro bloque con todas aquellas para las que L resultó ser impar. La siguiente tabla muestra los cálculos que habría que hacer, en nuestro ejemplo:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS				ECUACIÓN DEFINITORIA	PARIDAD	BLOQUE
	x_1	x_2	x_3	$L = x_1 + x_2$		
$a_1b_1c_1$	1	1	1	2	par	I
$a_2b_1c_1$	2	1	1	3	impar	II
$a_1b_2c_1$	1	2	1	3	impar	II
$a_2b_2c_1$	2	2	1	4	par	I
$a_1b_1c_2$	1	1	2	2	par	I
$a_2b_1c_2$	2	1	2	3	impar	II
$a_1b_2c_2$	1	2	2	3	impar	II
$a_2b_2c_2$	2	2	2	4	par	I

Tabla 4.14: Construcción de Bloques

Los bloques definidos en la última columna, quedan estructurados de la siguiente forma:

BLOQUE I	BLOQUE II
$a_1b_1c_1$	$a_2b_1c_1$
$a_2b_2c_1$	$a_1b_2c_1$
$a_1b_1c_2$	$a_2b_1c_2$
$a_2b_2c_2$	$a_1b_2c_2$

Si aplicamos la regla vista anteriormente, para determinar qué efectos están confundidos con cuáles otros, nos encontramos con lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 AB \times 1 &= AB \\
 AB \times A &= A^2B = B \\
 AB \times B &= AB^2 = A \\
 AB \times AB &= A^2B^2 = 1 \\
 AB \times C &= ABC = ABC \\
 AB \times AC &= A^2BC = BC \\
 AB \times BC &= AB^2C = AC \\
 AB \times ABC &= A^2B^2C = C
 \end{aligned}$$

Recordemos que ahora AB está confundido con 1, por eso se “multiplican” los efectos por AB . Podemos concluir que:

1 está confundido con AB , que era la condición bajo la cual se construyó el diseño.

A está confundido con B

C está confundido con ABC

AC está confundido con BC

Este no resultó ser un buen diseño, pues dos efectos principales, A y B , quedaron confundidos entre sí, y no se podrá saber si son significativos, por separado. A esto se referirá la siguiente sección. Si p es 2 o más (fracciones de $1/4$, $1/8$, etc.), se tomarán tantas ecuaciones definitorias como el valor de p . Las combinaciones de tratamientos cuya paridad coincide en todas sus ecuaciones definitorias, van al mismo bloque.

Por ejemplo, si $p = 4$, habrán 4 bloques, dos confundidos con 1, independientes, dos ecuaciones definitorias; las paridades posibles para los dos valores de L son (par,par), (par,impar), (impar,par) y (impar,impar). De esta forma quedan definidos los cuatro bloques. Para verificar veamos un ejemplo de experimento 2^{3-2} .

Ejemplo 4.8

Supóngase un diseño 2^3 que se va a fraccionar a $1/4$ es decir, en 4 bloques de 2 combinaciones de tratamientos cada uno. Los efectos a confundir con 1 son ABC y AC .

Luego, las ecuaciones definitorias son:

$$\begin{aligned} L_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ L_2 &= x_1 + x_3 \end{aligned}$$

La tabla para construcción de bloques es:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	x_1	x_2	x_3	$L_1 = x_1 + x_2 + x_3$	$L_2 = x_1 + x_3$	PARIDAD	BLOQUE
$a_1b_1c_1$	1	1	1	3	2	impar, par	I
$a_2b_1c_1$	2	1	1	4	3	par, impar	II
$a_1b_2c_1$	1	2	1	4	2	par, par	III
$a_2b_2c_1$	2	2	1	5	3	impar, impar	IV
$a_1b_1c_2$	1	1	2	4	3	par, impar	II
$a_2b_1c_2$	2	1	2	5	4	impar, par	I
$a_1b_2c_2$	1	2	2	5	3	impar, impar	IV
$a_2b_2c_2$	2	2	2	6	4	par, par	III

4.3. Resolución de un Diseño Factorial Fraccionado.

Un diseño fraccionado es de resolución R si, dado cualquier par de efectos confundidos entre sí, el número total de factores contenidos en ellos es a lo menos R .

En el Ejemplo 4.7 se vio un diseño 2^{3-1} , en el que están confundidos 1 con AB , A con B , BC con AC y C con ABC ; el número total de factores en cada par de confundidos es 2, 2, 4, y 4, respectivamente. Luego la resolución es II. Este diseño se expresa en símbolos como 2_{II}^{3-1} .

En el Ejemplo 4.6 se muestra un diseño 2^{3-1} , los confundidos son 1 con ABC , A con BC , B con AC y C con AB , 3 factores en cada caso. Luego la resolución es III. Este es un diseño 2_{III}^{3-1} .

También se mostró un diseño 2^{3-2} , en el Ejemplo 4.5, y se vio que los confundidos son AC con AB con BC con 1, y A con B con C con ABC . Por lo tanto la resolución es II, y el diseño es un 2_{II}^{3-2} .

Mientras más alta es la resolución, mejor es el diseño. Esto es porque es deseable evitar confundir efectos de bajo orden con otros de bajo orden, como serían efectos principales entre sí. Es mejor confundir efectos de bajo orden con otros de orden alto, pues en general éstos últimos suelen tener poca significación, en la práctica, como fuentes de variación de la respuesta.

A continuación se enumeran las características de los diseños con resoluciones III, IV y V:

Resolución III: No hay efectos principales confundidos entre sí, pero si efectos principales con interacciones dobles.

Resolución IV: No hay efectos principales confundidos entre sí, ni efectos principales con interacciones dobles. Si hay interacciones dobles confundidas entre sí y efectos principales con interacciones triples.

Resolución V: No hay efectos principales ni interacciones dobles confundidos entre ellos. Si hay interacciones dobles confundidas con triples.

Existen programas computacionales que, dadas las condiciones mencionadas en la sección anterior, entregan el diseño óptimo, es decir, el de más alta resolución. El uso de estos programas, evita tener que efectuar los cálculos para la construcción de bloques, que puede ser bastante tediosa en diseños con muchos factores.

EJERCICIOS.

Ejercicio 4.1

La empresa CHILE-OLIVES desea mejorar la hermeticidad de los envases, con capacidad para 200 litros, de aceitunas de exportación. El siguiente diseño corresponde a un experimento a tres factores: El sello, el adhesivo y la temperatura de sellado. El sello es de dos tipos posibles, el adhesivo se aplica en baja densidad y en alta densidad, y la temperatura de sellado tiene dos niveles, 50 grados y 65 grados centígrados. Por razones de economía, el experimento se hace fraccionado en cuatro bloques. Se trata, entonces de un diseño 2^{3-2} , que se muestra a continuación:

BLOQUE I	BLOQUE II	BLOQUE III	BLOQUE IV
$a_1 b_1 c_1$	$a_1 b_2 c_1$	$a_2 b_2 c_1$	$a_2 b_1 c_2$
$a_2 b_1 c_1$	$a_1 b_1 c_2$	$a_2 b_2 c_2$	$a_1 b_2 c_2$

- a) Encuentre los efectos confundidos con bloques, y los grupos de efectos confundidos entre sí.
- b) ¿Cuál es la resolución del diseño?

Ejercicio 4.2

Se busca optimizar la resistencia a la compresión del hormigón denominado tipo H-30, en función de los siguientes factores, a dos niveles cada uno:

FACTORES	NIVELES
A : Razón Agua-Cemento	a_1 : 0,45 a_2 : 0,60
B : Tiempo de Curado	b_1 : 7 días b_2 : 28 días
C : Aditivo Plastiment-Her	c_1 : 0,5 % c_2 : 1,5 %

La respuesta es la resistencia a la compresión, medida en Kg/cm². El diseño del experimento es en un bloque de dos combinaciones de tratamientos. El siguiente diagrama muestra la forma de fraccionar el experimento en bloques de dos:

	EFECTOS E INTERACCIONES							
	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
BLOQUE I	+	-	+	-	-	+	-	+
	+	+	-	-	+	+	-	-
BLOQUE II	+	-	-	+	-	+	+	-
	+	+	+	+	+	+	+	+
BLOQUE III	+	+	+	+	-	-	-	-
	+	-	+	-	+	-	+	-
BLOQUE IV	+	+	-	-	-	-	+	+
	+	-	-	+	+	-	-	+

a) Encuentre los efectos confundidos con bloques, y los grupos de efectos confundidos entre sí.

b) ¿Cuál es la resolución del diseño?

Ejercicio 4.3

Repita lo del Ejercicio 4.2, para el siguiente caso:

	EFECTOS E INTERACCIONES							
	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
BLOQUE I	+	-	-	+	-	+	+	-
	+	+	+	+	-	-	-	-
BLOQUE II	+	+	-	-	-	-	+	+
	+	-	+	-	-	+	-	+
BLOQUE III	+	-	-	+	+	-	-	+
	+	+	+	+	+	+	+	+
BLOQUE IV	+	+	-	-	+	+	-	-
	+	-	+	-	+	-	+	-

Ejercicio 4.4

En el mismo problema de optimizar la hermeticidad de sus envases de 200 litros, supóngase que CHILE-OLIVES dispone de mayores recursos para su estudio, y el experimento lo fracciona sólo en dos bloques. Se trata de un diseño 2^{3-1} . A continuación se da la distribución de las combinaciones de tratamientos, en cada uno de los bloques. Se dan, además, los valores de las respuestas obtenidas, después de realizado el experimento:

	COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
BLOQUE I	$a_1b_1c_1$	38
	$a_2b_2c_1$	30
	$a_1b_1c_2$	35
	$a_2b_2c_2$	25
BLOQUE II	$a_2b_1c_1$	37
	$a_1b_2c_1$	29
	$a_2b_1c_2$	34
	$a_1b_2c_2$	24

- Calcule los efectos de los tratamientos en cada bloque, mediante tablas de respuestas.
- Encuentre los efectos confundidos con bloques, y los grupos de efectos confundidos entre sí. Observando las tablas de respuestas, determine si hay consistencia con los resultados obtenidos en a).
- ¿Cuál es la resolución del diseño?

Ejercicio 4.5

Repita lo del Ejercicio 4.4, para los siguientes datos:

	COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
BLOQUE I	$a_1b_1c_1$	16
	$a_1b_2c_1$	22
	$a_2b_1c_2$	32
	$a_2b_2c_2$	35
BLOQUE II	$a_2b_1c_1$	18
	$a_2b_2c_1$	24
	$a_1b_1c_2$	26
	$a_1b_2c_2$	29

Ejercicio 4.6

Repita lo del Ejercicio 4.4, para los siguientes datos:

[illegible]

Ejercicio 4.7

Repita lo del Ejercicio 4.4, para los siguientes datos:

	EFECTOS E INTERACCIONES								RESPUESTA
	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	
BLOQUE I	+	+	-	-	-	-	+	+	16
	+	-	+	-	+	-	+	-	18
	+	+	+	+	-	-	-	-	19
	+	-	-	+	+	-	-	+	19
BLOQUE II	+	-	-	+	-	+	+	-	18
	+	+	-	-	+	+	-	-	16
	+	-	+	-	-	+	-	+	19
	+	+	+	+	+	+	+	+	19

Ejercicio 4.8

Se requiere efectuar un experimento con tres factores, a dos niveles cada uno, relacionado con la maniobrabilidad de un vehículo, en diversas condiciones del camino. Los factores y sus respectivos niveles son:

FACTORES	NIVELES
A : Tipo de Superficie	a_1 : Concreto a_2 : Asfalto
B : CONDICION DEL CAMINO	b_1 : Seco b_2 : Mojado
C : Presión de los Neumáticos	c_1 : 20 psi. c_2 : 30 psi.

La respuesta es la distancia recorrida al aplicar los frenos, cuando el vehículo se desplaza a 50 km por hora.

Se hace un diseño 2^{3-1} , es decir, sólo se corre un bloque de cuatro combinaciones de tratamientos. La siguiente es la matriz del diseño, y en ella se indican los dos bloques en que se decide fraccionar el experimento, de los cuáles el experimentador selecciona uno para ejecutar:

	COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	EFECTOS E INTERACCIONES							
		1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
BLOQUE I	$a_1b_1c_1$	+	-	-	+	-	+	+	-
	$a_2b_1c_1$	+	+	-	-	-	-	+	+
	$a_1b_2c_2$	+	-	+	-	+	-	+	-
	$a_2b_2c_2$	+	+	+	+	+	+	+	+
BLOQUE II	$a_1b_2c_1$	+	-	+	-	-	-	-	+
	$a_2b_2c_1$	+	+	+	+	-	-	-	-
	$a_1b_1c_2$	+	-	-	+	+	+	-	+
	$a_2b_1c_2$	+	+	-	-	+	+	-	-

- ¿Qué efecto o efectos están confundidos con los bloques?
- Forme todos los grupos de efectos que están confundidos entre sí.
- ¿Cuál es la resolución del diseño? ¿Es ésta la partición más conveniente del diseño factorial 2^3 , en dos bloques?

Ejercicio 4.9

Se desea efectuar un experimento para determinar los factores que afectan el desgaste de un motor para portones automáticos. Los factores considerados son tres: Peso del portón (factor A), tipo de superficie de deslizamiento (factor B), y distancia de desplazamiento (factor C). A cada factor se le definen dos niveles.

Debido a lo caro que resultaría la experimentación para realizar las 8 corridas experimentales mínimas necesarias para efectuar el experimento completo, se decide correr sólo un bloque de cuatro combinaciones de tratamientos. Se piensa que la interacción triple ABC es poco importante, por lo que se decide confundirla con bloques.

- Diseñe los bloques de tal modo que se confundan con ABC .
- Indique los grupos de efectos confundidos entre sí.
- ¿Cuál es la resolución del experimento?

Ejercicio 4.10

Repita lo del Ejercicio 4.9, pero confundiendo la interacción doble AB con bloques.

Ejercicio 4.11

Repita lo del ejercicio Ejercicio 4.10, pero confundiendo el efecto principal A con bloques. ¿Por qué no sería conveniente este diseño?

Ejercicio 4.12

Supóngase la misma situación del Ejercicio 4.8, pero ahora el presupuesto para efectuar estudios es aún más escuálido, y sólo se correrá un bloque de dos combinaciones de tratamientos.

- a) Diseñe los bloques de tal modo que se confundan con AB y con ABC .
- b) Indique los grupos de efectos confundidos entre sí.
- c) ¿Cuál es la resolución del experimento?

Ejercicio 4.13

Repita lo del Ejercicio 4.12, pero confundiendo las interacciones dobles BC y AC con bloques.

Ejercicio 4.14

Repita lo del ejercicio Ejercicio 4.12, pero confundiendo la interacción doble BC y el efecto principal A con bloques.

Capítulo 5

Diseños Factoriales con más de Dos Niveles

Introducción

En una etapa exploratoria, el fijar dos niveles por factor puede ser conveniente, por economía de recursos y de tiempo. Sin embargo, un análisis confirmatorio posterior puede requerir que algunos factores tengan más de dos niveles. Esto puede ser por las características propias del fenómeno que se está estudiando, por ser necesario estudiar con más precisión la forma que tiene la respuesta (análisis de superficies de respuesta), o por alguna otra razón, sugerida por el conocimiento empírico que se tiene del fenómeno. De esta forma, surgen diseños experimentales que se designan simbólicamente por 3^2 , $3 \times 5 \times 6$, 5^4 , $2^3 \times 3^2$, etc.

La situación aquí es bastante más compleja, y según sea el caso, el tratamiento que se hace es distinto. Por ejemplo, si un factor tiene un número primo de niveles, es decir, el número es divisible sólo por 1 y por sí mismo, la metodología a usar es diferente que si el número de niveles no es primo. También el número de expresiones o contrastes asignada a un efecto no es uno, como en el caso de dos niveles. Si hay tres niveles, se requieren dos contrastes para medir el efecto de un factor. La interacción de dos factores a tres niveles cada uno, se representa por 4 contrastes. En general, un efecto se mide por un número de contrastes igual al producto de los números de niveles de los factores que intervienen en el efecto, cada uno disminuido en uno. El número se denomina *grados de libertad del efecto*. Es una medida de la cantidad de información que se requiere para medir el efecto. Si es un efecto principal, interviene sólo un factor, y el número de grados de libertad es igual al número de niveles menos uno. Si es una interacción doble, el número de grados de libertad es igual al producto del número de niveles menos uno, de cada uno de los dos factores. Por ejemplo, en un diseño 3^3 , los efectos principales tienen $3 - 1 = 2$ grados de libertad; las interacciones dobles tienen $(3 - 1) \times (3 - 1) = 4$ grados de libertad.

ESTUDIO DE CASO: Pérdida de calibración de láminas bimetálicas, utilizadas como elemento de seguridad en artefactos a gas.

Los artefactos de gas que tienen un piloto de alimentación de encendido, deben incluir, por norma, un elemento de seguridad. Este hace que, si por alguna razón se apaga la llama del piloto, se produzca un corte automático del paso de gas.

Existen dos sistemas de corte automático: El termo-par y la lámina bimetálica. En el primero, la llama del piloto calienta la cabeza de un filamento conductor, que al subir de temperatura, aumenta su presión interior, accionando una bobina que abre un sello en un conducto de paso de gas. La lámina bimetálica consta de dos láminas pegadas de metales distintos. Al aumentar la temperatura, una se dilata más que la otra, lo que produce que el par se curve, accionando un eje que abre el paso de gas. En ambos casos, al enfriarse ocurre lo inverso, se cierra el paso de gas.

Ambos sistemas deben cumplir con la norma, que especifica que el corte de gas debe producirse en un tiempo menor de 60 segundos, de apagarse la llama del piloto.

Estos dispositivos pierden su calibración, con el tiempo, y el artefacto no puede encenderse en forma normal. En el caso de la lámina bimetálica, ésta pierde sus propiedades mecánicas, ocasionando problemas de retraso en el tiempo de encendido, o simplemente dejando el artefacto sin encender.

Se diseñó un experimento para observar el comportamiento del sistema de seguridad tipo lámina bimetálica, con el objeto de prolongar la vida útil de este elemento, y así reducir el número de llamadas solicitando servicio.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO: Medir el efecto de las dimensiones de los elementos constitutivos de la lámina bimetálica, sobre el tiempo de vida antes de perder la calibración.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: Dos factores, con tres niveles cada uno, con cinco réplicas, según la siguiente descripción:

FACTORES	NIVELES
A : Distancia del eje impulsor a la lámina bimetálica	a_1 : 1 mm. a_2 : 2 mm. a_3 : 3 mm.
B : Distancia de la cabeza piloto a la lámina bimetálica	b_1 : 1 mm. b_2 : 2 mm. b_3 : 3 mm.

RESPUESTA: La respuesta es el número de horas de vida antes de perder la calibración. La pérdida de calibración se determina cuando el tiempo de corte de gas sube de 60 segundos después de apagado el piloto.

El experimento se realizó manteniendo los pilotos encendido durante varias semanas, verificando cada día su calibración, y registrando el momento en que se descalibraban.

5.1. Diseños Factoriales 3^2 , con dos Factores a Tres Niveles.

Como ilustración, veremos un ejemplo de un diseño a dos factores, A y B , cada uno con tres niveles. Las combinaciones de tratamientos son $a_1b_1, a_2b_1, a_3b_1, a_1b_2, a_2b_2, a_3b_2, a_1b_3, a_2b_3$ y a_3b_3 .

El siguiente es un conjunto de contrastes ortogonales, que sirven para medir los efectos. Este conjunto constituye la Matriz de Diseño del experimento 3^2 .

Combinación de Tratamientos	EFECTOS								
	1	A1	A2	B1	B2	AB1	AB2	AB3	AB4
a_1b_1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
a_2b_1	1	0	-2	-1	1	0	0	2	-2
a_3b_1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
a_1b_2	1	-1	1	0	-2	0	2	0	-2
a_2b_2	1	0	-2	0	-2	0	0	0	4
a_3b_2	1	1	1	0	-2	0	-2	0	-2
a_1b_3	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1
a_2b_3	1	0	-2	1	1	0	0	-2	-2
a_3b_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 5.1: Matriz de Diseño para Analizar un Experimento 3^2 .

Observemos que, en cada uno, la suma de sus componentes es cero. Siguen válidas las definiciones dadas en el Capítulo 2 para contrastes y para contrastes ortogonales:

Un **contraste** es una suma algebraica de combinaciones de tratamientos tales que la suma de los coeficientes positivos es igual a la suma de los coeficientes negativos.

Dos contrastes son **ortogonales**, si el resultado de multiplicarlos es otro contraste.

En la Matriz de Diseño del experimento 3^2 , podemos ver que el primer contraste, llamado $A1$, sirve para comparar el efecto del nivel 1 con el efecto del nivel 3 del factor A . El segundo, $A2$, compara el efecto del nivel 2 con los efectos de los niveles 1 y 3 en promedio, del mismo factor. Por eso, los dos primeros contrastes miden el efecto del factor A . De forma similar, los dos siguientes, $B1$ y $B2$, miden el efecto del factor B . Los últimos cuatro, $AB1$ a $AB4$, comparan el efecto de las diferencias de niveles de un factor, a diferentes niveles del otro. Por eso decimos que los cuatro miden diversos aspectos de la interacción entre A y B .

También se pueden tratar los contrastes como si fueran expresiones algebraicas, y factorizarlas, como lo hicimos en el caso de dos niveles.

Es así que el primer contraste se puede simbolizar como

$$A1 = (a_3 - a_1)(b_1 + b_2 + b_3)$$

y ahora se ve con más claridad que se trata de una comparación entre los efectos de los niveles 1 y 3 del factor A . También tenemos

$$A2 = (a_1 - 2a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$$

comparación entre a_2 y a_1 con a_3 combinados. Análogamente,

$$\begin{aligned} B1 &= (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_1) \\ B2 &= (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 - 2b_2 + b_3) \end{aligned}$$

Observemos que si sumamos $A1$ con $A2$, se forma una comparación entre los niveles a_2 y a_3 . De forma análoga, los cuatro contrastes para la interacción se pueden escribir como

$$\begin{aligned} AB1 &= (a_3 - a_1)(b_3 - b_1) \\ AB2 &= (a_3 - a_1)(b_1 - 2b_2 + b_3) \\ AB3 &= (a_1 - 2a_2 + a_3)(b_3 - b_1) \\ AB4 &= (a_1 - 2a_2 + a_3)(b_1 - 2b_2 + b_3) \end{aligned}$$

El lector puede verificar, con paciencia, que la suma de las cuatro expresiones da

$$AB1 + AB2 + AB3 + AB4 = 4(a_3 - a_2)(b_3 - b_2)$$

una diferencia entre las diferencias de los efectos de a_3 y a_2 de A , a los niveles b_3 y b_2 de B .

Ejemplo 5.1

Supongamos que las respuestas a las diferentes combinaciones de tratamientos, en el orden dado más arriba, a_1b_1 , a_2b_1 , a_3b_1 , a_1b_2 , a_2b_2 , a_3b_2 , a_1b_3 , a_2b_3 y a_3b_3 , son, respectivamente, 59, 27, 44, 53, 27, 29, 69, 35, 48. La siguiente es la Tabla de Respuestas para este experimento, construida en forma análoga al caso 2^3 , y que nos permite conocer los efectos:

COMPO- NENTE	1	A1		A2		B1		B2	
a_1b_1	59	59		59		59		59	
a_2b_1	27				27	27		27	
a_3b_1	44		44	44		44		44	
a_1b_2		53		53					53
	53								
a_2b_2	27				27				27
a_3b_2	29		29	29					29
a_1b_3	69	69		69		69	69		
a_2b_3	35				35	35	35		
a_3b_3	48		48	48		48	48		
TOTAL	391	181	121	302	89	130	152	282	109
FACTOR	1	-1	1	1	-2	-1	1	1	-2
T. PONDERADO	391	181	121	302	178	130	152	282	218
NETO	391		60		124		22		64
DIVISOR	9		3		6		3		6
EFFECTO	43.4		20.0		20.7		7.3		10.7
RANGO			2		1		4		3

Tabla 5.2: Respuestas para el Diseño 3^2 . Primera parte.

COMPO- NENTE	1	AB1		AB2				AB3				AB4		
a_1b_1	59	59		59				59				59		
a_2b_1	27								27				27	
a_3b_1	44		44		44			44				44		
a_1b_2	53					53							53	
a_2b_2	27													27
a_3b_2	29						29						29	
a_1b_3	69		69	69						69		69		
a_2b_3	35										35		35	
a_3b_3	48	48			48					48		48		
TOTAL	391	107	113	128	92	53	29	103	27	117	35	220	144	27
FACTOR	1	-1	1	-1	1	2	-2	-1	2	1	-2	1	-2	4
T. PONDERADO	391	107	-113	-128	92	106	-58	-103	54	117	-70	220	-288	108
NETO	391		6				12				2			40
DIVISOR	9		2				4				4			8
EFFECTO	43.4		3.0				3.0				0.5			5.0
RANGO			6				6				7			5

Tabla 5.3: Respuestas para el Diseño 3^2 . Segunda parte.

La fila rotulada *Factor*, contiene las componentes de los contrastes. La fila *Total Ponderado*, es el producto del Total respectivo de la columna, multiplicado por su Factor. El *Neto* es el valor absoluto de la suma algebraica de los Totales Ponderados de cada contraste. El *Divisor* es la suma de las componentes del contraste, que tienen signo positivo. El *Efecto* es el cuociente entre el Neto y el Divisor, respectivos. El *Rango* es el orden de magnitud de los Efectos, ordenados de mayor a menor.

Los efectos, ordenados por magnitud, se muestran en el Diagrama de Efectos, a continuación:

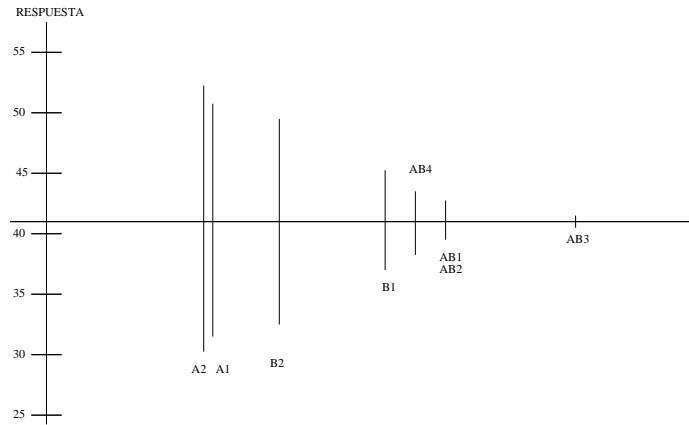


Figura 5.1: Diagrama de Efectos para el Experimento 3^2

El efecto de *A* es el más notorio, tanto *A1*, la comparación entre los dos niveles extremos a_1 y a_3 , y *A2*, la comparación entre el nivel medio a_2 y los otros dos. Sigue en importancia el contraste *B2*, que compara el nivel b_2 con los niveles b_1 y b_3 de este factor. Luego *B1*, que compara b_1 con b_3 . Después sigue la componente *AB4* de la interacción. Ya con menor significación, le siguen *AB1*, *AB2*, y más lejos, *AB3*.

También podemos construir Gráficos de Interacción, en este caso. Debemos tener presente que si los niveles corresponden a una variable nominal, el orden en que se ubican en el eje horizontal es arbitrario, y las distancias entre los puntos no tienen un sentido físico. En cambio, si los niveles de un factor son valores numéricos, deben ir en el orden natural. En este caso, si los gráficos de interacción muestran líneas rectas ascendentes, o descendentes, podemos interpretarlo como un efecto lineal: la respuesta al factor es de tipo lineal, o de primer grado. Si muestran líneas quebradas, con un cambio de pendiente, lo interpretamos como un efecto cuadrático: hay una respuesta cuadrática, o de segundo grado, del factor. Puede darse una superposición de ambos efectos, lineal y cuadrático, en una respuesta. Pero debe quedar muy claro que no tiene sentido hablar de efectos lineal o cuadrático, si el factor no es numérico; en este caso la forma de la respuesta depende del orden en que se ubiquen los niveles en el gráfico.

A continuación se presentan los Gráficos de Interacción. En ellos se muestran los 9

puntos que corresponden a las respuestas a las 9 combinaciones de tratamientos, dados en la columna de la *Identidad* de la Tabla de Respuestas. Se observa la presencia de los efectos principales y la interacción. Además, si los niveles del factor A fuesen lineales, se apreciaría que hay un efecto lineal de descenso de la respuesta, a medida que aumenta A, superpuesto con un efecto cuadrático, de concavidad hacia la parte superior. El paralelismo de las rectas muestran que no hay interacción, o ésta es muy débil.

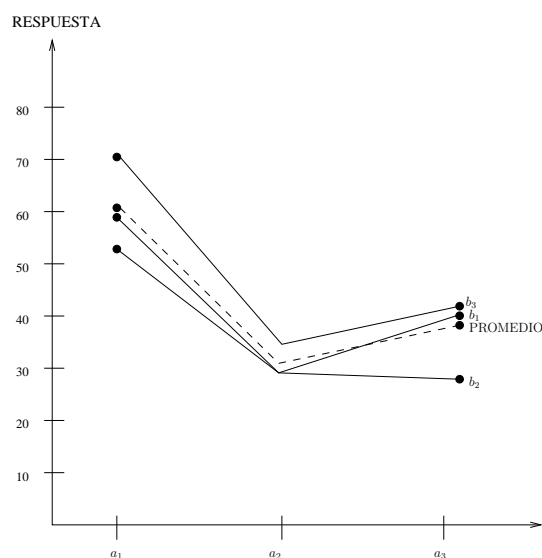


Figura 5.2: Gráfico de Interacción del Experimento 3^2 , factor A en el eje de las abscisas.

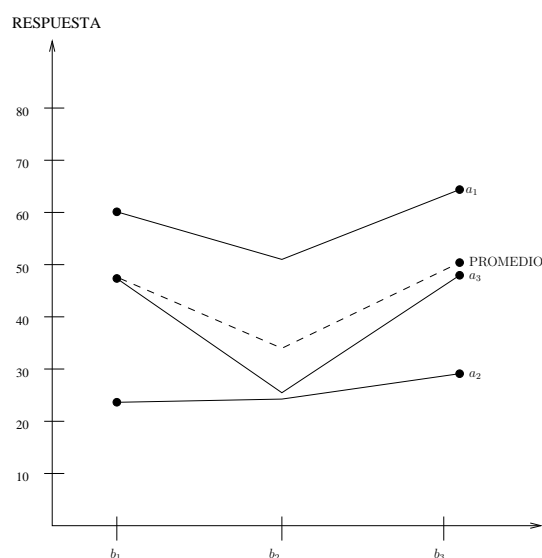


Figura 5.3: Gráfico de Interacción del Experimento 3^2 , factor B en el eje de las abscisas

ESTUDIO DE CASO: Resistencia a la flexión en la fabricación de ladrillos.

La fábrica de ladrillos El Nuevo Tiempo produce al mes una cantidad aproximada de 10.000 ladrillos de varios tipos. La producción de estos es de carácter industrial, con muy poca participación de la mano del hombre directamente. El cambio en la forma de producción permitió a la fábrica manejar una serie de variables dentro del proceso productivo, para obtener un producto estable en su comportamiento mecánico frente a los requerimientos de los clientes.

Desde los yacimientos de arcilla El Libertador, ubicados a 15 km de las instalaciones industriales de la Fábrica El Nuevo Tiempo, se extrae la arcilla por medio de cargadores frontales del tipo CAT 998 que la depositan a camiones tolva de 30 TM de capacidad, para su traslado hasta la fábrica. La arcilla transportada es depositada dentro de una tolva de 25 metros cúbicos, que alimenta un chancador primario de cono 48×64, que produce la fractura de la arcilla al tamaño especificado de media pulgada de diámetro.

Dentro del área de harneado existen dos harneros de 8×10 pies, que tienen instaladas mallas seleccionadoras de $\frac{1}{2}$ plg. Producida la selección de la arcilla de $\frac{1}{2}$ plg., ésta pasa a otra etapa, de preparación de la mezcla para el moldeo de los ladrillos.

El sobretamaño recircula por medio de una cinta transportadora de 36plg al chancado primario, donde nuevamente es fracturada y devuelta al área de harneado.

La arcilla seleccionada es depositada dentro de las cuatro piscinas de preparación, que tienen una capacidad de 50000 mts cúbicos.

El transporte desde el área de harneado se hace por medio de una cinta transportadora de 24plg, que alimenta un “stacker radial” que alimenta indistintamente a cualquiera de las cuatro piscinas.

Dentro de las piscinas de preparación se le adiciona agua para producir la mezcla, o masa arcillosa, junto con aditivos determinados, según el tipo de ladrillo que se va a producir.

La masa arcillosa es retirada desde las piscinas de preparación por medio de cargadores frontales del tipo CAT 966, que la depositan en las máquinas de moldeo de los diferentes tipos de ladrillos.

Después de ser moldeada la arcilla, los ladrillos frescos son depositados en una cinta de rodillos, de 96plg., que hace que estos circulen por dentro del horno de secado continuo. La cinta de rodillos permite ajustar la velocidad, para determinar el tiempo de cocción de los ladrillos, dentro del horno de secado continuo.

Los ladrillos cocidos dentro del horno de secador continuo pasan finalmente al patio

de almacenamiento, donde se enfrían en forma natural. Posteriormente, son entregados a los clientes.

Los clientes de la fabrica de ladrillos El Nuevo Tiempo le han solicitado la certificación al esfuerzo de flexión de los ladrillos tipo Fiscal, de $40 \times 25 \times 8$ cm. La carga sobre el ladrillo tipo Fiscal debe ser de 180 kg antes que el ladrillo sufra una deformación. Esta cifra es producto de una fórmula de resistencia de materiales para el cálculo de la flexión.

Frente a este requerimiento de sus clientes, la fábrica decidió conducir un experimento, para determinar la forma de controlar la variabilidad en la resistencia de los ladrillos. Los Ingenieros de Proceso estiman que la resistencia al esfuerzo puede estar afectada por dos factores en el proceso de producción. Estos factores son la temperatura y el tiempo de cocimiento a que son sometidos.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: El diseño es a dos factores, con tres niveles cada uno. Se hicieron 9 réplicas por cada combinación de tratamientos, lo que dio 81 corridas experimentales.

FACTORES	NIVELES
A : Temperatura	a_1 : 150 °C
	a_2 : 200 °C
	a_3 : 250 °C
B : Tiempo de cocido	b_1 : 2 horas
	b_2 : 2 1/2 horas
	b_3 : 3 horas

RESPUESTA: Se sometió a esfuerzos de flexión la muestra de ladrillos, y se midió la fuerza aplicada para alcanzar la deformación máxima permitida. La respuesta se mide en kilos.

Los resultados obtenidos, promediados a través de las 9 réplicas, con valores aproximados al entero, fueron los siguientes:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
a_1b_1	$Y_{11} = 110$
a_2b_1	$Y_{21} = 154$
a_3b_1	$Y_{31} = 150$
a_1b_2	$Y_{12} = 160$
a_2b_2	$Y_{22} = 190$
a_3b_2	$Y_{32} = 181$
a_1b_3	$Y_{13} = 140$
a_2b_3	$Y_{23} = 193$
a_3b_3	$Y_{33} = 196$

Tabla 5.4: Resultados de corridas experimentales de resistencia a la flexión de ladrillos

El diagrama de efectos se presenta a continuación. Muestra una componente cuadrática del factor TEMPERATURA y una componente cuadrática del factor TIEMPO. Las componentes lineales de ambos factores son muy débiles. Se observa también, aunque débil, una componente $AB1$ de interacción, esto es, lineal en ambas componentes.

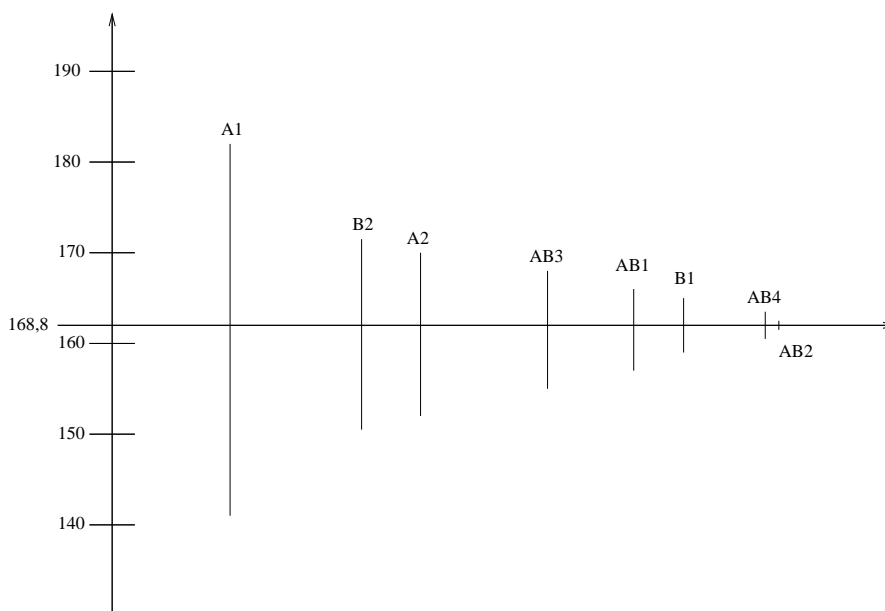


Figura 5.4: Diagrama efectos de resistencia a la flexión de ladrillos

Los gráficos de interacción, que se muestran a continuación, muestran lo mismo que el diagrama de efectos: Componentes cuadráticas importantes, bajo efecto lineal, sobre todo del factor TIEMPO. El paralelismo de las líneas indica poca interacción. En estos gráficos se aprecia que los valores óptimos están cerca del centro, para ambos factores, es decir, del punto $TEMPERATURA = 200\text{ }^{\circ}\text{C}$, $TIEMPO = 2\text{ }1/2\text{ horas}$.

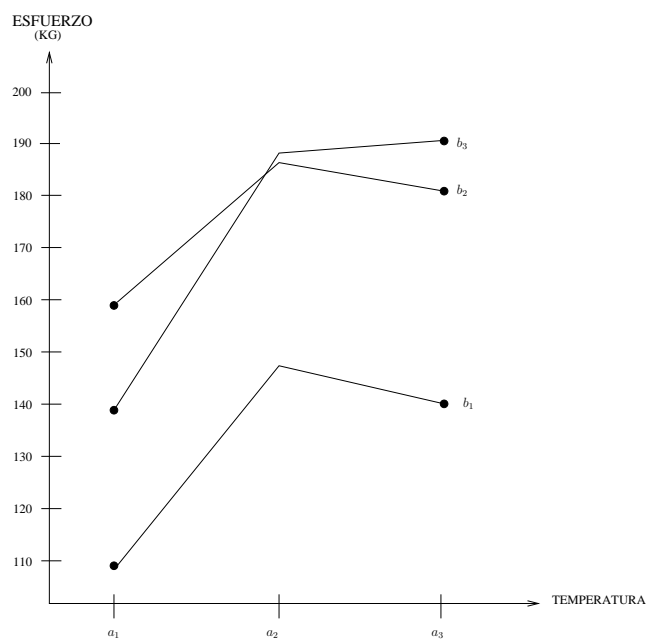


Figura 5.5: Gráfico Interacción Resistencia v/s Temperatura estratificado por Tiempo cocido

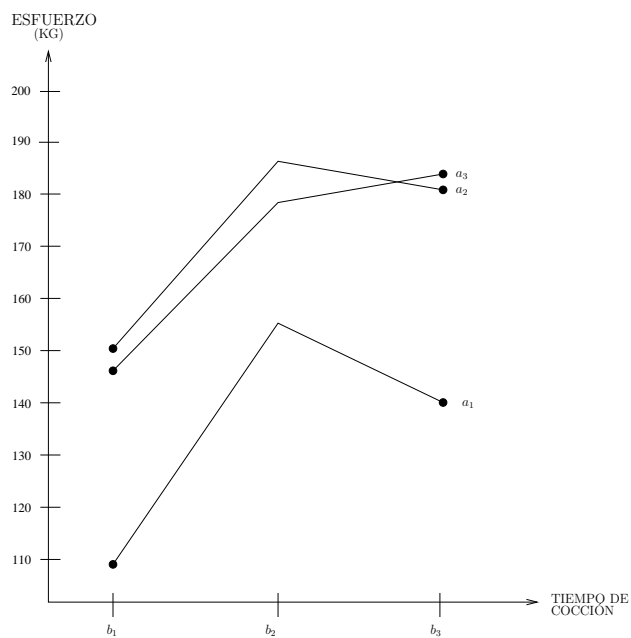


Figura 5.6: Gráfico Interacción Resistencia v/s Tiempo cocido estratificado por Temperatura

5.2. Diseños 3^2 fraccionados.

Estudiaremos el caso 3^2 , para ver cómo se fracciona un diseño con más de dos niveles por factor. Aquí se debe fraccionar en un múltiplo de 3, de modo que todas las fracciones tengan igual número de combinaciones de tratamientos, y los bloques puedan estar balanceados. Los diseños fraccionados resultantes son del tipo 3^{k-p} .

Para determinar los efectos confundidos, como en los casos de dos niveles, se debe observar la matriz de diseño para determinar qué efectos resultan confundidos con bloques, y qué efectos están confundidos entre sí. También funciona el método para construir bloques, visto anteriormente, de modo que se confundan efectos que uno ha determinado previamente, utilizando ecuaciones definitorias. En el caso de un diseño 3^{k-p} balanceado, el número de efectos independientes que quedan confundidos con bloques está dado por p . Multiplicando cada efecto principal e interacción, se determina cuáles efectos, o componentes de efectos, (como $AB1$, $AB2$, etc), resultan confundidos entre sí. Al multiplicar las componentes de efectos, se debe utilizar la misma regla de multiplicación de efectos, dada en el Capítulo 2. Es decir, se multiplican los efectos, eliminando todo factor que aparezca elevado al cuadrado. Los resultados se muestran en la tabla siguiente:

	A1	A2	B1	B2	AB1	AB2	AB3	AB4
A1	1	A1	AB1	AB2	B1	B2	AB1	AB2
A2	A1	1	AB3	AB4	AB1	AB2	B1	B2
B1	AB1	AB3	1	B1	A1	AB1	A2	AB3
B2	AB2	AB4	B1	1	AB1	A1	AB3	A2
AB1	B1	AB1	A1	AB1	1	B1	A1	AB1
AB2	B2	AB2	AB1	A1	B1	1	AB1	A1
AB3	AB1	B1	A2	AB3	A1	AB1	1	B1
AB4	AB2	B2	AB3	A2	AB1	A1	B1	1

Tabla 5.5: Multiplicación de efectos para el diseño 3^2 .

Ejemplo 5.2

Se desea comparar la degradación de tres marcas de aceite de alta calidad, en tres tipos de motores diferentes. Sea el factor A la marca de aceite, y el factor B el tipo de motor. La respuesta es una medida codificada de la degradación del aceite, después de 10 horas de funcionamiento continuado del motor, a un nivel de revoluciones fijo. Los valores observados de las respuestas son los siguientes:

COMPONENTE	RESPUESTA
a_1b_1	10
a_2b_1	15
a_3b_1	12
a_1b_2	21
a_2b_2	8
a_3b_2	19
a_1b_3	30
a_2b_3	16
a_3b_3	18

Tabla 5.6: Combinación de Degradación de Aceite

Se desea fraccionar el experimento en tres bloques de tres combinaciones de tratamientos, de tal modo que se confunda el efecto combinación A con bloques. Recordemos que este efecto tiene dos componentes, $A1$ y $A2$. Para determinar qué efectos quedan confundidos entre sí, multiplicamos estas dos componentes por cada una de las componentes del experimento, utilizando la tabla de multiplicar dada anteriormente.

Combinaciones por $A1$:

$$\begin{array}{rclcl}
 A1 & \times & 1 & = & A1 \\
 A1 & \times & A1 & = & 1 \\
 A1 & \times & A2 & = & A1 \\
 A1 & \times & B1 & = & AB1 \\
 A1 & \times & B2 & = & AB2 \\
 A1 & \times & AB1 & = & B1 \\
 A1 & \times & AB2 & = & B2 \\
 A1 & \times & AB3 & = & AB1 \\
 A1 & \times & AB4 & = & AB2
 \end{array}$$

Combinaciones por $A2$:

$$\begin{array}{rclcl}
 A2 & \times & 1 & = & A2 \\
 A2 & \times & A1 & = & A1 \\
 A2 & \times & A2 & = & 1 \\
 A2 & \times & B1 & = & AB3 \\
 A2 & \times & B2 & = & AB4 \\
 A2 & \times & AB1 & = & AB1 \\
 A2 & \times & AB2 & = & AB2 \\
 A2 & \times & AB3 & = & B1 \\
 A2 & \times & AB4 & = & B2
 \end{array}$$

Observando los resultados, vemos que los grupos de confundidos son tres, a saber:

$$1, A1, A2 \quad B1, AB1, AB3 \quad B2, AB2, AB4$$

Para construir los bloques, observamos que se debe confundir el efecto A , luego en la Combinación definitoria $L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, se fijan los valores $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 0$. Esto define la combinación definitoria

$$L = x_1$$

en que x_1 toma los valores 1, 2 ó 3, combinando el nivel en que se encuentre el factor A , en cada una de las combinaciones de tratamientos. Los bloques se forman agrupando aquellas combinaciones de tratamientos que generan el mismo residuo, si se divide el valor de L por 3.

Este puede ser 0, si L es múltiplo de 3; si no lo es puede tomar los valores 1 ó 2. En este caso L es idéntico al valor de x_1 , el nivel del factor A , por lo tanto cada bloque está determinado por las combinaciones de tratamientos en las que el factor A está al mismo nivel. Los bloques son, entonces,

BLOQUE I	BLOQUE II	BLOQUE III
$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$
$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$
$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$

Tabla 5.7: Bloques de un diseño 3^{2-1}

Compararemos los resultados que se obtendrían si se hubiera efectuado el experimento en alguno de los bloques. La siguiente es la tabla de respuestas del experimento completo, con los valores de las respuestas dadas más arriba:

COMPONENTE	1	A1		A2		B1		B2	
$a_1 b_1$	10	10		10		10		10	
$a_2 b_1$	15				15	15		15	
$a_3 b_1$	12		12	12		12		12	
$a_1 b_2$	21	21		21					21
$a_2 b_2$	8				8				8
$a_3 b_2$	19		19	19					19
$a_1 b_3$	30	30		30		30		30	
$a_2 b_3$	16				16	16		16	
$a_3 b_3$	18		18	18		18		18	
TOTAL	149	61	49	110	39	37	64	101	48
FACTOR	1	-1	1	1	-2	-1	1	1	-2
T. PONDERADO	149	-61	49	110	-78	-37	64	101	96
NETO	149		12		32		27		5
DIVISOR	9		3		6		3		6
EFFECTO	16.		4.0		5.3		9.0		0.8
	6								
RANGO			6		4		1		8

Tabla 5.8: Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Primera parte.

COMPONENTE	1	AB1		AB2				AB3				AB4		
a_1b_1	10	10		10				10				10		
a_2b_1	15							15					15	
a_3b_1	12	12		12				12				12		
a_1b_2	21				21								21	
a_2b_2	8													8
a_3b_2	19					19							19	
a_1b_3	30	30		30				30				30		
a_2b_3	16								16				16	
a_3b_3	18	18		18				18				18		
TOTAL	149	28	42	40	30	21	19	22	15	48	16	70	71	8
FACTOR	1	1	-1	-1	1	2	-2	-1	2	1	-2	1	-2	4
T. PONDERADO	149	28	-42	-40	30	42	-38	-22	30	48	-32	70	-142	32
NETO	149		14				6				24			40
DIVISOR	9		2				4				4			8
EFFECTO	16.6		7.0				1.5				6.0			5.0
RANGO			2				7				3			5

Tabla 5.9: Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Segunda parte.

Las siguientes son las tablas de respuestas que se hubieran obtenido si el experimento se hubiera llevado a cabo en cada uno de los bloques I, II y III, respectivamente:

COMPONENTE	1	A1		A2		B1		B2	
a_1b_1	10	10		10		10		10	
a_1b_2	21	21		21				21	
a_1b_3	30	30		30		30		30	
TOTAL	61	61	0	61	0	10	30	40	21
FACTOR	1	-1	1	1	-2	-1	1	1	-2
T. PONDERADO	61	-61	0	61	0	-10	30	40	-42
NETO	61		61		61		20		2
DIVISOR	3		3		3		1		2
EFFECTO	20.3		20.3		20.3		20.0		1.0
RANGO			1		1		2		3

Tabla 5.10: Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque I, Primera parte.

COMPONENTE	1	AB1	AB2	AB3	AB4
a_1b_1 a_1b_2 a_1b_3	10 21 30	10 30	10 21 30	10 30	10 21 30
TOTAL FACTOR T. PONDERADO NETO DIVISOR EFECTO RANGO	61 1 61 61 3 20.3	61 30 1 -1 10 -30 20 1	40 0 21 0 -1 1 2 -2 -40 0 42 0 2 2	10 0 30 0 -1 2 1 -2 -10 0 30 0 20 1	40 21 0 1 -2 4 40 -42 0 2 2 1.0 3

Tabla 5.11: Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque I, Segunda parte.

COMPONENTE	1	AB1	AB2	AB3	AB4
a_2b_1 a_2b_2 a_2b_3	15 8 16		15 8 16	15 16	15 8 16
TOTAL FACTOR T. PONDERADO NETO DIVISOR EFECTO RANGO	39 1 39 39 3 13.0	0 0 -1 1 0 0 0 0 0.0	0 39 1 -2 0 -78 78 6 13.0 1	15 16 -1 1 -15 16 1 1 1.0 3	31 8 1 -2 31 -16 15 2 7.5 2

Tabla 5.12: Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque II, Primera parte.

COMPONENTE	1	AB1	AB2	AB3	AB4
a_2b_1 a_2b_2 a_2b_3	15 8 16			15 16	15 8 16
TOTAL FACTOR T. PONDERADO NETO DIVISOR EFECTO RANGO	39 1 39 39 3 13.0	0 0 1 -1 0 0 0 0 0.0	0 0 0 0 -1 1 2 -2 0 0 0 0 0 0 0.0	0 15 0 16 -1 2 1 -2 0 30 0 -32 2 2 1.0 3	0 31 8 1 -2 4 0 -62 32 30 4 7.5 2

Tabla 5.13: Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque II, Segunda parte.

COMPONENTE	1	A1	A2	B1	B2
a_3b_1	12	12	12	12	12
a_3b_2	19	19	19		19
a_3b_3	18	18	18	18	18
TOTAL	49	49	49	12	30
FACTOR	1	1	1	1	1
T.PONDERADO	49	49	0	-12	30
NETO	49	49	49	6	8
DIVISOR	3	3	3	1	2
EFFECTO	16.3	16.3	16.3	6.0	4.0
RANGO		1	1	2	3

Tabla 5.14: Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque III, Primera parte.

COMPONENTE	1	AB1	AB2	AB3	AB4
a_3b_1	12	12	12	12	12
a_3b_2	19		19		19
a_3b_3	18	18	18	18	18
TOTAL	49	12	30	12	30
FACTOR	1	-1	1	-1	1
T.PONDER	61	12	30	-12	30
NETO	61	6	8	6	8
DIVISOR	3	1	2	1	2
EFFECTO	20.3	6.0	4.0	6.0	4.0
RANGO		2	3	2	3

Tabla 5.15: Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque III, Segunda parte.

En casos de factores con más de dos niveles, el número de corridas experimentales necesarias para realizar el experimento aumenta más rápidamente aún, que en el caso de dos niveles. Los ejemplos dados arriba, es decir, 3^2 , $3 \times 5 \times 6$, 5^4 , $2^3 \times 3^4$, requieren de 9, 90, 625 y 720 combinaciones de tratamientos, respectivamente, si se desea hacer los experimentos completos. Por eso, este tipo de experimentos es usual que se efectúen en forma fraccionada.

Como el fraccionamiento de experimentos se vuelve más complejo a medida que aumenta el número de factores y/o niveles, hoy en día existen muchos programas computacionales que realizan dicho fraccionamiento. Estos programas ocupan técnicas similares a las descritas en este capítulo. Dichas técnicas se pueden implementar en un programa con relativa facilidad y permiten diseñar un experimento fraccionado con muy poco

esfuerzo. Además, evitan que el experimentador cometa errores al efectuar operaciones que aunque siendo sencillas, son muy laboriosas.

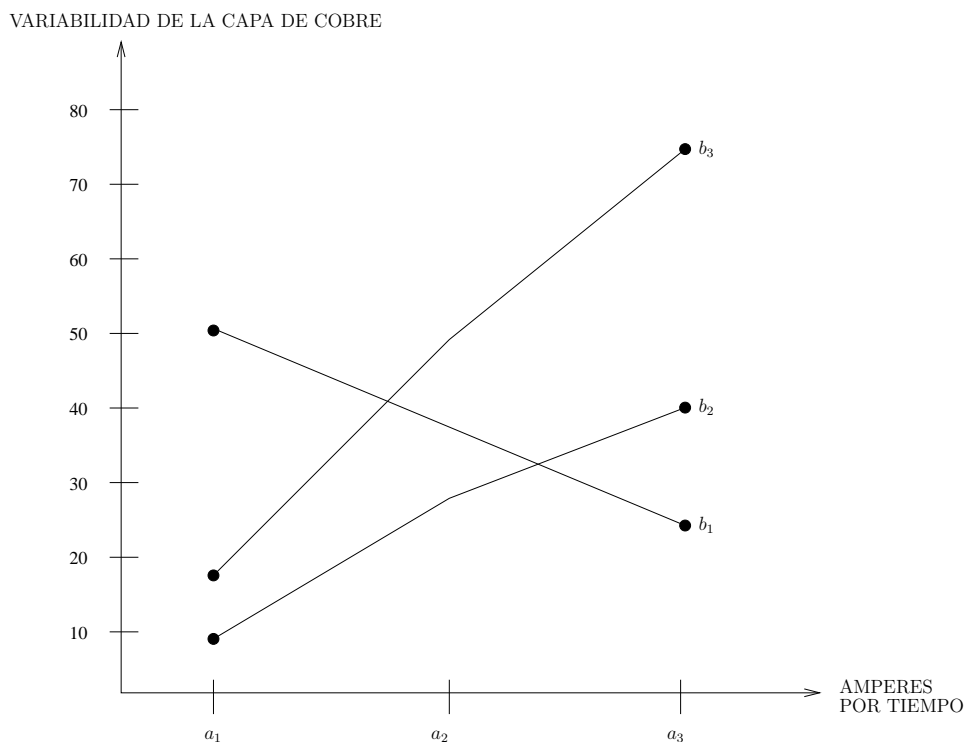
Finalmente, debemos hacer notar que los análisis mostrados hasta aquí tienen sólo el carácter de exploratorio. Para un análisis confirmatorio posterior, se emplea la técnica llamada Análisis de Varianza, que tiene por objeto establecer cuán significativo es cada uno de los efectos principales e interacciones, y cuán significativos son los contrastes que componen cada efecto, así como interpretar con precisión el comportamiento funcional de la respuesta, frente al estímulo de los factores. Algunos elementos del Análisis de Varianza se darán en el capítulo siguiente.

EJERCICIOS.

Ejercicio 5.1

Un diseño experimental tiene por objeto determinar los factores que inciden en la variabilidad del espesor de las capas de cobreado de placas para circuitos impresos. El ingeniero del proceso determina que hay dos fuentes potenciales de variabilidad. Ellas son, los amperios por tiempo de la electrólisis y la concentración de cobre en la solución. A cada uno de estos factores se le asignaron tres niveles. Designaremos a los factores A y B , respectivamente. Los niveles de A los llamaremos a_1 , a_2 , y a_3 ; los de B los llamaremos b_1 , b_2 , y b_3 . La respuesta es una medida de variabilidad del espesor de la capa de cobre, observada en seis puntos de la placa.

Se corrió el experimento, con cuatro réplicas por combinación de tratamientos. El siguiente gráfico muestra los valores promedio de la respuesta, por cada nivel del factor A , estratificado por B :



- Dibuje el gráfico de Interacción del factor B , estratificado por el factor A .
- Interprete los resultados, en el sentido de si hay o no efectos de A o de B , y si hay interacción entre ambos factores. (interacciones de concentración de cobre y amperios por tiempo).

Ejercicio 5.2

Se pretende disminuir el roce del eje con sus dos descansos, de un pequeño motor utilizado para girar el lente de una proyectora autofocus. El diámetro del eje es fijo. Se puede variar el diámetro del orificio de los descansos y el grado de viscosidad del lubricante. Supóngase que estos son dos factores de un diseño.

Sean a_1 , a_2 , y a_3 los niveles del factor diámetro, y b_1 , b_2 , y b_3 los niveles del factor viscosidad. La respuesta es la fuerza transmitida por el eje, mientras gira a una velocidad de operación standard. La siguiente tabla muestra los valores de las respuestas, registradas por cada combinación de tratamientos:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA (FUERZA TRASMITIDA)
a_1b_1	59
a_2b_1	38
a_3b_1	59
a_1b_2	99
a_2b_2	16
a_3b_2	65
a_1b_3	19
a_2b_3	42
a_3b_3	35

- Construya la tabla de respuestas y calcule los efectos.
- Dibuje el diagrama de efectos.
- Dibuje los gráficos de interacción, para ambos factores.
- Interprete y compare los resultados obtenidos.

Ejercicio 5.3

Repita lo del Ejercicio 5.2, con los siguientes datos:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA (FUERZA TRASMITIDA)
a_1b_1	25
a_2b_1	23
a_3b_1	21
a_1b_2	39
a_2b_2	28
a_3b_2	67
a_1b_3	17
a_2b_3	45
a_3b_3	33

Ejercicio 5.4

Repita lo del Ejercicio 5.2, con los siguientes datos:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA (FUERZA TRASMITIDA)
a_1b_1	28
a_2b_1	39
a_3b_1	22
a_1b_2	32
a_2b_2	29
a_3b_2	26
a_1b_3	24
a_2b_3	27
a_3b_3	18

Ejercicio 5.5

En un proceso de combinación de jabón, se desea bajar el grado de acidez del producto final. Se hace variar el contenido de dos compuestos que intervienen en el proceso de combinación, y que llamaremos A y B . Se decide darle tres niveles a cada uno, que corresponden a tres cantidades distintas. Sean a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , y b_3 , respectivamente, los niveles de los dos factores. Se hace un diseño factorial fraccionado 3^{2-1} , es decir, dos factores a tres niveles cada uno, fraccionado en tres bloques de tres combinaciones de tratamientos, de los cuáles se correrá uno.

Supóngase que se pudiera correr el experimento completo, dando por resultado las repuestas que se muestran en la tabla de más abajo, que también muestra la combinación de los bloques.

	COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA (GRADO DE ACIDEZ)
BLOQUE I	a_1b_1	27
	a_1b_2	34
	a_1b_3	31
BLOQUE II	a_2b_1	28
	a_2b_2	41
	a_2b_3	42
BLOQUE III	a_3b_1	31
	a_3b_2	32
	a_3b_3	35

a) Construya la tabla de respuestas y calcule los efectos.

- b) Dibuje el diagrama de efectos.
- c) Dibuje los gráficos de interacción.
- d) Interprete y compare los resultados anteriores.
- e) Construya la matriz de diseño.
- f) Encuentre los efectos confundidos con bloques, y los grupos de efectos confundidos entre sí.
- g) Critique el diseño, según los resultados obtenidos.

Ejercicio 5.6

Repita lo del Ejercicio 5.5, con los siguientes datos:

	COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA (GRADO DE ACIDEZ)
BLOQUE I	a_1b_1	27
	a_2b_2	34
	a_3b_3	31
BLOQUE II	a_2b_1	28
	a_3b_2	41
	a_1b_3	42
BLOQUE III	a_3b_1	31
	a_1b_2	32
	a_2b_3	35

Ejercicio 5.7

En el proceso de fabricación de hilo, se comienza con la limpieza del algodón. Al final de este proceso, se produce una napa formada por fibras de interacción limpias. Esta napa debe presentar una determinada regularidad en su interacción, de modo que el producto final, el hilo, sea homogéneo. Se diseñó un experimento para determinar el efecto de la carga del algodón en una camilla que alimenta el sistema, sobre la regularidad de la napa.

Los factores son dos:

- I. El grosor de los trozos de algodón introducidos a la camilla de alimentación, con tres niveles, $5cm$, $8cm$ y $12cm$.
- II. La colocación de los trozos de algodón en la camilla, con tres niveles, sobrepuestos, uno a interacción del otro, y separados en 10 cm .

La respuesta es el coeficiente de interacción (CV) calculado de los pesos de treinta trozos de una yarda de interacción, de la napa.

La siguiente tabla muestra un diseño fraccionado en bloques, y los valores de las respuestas, del experimento completo.

	EFECTO									RESPUESTA (CV)
	1	A1	A2	B1	B2	AB1	AB2	AB3	AB4	
BLOQUE I	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	12
	1	-1	1	0	-2	0	2	0	-2	4
	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	5
BLOQUE II	1	0	-2	-1	1	0	0	2	-2	13
	1	0	-2	0	-2	0	0	0	4	10
	1	0	-2	1	1	0	0	-2	-2	5
BLOQUE III	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	9
	1	1	1	0	-2	0	-2	0	-2	14
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6

- Construya la tabla de respuestas y calcule los efectos.
- Dibuje el diagrama de efectos.
- Dibuje los gráficos de interacción.
- Interprete y compare los resultados anteriores.
- Encuentre las combinaciones de tratamientos correspondientes a cada fila.
- Encuentre los efectos confundidos con bloques, y los grupos de efectos confundidos entre sí.
- Critique el diseño, entre los resultados obtenidos.

Ejercicio 5.8

Un dispositivo de seguridad automático antisísmico funciona mediante una bolita de cristal que desliza a través de una rampa, llega a un interruptor, lo acciona e interrumpe el suministro eléctrico. Interesa minimizar el tiempo que demora en llegar al interruptor. Las distancias horizontal y vertical que recorre la bolita están determinadas para que llegue con la fuerza necesaria, y son fijas. Se puede variar la forma de la rampa, y el ángulo de la rampa. El diseño es el siguiente:

FACTORES	NIVELES
A : Forma de la Rampa	a_1 : sección angular a_2 : sección semi circular a_3 : sección semi rectangular
B : Ángulo de la Rampa	b_1 : 5 b_2 : 10 b_3 : 15

RESPUESTA: Tiempo de recorrido, en décimas de segundos.

Se corrió el experimento, dando por resultado los siguientes valores:

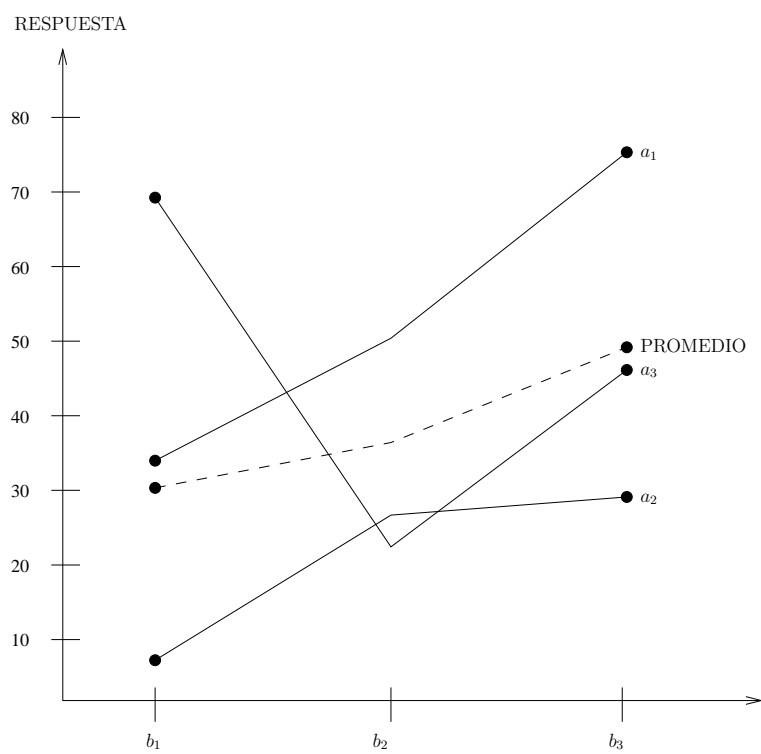
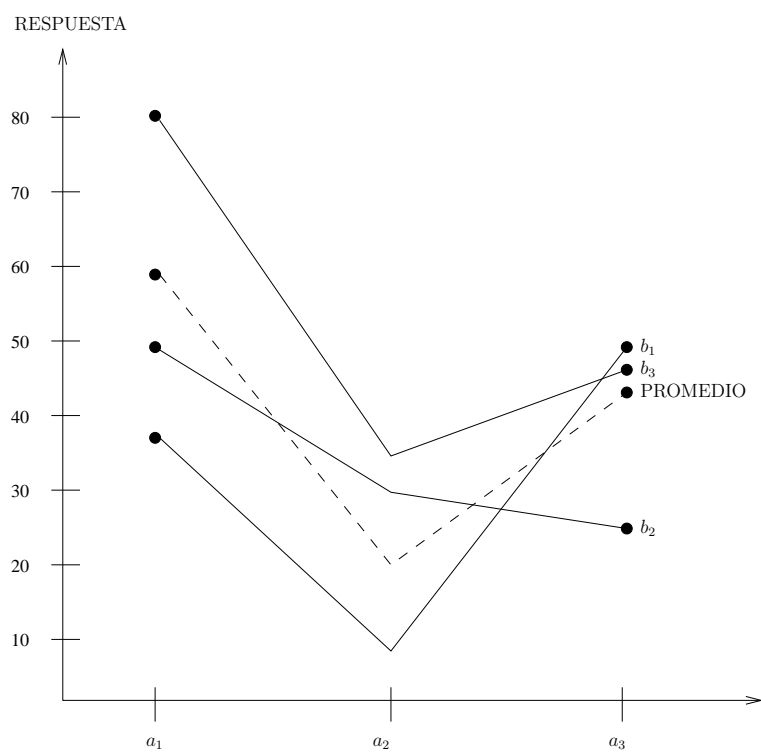
INTERACCIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
a_1b_1	21
a_2b_1	32
a_3b_1	24
a_1b_2	19
a_2b_2	21
a_3b_2	15
a_1b_3	18
a_2b_3	25
a_3b_3	16

- Construya los dos gráficos de interacción: Respuesta versus A , estratificado por B , y Respuesta versus B , estratificado por A .
- Interprete detalladamente estos gráficos, en términos de los elementos dados en el enunciado del problema. Si se fuera a realizar otro experimento, con los mismos factores, con el objeto de obtener más información relacionada con este problema, ¿Qué valores recomendaría dar al ángulo de la rampa?

Ejercicio 5.9

Se diseñó un experimento con el objeto de determinar el efecto de dos factores, sobre la dureza de la película de pintura. Los factores son, la humedad relativa del aire (A), y la temperatura, durante el secado (B), ambos factores con tres niveles.

Se hizo el experimento, y con los resultados se construyeron los siguientes gráficos de interacción. Interprete los gráficos: ¿Qué tipo de efectos principales hay, está presente algún tipo de interacción?



Ejercicio 5.10

Diseñe un experimento, relacionado con un proceso con el que Ud. está familiarizado. Use la siguiente pauta como guía, sin ceñirse necesariamente a ella:

- a) Planteo del problema, marco conceptual, objetivos del estudio.
 - b) Descripción de los factores y sus niveles.
 - c) Descripción de la respuesta.
 - d) El diseño Bloque completo o fraccionado. Si es fraccionado, indique la composición de los bloques, y qué efectos se confunden.
 - e) Realización física del experimento. Días y horas de las distintas corridas experimentales, duración de cada una. Orden en que se van a hacer, indicando las condiciones experimentales de cada una.
 - f) Variables que se van a medir, y la forma cómo se efectuarán las mediciones.
 - g) Limitaciones: Posibles factores no deseados que pudieran influir, y cómo disminuir su efecto.
 - h) Técnicas de análisis de los resultados.
 - i) Posible prosecución del estudio.
-

Capítulo 6

Elementos de Análisis de Varianza

Introducción

Las técnicas introducidas hasta aquí, para determinar la significación de efectos causados por factores experimentales, tienen solo carácter de exploratorio. Para un análisis de tipo confirmatorio se utiliza la técnica denominada Análisis de Varianza (ANOVA).

Esencialmente consiste en la descomposición de la variabilidad total presente en las respuestas, en componentes que pueden ser atribuibles a cada uno de los efectos considerados en el experimento. La posibilidad de hacer esto se basa en propiedades algebraicas que permiten descomponer una medida de variabilidad específica, y que definiremos más adelante, en términos aditivos, cuyas magnitudes dependen individualmente de los distintos efectos determinados por los factores. Es una técnica compleja, con muchas variantes. Aquí sólo se presentarán los principios en que se basa y la forma de aplicarse.

6.1. El Modelo Lineal.

El análisis de varianza que estudiaremos en este capítulo se basa en modelos que suponen que la respuesta de un experimento puede representarse como una suma ponderada de efectos, unos atribuidos a los diversos factores, otros atribuidos a las interacciones entre factores, entre otros. O sea, la respuesta es una función lineal de los efectos de los factores y las interacciones, de ahí que se les denomina modelos lineales.

En los Capítulos 2 y 3, vimos expresiones para los efectos principales e interacciones, en términos de las respuestas, en experimentos a dos y a tres factores, respectivamente. Los modelos lineales que veremos en este capítulo, son expresiones para las repuestas, en términos de los efectos.

Entonces estos modelos lineales no son muy novedosos, sólo se modifica la forma de

los valores o parámetros. Son lo que se llama una reparametrización. Sin embargo, esta nueva forma tiene ventajas en cuanto a la interpretación, en términos del análisis de varianza, que introduciremos en este capítulo.

Verificaremos esto en el caso del experimento a dos factores:

Partiendo de las expresiones de los efectos e interacciones, construiremos expresiones para las respuestas, simplemente resolviendo las ecuaciones correspondientes.

Recordemos que en Capítulo 1 dimos las siguientes expresiones para los diversos efectos, en términos de las respuestas $a_i b_j$. Comenzando por el efecto medio,

$$1 = \frac{1}{4}(a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2)$$

Si usamos los símbolos “ y ” en lugar de “ ab ”, queda

$$1 = \frac{1}{4}(y_{11} + y_{21} + y_{12} + y_{22})$$

Lo mismo para los demás:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}((a_2 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 b_1 + a_1 b_2)) \\ &= \frac{1}{2}((y_{21} + y_{22}) - (y_{11} + y_{12})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}((a_1 b_2 + a_2 b_2) - (a_1 b_1 + a_2 b_1)) \\ &= \frac{1}{2}((y_{12} + y_{22}) - (y_{11} + y_{21})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{2}((a_2 b_2 - a_2 b_1) - (a_1 b_2 - a_1 b_1)) \\ &= \frac{1}{2}((y_{22} + y_{11}) - (y_{21} + y_{12})) \end{aligned}$$

Sólo debemos resolver estas cuatro ecuaciones lineales para y_{11} , y_{12} , y_{21} e y_{22} en términos de 1 , A , B y AB :

Si calculamos la expresión $1 + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}AB$, vemos que es igual a:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(\overbrace{(y_{11} + y_{21} + y_{12} + y_{22})}^1) + (\overbrace{(y_{21} + y_{22} - y_{11} - y_{12})}^A) \\ &+ (\overbrace{(y_{12} + y_{22} - y_{11} - y_{21})}^B) + (\overbrace{(y_{22} + y_{11} - y_{21} - y_{12})}^{AB}) \end{aligned}$$

luego

$$y_{22} = 1 + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}AB$$

de forma análoga, se tienen las expresiones

$$\begin{aligned}y_{11} &= 1 - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}AB \\y_{21} &= 1 + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}AB \\y_{12} &= 1 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}AB\end{aligned}$$

Se puede observar que la sucesión de signos (+) o (−) en cada expresión es la respectiva fila de la matriz de diseño. Si definimos los siguientes términos:

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \\ \alpha_1 &= -\frac{1}{2}A, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}A \\ \beta_1 &= -\frac{1}{2}B, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}B \\ \alpha\beta_{11} &= \frac{1}{2}AB, \quad \alpha\beta_{12} = -\frac{1}{2}AB, \quad \alpha\beta_{21} = -\frac{1}{2}AB, \quad \alpha\beta_{22} = \frac{1}{2}AB\end{aligned}$$

se puede escribir

$$\begin{aligned}y_{11} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha\beta_{11} \\ y_{12} &= \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \alpha\beta_{12} \\ y_{21} &= \mu + \alpha_2 + \beta_1 + \alpha\beta_{21} \\ y_{22} &= \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha\beta_{22}\end{aligned}$$

Esto último es una reparametrización de la expresión. En forma general,

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}, \quad i = 1, 2; j = 1, 2$$

Hemos derivado expresiones para las respuestas, en términos de los efectos. Sólo falta introducir en el modelo, términos que expliquen el hecho que, cuando se replica el experimento, bajo las mismas condiciones experimentales (iguales niveles en los factores), los resultados observados no son iguales. Hay una variabilidad presente, no atribuible a los factores, y que denominaremos error aleatorio. De esta forma queda definido un modelo lineal para un experimento factorial a dos factores,

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + e_{ij}, \quad i = 1, 2; j = 1, 2$$

con las condiciones adicionales

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 & \beta_1 + \beta_2 &= 0, \\ \alpha\beta_{11} + \alpha\beta_{12} &= 0, & \alpha\beta_{21} + \alpha\beta_{22} &= 0, & \alpha\beta_{11} + \alpha\beta_{21} &= 0, & \alpha\beta_{12} + \alpha\beta_{22} &= 0.\end{aligned}$$

Con las condiciones adicionales dadas arriba, y en que e_{ij} es el término correspondiente al error aleatorio.

Otros ejemplos de modelos lineales son los siguientes:

$$y_i = \mu + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (6.1)$$

$$y_{ir} = \mu + \alpha_i + e_{ir}, \quad i = 1, 2, \dots, I; r = 1, 2, \dots, R \quad (6.2)$$

$$y_{ijr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijr}, \quad i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; r = 1, 2, \dots, R \quad (6.3)$$

$$y_{ijr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + e_{ijr}, \quad i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; r = 1, 2, \dots, R \quad (6.4)$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + e_{ijk}, \\ i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; k = 1, 2, \dots, K; r = 1, 2, \dots, R. \quad (6.5)$$

Cada uno de estos modelos lineales nos da una particular estructura de los datos, relacionada con el tipo de experimento que los generó:

El modelo (6.1) corresponde a un grupo de observaciones efectuadas bajo las mismas condiciones experimentales. Cada observación es igual a un promedio global μ , más un término correspondiente a la variabilidad natural, e_i , denominado error aleatorio.

El modelo (6.2) corresponde a un experimento a un factor con I niveles y R réplicas. La repuesta se muestra descompuesta en un valor promedio global μ , más un efecto α_i , propio del i -ésimo nivel del factor, más un término e_{ir} que corresponde a un error aleatorio, propio de cada observación, no atribuible al factor.

El modelo (6.3) corresponde a un experimento a dos factores, el primero con I niveles, el segundo con J niveles, a R réplicas cada uno. Cada observación es igual a un promedio global μ , más un efecto α_i atribuido al primer factor, y un efecto β_j , atribuido al segundo factor, y más un error aleatorio e_{ijr} . Este modelo lineal asume que no hay interacción entre los factores, o que el efecto de la interacción es despreciable.

El modelo (6.4) es similar al modelo (6.3), pero aquí se asume que hay interacción, y la cuantificación de su efecto es el término $\alpha\beta_{ij}$, que corresponde al aporte de la interacción, del i -ésimo nivel del primero, y j -ésimo nivel del segundo.

El modelo (6.5) corresponde a un experimento a tres factores, en que hay efectos de los factores, o efectos principales, más las tres interacciones dobles y la interacción triple.

Los términos μ , α_i , β_j , etc., se denominan parámetros de los modelos. Con el objeto de estandarizar los valores de los parámetros, se agregan condiciones adicionales sobre estos términos. Estas condiciones son que las sumas sobre cualquiera de los subíndices

es cero. Así

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_I &= 0, \\ \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_J &= 0, \\ \alpha\beta_{1j} + \alpha\beta_{2j} + \cdots + \alpha\beta_{ij} &= 0, & \text{para todo valor de } j, \\ \alpha\beta_{i1} + \alpha\beta_{i2} + \cdots + \alpha\beta_{ij} &= 0, & \text{para todo valor de } i.\end{aligned}$$

Con estas condiciones los valores de estos parámetros quedan determinados en forma única, y además se agrega una simetría a los modelos, que resulta conveniente para efectuar los cálculos necesarios para cuantificar los efectos. De esta forma, por ejemplo, en los modelos (6.2) a (6.5), los parámetros constituyen desviaciones en torno al promedio global. Lo mismo ocurre para los demás parámetros.

Para terminar este punto, diremos que los modelos lineales presentados en este capítulo son modelos apropiados para representar las respuestas en términos de los efectos principales e interacciones de los diseños experimentales factoriales.

En lo que sigue, presentaremos una técnica denominada *Análisis de Varianza*, utilizada para cuantificar los efectos de los factores y sus interacciones, sobre la respuesta del experimento, sin preocuparnos del modelo lineal subyacente. Pero debemos tener presente que el respectivo modelo lineal es el que sustenta la técnica y justifica los procedimientos y las interpretaciones de los resultados.

6.2. Análisis de Varianza a un factor.

Supongamos que tenemos una situación experimental, con un factor de variación, y que diseñamos un experimento con un determinado número de réplicas, por cada nivel del factor. Las respuestas contienen variación, pues, como dijimos al principio, la variación esta presente en todo fenómeno. Sin embargo, la variación presente en la respuesta que observamos, la podemos descomponer en dos componentes.

Una componente es la variación causada por el factor. Esta variabilidad se denomina *variabilidad debida al factor*, o debida al *tratamiento*.

La otra componente es la variación aleatoria, propia del fenómeno, atribuible a un número grande de factores, que no controlamos, y que causan pequeñas dosis de variación, que observamos en su conjunto. Este tipo de variación esta presente, aún bajo idénticas condiciones experimentales. Esta variabilidad se denomina *variabilidad residual*.

El método de Análisis de Varianza consiste en comparar ambos tipos de variación. La variabilidad debido al factor se mide comparando los promedios de las respuestas de cada nivel del factor. La variabilidad residual se mide comparando las repuestas corre-

spondientes a las réplicas de un mismo nivel del factor.

Daremos definiciones precisas para estos dos conceptos. Supóngase que el factor A tiene I niveles, y el número de réplicas por nivel es R . En la siguiente tabla se presenta la notación a utilizar:

y_{ir} = Respuesta individual correspondiente a la r -ésima réplica del nivel i -ésimo del factor, $i = 1, 2, \dots, I; r = 1, 2, \dots, R$.		
Suma	Promedio	Recorrido de la suma o promedio
$A_i = \sum_r y_{ir}$	A_i/R	Todas las réplicas del i -ésimo nivel del factor A .
$T = \sum_i \sum_r y_{ir}$	T/RI	Todas las réplicas de todos los niveles del factor A .

Tabla 6.1: Notación para el análisis de varianza a un factor.

Se utilizará el símbolo Σ , denominado sumatoria, para expresar una suma. Por ejemplo, si tenemos una serie de números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$, la suma de todos ellos, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$, se puede anotar, en forma condensada, como $\sum_{i=1}^I a_i$ o simplemente $\sum a_i$ cuando no hay ambigüedad sobre el recorrido del subíndice.

Definimos los siguientes términos, que son medidas de variación de cada una de las dos componentes mencionadas, la variabilidad debida al factor, y la variabilidad residual. En cada una se indica la causa de la variación, denominada *fente de variación*:

Variación Total: Es la variabilidad debida al factor y la variabilidad aleatoria reunidas. La *suma de cuadrados total* es una medida de toda la variación presente en el conjunto de las respuestas observadas, y es igual al número

$$SCT = \sum_i \sum_r \left(y_{ir} - \frac{T}{IR} \right)^2$$

La doble sumatoria indica que se está sumando a través de los I niveles y a través de las R réplicas de cada uno. Son $I \times R$ términos al cuadrado, que se suman. El objeto de elevar al cuadrado es eliminar los signos negativos, que tenderían a anularse con los positivos. La Suma de Cuadrados Total es la suma de los cuadrados de las desviaciones de todas las observaciones, con respecto del promedio global.

Variación atribuible al factor: Se define una medida de la variabilidad causada por el factor, y que se denomina suma de cuadrados del factor, o suma de cuadrado del tratamiento, y es igual al número

$$SCA = R \sum_i \left(\frac{A_i}{R} - \frac{T}{IR} \right)^2$$

Es proporcional a la suma de los cuadrados de las desviaciones de las respuestas promedio por cada nivel del factor, con respecto del promedio global. Es una medida de los efectos debidos a los niveles del factor.

Variación Residual: Es la variación que no está explicada por los elementos que intervienen en el experimento, o variación atribuible a error experimental. Se debe a causas que no son controladas por el experimentador. La variación residual la mide la suma de cuadrados residual, y es igual a

$$SCR = \sum_i \sum_r \left(y_{ir} - \frac{A_i}{R} \right)^2$$

Es la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones, con respecto del respectivo promedio por cada nivel del factor. Es una medida de la variación producida dentro de cada nivel del factor, es decir, una medida del error aleatorio.

Estas tres medidas de variación, definidas de esta forma, presentan la particularidad de que la suma de las dos últimas es igual la primera. Es decir,

$$SCTotal = SCA + SCR_{residual}$$

Esta propiedad se puede verificar fácilmente, haciendo el desarrollo algebraico de los cuadrados de los binomios y reduciendo los términos semejantes.

Los números de sumandos en cada una de las tres sumas de cuadrados son, respectivamente, IR , I e IR . Definiremos otros términos, que se denominan *grados de libertad*, y que están asociados al número de términos que se suman para formar cada una de las sumas de cuadrados. Son una medida de la cantidad de información independiente que se ha utilizado para calcular cada suma de cuadrados. Se presentan en la siguiente tabla:

Fuente de Variación	Grados de Libertad (g.l.)
Factor A	$I - 1$
Residuo	$I(R - 1)$
Total	$IR - 1$

Tabla 6.2: Grados de libertad para el Análisis de Varianza a un Factor.

Podemos observar que se cumple una relación similar a la relación entre las sumas de cuadrados,

$$\text{g.l.Total} = \text{g.l. } A + \text{g.l. Residual}$$

Cuadrados Medios: Se definen los cuadrados medios como los cuocientes entre las sumas de cuadrados y los respectivos grados de libertad. Los cuadrados medios son medidas de variabilidad promedio, por cada “unidad de información” aportada por las diversas fuentes de variación.

Cuociente F: El cuociente F es el cuociente entre el cuadrado medio de A , dividido por el cuadrado medio residual. Es, pues, una comparación entre la variabilidad promedio atribuible al factor A , y la variación promedio del error experimental, no atribuible a causas conocidas. Por lo tanto, la magnitud del cuociente F es una medida de la significación del efecto del factor A .

Como criterio para determinar cuán significativo es el efecto del factor, comparamos el valor del cuociente F con valores proporcionados por una tabla, llamada precisamente *tabla F*, copia de la cual aparece en el apéndice. Para usar la tabla, se debe buscar dos números, denominados *grados de libertad del numerador*, que corresponde a los grados de libertad del efecto A , cuyo cuadrado medio va en el numerador del cuociente F, y *grados de libertad del denominador*, que corresponde a los grados de libertad residual, cuyo cuadrado medio va en el denominador. Si el cuociente F supera el valor de la tabla, entonces se dice que el efecto es significativo. Este procedimiento de decisión, en estadística se denomina **prueba de hipótesis**. Consiste en decidir entre dos hipótesis, en base a evidencia muestral. En este caso, una hipótesis es que hay efecto debido al factor A , y la otra hipótesis es que no lo hay.

Una *prueba de hipótesis* está basada en consideraciones probabilísticas. De hecho, la tabla que utilizamos es una tabla de probabilidades, y su aplicación supone que se cumplen algunas condiciones. Una de ellas es que las respuestas presenten una variación que obedece una ley de probabilidad normal. La discusión sobre ésta y las otras condiciones probabilísticas, escapa del contexto de estas notas, por lo que no abordaremos este asunto. La tabla F presentada en el apéndice es una de valores probabilísticos construida de tal forma que la probabilidad de concluir que el efecto es significativo, cuando en realidad no lo es, es de un 5 %. Este valor se denomina nivel de significación de la prueba de hipótesis. Existen tablas F para otros niveles de significación, pero 5 % es el valor más utilizado.

Ejemplo 6.1

El departamento de adquisiciones de una gran empresa minera desea comprar una partida de extintores contra incendio, para renovar los existentes. Debe elegir entre cuatro marcas distintas, “Alpha”, “Atlas”, “Ambar” y “Argos”. Se adoptó como uno de los criterios de decisión, la duración de la presión del extintor cargado. Para comparar las cuatro marcas, en cuanto a la pérdida de presión, se llevó a cabo un experimento, que consistió en cargar cinco extintores de cada marca, con la presión especificada, y medir la pérdida de presión, al cabo de tres meses. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 6.3:

Factor Extintor		Réplica					Suma A_i	Promedio A_i/R
		$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$		
		Pérdida de presión						
1	ALPHA	2.8	2.5	3.6	4.4	2.7	16.0	3.2
2	ATLAS	3.2	3.5	5.7	4.3	4.8	21.5	4.3
3	AMBAR	2.5	2.6	1.8	3.1	3.0	13.0	2.6
4	ARGOS	2.7	2.3	3.8	3.7	3.0	15.5	3.1
Total Global							$T = 66.0$	
Promedio Global							$T/IR = 3.3$	

Tabla 6.3: Respuestas del Ejemplo 6.1, totales y promedios globales y por nivel del factor.

Con estos datos, calculamos los valores de las sumas de cuadrados, de acuerdo a las fórmulas dadas más arriba:

TOTAL:

$$SCT = \sum_i \sum_r \left(y_{ir} - \frac{T}{IR} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 SCT &= (2,8 - 3,3)^2 + (2,5 - 3,3)^2 + \cdots + (3,0 - 3,3)^2 \\
 &= 0,25 + 0,64 + 0,09 + 1,21 + 0,36 \\
 &\quad + 0,01 + 0,04 + 5,76 + 1,00 + 2,25 \\
 &\quad + 0,64 + 0,49 + 2,25 + 0,04 + 0,09 \\
 &\quad + 0,36 + 1,00 + 0,25 + 0,16 + 0,09 \\
 SCT &= 16,98
 \end{aligned}$$

El cuadrado medio del total no se utiliza, por lo que no es necesario calcularlo.

FACTOR A:

$$SCA = R \sum_i \left(\frac{A_i}{R} - \frac{T}{IR} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 SCA &= 5 \left((3,2 - 3,3)^2 + (4,3 - 3,3)^2 + (2,6 - 3,3)^2 + (3,1 - 3,3)^2 \right) \\
 SCA &= 7,7
 \end{aligned}$$

$$CMA = \frac{7,7}{4 - 1} = 2,567$$

RESIDUO:

La suma de cuadrados de residuo se puede obtener por diferencia de suma de cuadrados total (SCT) menos la suma de cuadrados del factor A (SCA), que da $16,98 - 7,7 =$

9,28. O bien, se puede utilizar la fórmula para el cálculo directo. Si se elige este camino, no se requiere calcular la suma de cuadrados total. El cuadrado medio residual es

$$CMR = \frac{9,28}{4(5-1)} = 0,580$$

Por último, el cociente F está dado por

$$F = \frac{CMA}{CMR} = \frac{2,567}{0,580} = 4,43$$

Para buscar el valor de tabla, determinamos que los grados de libertad del numerador es igual a $I - 1 = 4 - 1 = 3$, y los grados de libertad del denominador es $I(R - 1) = 4(5 - 1) = 16$. El valor de tabla, que denotaremos $F(3, 16)$, es igual a $F(3, 16) = 3,24$.

Si comparamos el valor calculado (4,43) vemos que es mayor que el valor de tabla, por lo que concluimos que el efecto del factor A es significativo, lo que se interpreta como que hay evidencia muestral suficiente que muestra que las respuestas difieren cuando los niveles son distintos. O sea, hay diferencias en la pérdida de la presión, de las diferentes marcas de extintores.

Si queremos saber cuál es la que presenta menos pérdida, observamos la tabla de datos, donde se muestran las pérdidas promedio, por marca. Vemos que “Ambar” es la mejor marca, con una pérdida promedio de 2,6. La más deficiente es “Atlas”, con una pérdida promedio de 4,3. Este es un análisis aproximado.

Cabe hacer notar que el análisis realizado indica solamente que existe una diferencia significativa en la pérdida de presión entre las cuatro marcas de extintores consideradas. Sin embargo, ese análisis no permite establecer si las diferencias entre cada par de marcas son significativas o no. Por ejemplo, basados en el análisis global, no podemos concluir que la diferencia entre los extintores “Argos” y “Ambar” ($3,1 - 2,6 = 0,5$) es significativa o no. Para ello debemos realizar el análisis usando el mismo procedimiento mostrado en el Ejemplo 6.1, pero utilizando los datos correspondientes a los extintores “Argos” y “Ambar” solamente. Es decir, se hace una ANOVA para un experimento de un factor (marca extintor) a dos niveles (“Argos” y “Ambar”). Por ello, en ese caso, $I = 2$ y $R = 5$, donde cambia I .

6.3. Tabla de análisis de varianza a un factor.

Una forma sistemática de organizar los resultados numéricos anteriores, es mediante una tabla, denominada *Tabla de Análisis de Varianza* o *ANOVA*, y que se muestra a continuación:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	Cuociente F
Factor A	SCA	$I - 1$	$CMA = SCA/(I - 1)$	CMA/CMR
Residuo	SCR	$I(R - 1)$	$CMR = SCR/I(R - 1)$	–
Total	SCT	$IR - 1$	–	–

Tabla 6.4: Análisis de varianza a un factor.

La tabla de análisis de varianza para los datos del Ejemplo 6.1 es la siguiente:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	Cuociente F
Factor A	7,7	3	2,567	4,43
Residuo	9,26	16	0,580	–
Total	16,98	19	–	–

Tabla 6.5: Análisis de varianza del Ejemplo 6.1

ESTUDIO DE CASO: Distribución de operadoras telefónicas para la recepción de pedidos.

Este caso ilustra la aplicación de la metodología de Diseño de Experimentos, al caso de mejoramiento de calidad en un proceso de servicios.

En el área de comercialización de una compañía distribuidora de gas envasado, se atiende a un gran número de clientes, que hacen pedidos por teléfono. En este recinto hay una central telefónica, elemento crítico para el negocio de la compañía, pues gran parte de sus ventas se hacen por vía de pedido telefónico.

Por la importancia que tiene el teléfono para esta empresa, se hizo necesario hacer un estudio para determinar la forma óptima de distribuir las operadoras telefónicas a lo largo del día.

La planta tiene un número fijo de líneas, cinco. Se distinguen cuatro periodos de dos horas cada uno: un período medio-alto en el flujo de llamadas; de 09:00 a 11:00 horas, un periodo alto; de 11:00 a 13:00, un periodo medio-bajo, de 13:00 a 15:00 horas, y un período bajo, de 15:00 a 17:00 horas. Se dispone de un total de 20 horas-operadora, que deben distribuirse de manera que hayan más operadoras en los periodos altos.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO: Estudiar el efecto de la distribución del número de operadoras sobre el tiempo de respuestas a las consultas de los usuarios externos del servicio.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: Un factor con siete niveles, según la siguiente descripción:

FACTORES	NIVELES
A: Número de Operadoras	Los niveles se describen en la siguiente tabla

Nivel	Número De Operadoras Por Período				Total de Horas
	Medio Alto	Alto	Medio Bajo	Bajo	
a_1	2	10	4	4	20
a_2	4	8	6	2	20
a_3	4	8	4	4	20
a_4	4	10	4	2	20
a_5	6	6	4	4	20
a_6	6	8	4	2	20
a_7	6	10	2	2	20

Tabla 6.6: Distribución de operadoras por período

Cada nivel del factor se aplicó durante una semana, y al final de la experiencia se repitió todo una vez más. El experimento completo demoró, entonces, 14 semanas.

RESPUESTA: Para medir el efecto de cada nivel del factor, la persona que distribuía el gas, entregaba un formulario al cliente, pidiéndole que anotara el tiempo que él estimaba se había demorado, desde que marco el número de teléfono, hasta que le respondió la operadora. La respuesta es el promedio de los tiempos indicados por los clientes, de cada una de las combinaciones de tratamientos.

6.4. Análisis de Varianza de dos factores.

Extenderemos el método al caso de dos factores, A y B , con réplicas. El factor A tiene I niveles, el factor B tiene J niveles, y el diseño es balanceado, con R réplicas por cada combinación de tratamientos. La gran diferencia con el caso de un factor, es que la variabilidad debida a los factores tiene tres componentes, una debida a cada una de los dos factores, y una debida a la interacción entre ambos.

Utilizaremos las siguientes convenciones notacionales, para el caso de dos factores:

y_{ijr}	Respuesta individual correspondiente a la r -ésima réplica del nivel i -ésimo del factor A y del nivel j -ésimo del factor B	
Suma	Promedio	Recorrido de la Suma o Promedio
$A_i = \sum_j \sum_r y_{ijr}$	A_i/JR	Todas las réplicas de todos los niveles del factor B , del i -ésimo nivel del factor A .
$B_j = \sum_i \sum_r y_{ijr}$	B_j/IR	Todas las réplicas de todos los niveles del factor A , del j -ésimo nivel del factor B .
$AB_{ij} = \sum_r y_{ijr}$	AB_{ij}/R	Todas las réplicas del i -ésimo nivel del factor A , del j -ésimo nivel del factor B .
$T = \sum_j \sum_i \sum_r y_{ijr}$	T/IJR	Todas las réplicas de todos los niveles de los dos factores.

Tabla 6.7: Notación para el análisis de varianza a dos factores.

A continuación presentaremos las formulas análogas a las del caso de un factor, que representan medidas de variación, atribuibles a las fuentes de variación que se indican.

Variación Total: La suma de cuadrados total es una medida de toda la variación presente en el conjunto de las respuestas observadas, y es igual a

$$SCT = \sum_i \sum_j \sum_r \left(y_{ijr} - \frac{T}{IJR} \right)^2$$

Variación Atribuible a los Efectos Principales: Está constituida por las sumas de cuadrados de los factores A y B , respectivamente

$$SCA = JR \sum_i \left(\frac{A_i}{JR} - \frac{T}{IJR} \right)^2$$

$$SCB = IR \sum_j \left(\frac{B_j}{IR} - \frac{T}{IJR} \right)^2$$

Variación Atribuible a la Interacción: Es un efecto debido al hecho que un factor puede actuar en forma diferente, bajo los diferentes niveles del otro factor. La interacción está presente cuando el resultado de aplicar los dos factores no es la simple suma de efectos de cada uno, sino que, hay, además, un efecto combinado de ambos, producto de la forma como cada factor afecta al otro. La suma de cuadrados de la interacción es el número

$$SCAB = R \sum_i \sum_j \left(\frac{AB_{ij}}{R} - \frac{A_i}{JR} - \frac{B_j}{IR} + \frac{T}{IJR} \right)^2$$

Variación Residual: Variación no explicada por el modelo, o atribuible al error experimental. Es la variación que no está explicada por los elementos que intervienen en el experimento, como la variación en las respuestas correspondientes a diferentes replicas de una misma combinación de tratamientos. Su medida es la suma de cuadrados residual,

$$SCR = \sum_i \sum_j \sum_r \left(y_{ijr} - \frac{AB_{ij}}{R} \right)^2$$

La propiedad algebraica que permite la descomposición de la variación total, en componentes atribuibles a las diversas fuentes de variación, a que nos referimos más arriba, se expresa ahora como

$$SCT = SCA + SCB + SCAB + SCR$$

La verificación de esta igualdad se hace mediante un simple desarrollo algebraico de las expresiones de la mano derecha.

Los números de sumandos de los términos, en el orden que aparecen en la igualdad, son, respectivamente, IJR , JR , IR , IJ , IJR . Los grados de libertad son medidos de la cantidad de información independiente que se ha utilizado para calcular cada suma de cuadrados, y se presentan en la siguiente tabla:

Fuente de Variación	Grados de Libertad (g.l.)
Factor A	$I - 1$
Factor B	$J - 1$
Interacción AB	$(I - 1)(J - 1) = IJ - I - J + 1$
Residuo	$IJ(R - 1) = IJR - IJ$
Total	$IJR - 1$

Tabla 6.8: Grados de libertad para el análisis de varianza de dos factores.

Aquí también tenemos que:

$$\text{g.l. Total} = \text{g.l. } A + \text{g.l. } B + \text{g.l. } AB + \text{g.l. Residuo}$$

Los Cuadrados Medios: Son los cuocientes entre las sumas de cuadrados y los respectivos grados de libertad.

Los **cuocientes F** ahora son tres, y son los cuocientes entre los cuadrados medios de A , de B y de AB , divididos por los cuadrados medios del error, respectivamente. Son comparaciones entre la variabilidad promedio atribuible a cada efecto, y la variación promedio del error experimental. Como en el caso de un factor, la magnitud de los cuocientes F son una medida de la significación de cada fuente de variación.

Para determinar cuán significativos son los efectos de cada fuente de información, comparamos el valor del cuociente F con valores proporcionados por la tabla F . Se determinan los *grados de libertad del numerador*, que corresponde a los grados de libertad del efecto respectivo, y *grados de libertad del denominador*, que corresponde a los grados de libertad residual. Si el cuociente F supera el valor de la tabla correspondiente, entonces se dice que el efecto es significativo.

6.5. Tabla de Análisis de Varianza Para Dos Factores.

Los valores calculados se organizan en una tabla Análisis de Varianza, ANOVA, que para el caso de dos factores, es la siguiente:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	Cuociente F
Factor A	SCA	$I - 1$	$CMA = SCA/(I - 1)$	CMA/CMR
Factor B	SCB	$J - 1$	$CMB = SCB/(J - 1)$	CMB/CMR
Interacción AB	$SCAB$	$(I - 1)(J - 1)$	$CMAB = SCAB/(I - 1)(J - 1)$	$CMAB/CMR$
Residuo	SCR	$IJ(R - 1)$	$CMR = SCR/IJ(R - 1)$	—
Total	SCT	$JIR - 1$	—	—

Tabla 6.9: Análisis de varianza a dos factores.

Los valores que no aparecen no son necesarios. La suma de cuadrados del total, se usa para obtener la suma de cuadrados residual, por diferencia, pues es más fácil calcular la primera. La suma de los cuatro primeros términos de las columnas de Sumas de Cuadrados y de Grados de Libertad son iguales al término correspondiente del Total.

Ejemplo 6.2

Se utilizan filtros en una planta de agua potable. Se desea reducir el tiempo de filtrado, para lo cual se diseña un experimento, con dos factores, la marca del filtro y la cantidad de Hidróxido de Sodio, o Soda Cáustica (NaOH):

FACTORES	NIVELES
A : Marca del Filtro	a_1 : Filtro utilizado actualmente a_2 : Filtro nuevo marca 1 a_2 : Filtro nuevo marca 2
B : Cantidad de NaOH	b_1 : Alta b_2 : Baja

RESPUESTA: Tiempo de filtrado de un estanque completo, en minutos.

REPLICAS: Hay cuatro réplicas por cada combinación de tratamientos, $r = 1, 2, 3, 4$.

El numero de corridas experimentales es $3 \times 2 \times 4 = 24$. Se hizo el experimento, y los resultados son los siguientes:

FACTOR A	FACTOR B		SUMAS			PROMEDIOS		
	$j = 1$	$j = 2$	OBSERVACIONES			AB_{i1}/R	AB_{i2}/R	A_i/JR
$i = 1$	33	38						
	32	31						
	29	29						
	27	34	121	132	253	30.25	33.00	31.62
$i = 2$	26	29						
	24	27						
	25	30						
	29	29	104	115	219	26.00	28.75	27.38
$i = 3$	29	34						
	36	34						
	30	39						
	27	29	122	136	258	30.50	34.00	32.25
B_j	347	383						
B_j/JR	28.92	31.92	Valores Globales: $T = 730$ $T/IJR = 30,42$					

Tabla 6.10: Respuestas y cálculos parciales del Ejemplo 6.2

La tabla de análisis de varianza, cuyos cálculos detallados no se incluyen, es la siguiente:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	Cuociente F
Factor A	112.6	2	56.3	5.57
Factor B	54.0	1	54.0	5.35
Interacción AB	0.8	2	0.4	0.04
Residuo	182.5	18	10.1	—
Total	349.8	23	—	—

Tabla 6.11: Tabla de Análisis de Varianza del Ejemplo 6.2

Los valores obtenidos de la tabla F, del Apéndice, para los correspondientes grados de libertad, son:

$$F(2, 18) = 3,55 \text{ para } A \text{ y para } AB$$

$$F(1, 18) = 4,41 \text{ para } B.$$

En consecuencia, comparando los valores de tabla con los cuocientes F calculados, concluimos que hay efectos significativos del factor A , la marca del filtro, y hay efecto significativo debido al factor B y no a la interacción entre ambos factores.

Hasta el momento hemos presentado las expresiones para realizar análisis ANOVA de uno o dos factores. De forma similar, se pueden desarrollar expresiones para efectuar ANOVA de tres o más factores. Sin embargo, dichas expresiones se tornan rápidamente poco adecuadas para realizar los cálculos correspondientes en forma manual. Por ello, la gran mayoría de los softwares de análisis estadístico de datos incluyen herramientas para efectuar ANOVA. Por ejemplo, la hoja de cálculo Excel© trae en su herramienta de “Análisis de datos”, la capacidad de efectuar ANOVA de uno o dos factores. Otros software más avanzados como SPSS© pueden efectuar ANOVA de múltiples factores sin mayores limitaciones.

ESTUDIO DE CASO: Proceso de extracción de cobre de la lixiviación de bateas.

Uno de los métodos de extracción de cobre, del mineral, es el método de lixiviación, que consiste en verter ácido sulfúrico sobre el mineral, depositado en grandes bateas, el que disuelve el contenido de cobre en él. El líquido escurre, y de él se recupera posteriormente el metal. Se piensa que hay tres factores importantes que pueden controlar el proceso, de modo de optimizar el contenido de cobre extraído. Estos factores son, la duración del ciclo de lixiviación, la masa del mineral depositado en las bateas, y la ley del mineral, es decir, su contenido de cobre. Para ello se diseñó el experimento descrito a continuación:

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO: Optimizar el porcentaje de cobre extraído mediante el proceso de lixiviación.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: Tres factores, con dos niveles cada uno, según la siguiente descripción:

FACTORES	NIVELES
A : Ciclo de lixiviación	a_1 : 120 horas a_2 : 90 horas
B : Masa del mineral por batea	b_1 : 11500 toneladas b_2 : 13500 toneladas
C : Ley del mineral	c_1 : 1 % de cobre c_2 : 1.5 % de cobre

RESPUESTA: Porcentaje de cobre extraído del mineral.

El experimento se hizo con tres corridas experimentales por cada combinación de tratamientos. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Combinación de Tratamientos	Respuestas			Promedio
	Replica 1	Replica 2	Replica 3	
$a_1b_1c_1$	64.1	63.9	61.6	63.2
$a_2b_1c_1$	59.1	62.1	59.7	60.3
$a_1b_2c_1$	66.9	68.4	61.2	65.5
$a_2b_2c_1$	66.8	67.6	64.2	66.2
$a_1b_1c_2$	70.6	69.7	70.3	70.2
$a_2b_1c_2$	72.3	68.9	69.1	70.1
$a_1b_2c_2$	67.6	67.8	69.8	68.4
$a_2b_2c_2$	74.9	74.2	75.0	74.7

Tabla 6.12: Respuestas experimento Obtención cobre de lixiviación de bateas

A continuación se muestra el diagrama de efectos y los graficos de interacción. El diagrama de efectos muestra un fuerte efecto del factor C , la ley del mineral. Un efecto moderado del factor B , la masa del mineral, casi nada de efecto del factor A , ciclo de lixiviación. Sin embargo, aparecen con un efecto moderado, las interacciones AB y AC . La otra interacción doble, BC , es insignificante, lo mismo que la interacción triple.

Los gráficos de interacción muestran lo mismo, un fuerte efecto del factor C , muy poco efecto de los demás factores y de la interacción.

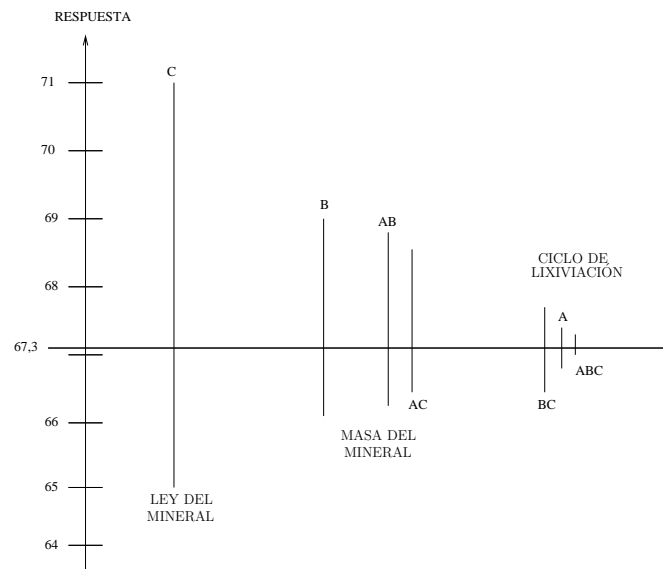


Figura 6.1: Diagrama de Efectos Ciclo lixiviación

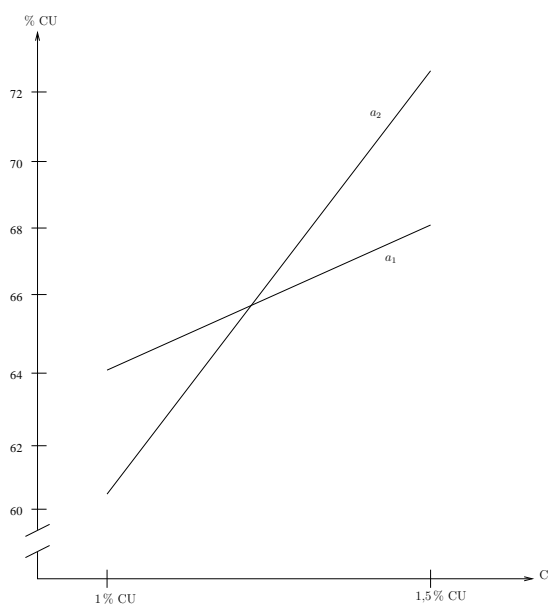
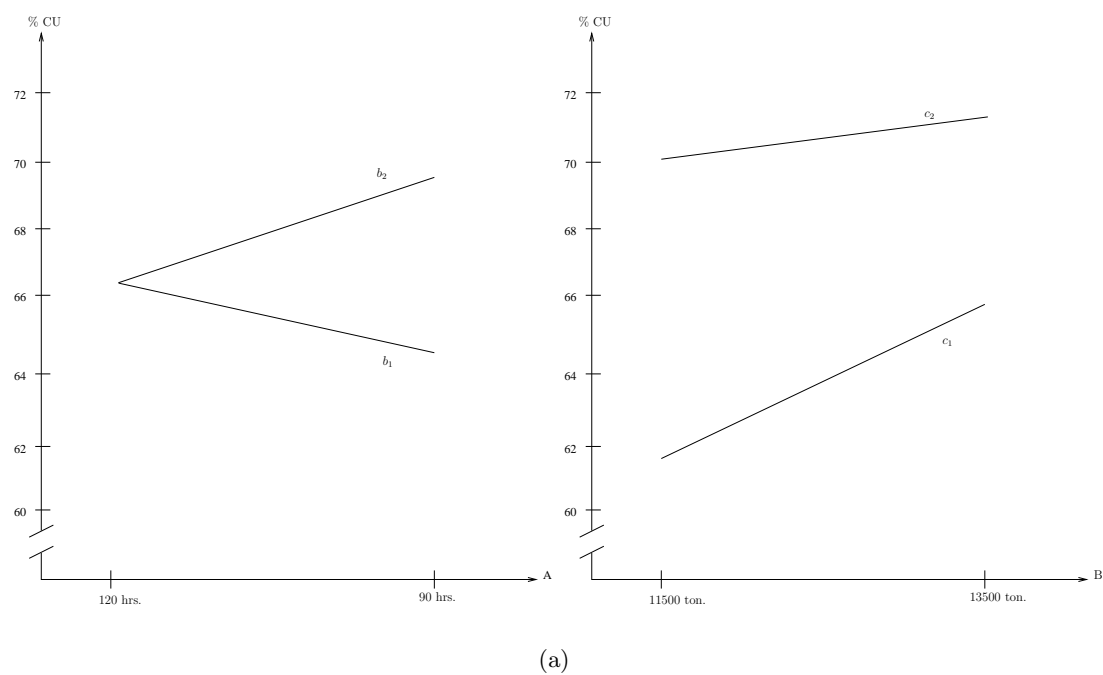


Figura 6.2: Gráficos de interacción Ciclo lixiviación

La tabla de Análisis de Varianza se presenta a continuación, y confirma los resultados anteriores. El valor de la tabla, para decidir si los cuocientes F son o no significativos, es

$F(1,16)=4.49$. Aparecen como significativos, el factor C , la ley del mineral, el factor B , la masa del mineral, la interacción AB , y la interacción AC , en ese orden de importancia.

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	Cuociente F
Factor A	6,00	1	6,00	1,74
Factor B	45,38	1	45,38	13,17
Factor C	298,22	1	298,22	86,56
Interacción AB	37,50	1	37,50	10,89
Interacción AC	26,46	1	26,46	7,68
Interacción BC	10,94	1	10,94	3,17
Interacción ABC	2,94	1	2,94	0,85
Residuo	55,12	16	3,45	—
Total	482,55	23	—	—

Tabla 6.13: Análisis de Varianza

EJERCICIOS.

Ejercicio 6.1

Verificar la equivalencia entre el modelo que expresa los efectos principales en interacciones en términos de las repuestas, en un experimento factorial a tres factores, dado en el Capítulo 3, y en el modelo lineal (6.5), de la sección 6.1, utilizando un procedimiento similar al presentado en esa sección de este capítulo.

Ejercicio 6.2

Una industria desarrolla un nuevo tipo de jugo de mango, que se vende en forma de concentrado, en tarros de un litro. El departamento de Marketing desea probar qué color de envase resulta más atractivo para el consumidor. Se desarrolla un experimento para probar el efecto de tres colores, Rojo, Amarillo y Azul. Se registran las ventas de cada color en un supermercado, durante periodos de una semana, de cada uno de los tres colores. Se desarrolla el experimento con 5 réplicas. Las ventas semanales que se registraron fueron las siguientes:

RÉPLICA	ROJO	AMARILLO	AZUL
1	46	52	61
2	52	37	29
3	59	38	38
4	78	64	53
5	81	74	79

Ventas Semanales de Tarros de Jugo de Mango, de Un Litro.

Construya una tabla de análisis de varianza para este experimento, y obtenga una conclusión respecto al efecto del color del tarro, sobre las ventas.

Ejercicio 6.3

Se diseña un experimento para probar la resistencia de tres tipos de nylon para pescar, de 0.3 mm de espesor, a diferentes temperaturas. Los tipos de nylon son “Neptuno”, “Lin-Lin”, y “Standard”. Las temperaturas a que fueron sometidas son 5 °C, 15 °C y 28 °C. Se hicieron cuatro réplicas de cada combinación de tratamientos.

Se sometió el material experimental a pruebas de resistencia, y se obtuvieron los siguientes resultados. El número de corridas experimentales es $3 \times 3 \times 4 = 36$.

Construya una tabla de análisis de varianza para este experimento. Obtenga una conclusión respecto si hay diferencia entre las resistencias de los tipos de nylon. Si hay efecto causado por la temperatura, y si hay interacción entre tipo de nylon y temperatura.

Temperatura	Tipos De Nylon		
	Neptuno	Lin-Lin	Standard
5 °C	21	26	22
	24	43	36
	32	35	40
	28	40	35
15 °C	36	30	19
	42	20	37
	28	26	29
	30	24	23
28 °C	19	44	14
	21	38	23
	27	33	27
	18	18	22

Capítulo 7

Fundamentos del Diseño de Parámetros

Introducción

El método de Taguchi se desarrolló en Japón, durante la década de los años 50. Los fundamentos del Diseño de Parámetros involucran todas las etapas del ciclo de vida de un producto, desde la etapa de concepto, la etapa de diseño, el diseño del proceso de producción, etapa de manufactura y termina sólo con la satisfacción plena del cliente, considerando además como objetivo primordial la minimización de los costos por desviaciones de la funcionalidad del producto.

Sus contribuciones han sido ampliamente reconocidas en Japón, prueba de lo cual, son las cuatro ocasiones en que ha recibido el Premio Deming (1951,1953,1960 y 1984), entre otros reconocimientos.

Los laboratorios AT&T, Ford Motor Company y Xerox Corporation fueron los primeros en introducir, en los años 80, el Método de Taguchi en los Estados Unidos.

Además, en 1986 se funda el American Supplier Institute, Inc.(Center for Taguchi Methods), en Dearborn, Michigan, Estados Unidos. Actualmente existen centros en diversos países entre los que se destacan: Inglaterra, Alemania, Francia, España, Luxemburgo, Australia, Canadá, Italia y México, entre otros países.

La mayor contribución del método de Taguchi ha sido la combinación de los métodos de ingeniería y de los métodos estadísticos para reducir la variabilidad en productos y procesos.

Lamentablemente el uso que Taguchi hace de los métodos estadísticos ha sido objeto de fuertes críticas por parte de la comunidad estadística internacional, debido, principalmente, a la carencia de un modelo específico y la forma vaga en que ha sido for-

mulada su metodología (Allende(1995)). Esto ha motivado la revisión crítica de sus métodos(Kacker, et. al. (1985); Hunter (1985); León, et. al. (1987); Box(1988)) y el surgimiento de *Metodologías Alternativas* (Nair, et. al.(1992); Steinberg, et. al. (1994)); Allende y Galbiati (1999).

En Pignatiello & Ramberg (1991) se resumen algunas bondades y deficiencias del Método Taguchi, las cuales se mencionan a continuación:

Los Principales bondades son:

- a) Simplifica el análisis de tolerancias a través del diseño de experimentos.
- b) Postula el estudio simultáneo de la media y de la variabilidad.
- c) Divulga el concepto de diseño robusto de productos.
- d) Motiva un gran interés en la ingeniería de la calidad.
- e) Establece nuevas líneas de investigación en ingeniería de la calidad.
- f) Demuestra que la experimentación produce resultados.
- g) Focaliza la atención sobre el costo asociado a la variabilidad.
- h) Formula una completa metodología para la mejora de la calidad.
- i) Muestra que la calidad es algo más que control.
- j) Llama la atención de Ingenieros y Estadísticos Industriales.

Las Principales deficiencias:

- a) Propone un análisis estadístico deficiente (v.g.: análisis de acumulación).
- b) Mantiene una posición dogmática sobre la importancia de las interacciones.
- c) Descarta la aproximación secuencial y adaptativa de la experimentación.
- d) Hace un mal uso de la aleatorización.
- e) Recomendando arreglos ortogonales a tres niveles potencialmente débiles.
- f) Ignora las técnicas modernas del análisis gráfico de datos.
- g) No fundamenta las hipótesis subyacentes a su metodología.
- h) Introduce como única medida de desempeño, la razón señal / ruido.
- i) Experimenta fuertes críticas de la comunidad Estadística Industrial, por su dogmatismo.
- j) Genera un culto de extremo a sus enseñanzas.

Los puntos anteriores *grafican* el nivel de discusión que ha generado el “Método Taguchi” y motivan una presentación crítica y formal del “Diseño de Parámetros” integrándolo, además, con las metodologías alternativas que han aparecido. Esto es el contenido del presente capítulo.

7.1. Tipos de Características de Calidad.

El primer paso en la Ingeniería de la Calidad, y también el más importante, consiste en seleccionar una característica de calidad apropiada, lo cual involucra un conocimiento adecuado del producto o proceso. En el Diseño de Parámetros se distinguen tres tipos de características de calidad:

- a) **CARACTERÍSTICAS CUANTIFICABLES:** Corresponden a aquellas que pueden medirse en una escala continua y/o discreta.

Las *Características Cuantificables* admiten la siguiente clasificación:

- **NOMINAL ES MEJOR:** Es una característica con un valor objetivo “target”.
EJEMPLO: Dimensión, cambio de presión, voltaje, etc.
- **MENOR ES MEJOR:** Es una característica cuyo mejor valor es cero.
EJEMPLO: Desgaste, encogimiento, deterioro, nivel de ruido, etc.
- **MAYOR ES MEJOR:** Es una característica cuyo mejor valor es infinito.
EJEMPLO: Tensión, duración, rendimiento de un combustible, etc.

Para cada una de estas características es posible desarrollar una función llamada Función de Pérdida, que cuantifica la pérdida que resulta debido a las desviaciones funcionales de la característica de calidad.

- b) **CARACTERÍSTICAS POR ATRIBUTOS:** Corresponden a aquellas que pueden medirse únicamente en una escala Nominal y/o Ordinal. Frecuentemente están basadas en apreciaciones subjetivas, tales como bueno, malo, mejor, etc.
EJEMPLO: Apariencia, porosidad, grietas, etc., clasificados como bueno / malo; grados A / B / C / D, etc.
- c) **CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS:** Corresponden a las características funcionales de la calidad de un sistema, en cuanto a sus entradas y/o salidas. Por ejemplo, la fuerza de tracción de un automóvil: cuando cambia la velocidad de la máquina, la transmisión reacciona y se opera un cambio de velocidades a la baja o a la alta, o bien permanece en el mismo engranaje.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

Cuatro fábricas producen el mismo artículo bajo las mismas especificaciones. El producto es una pieza crítica de un sistema de frenos de un nuevo automóvil. Asumiendo las siguientes consideraciones:

- a) Todos los productos se inspeccionan al 100 % y después se embarcan.
b) El costo para usted es el mismo en cualquiera de las cuatro fábricas.
-

Tomando en cuenta las figuras de Capacidad del Proceso de las cuatro fábricas, como consumidor, ¿Qué fábrica escogería usted?.

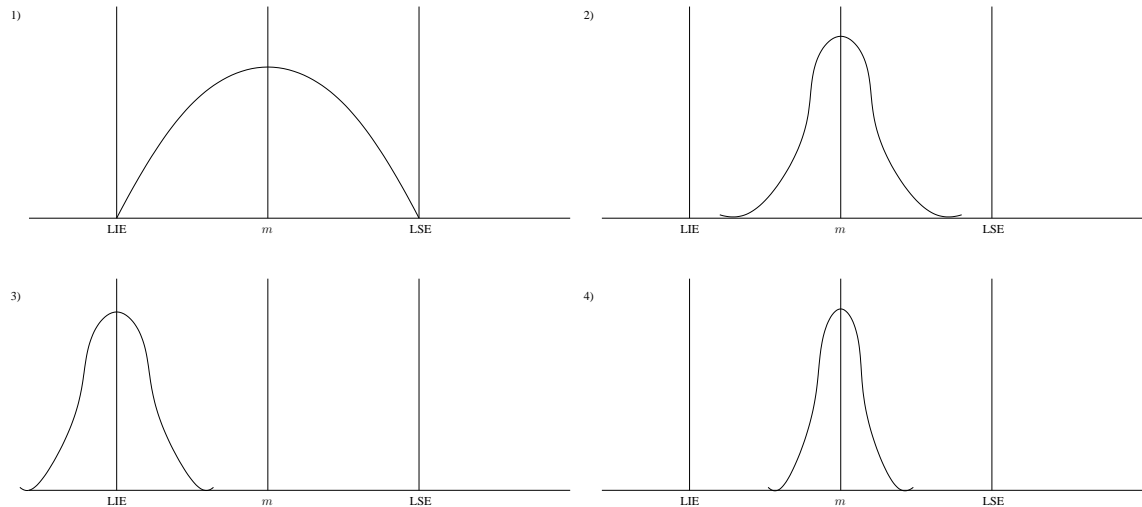


Figura 7.1: Capacidad del Proceso.

- Observando la figura anterior, se verifica que la mitad de la producción de la fábrica 3 está fuera de especificación. Aunque estos artículos no se embarquen, cuestan dinero. ¿Quién pagará estos costos?. Aun más, son pocos los artículos embarcados que responden al valor meta.
- La distribución en las fábricas 1 y 2 es similar. ¿En cuál fábrica se da una mayor variación?.
- Al comparar las fábricas 2 y 4, se ve que la producción de ambas está dentro de especificación. ¿Qué fábrica tiene la mínima variación?. ¿Por qué es esto importante?.
- Suponga que las cuatro fábricas están produciendo el mismo artículo bajo las mismas especificaciones y que los resultados son como los que se muestran aquí. ¿Qué fábrica escogería usted como consumidor?

ESTUDIO DE CASO: Caso televisores sony.

En 1979, la revista Asahi publicó un artículo que hablaba de la preferencia del consumidor americano por televisores Sony fabricados en Japón. Los productos de las plantas filiales Sony en San Diego, California, eran aparentemente idénticos a los de Tokio, Japón. Ambas industrias los fabricaban para el mercado de los Estados Unidos de América, usaban los mismos diseños y tenían en cuenta las mismas tolerancias. No obstante dichas semejanzas, el consumidor americano prefería los productos hechos en

Japón.

Los productos de la planta de San Diego estaban libres de defectos, esto es, no se embarcaba ningún aparato con la densidad de color fuera de los límites de tolerancia. De acuerdo con lo escrito, el índice de capacidad C_{pk} , de los aparatos construidos en Japón era de 1.0 y tenía un rango de defectos de 3 por cada 1000 unidades. ¿Por qué entonces se prefería a los aparatos Sony hechos en Japón?

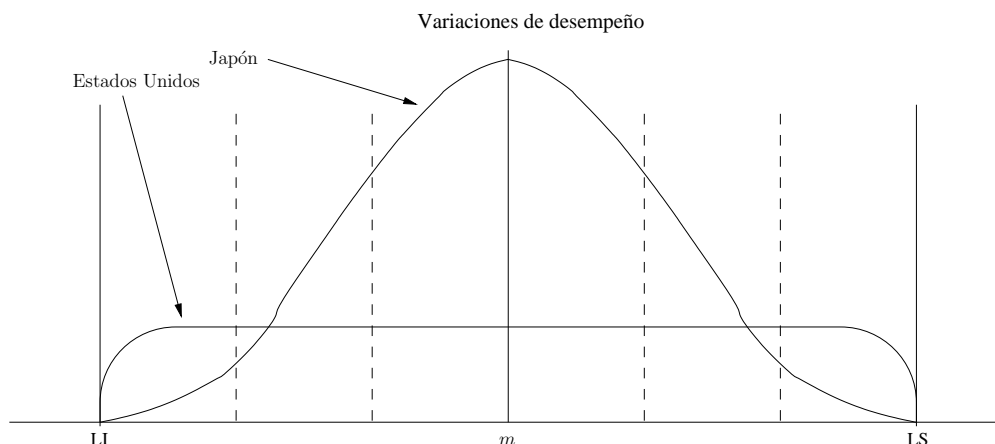


Figura 7.2: Diferencia en calidad de la producción entre Japón y Estados Unidos. (Caso Sony, citado en The Asahi, April 17, 1979)

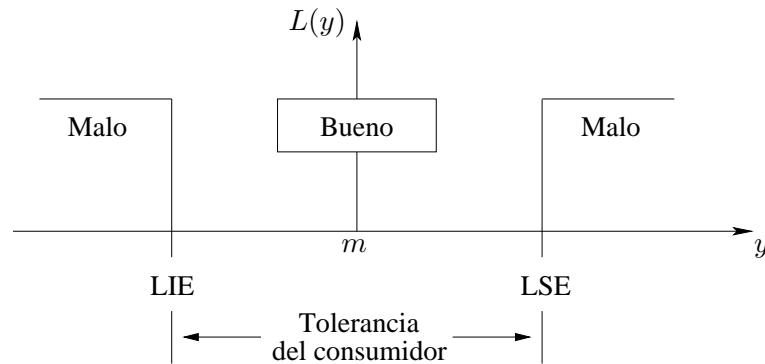
Una mayor proporción de aparatos construidos en Japón estaban cerca del valor meta que de aparatos construidos en los Estados Unidos. En otras palabras, la densidad de color de la mayor parte de los aparatos hechos por los japoneses estaba más cerca del valor meta. La media de los aparatos estadounidenses estaba dentro de los límites de especificación. Aunque los japoneses y los americanos construían aparatos con las mismas tolerancias, los consumidores percibían claramente sus diferencias.

Las tolerancias no aseguran la calidad. Estas solo establecen los límites dentro de los cuáles funciona un producto. Dos productos pueden funcionar; sin embargo, uno de ellos puede ser mejor que el otro. Los ingenieros saben que la calidad queda asegurada si todos los productos responden al valor nominal deseado. Desgraciadamente, no es posible que todos alcancen el valor meta. Las complicaciones que resultan son mayores en la medida en que es mayor la variación con respecto a dicho valor meta. Si se logra cierta uniformidad en torno al valor meta, las pérdidas son menores, como también disminuye la necesidad de la inspección final para asegurar la calidad.

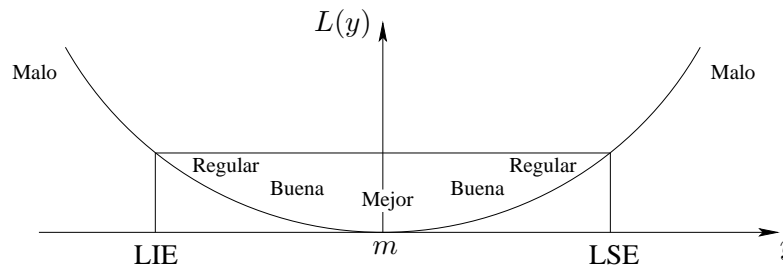
7.2. Función de Pérdida.

El objetivo de la función de pérdida es evaluar cuantitativamente la pérdida de calidad debido a variaciones funcionales de la característica de calidad de un producto o servicio.

El concepto de calidad que sustenta Taguchi, se describe como: **calidad es la mínima pérdida que un producto ocasiona a la sociedad desde que es despachado**, involucra la medición cuantitativa de la pérdida desde el punto de vista económico.



(a) Función escalón



(b) Función cuadrática

Figura 7.3: (a) Función escalón (b) Función cuadrática

La Figura 7.3(a) muestra una aproximación a la función de pérdida de calidad por medio de una función escalón. Aquí, cualquier valor en el rango (LIE, LSE) es igualmente bueno para el consumidor, pero para valores que están mas allá de estos límites los productos son igualmente malos. Esta es una forma inadecuada de cuantificar la pérdida de calidad. Note que el uso de la fracción de defectuoso está basado en este concepto de pérdida de calidad. La Figura 7.3(b) muestra la función de pérdida cuadrática, en la cual la pérdida se incrementa suavemente cuando la calidad y está próxima a m , pero

a medida que se aleja de m la pérdida de calidad se incrementa más rápidamente. Esta es una propiedad deseable para una función de pérdida de calidad.

Es importante que recuerde que:

- a) El conformarse con los límites de especificación es un indicador inadecuado de calidad o de pérdida debida a mala calidad;
- b) La pérdida de calidad resulta en la insatisfacción del consumidor;
- c) La pérdida de calidad puede relacionarse con las características del producto;
- d) La pérdida de calidad es una pérdida financiera;
- e) La función de pérdida es una herramienta excelente para evaluar la desviación funcional en la etapa inicial del desarrollo de un producto / proceso.

Ejemplo 7.1

Los campesinos japoneses utilizan cubiertas de plástico para proteger sus cosechas del frío. Hay un estándar industrial japonés, que describe los límites de especificación del producto. Un fabricante de tales cubiertas se esforzó por reducir la dispersión, con el propósito de reducir sus costos, logrando un espesor del plástico más uniforme, con y sin cambio de la respuesta media, lo que se puede observar en la Figura 7.4

La falta de uniformidad y/o cambio de la respuesta media genera tres tipos de pérdidas. En primer lugar, el producto se rompe porque no puede resistir el viento y la lluvia. En segundo lugar, se reduce la cosecha, con lo cual aumentan los precios, ocasionándose con esto una pérdida a la sociedad, la cual tiene que absorber esto con un costo adicional. En este análisis es necesario calcular la pérdida con la función de pérdida, puesto que a veces la pérdida ocasionada a la sociedad por la desviación del valor meta puede ser mayor que la reducción de costos de los fabricantes.

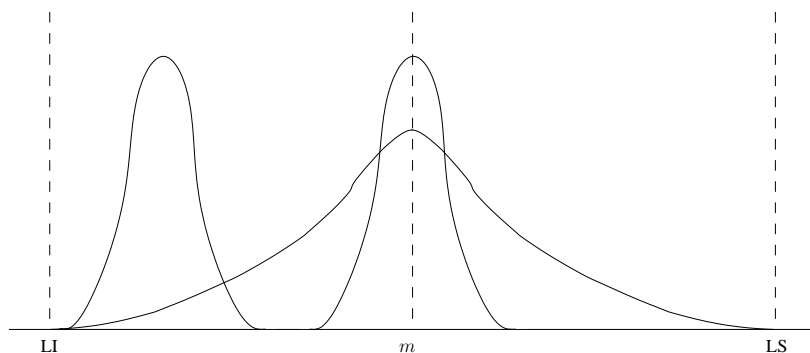


Figura 7.4: Espesor del plástico.

7.2.1. Función de Pérdida para una Pieza Nominal es Mejor.

Se presenta, a continuación, la Función de Pérdida para el caso de una característica de calidad del tipo *Nominal es Mejor*:

Sea Y el valor de una característica de calidad cuantificable, para la cual se desea alcanzar el valor nominal (target) finito τ . Sea $L(Y)$ la pérdida por unidad de producto cuando las características de calidad son iguales a Y .

Entonces la función de pérdida: $L(Y)$, debido a la desviación de Y desde τ , puede ser expandida como una serie de Taylor en torno a τ , como sigue:

$$L(Y) = L(\tau + Y - \tau) = L(\tau) + \frac{L^{(1)}(\tau)}{1!}(Y - \tau) + \frac{L^{(2)}(\tau)}{2!}(Y - \tau)^2 + R(\tau) \quad (7.1)$$

En donde: $L^{(i)}(\tau)$ representa la i -ésima derivada de L con respecto a τ , y $R(\tau)$ es el resto que se asume despreciable.

Como $L(\tau) = 0$ y $L(Y)$ se minimiza en $Y = \tau$. Entonces se tiene que $L^{(1)}(\tau) = 0$. Luego, la pérdida puede ser aproximada tomando el tercer término en (7.1):

$$\begin{aligned} L(Y) &= \frac{L^{(2)}(\tau)}{2!}(Y - \tau)^2 \\ &= k(Y - \tau)^2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

en donde: k es el *Coefficiente de Pérdida de Calidad*, que puede determinarse en términos monetarios.

Gráficamente:

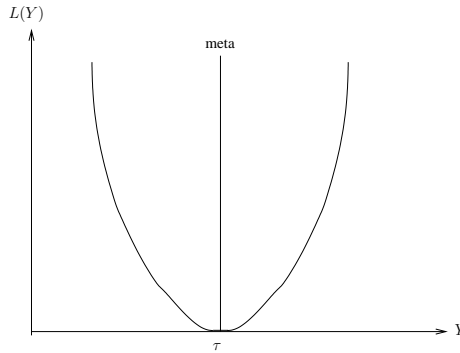


Figura 7.5: Función de pérdida característica Nominal es Mejor.

O sea, la pérdida es proporcional al cuadrado de la desviación del valor nominal.

Ejemplo 7.2

Fuente de poder de un televisor.

La característica de cualquier producto tiene un límite, a partir del cual el 50 % de los consumidores considera que el producto no funciona. Este límite representa el punto de vista del consumidor estándar y se le llama la *tolerancia del consumidor* o LD-50.

Con información acerca de la tolerancia del consumidor, Taguchi usa una función continua de pérdida para determinar las tolerancias racionales de producción.

Para determinar la función de pérdida para un circuito de la fuente de poder de un TV, se tiene que el valor nominal de Y (voltaje de salida) es $\tau = 115$ volts. Además, se asume que $Y = k(Y - \tau)^2$; y que el costo promedio por reparar o reemplazar el televisor de color es US\$100. Esto ocurre cuando Y está fuera del rango 115 ± 20 volts, estando el aparato ya en poder del consumidor.

TOLERANCIA DEL CONSUMIDOR: Es de 115 ± 20 volts.

TOLERANCIA DE FABRICACIÓN: Para determinarla, se debe encontrar la constante k .

Se tiene que: $L(Y) = k(Y - \tau)^2$

Sea $A_0 = k\Delta_0^2$, donde $\Delta_0 = \pm 20$ volts.

$$k = \frac{A_0}{\Delta_0^2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\$100}{(20V)^2} = 0,25 \text{ \$/volt}^2 \text{ (ver Figura 7.6)}$$

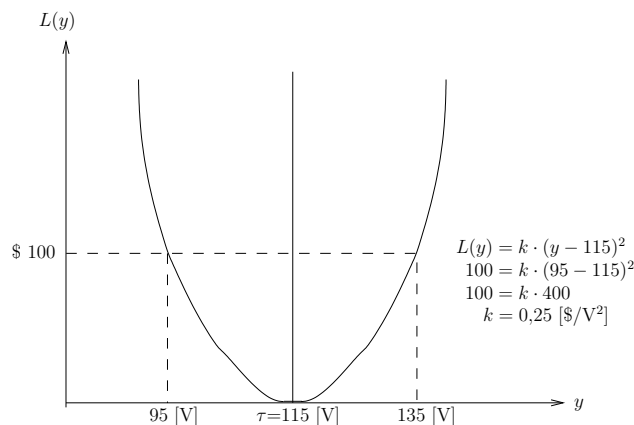


Figura 7.6: Gráfico de cálculo de k (ajuste de parábola)

Recuerde que k depende de la importancia financiera de la característica de calidad. Cuando el voltaje de salida llega a ser 95 ó 135 voltios, alguien paga entonces US\$100. Mientras la salida es de 115 voltios, es mínima la pérdida económica que se ocasiona a la sociedad. Suponga que el circuito se embarcó con una salida de 110 voltios sin ser reprocesado. La pérdida es de:

$$L(Y) = \$0,25(110 - 115)^2 = \$6,25$$

Lo que significa que, en promedio, alguien paga US\$6,25. Esta pérdida llega al fabricante como:

- Consumidor insatisfecho;
- Costos agregados de garantía;
- Tiempo y dinero del consumidor para la reparación;
- Mala reputación;
- Pérdida de mercado a largo plazo.

TOLERANCIA DE MANUFACTURA:

Se calcula antes de enviar el producto basado en la información acerca de la tolerancia del consumidor.

Suponga que el voltaje de salida puede recalibrarse al final de la línea de producción a un costo de US\$2. ¿Cuál es la tolerancia de manufactura?, o sea, ¿qué voltaje de salida se puede tolerar, si el fabricante planea gastar US\$2 para componer cada aparato?.

Se obtienen los límites de especificación igualando la función de pérdida a US\$2:

$$L = 2 = 0,25(Y - 115)^2 \Rightarrow Y = 115 \pm \sqrt{8}$$

Mientras Y esté dentro de este rango, la fábrica no va a gastar U.S.\$2,00 por retrabajo, porque la mejora de la calidad va a costar menos. La tolerancia de manufactura establece los límites para embarcar el producto. Esto representa el punto medio entre el productor y el consumidor.

Suponga que este circuito se envía al mercado con un voltaje de salida de 110 volts sin retrabajo. Determine la pérdida para los productos que utilizan el circuito.

7.2.2. Función de Pérdida para n Piezas (Nominal es Mejor.)

La función de pérdida previamente descrita se utiliza para evaluar una pieza. Es frecuente que se quiera evaluar la calidad promedio de todos los productos. Para hacer esto, se utiliza el promedio de $(Y - \tau)^2$, llamado desviación media cuadrática. Se define:

- MSD : Desviación media cuadrática.
- L : Pérdida en dinero.
- τ : Valor nominal.
- \bar{Y} : Promedio de Y .
- σ^2 : Varianza de Y .

$$\sigma^2 = \frac{(Y_1 - \bar{Y})^2 + (Y_2 - \bar{Y})^2 + \dots + (Y_n - \bar{Y})^2}{n}$$

$$MSD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tau)^2 = \frac{(Y_1 - \tau)^2 + (Y_2 - \tau)^2 + \dots + (Y_n - \tau)^2}{n}$$

$$MSD = \frac{(Y_1 - \bar{Y})^2 + (Y_2 - \bar{Y})^2 + \dots + (Y_n - \bar{Y})^2}{n} + (\bar{Y} - \tau)^2 \quad (7.3)$$

$$MSD = \sigma^2 + (\bar{Y} - \tau)^2$$

La función de pérdida es:

$$L = \begin{cases} k(Y - \tau)^2 & \text{para una pieza,} \\ k \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tau)^2 & \text{para } n \text{ piezas.} \end{cases} \quad (7.4)$$

Luego, la función de pérdida para n piezas será: $L = [\sigma^2 + (\bar{Y} - \tau)^2]$

Para reducir la pérdida, se debe reducir el MSD . Esto se puede lograr mediante:

1. σ^2 : Reduciendo la variabilidad alrededor del promedio.
2. $(\bar{Y} - \tau)^2$: Ajustando el promedio al nominal.

Ya que se necesita controlar la media y reducir la varianza, sería conveniente usar una medida objetiva de calidad que combine ambos parámetros. La función de pérdida es una de tales medidas, pero adicionalmente, existe otra medida llamada razón señal / ruido, que para las características de calidad nominal es mejor, determina la función de pérdida.

Ejemplo 7.3

Ejemplo de las Cuatro Fábricas.

Cuatro fábricas producen fuentes de poder de 115 V, como las descritas en el Ejercicio 7.2.

Se realiza el análisis teniendo en cuenta muestras de únicamente 13 piezas. En la práctica, se utilizan muestras compuestas de al menos 50 piezas para estimar dichas pérdidas.

Para determinar las pérdidas se ocupa el análisis del *MSD*.

FÁBRICA	DATOS					<i>MSD</i>	PÉRDIDAS
1	112	113	113	114	114	3,00	\$0,75/pza.
	115	116	116	116			
	117	117	115	118			
2	113	114	114	114	115	1,08	\$0,27/pza.
	115	115	115	115			
	116	116	116	113			
3	113	113	112	113	112	3,92	\$0,98/pza.
	113	114	115	116			
	113	114	112	114			
4	114	115	116	114	115	0,62	\$0,15/pza.
	116	114	115	116			
	114	115	116	115			

Tabla 7.1: Datos de cuatro fábricas.

Utilizando el formato de la característica nominal es mejor

$$L = k [\sigma^2 + (\bar{Y} - \tau)^2]$$

Los 75 centavos de pérdida de la fábrica 1 se interpretan como sigue: Como una aproximación preliminar una selección aleatoria de los productos de la fábrica 1 están, en promedio, arrojando una pérdida de 75 centavos. Los 75 centavos son pagados por alguien: el consumidor, la misma compañía o un consumidor indirecto. Como vemos, la fábrica 4 es la que arroja una menor pérdida por pieza.

Note que en todos los casos entre menor sea el *MSD*, menor será la pérdida *L*. Entonces el trabajo consiste en reducir el *MSD*, para así obtener la mayor calidad a un costo aceptable.

7.2.3. Función de Pérdida (Característica del Tipo Menor es Mejor.)

La pérdida de calidad en este tipo de medición puede ser aproximada por la siguiente función, la cuál se obtiene reemplazando $\tau = 0$ en la ecuación (7.1):

$$L(Y) = kY^2 \quad (7.5)$$

Para el caso menor es mejor, la función de pérdida es:

$$L = \begin{cases} kY^2 & k = \frac{A_0}{Y_0^2} \\ k(MSD) & MSD = \frac{1}{n} \sum (Y_i - \tau)^2 = \frac{1}{n} \sum Y_i^2 - (\bar{Y})^2 + \sigma^2 \end{cases} \quad (7.6)$$

Gráficamente:

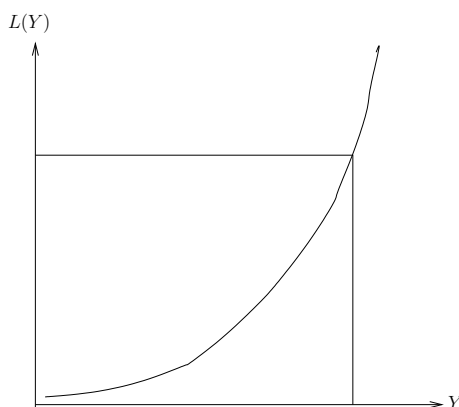


Figura 7.7: Característica Menor es Mejor.

Ejemplo 7.4

Interesa estudiar la siguiente característica de calidad Y (% de encogimiento de una cubierta de velocímetro), con $Y > 0$.

Cuando Y es 1,5 %, el 50 % de los consumidores se queja del estuche y lo regresa para reemplazarlo por otro. El costo de reemplazo es $A_0 = \text{US\$}80$. Calcule la constante k y la función de pérdida. A continuación se presenta la tabla del porcentaje de encogimiento de dos tipos de materiales.

MATERIAL	DATOS					σ^2	$(\bar{Y})^2$	MSD	L
TIPO A	0,28	0,24	0,33	0,30	0,35	0,0037	0,0713	0,0750	\$2,67
	0,18	0,26	0,24	0,16	0,33				
TIPO B	0,08	0,12	0,07	0,03	0,03	0,00082	0,0036	0,00442	\$0,016
	0,09	0,06	0,05	0,04	0,03				

$$\text{Aquí } k = 35,56 = \frac{80}{(1,5)^2}$$

Dado que las mediciones de encogimiento arriba citadas están de acuerdo con las especificaciones, el encogimiento del material tipo B representa una pérdida menor que la del material tipo A. Si el costo de ambos materiales es el mismo, entonces el material tipo B podría resultar la mejor elección.

7.2.4. Función de Pérdida (Característica del Tipo Mayor es Mejor.)

La función de pérdida recíproca del tipo mayor es mejor tiene las mismas cualidades que la del tipo menor es mejor. Entonces, se aproxima la función de pérdida para este tipo de medida por $1/Y$ en Y en la ecuación 7.5:

$$L(Y) = k \frac{1}{Y^2} \quad (7.7)$$

La función de pérdida del tipo mayor es mejor es:

$$L = \begin{cases} k \frac{1}{Y^2} & k = A_0 Y_0^2 \\ k(MSD) & MSD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{Y_i} - \tau \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i^2} \approx \frac{1}{Y^2} \left(1 + 3 \frac{\sigma^2}{Y^2} \right) \end{cases} \quad (7.8)$$

Gráficamente:

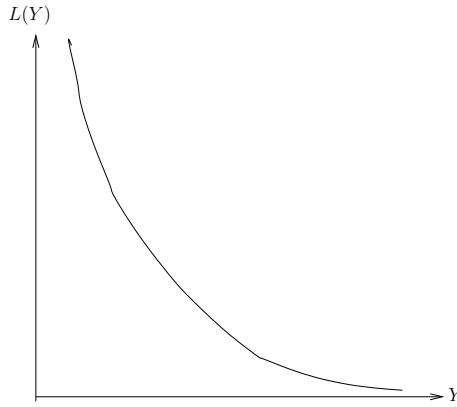


Figura 7.8: Característica Mayor es Mejor.

7.3. Razón Señal-Ruido (Signal-To-Noise Ratio.)

En el área de las telecomunicaciones, se usa la cantidad llamada razón señal-ruido (Signal-Noise Ratio, SNR) como una característica de calidad. Taguchi dada su experiencia en el área de ingeniería electrónica y de las comunicaciones, introduce este mismo concepto en el área de los diseños de experimentos.

Esta SNR refleja la media de la característica de calidad (S) versus su variabilidad (N). Cada proceso tiene factores de control que contribuyen a reducir la variación y mejorar la calidad y se pueden identificar por la cantidad de variación presente y por el cambio en la respuesta media cuando se tienen réplicas en los datos. La razón SNR transforma estas réplicas en un solo valor el cuál refleja la cantidad de variación presente y la respuesta media. Se han desarrollado distintos tipos de razones dependiendo del tipo de característica a medir; las que pueden ser del tipo nominal es mejor, menor es mejor y mayor es mejor. Estas se discutirán en las próximas secciones.

7.3.1. Característica Nominal es Mejor (SNR)

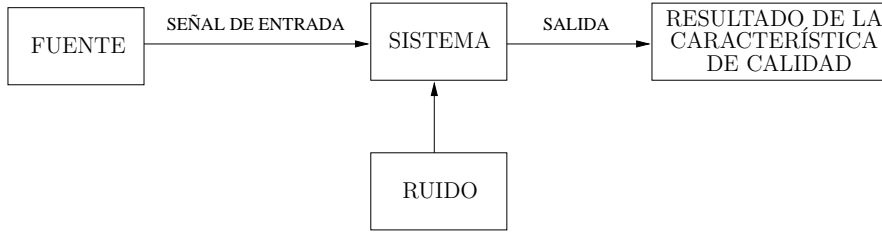


Figura 7.9: Relación funcional de un equipo de telecomunicaciones.

Para transmitir desde un equipo de telecomunicaciones, ciertas señales entran al sistema y este arroja un resultado de salida. Sin embargo, factores de ruido que interfieren con el sistema, modifican la señal y no permiten alcanzar una meta requerida. La razón entre la potencia de la señal y la potencia del ruido se define como razón señal-ruido. Su notación es la siguiente:

$$\text{razón } SNR = \frac{\text{potencia de la señal}}{\text{potencia del ruido}} = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (7.9)$$

Se desea que el sistema arroje el mayor valor numérico en (7.9)

Al utilizar este concepto en un experimento estadístico, la potencia de la señal y la potencia del ruido se reemplazan por los correspondientes estimadores $\hat{\mu}^2$ y $\hat{\sigma}^2$. Sea una muestra aleatoria de tamaño n con una distribución de probabilidad cuya media es μ y varianza σ^2 , se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 = V = s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ \hat{\mu}^2 &= \frac{1}{n} (S_m - V) \text{ donde } S_m = \frac{1}{n} \left(\sum y_i \right)^2 = n (\bar{y})^2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

luego cuando $V = 0 \Rightarrow$ no hay desviaciones $(y_i - \bar{y})$ del promedio $\hat{\mu}^2 = (\bar{y})^2$

$$SNR = \frac{\frac{1}{n}(S_m - V)}{V}$$

Taguchi recomienda utilizar el logaritmo de esta razón SNR multiplicado por 10, lo cual expresa la razón en decibeles (dB). Esta medida se ha utilizado en el área de las comunicaciones por muchos años. Así, para el caso continuo de una característica del tipo nominal es mejor, se define la razón señal-ruido como:

$$SNR = 10 \log \left(\frac{\frac{1}{n}(S_m - V)}{V} \right) \quad (7.11)$$

Note que cuando la potencia del ruido (V) disminuye y la potencia de la señal $[(S_m - V)/n]$ aumenta, el valor de la razón SNR aumenta.

Se observa que como $S_m = n(\bar{y})^2$, reemplazando en (7.11) con $\bar{y}^2 = (\frac{1}{n} \sum y_i)^2$ se tiene:

$$SNR = 10 \log \left(\frac{\bar{y}^2 - \frac{V}{n}}{V} \right) \quad (7.12)$$

También, si n es grande (tiende a infinito), V/n se hace no significativo y la razón SNR se puede expresar como:

$$\begin{aligned} SNR &= 10 \log \left(\frac{\bar{y}^2}{V} \right) \\ &= 10 \log \left(\frac{\bar{y}^2}{s^2} \right) = 20 \log \left(\frac{\bar{y}}{s} \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Note que \bar{y}/s es el recíproco del coeficiente de variación, el cual es una medida de calidad de dispersión.

7.3.2. Característica Menor es Mejor (SNR)

Ya que el valor target τ es cero en este caso, no se puede usar directamente la ecuación (7.9) porque el estimador μ puede ser negativo, y no se puede utilizar la transformación logarítmica. Taguchi recomienda para este caso utilizar la pérdida esperada en la ecuación (7.5),

$$L = kE(y^2)$$

Sea una muestra de características y_1, y_2, \dots, y_n . Entonces el estimador natural de $E(y^2)$ es

$$\begin{aligned} MSD &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - 0)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Para ser consistentes con su aplicación en ingeniería, el valor de la razón SNR debe ser grande para situaciones favorables, por lo que se utiliza la siguiente transformación la cual es medida en decibeles:

$$SNR = -10 \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \quad (7.15)$$

7.3.3. Característica Mayor es Mejor (SNR)

Similar a la característica menor es mejor, se utiliza el siguiente estimador de la pérdida esperada $L = kE(1/y^2)$:

$$\begin{aligned} MSD &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i} - 0 \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2} \end{aligned}$$

que arroja como resultado la siguiente razón SNR ,

$$SNR = -10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2} \right] \quad (7.16)$$

Note que el valor target τ es 0.

Las ecuaciones (7.15) y (7.16) están basadas en funciones de pérdidas cuando se tiene un conjunto de n observaciones. Si se emplea la aproximación a la función de pérdida para el caso nominal es mejor, se puede derivar la siguiente ecuación SNR :

$$SNR = -10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_0)^2 \right] = -10 \log [MSD] \quad (7.17)$$

La siguiente tabla resume las expresiones presentadas en este capítulo:

Tipo de característica	Pérdida promedio	Razón SNR	
		Aproximación a la razón señal-ruido	Aproximación a la función de pérdida
Nominal es mejor	$k \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \tau)^2 \right]$	$10 \log \left[\frac{(1/n)(S_m - V)}{V} \right]$ $\approx 20 \log \left[\frac{\bar{y}}{s} \right]$	$-10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \tau)^2 \right]$
Menor es mejor	$k \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right]$		$-10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right]$
Mayor es mejor	$k \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2} \right]$		$-10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2} \right]$

Tabla 7.2: Función de pérdida y razón SR para un conjunto de n observaciones

Ejemplo 7.5

Dado el siguiente conjunto de 5 observaciones: 32, 38, 36, 40, 37; encuentre la razón SNR para los tres tipos de características de calidad.

a) *CASO NOMINAL ES MEJOR.*

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{5}(32 + 38 + 36 + 40 + 37) = 36,6 \\ S_m &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 = \frac{1}{5}(32 + 38 + 36 + 40 + 37)^2 = 6697,8 \\ V &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n y_i - \bar{y} \right)^2 = \frac{1}{4} [(32 - 36,6)^2 + \dots + (37 - 36,6)^2] = 8,8\end{aligned}$$

Usando (7.11), se obtiene

$$\begin{aligned}SNR &= 10 \log \left[\frac{\frac{1}{5}(6697,8 - 8,8)}{8,8} \right] \\ &= 10 \log(152,02) = 21,82 \text{ dB}\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la ecuación (7.13), entonces

$$SNR = 20 \log \left(\frac{\bar{y}}{s} \right) = 20 \log \left(\frac{36,6}{\sqrt{8,8}} \right) = 20 \log(12,34) = 21,82 \text{ dB}$$

b) *CASO MENOR ES MEJOR.* Desde la ecuación (7.14),

$$\begin{aligned}SNR &= -10 \log \left(\frac{1}{n} \sum y_i^2 \right) \\ &= -10 \log \left[\frac{1}{5} \sum_i (32^2 + \dots + 37^2) \right] = -10 \log(346,6) = -31,29 \text{ dB}\end{aligned}$$

c) *CASO MAYOR ES MEJOR.*

$$\begin{aligned}SNR &= -10 \log \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{y_i^2} \right) \\ &= -10 \log \left[\frac{1}{5} \sum \left(\frac{1}{32^2} + \dots + \frac{1}{37^2} \right) \right] \\ &= -10 \log(0,000759) = 31,20 \text{ dB}\end{aligned}$$

EJERCICIOS.

Ejercicio 7.1

Se fabrican aparatos de televisión con los valores nominales deseados para un voltaje de salida de $\tau = 115$ volts. Cuando el voltaje de salida adquiere un rango de 115 ± 25 volts y el aparato va a las manos del consumidor, el costo promedio para reemplazar o reparar el aparato es US\$200.

- Encuentre la constante k y determine la función de pérdida
- El costo de reparación al final de la línea de producción es US\$3,0/pieza. ¿Cuál es la tolerancia real para el voltaje de salida?
- Se toman en consideración dos procesos diferentes para producir esos televisores. Se propone, enseguida, una muestra de voltajes de salida de cada uno de los procesos. ¿Qué proceso se ve mejor?. Calcule la pérdida asociada con cada uso
- Calcular también las SNR

PROCESO	DATOS							σ_n^2	\bar{Y}	$\bar{Y} - \tau^2$	L
A	113	116	115	113	117	115	115	1,69	114,7	0,0625	0,56
B	113	112	113	112	113	113	112				
	114										

Ejercicio 7.2

Se desea maximizar la tensión de la soldadura protectora de las terminales de un motor. Cuando la tensión de la soldadura es 0,2 lbs/in², algunas soldaduras se quiebran y tendrán un costo promedio de reemplazo de $A_0 = \text{US\$200}$.

- Encuentre k y determine la función de pérdida
- Si el costo de reproceso en la producción es de US\$2 por unidad, encuentre la tolerancia real de fabricación
- Se lleva a cabo un experimento para optimizar el proceso semimanual de soldadura. Compare *antes* y *después*.
- Calcular también las SNR

EXPERIMENTO	DATOS						σ_n^2	\bar{Y}	$\frac{1}{n} \sum \frac{1}{Y_i^2}$	L
ANTES	2,3	2,0	1,9	1,7	2,1	2,1	0,0764	1,94	0,28188	\$2,26
	2,2	1,4	2,2	2,0	1,6	1,6				
DESPUES	2,1	2,9	2,4	2,5	2,4	2,4				
	2,8	2,1	2,6	2,7	2,3	2,3				

Capítulo 8

Ingeniería de la Calidad

Introducción

La Ingeniería de la Calidad lleva a cabo actividades dirigidas a reducir las pérdidas causadas por la variación. Cuando se aplica al proceso de manufactura, el control y la corrección de procesos así como el mantenimiento preventivo se llama Ingeniería de la Calidad *en línea*. Cuando se implanta en el proceso de diseño de productos y procesos, se le denomina Ingeniería de la Calidad *fuera de la línea*.

Las figuras 8.1 y 8.2 resumen los principales aspectos de la Ingeniería de la Calidad en y fuera de la línea:

EXPLICACIÓN: Se observa en la Figura 8.1 que la Ingeniería de la Calidad, fuera de la línea, se refiere al diseño de productos y procesos, e involucra, principalmente, tres etapas que se describen a continuación:

1.- Diseño del Producto.

- a) **DISEÑO DEL SISTEMA:** Aplicar el conocimiento científico y tecnológico en el desarrollo de un diseño prototipo de acuerdo a los requerimientos del consumidor. En esta etapa se efectúa una selección inicial de partes, materiales y tecnología de fabricación. El énfasis está en la selección de la mejor tecnología disponible de modo tal que se satisfagan los requerimientos del consumidor a un costo adecuado, tanto para el fabricante como para el consumidor.
- b) **DISEÑO DE PARÁMETROS:** El objetivo es determinar los niveles de los factores controlables para los cuales el producto es insensible a las fuentes incontrolables de variación.
- c) **DISEÑO DE TOLERANCIAS:** Establecer tolerancias en torno al valor nominal establecido durante el diseño de parámetros.

2.- Diseño del Proceso.

- a) **DISEÑO DEL SISTEMA:** Seleccionar el proceso de fabricación sobre la base del conocimiento del producto y de la tecnología actual.

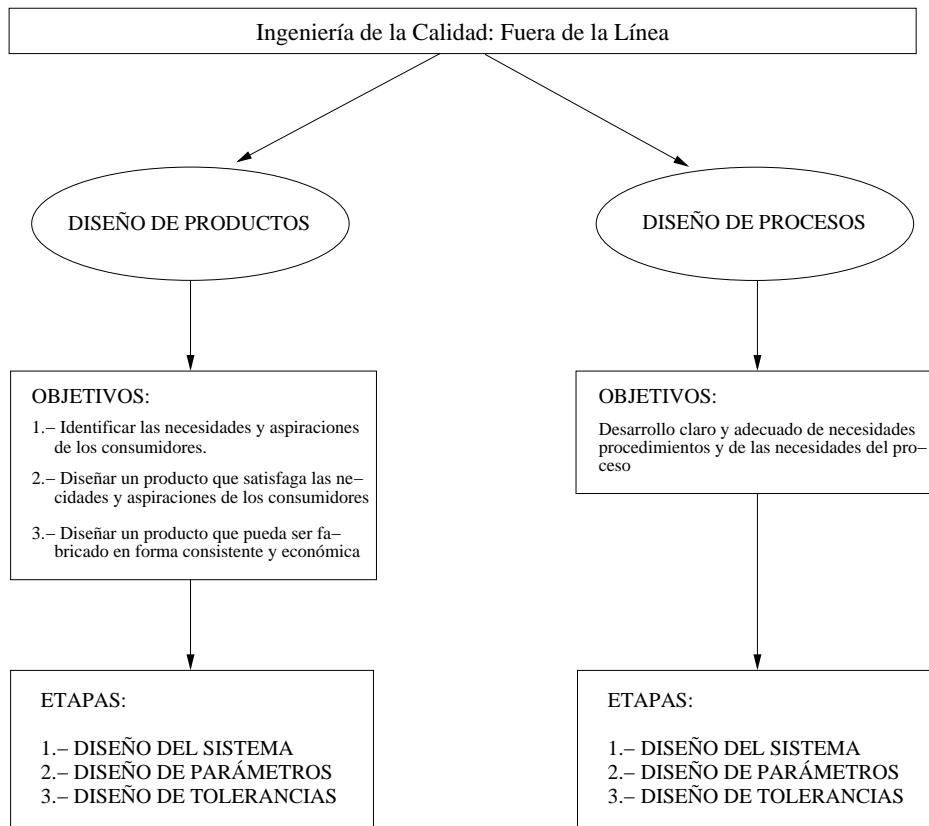


Figura 8.1: Ingeniería de la calidad: Fuera de línea

- b) **DISEÑO DE PARÁMETROS:** El objetivo es determinar los niveles de los factores de proceso para los cuales éste es menos sensible a las fuentes incontrolables de variación.
- c) **DISEÑO DE TOLERANCIAS:** Establecer tolerancias para los parámetros de proceso identificados como críticos durante la etapa de Diseño de Parámetros del proceso.

El Diseño de Parámetros constituye la esencia de la Ingeniería de la Calidad, fuera de la línea, mientras que en la Ingeniería de la Calidad, en línea (Figura 8.2), el Control Estadístico de Procesos (SPC, de Statistical Process Control) constituye el procedimiento adecuado para *controlar* y verificar las conclusiones obtenidas *fuera de la línea* (Figura 8.1).

Intrínsecamente, el Diseño de Parámetros, es un procedimiento de optimización y considera la reducción de la variabilidad a un bajo costo, minimizando las pérdidas a la sociedad.

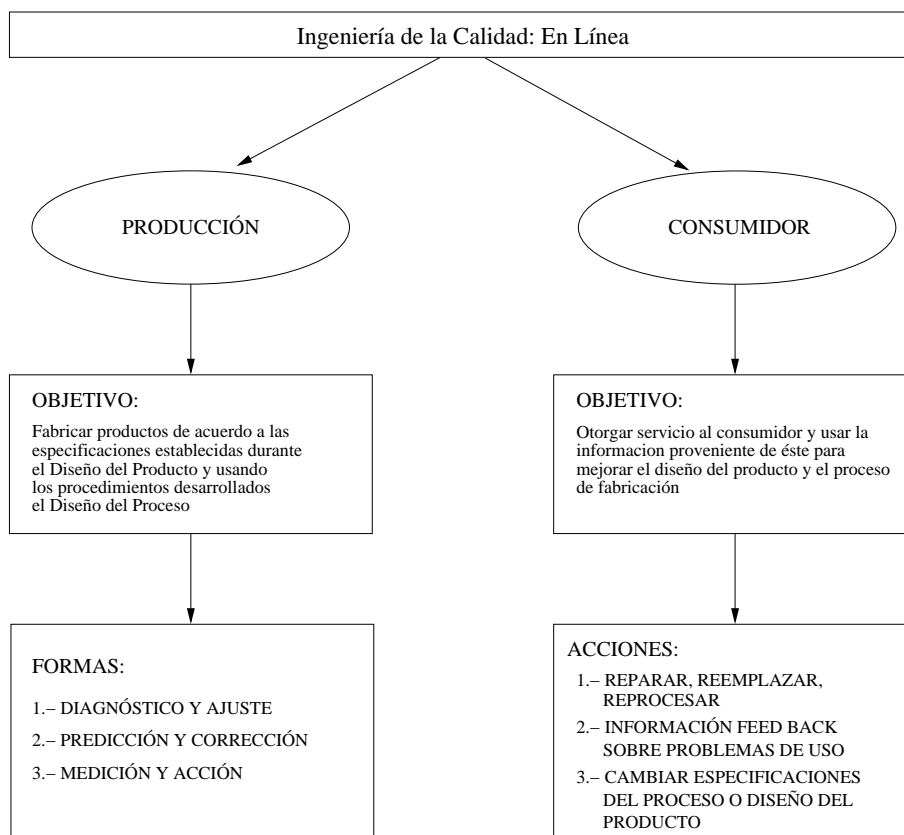


Figura 8.2: Ingeniería de la calidad: En línea

8.1. Identificando y distinguiendo los tipos de factores.

Hay que listar e identificar los tipos de factores de Ruido y factores de Control apropiados a la aplicación.

1. Factores de Ruido

Los factores indeseables e incontrolables que causan el que una característica de calidad se desvíe de su valor meta se llaman factores de ruido.

Existen tres tipos de ruido que afectan a una característica funcional de un producto:

- I. *RUIDO INTERNO*: Deterioro de partes , material, subcomponentes, etc.
- II. *RUIDO ENTRE PRODUCTOS*: El cual se refiere a la variación entre una pieza y otra después de tener un nivel medio general conforme a las especificaciones.
- III. *RUIDO EXTERNO*: Condiciones ambientales. Es la variación impuesta por circunstancias las cuales ocurren después de que el producto es despachado por el

productor, temperatura, humedad, condiciones de almacenamiento, etc.

El ruido afecta significativamente a la calidad. Sin embargo, eliminarlo puede ser muy costoso. Por ejemplo, un proceso puede dañarse por la fluctuación de la temperatura dentro de la fábrica; sin embargo, instalar aire acondicionado dentro de toda la planta para eliminar este factor de ruido probablemente sea una solución muy costosa.

Buena calidad significa tener una variación funcional mínima, esto es, tener un producto que funcione de acuerdo con lo planeado bajo las más diversas condiciones y durante el tiempo de vida para el que fue diseñado.

Los productos y procesos que son menos sensibles al ruido se dice que son robustos.

$$\text{ROBUSTEZ} = \text{ALTA CALIDAD}$$

El *diseño robusto* es un método de ingeniería para establecer las condiciones del producto y el proceso las cuáles tienen mínima sensibilidad a varias causas de variación, y la cuál produce productos de alta calidad con bajo costo en desarrollo y manufactura. El diseño de parámetros de Taguchi es una herramienta importante para el diseño robusto. Su diseño de tolerancia puede ser clasificado también como un diseño robusto. En un sentido actual, el diseño robusto es idéntico al diseño de parámetros, pero en un sentido más amplio el diseño de parámetros es un subconjunto del diseño robusto. Las dos herramientas principales utilizadas en el diseño robusto son:

- La razón señal-ruido, la cual mide calidad con énfasis en la variación;
- Arreglos ortogonales, el cual acomoda muchos factores (parámetros) en un diseño simultáneamente.

2. Factores de Control

Los factores de control son normalmente muchos, clasificándose en:

- I. FACTORES DE SEÑAL: Afectan el nivel de la respuesta (media)
- II. FACTORES DE CONTROL: Los cuáles afectan la variabilidad de la respuesta (varianza)

Se reduce la variabilidad cambiando los factores de control, mientras que se mantiene el nivel de desempeño ajustando los factores de señal.

3. Interacciones

Se utiliza este término para describir la situación en la cual el nivel de un factor tiene un efecto significativo sobre otro en término de la respuesta. Mientras que en un *diseño factorial completo*, es posible examinar la existencia de interacciones, en el *factorial fraccionario*, Arreglo Ortogonal utilizado de acuerdo a la metodología de Taguchi, es necesario actuar como si estos factores fueran independientes unos de otros, excepto en instancias precisas. Luego, las interacciones se consideran eventos raros, pero cuando ocurren, su existencia puede ser muy importante.

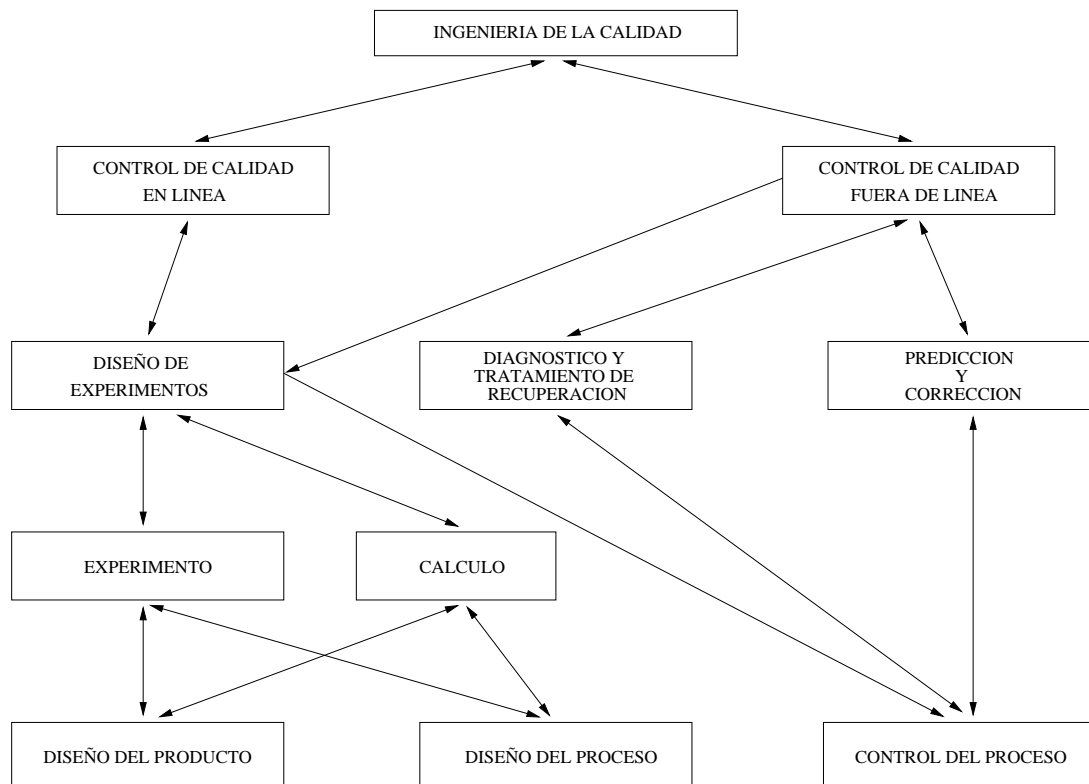


Figura 8.3: Ingeniería de la calidad

8.2. ESTUDIO DE CASO: Experimento en una fábrica de cerámica

Una de las primeras aplicaciones de la ingeniería de la calidad fuera de la línea fue la optimización de un proceso de azulejos, en Japón, en la década de los años 50. A partir de esa fecha, se han hecho ajustes a la metodología. Sin embargo, el caso ilustra algunas de las características básicas del método de Taguchi de diseño de experimentos.

En 1953, una compañía de azulejos de regular tamaño compró en Alemania un nuevo horno en forma de túnel, cuyo costo fue de 2 millones de dólares. El horno media 80 metros de largo; dentro de él un carro cargado de azulejos se deslizaba lentamente sobre sus rieles mientras los quemadores horneaban el producto. Poco después de su introducción apareció un problema: los azulejos tenían variación en sus dimensiones. Más del 50 % de los azulejos de la fila exterior estaban fuera de especificación, mientras que los de las filas interiores apenas si cumplían con la medida.

Los gerentes e ingenieros sabían que la causa de la variación eran las diferencias en la distribución de la temperatura del horno. Esto era considerado como un factor de ruido en el proceso de manufactura.

El problema podía ser solucionado diseñando nuevamente el horno para que todos los azulejos recibieran la misma temperatura, lo cual hubiera costado medio millón de dólares. Afortunadamente, en 1953 la compañía no tenía recursos para invertir; por lo tanto, decidió buscar la manera de reducir la variación de las dimensiones de los azulejos sin tener que homogeneizar la temperatura del horno. La compañía hizo experimentos para investigar los efectos de algunos factores en el proceso de calcinado de los azulejos que pudieran afectar su dimensión. Se seleccionaron estos factores teniendo en cuenta que los experimentos fueran eficientes.

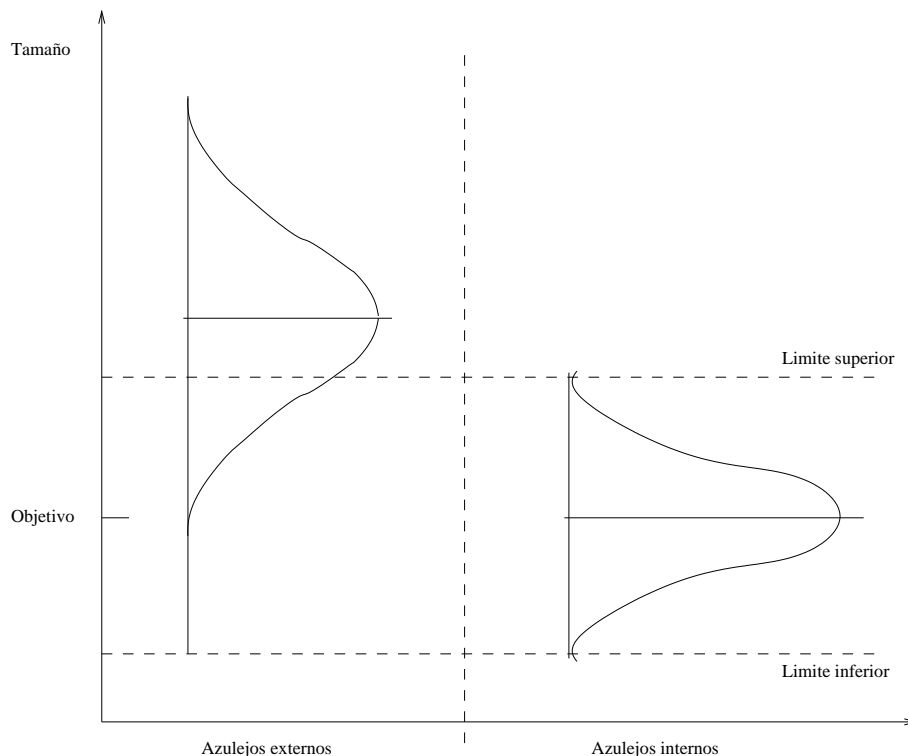


Figura 8.4: Distribución de salida de los azulejos

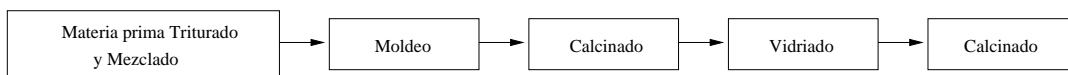


Figura 8.5: Proceso de manufactura de azulejos

Factores de Control y sus Niveles:

A:	Cantidad de piedra caliza	A_1 :	5 % (nueva),	A_2 :	1 % (existente)
B:	Fineza del aditivo	B_1 :	Grueso (existente),	B_2 :	Fino (nuevo)
C:	Cantidad de aglutinante	C_1 :	43 % (nuevo),	C_2 :	53 % (existente)
D:	Tipo de aglutinante	D_1 :	existente	D_2 :	Nuevo aglutinante
E:	Carga de materia prima	E_1 :	1300 Kg. (nueva),	E_2 :	1200 Kg. (existente)
F:	Cantidad de desperdicio	F_1 :	0 % (nueva),	F_2 :	4 % (existente)
G:	Cantidad de feldespato	G_1 :	0 % (nueva),	G_2 :	5 % (existente)

Se tiene que los factores son realmente controlables respecto a su valor nominal. Recuerde que la compañía no tenía como objetivo encontrar y/o eliminar la causa de la variación; la conocían y sabían que eliminarla representaba un costo muy alto. Su objetivo era hallar la mejor combinación de los niveles de los factores de control, la combinación óptima que permitiera reducir la variación en sus dimensiones. ¿Cómo llevar a cabo el experimento?.

El método propuesto por Taguchi que hace uso de los llamados *arreglos ortogonales*. Un arreglo ortogonal es un diseño de experimentos que permite hacer una evaluación matemática e independiente del efecto de cada uno de los factores. A continuación, se presenta el tipo de arreglo ortogonal utilizado en el experimento de la fabricación de azulejos:

NÚMERO	A	B	C	D	E	F	G	RESULTADOS
	1	2	3	4	5	6	7	
1	1	1	1	1	1	1	1	Y_1
2	1	1	1	2	2	2	2	Y_2
3	1	2	2	1	1	2	2	Y_3
4	1	2	2	2	2	1	1	Y_4
5	2	1	2	1	2	1	2	Y_5
6	2	1	2	2	1	2	1	Y_6
7	2	2	1	1	2	2	1	Y_7
8	2	2	1	2	1	1	2	Y_8

Tabla 8.1: Arreglo ortogonal $L_8(2^7)$, 7 factores, 2 niveles, 8 corridas experimentales.

Taguchi simplificó la derivación de este tipo de diseño proporcionando gráficas lineales a los arreglos ortogonales. Los arreglos que utiliza son una forma de diseño factorial fraccionado. Tienen como ventaja el que permiten recabar la parte de la información que se obtiene al usar un experimento factorial completo, pero con un número menor de

corridas experimentales. Taguchi utiliza los arreglos ortogonales para evaluar el efecto de los factores con respecto a la robustez.

COL. N°	$L_8(2^7)$							A	B	C	D	E	F	G	Y
	A	B	C	D	E	F	G								
	1	2	3	4	5	6	7								
1	1	1	1	1	1	1	1	5	Grueso	43	Existente	1300	0	0	16
2	1	1	1	2	2	2	2	5	Grueso	43	Nuevo	1200	4	5	17
3	1	2	2	1	1	2	2	5	Fino	53	Existente	1300	4	5	12
4	1	2	2	2	2	1	1	5	Fino	53	Nuevo	1200	0	0	6
5	2	1	2	1	2	1	2	1	Grueso	53	Existente	1200	0	5	6
6	2	1	2	2	1	2	1	1	Grueso	53	Nuevo	1300	4	0	68
7	2	2	1	1	2	2	1	1	Fino	43	Existente	1200	4	0	42
8	2	2	1	2	1	1	2	1	Fino	43	Nuevo	1300	0	5	26

Tabla 8.2: Tabla del experimento de azulejos

	N° total de defectuosos	% de defectuosos	Δ_{1-2}
A_1	51	12,75	-91
A_2	142	35,50	
B_1	107	26,75	21
B_2	86	21,50	
C_1	101	25,25	9
C_2	92	23,00	
D_1	76	19,00	-41
D_2	117	29,25	
E_1	122	30,75	51
E_2	71	17,75	
F_1	54	13,50	-85
F_2	139	34,75	
G_1	132	33,00	71
G_2	61	15,25	
Total ($\sum y$)	193	193/800 = 24,13 %	

Tabla 8.3: Tabla de respuestas del experimento de azulejos

La característica de calidad que se escogió para medir fue el *número de defectuosos*.

Y = Número de defectuosos por cada 100 azulejos.

La corrida experimental N° 1 produjo 16 piezas defectuosas, de 100. La corrida N° 4, 6 defectuosas. La corrida N° 8, 26, etc.

8.2.1. Análisis utilizando Tabla de Respuestas

El experimento determinó el cambio promedio en la respuesta para cada factor bajo diferentes condiciones. La tabla se hizo de la siguiente manera:

1. Se determinó el número total de piezas defectuosas por cada factor. Para A_1 : $16 + 17 + 12 + 6 = 51$. Para A_2 : $6 + 68 + 42 + 26 = 142$.
2. Se calculó el porcentaje de defectuosos para cada nivel de cada factor. Para A_1 : $51/4 = 12,75(51/400 * 100) \%$
3. Se compararon los niveles para cada factor. Se comparó A_1 y A_2 : 51 v/s 142 ó 12,75 % v/s 35,50 %. El nivel A_1 es mejor que el nivel A_2 .
4. Al examinar las diferencias entre los niveles ($B_1 - B_2, C_1 - C_2, \dots, G_1 - G_2$), se determinó la magnitud del efecto del cambio de cada factor. Efecto principal de A : A_1 y $A_2 = 142 - 51 = 91$. El efecto A tuvo el efecto de más impacto en la dimensión del azulejo. Le siguieron el factor F , luego el factor G , etc.
5. Se escogió el conjunto óptimo para los niveles de los factores. Se puede ver que el conjunto óptimo de niveles fue: $A_1 B_2 C_2 D_1 E_2 F_1 G_2$.

8.2.2. Estimación de la respuesta óptima

Para calcular el valor óptimo que deberíamos obtener al realizar el experimento confirmatorio, se usan algunas fórmulas que entregan un valor aproximado del mismo.

Dichas fórmulas suponen lo siguiente:

- a) La influencia de cada factor de control sobre la respuesta es lineal dentro de los límites de valores de cada factor que se está investigando.
- b) No existen interacciones entre los factores de control que se están investigando.

Las suposiciones anteriores simplifican mucho el cálculo del valor esperado de la respuesta bajo las condiciones óptimas elegidas (cada factor a su nivel óptimo). Sin embargo, esas mismas suposiciones hacen que las estimaciones sean solamente aproximaciones y que en algunos casos se obtengan estimaciones ilógicas, tales como porcentajes de piezas defectuosas negativos.

Para solucionar lo anterior, Taguchi recomienda que si se obtienen valores no lógicos, se empleen algunas expresiones más sofisticadas que pueden entregar un valor adecuado. Sin embargo, nada asegura que el valor obtenido sea lógico o una buena aproximación.

A continuación veremos las dos expresiones más comunmente usadas para calcular las estimaciones de la respuesta a los niveles óptimos seleccionados para cada uno de los

factores de control.

Método Lineal

En este método se suman los efectos de cada factor al nivel óptimo a la media general para calcular la estimación:

$$Y_{\text{estimado}} = T + (A - T) + (B - T) + \cdots + (X - T) \quad (8.1)$$

$$Y_{\text{estimado}} = A + B + \cdots + X - (N^{\circ} \text{ de factores} - 1)T \quad (8.2)$$

T = media general de la respuesta del experimento

A, B, \dots, X = media de las respuestas al nivel óptimo del factor A, B, \dots, X

Note que en la ecuación (8.1), T es la media general de la respuesta del experimento desarrollado para encontrar los niveles óptimos de cada factor y $(A - T)$, $(B - T)$, etc. corresponden a los efectos de cada factor al nivel óptimo seleccionado. Para calcular cada efecto lo que se hace es restar de la media de las respuestas de cada efecto la media general. En cambio, en la expresión 8.2, que corresponde a una forma equivalente a (8.1), pero más fácil de usar, se usan directamente la medias de la respuestas correspondientes a cada factor.

Para el ejemplo que estamos viendo, tendríamos que el siguiente cálculo de estimación de la respuesta a los niveles óptimos seleccionados (ver Tabla 8.3):

$$T = 193$$

$$A_1 = 51$$

$$B_2 = 86$$

$$C_2 = 92$$

$$D_1 = 76$$

$$E_2 = 71$$

$$F_1 = 54$$

$$G_2 = 61$$

$$Y_{\text{estimado}} = 51 + 86 + 92 + 76 + 71 + 54 + 61 - (7 - 1)193 = 491 - 1,158 = -667$$

Como vemos, el número estimado de azulejos defectuosos da un valor negativo, lo que resulta ilógico. Luego, concluimos que el método de estimación falló y deberemos emplear un método alternativo.

Método de proporciones logarítmicas

Este método es uno de los más usados cuando falla el método lineal descrito anteriormente. El método de proporciones se emplea para estimar proporciones y porcentajes. Para ello, lo primero que se debe hacer es expresar los resultados correspondientes a cada nivel óptimo de cada factor como una proporción o porcentaje. Lo mismo debe hacerse para el promedio total. En el caso de nuestro ejemplo, la tabla de respuestas 8.3 ya tiene expresado el resultado para cada nivel de cada factor como un porcentaje de azulejos defectuosos y lo mismo para el total. Una vez que se ha hecho eso, se aplica la siguiente fórmula para expresar las proporciones a porcentajes en una escala logarítmica:

$$A = -10 \log \left(\frac{1}{p_A} - 1 \right) \quad (8.3)$$

$$T = -10 \log \left(\frac{1}{p_T} - 1 \right) \quad (8.4)$$

Donde p_A es la proporción para el nivel óptimo seleccionado para el factor A y así sucesivamente para el resto de los factores. p_T corresponde a la proporción del total.

Una vez que se han expresado las proporciones en escala logarítmica, se ocupa la fórmula 8.2 para calcular la proporción estimada. Note que dicho resultado quedará expresado en escala logarítmica, por lo que deberá emplearse una transformación inversa para poder obtener la proporción en escala natural.

Para nuestro ejemplo, tendremos lo siguiente (ver Tabla 8.3):

$$P_T = 0,2413$$

$$P_{A1} = 0,1275$$

$$P_{B2} = 0,2150$$

$$P_{C2} = 0,2300$$

$$P_{D1} = 0,1900$$

$$P_{E2} = 0,1775$$

$$P_{F1} = 0,1350$$

$$P_{G2} = 0,1525$$

Luego empleando las expresiones 8.3 y 8.4 para cada factor:

$$A = -10 \log \left(\frac{1}{0,2413} - 1 \right) = -4,9751$$

$$T = -10 \log \left(\frac{1}{0,1275} - 1 \right) = -8,3526$$

y así para cada factor:

$$B = -5,6243$$

$$C = -5,2476$$

$$D = -6,2973$$

$$E = -6,6594$$

$$F = -8,0668$$

$$G = -7,4487$$

Luego aplicando la ecuación 8.2:

$$Y_{\text{estimado}} = -8,3526 - 5,6243 - 5,2476 - 6,2973 - 8,0668 - 7,4487 - (7 - 1) \cdot -4,9751$$

$$Y_{\text{estimado}} = -47,6967 + 6 \cdot 4,9751 = -17,8459$$

Como ese Y_{estimado} está expresado en escala logarítmica, debemos transformarlo a escala natural:

$$-10 \log \left(\frac{1}{Y_{\text{estimado}}} - 1 \right) = -17,8459$$

Por lo que despejando nos da:

$$Y_{\text{estimado}} = 0,0162 = 1,62 \%$$

Luego esperamos que al realizar la corrida experimental de comprobación, fijando los niveles de los factores a los óptimos seleccionados, un 1,62 % de los azulejos resulten defectuosos. Si, por ejemplo, producimos 400 azulejos bajo las condiciones óptimas, estimamos que aproximadamente 7 azulejos saldrán defectuosos.

Para revisar los resultados del experimento, se comparó la predicción del número de piezas defectuosas con los resultados de la corrida experimental la cuál se efectuó con $(A_1 B_2 C_2 D_1 E_2 F_1 G_2)$. Esta comparación fue en extremo importante, pues permitió a los ingenieros verificar la reproducibilidad de su conclusión.

8.2.3. Elección de condiciones óptimas

La combinación escogida por la fábrica de azulejos no fue $A_1 B_2 C_2 D_1 E_2 F_1 G_2$, sino $A_1 B_2 C_1 D_1 E_2 F_1 G_2$. ¿Por qué esta decisión?.

C es la cantidad de aglutinante. Este es el material más caro que lleva el azulejo. Nótese como se escogó el nivel del factor. C_1 (nuevo) = 43 %, C_2 (existente) = 53 %.

C_2 es mejor que C_1 , pero no por mucho. La estrategia consistió en **dejar que los otros niveles de los factores se hicieran cargo de la calidad, y ahorrar costos al seleccionar C_1 .**

Al seleccionar C_1 se baja el costo de manufactura, pues se gasta menos al utilizar C_1 que al utilizar C_2 . Asimismo, como la piedra caliza es el material más barato en el proceso, es menor el costo si se incrementa la cantidad de piedra caliza en lugar de aumentar la cantidad de aglutinante.

Las condiciones óptimas deben seleccionarse teniendo en cuenta la calidad y costo.

En lugar de hacer cambiar la temperatura, la compañía fue capaz de mejorar el proceso de fabricación del azulejo, sin incrementar los costos. En definitiva, logró:

- Eliminar el efecto de ruido sin quitar la causa;
- Y reducir costos mejorando la calidad.

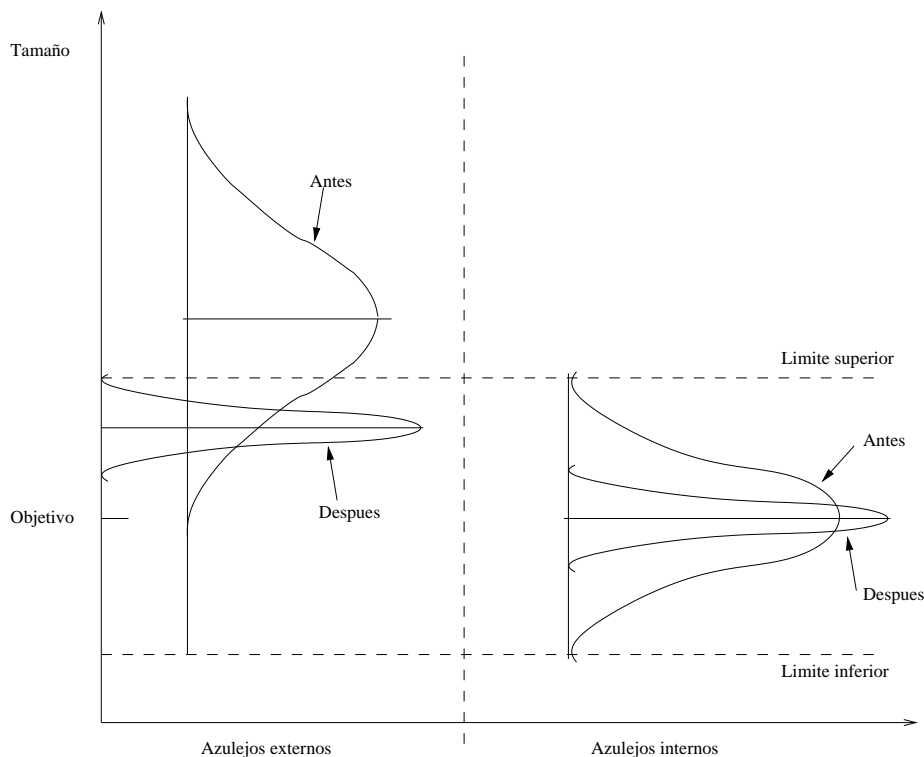


Figura 8.6: Distribución de la salida de azulejos.

EJERCICIOS.

Ejercicio 8.1

Calcule la respuesta óptima esperada para el ejemplo de los azulejos.
Compruebe que su cálculo sea consistente con los resultados presentados en este libro.

Ejercicio 8.2 Análisis de resistencia a la tracción de junta

Un productor de altoparlantes experimentaba una gran cantidad de defectos en los parlantes que estaba produciendo. La falla consistía en que una placa de metal que iba adherida al cono del parlante, se estaba soltando frecuentemente. Dicha placa de metal era pegada al cono usando un pegamento especial. Para solucionar dicho problema, se identificaron las probables causas del mismo y se definieron los posibles factores que tenían influencia sobre la resistencia a la tracción de dicha junta. Una vez efectuado lo anterior, se establecieron niveles para cada factor que podrían mejorar dicha resistencia. Para diseñar el experimento se usó un arreglo ortogonal L_8 , con dos niveles por cada factor. A continuación se muestra dicho arreglo, junto con los niveles ajustados y los resultados obtenidos:

Factores y sus niveles:

- A : tipo placa de contacto
 - A1 : galvanizada
 - A2 : recubierta con una película de bronce
 - B : grueso de la película de adhesivo empleada
 - B1 : especificación en uso
 - B2 : película más gruesa que la en uso
 - C : tratamiento de la superficie de la placa
 - C1 : pulida
 - C2 : rugosa
 - D : temperatura de curado del pegamento
 - D1 : temperatura ambiente
 - D2 : temperatura alta por convección de aire
-

Experi- mento	A	B	C	D	Respuesta (gramos)
1	1	1	1	1	2025, 2115, 2270
2	1	1	1	2	1690, 1692, 1710
3	1	2	2	1	1145, 1230, 1168
4	1	2	2	2	1495, 1280, 1350
5	2	1	2	1	2550, 2680, 2585
6	2	1	2	2	1870, 1815, 1830
7	2	2	1	1	1645, 2035, 1830
8	2	2	1	2	1670, 1100, 1380

Cada experimento se corrió tres veces y las respuestas obtenidas fueron la resistencia a la tracción de la juntura expresada en gramos. El objetivo es aumentar al máximo posible la resistencia a la tracción. La tabla entrega dichos valores para cada una de las réplicas. En este caso, Usted debe usar el promedio de las tres respuestas para cada combinación de tratamientos para responder las siguientes preguntas.

- a) Determine el efecto de cada factor y su nivel. Indique cual es el factor que tiene más influencia sobre la respuesta.
- b) Determine los niveles óptimos para cada factor, con el objeto de obtener la mayor resistencia a la tracción.
- c) Calcule cual sería el valor de la resistencia a la tracción que se obtendría si los factores son ajustados a los niveles óptimos ya determinados.

Ejercicio 8.3 Análisis de acabado de piezas

En un proceso de manufactura de piezas metálicas, el torneado de las mismas presentaba defectos en dos aspectos de las piezas producidas: acabado de la superficie de las piezas y ajuste axial.

Se identificaron los siguientes factores que podrían influir en ambas características de las piezas y sus correspondientes niveles:

Factores y sus niveles:

A : tipo de la herramienta

A1 : alto carbón

A2 : carborundo

B : velocidad de corte (rpm)

B1 : 1500

B2 : 2000

C : velocidad de alimentación del material (mm por segundo)

C1 : 2

C2 : 5

Para diseñar el experimento se empleó un arreglo ortogonal L4 como el que muestra a continuación, junto con las respuestas obtenidas:

Experi- mento	A	B	C	Respuesta (micrometros)	
				Acabado superficie	Ajuste axial
1	1	1	1	17	1,26
2	1	2	2	12	1,32
3	2	1	2	16	0,28
4	2	2	1	20	1,16

El objetivo era disminuir al máximo posible el acabado de superficie y aumentar al máximo el ajuste axial. Para cada respuesta (acabado superficie y ajuste axial):

- Determine el efecto de cada factor y su nivel. Indique cual es el factor que tiene más influencia sobre la respuesta.
- Determine los niveles óptimos para cada factor, con el objeto de obtener la mejor respuesta.
- Calcule cual sería el valor de la respuesta que se obtendría si los factores son ajustados a los niveles óptimos ya determinados. ¿Son compatibles los objetivos de disminuir el acabado de superficie y aumentar el ajuste axial?

Capítulo 9

Arreglos Ortogonales y Gráficas Lineales

Introducción.

El diseño de experimentos en el área de los procesos de manufactura apunta a disminuir la desviación de una característica de calidad. Esto se logra cuando se identifican aquellos factores que afectan la característica de calidad y cuando se cambian apropiadamente sus niveles logrando que la desviaciones disminuyan. Como por ejemplo, del punto de vista de alguna característica de calidad, la mejor formulación química o tiempo de ciclo más corto, etc., con el propósito de lograr la longitud, la amplitud o la durabilidad que se desea, etc., tomando en cuenta los costos que esto implica.

El método de diseño de experimentos propuesto por Taguchi utiliza técnicas que implican bajos costos y que son aplicables a los problemas y requerimientos de la industria de productos y/o servicios. En el diseño del producto se identifica aquella combinación de factores que proporciona el desempeño más estable y confiable al menor precio.

El método de Taguchi es una mezcla de técnicas estadísticas y métodos de ingeniería, que permite examinar simultáneamente muchos factores a un costo aceptable. Taguchi recomienda los arreglos ortogonales para construir matrices que contengan los factores de control y los factores de ruido en el diseño de experimentos. Facilita el uso de este tipo de diseño al incorporar los arreglos ortogonales y las gráficas lineales. Los arreglos ortogonales son herramientas que permiten evaluar qué tan robusto son los diseños del proceso y del producto con respecto a los factores de ruido.

Los métodos para el diseño experimental fueron desarrollados por Sir Ronald Fisher, a principios del siglo XX. El método de Taguchi para el diseño de experimentos (DoE) utiliza técnicas que implican bajos costos y que son aplicables a problemas y requerimientos de la industria moderna. El propósito que se tiene en el diseño del producto es encontrar la combinación de factores que sea la que nos proporciona el desempeño

más estable y confiable al precio de manufactura más bajo. La práctica del DoE tiene más de 80 años, sin embargo su utilización en el sector industrial es aún escasa debido a dificultades técnicas y falta de información en dicho sector.

9.1. Historia del DoE.

El siguiente diagrama resume los orígenes del Diseño Experimental:

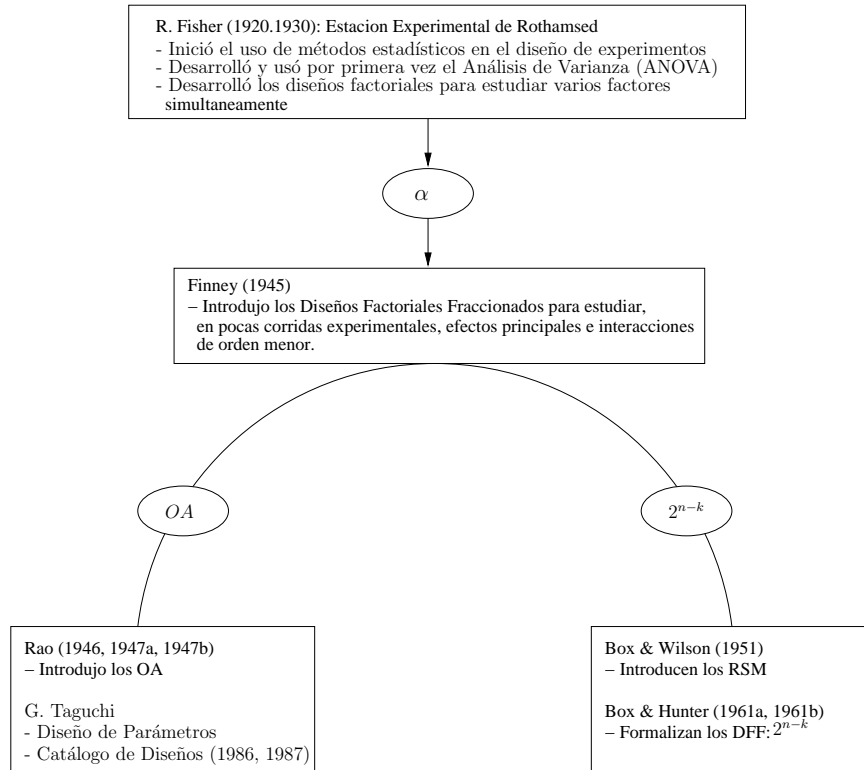


Figura 9.1: Evolución del Diseño de Experimentos

Como ya se mencionó en el Capítulo 4, el uso de planes factoriales no fraccionados involucra experimentos con un gran número de corridas experimentales. Por ejemplo, si se tienen K factores a tres niveles, el número de corridas experimentales está dado por 3^K , por ejemplo, para $K = 8$ factores se deberían realizar 6561 corridas experimentales, lo cual, naturalmente, es impracticable para la mayoría de los experimentos industriales.

Desde un comienzo surgió la idea de utilizar una fracción del diseño completo (Diseño Factorial Fraccionado (DFF)) lo cual presenta la limitante de generar una *Estructura de Alias*, esto es, las estimaciones de los efectos factoriales (principales e interacciones) obtenidas a partir de la fracción elegida, pueden estar *Confundidas* entre sí. Esto da origen al concepto de Resolución del DFF asociada a una fracción.

Como vimos en el Capítulo 4 la resolución de un diseño factorial fraccionado (DFF) es el menor orden de interacción confundida con los efectos principales.

Para los fines de la experimentación industrial, se distinguen según Kacker et. al. (1991) dos grandes clases de fracciones:

- Los Arreglos Ortogonales (OA) contruidos por Rao (1946, 1947a, 1947b) y que son ampliamente utilizados por G. Taguchi en el Diseño de Parámetros.
- Los Diseños Factoriales Fraccionados (DFF), de los cuales el más utilizado es el plan 2^{n-k} , y cuya formalización la realizaron Box&Hunter(1961a, 1961b).

La Metodología de Superficies de Respuestas (RSM), cumple un papel muy importante en el mejoramiento de la calidad desde el punto de vista industrial. La RSM es una colección de técnicas estadísticas que son útiles para la modelación y el análisis de problemas en los cuáles una o más respuestas de interés están influenciadas por varias variables, y su objetivo es hallar la relación existente entre la respuesta y las variables, y optimizar dicha respuesta.

9.2. Arreglos Ortogonales y el Diseño de Parámetros.

En esta sección se tratará el papel de los Arreglos Ortogonales en el Diseño de Parámetros.

Arreglos Ortogonales (OA):

Se define, a continuación lo que entendemos por Arreglos Ortogonales:

Un Arreglo Ortogonal (OA), de s elementos, es una matriz de orden $N \times m$, cuyas columnas poseen la cualidad de que en cada par de columnas, cada uno de los posibles pares ordenados de elementos aparecen un número fijo de veces.

Notación: $OA_N(s^m)$. Taguchi utiliza $L_N(s^m)$, como notación, pues los OA corresponden a cuadrados latinos generalizados.

- Tales arreglos se denominan: Arreglos con *Elementos* Fijos (fixed-element array).
- Los símbolos utilizados para denotar los elementos pueden ser arbitrarios, sin embargo, Taguchi los denota por $1, 2, 3, \dots, s$; mientras que en Kacker et. al. (1991) son denotados por $0, 1, 2, \dots, s - 1$.

Interpretación Experimental: Las N filas pueden ser visualizadas como un subconjunto de las posibles s^m corridas de un plan factorial completo en m factores; cada uno de los cuales posee s niveles, es decir, un $OA_N(s^m)$ corresponde a una $\frac{N}{s^m}$ fracción de

un plan factorial completo s^m .

Un diseño factorial fraccional se dice ORTOGONAL si todas las estimaciones de los efectos factoriales, especificados en el modelo lineal supuesto, no están correlacionadas. Todas las columnas pueden ser evaluadas independientemente unas de otras.

Todos los $OA_N(s^m)$ son ORTOGONALES, independiente del grado de fraccionamiento.

Entonces, un arreglo ortogonal es una matriz factorial fraccional la cual asegura comparaciones balanceadas de niveles de cualquier factor o interacciones de factores. Es un arreglo de números ordenados en filas y columnas donde cada fila representa el nivel de los factores en cada corrida, y cada columna representa un factor específico que se puede cambiar desde cada corrida.

La siguiente tabla muestra un arreglo ortogonal, $L_8(2^7)$, el cual se escribe simplemente como L_8 .

Número de experimento	Número de columna						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	1
3	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	1	1	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	1	1	0
8	1	1	0	1	0	0	1
Letra	a	b	ab	c	ac	bc	abc
Básica							
Asignación							

Tabla 9.1: Arreglo ortogonal $L_8(2^7)$

Las columnas se generan de la siguiente forma. Las columnas 1, 2 y 4 (con las letras básicas a, b, c) son las columnas fundamentales. Todas las otras columnas serán generadas a partir de las columnas fundamentales de acuerdo al criterio siguiente: número de la columna de letra básica xy es igual a la suma de la columna de letra básica x con la columna de letra básica y . Pero si la suma es igual a 2 se asigna un número 0, y si la suma es igual a 3 se asigna un 1.

Taguchi prefiere utilizar (1 2) en vez de (0 1), y su arreglo ortogonal L_8 está dado por la tabla siguiente:

Número de experimento	Número de columna						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
Letra	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>ab</i>	<i>c</i>	<i>ac</i>	<i>bc</i>	<i>abc</i>
Básica							
Asignación							

Tabla 9.2: Diseño de Taguchi $L_8(2^7)$

Y si este arreglo se expresa en la notación utilizada hasta ahora en los capítulos previos (Notación utilizada en los diseños factoriales fraccionados desarrollados en los países occidentales), queda expresado como:

Número de experimento	Número de columna						
	1	2	3	4	5	6	7
1	–	–	–	–	–	–	–
2	–	–	–	+	+	+	+
3	–	+	+	–	–	+	+
4	–	+	+	+	+	–	–
5	+	–	+	–	+	–	+
6	+	–	+	+	–	+	–
7	+	+	–	–	+	+	–
8	+	+	–	+	–	–	+
Letra	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>–ab</i>	<i>c</i>	<i>–ac</i>	<i>–bc</i>	<i>abc</i>
Básica							
Asignación							

Tabla 9.3: Diseño equivalente a un $L_8(2^7)$

9.2.1. Arreglo Producto.

Sea \underline{x} un vector de Factores Controlables y \underline{N} un vector de Factores de Ruído.

Sea $[OA_N(S^m)]_{\underline{x}}$ el arreglo elegido para los factores controlables y $[OA_N(S^m)]_{\underline{N}}$ el arreglo elegido para las variables de ruido, es decir, los arreglos Interno y Externo respectivamente, según los nombres dados por Taguchi.

El Arreglo Producto se denotará por: $[OA_N(S^m)]_{\underline{x}} \times [OA_N(S^m)]_{\underline{N}}$, consiste en correr el experimento de la fila i -ésima, del arreglo $[OA_N(S^m)]_{\underline{x}}$, para cada una de las condiciones para las variables de ruido establecidas en el arreglo $[OA_N(S^m)]_{\underline{N}}$.

Se ilustra el Arreglo Producto en el siguiente diagrama:

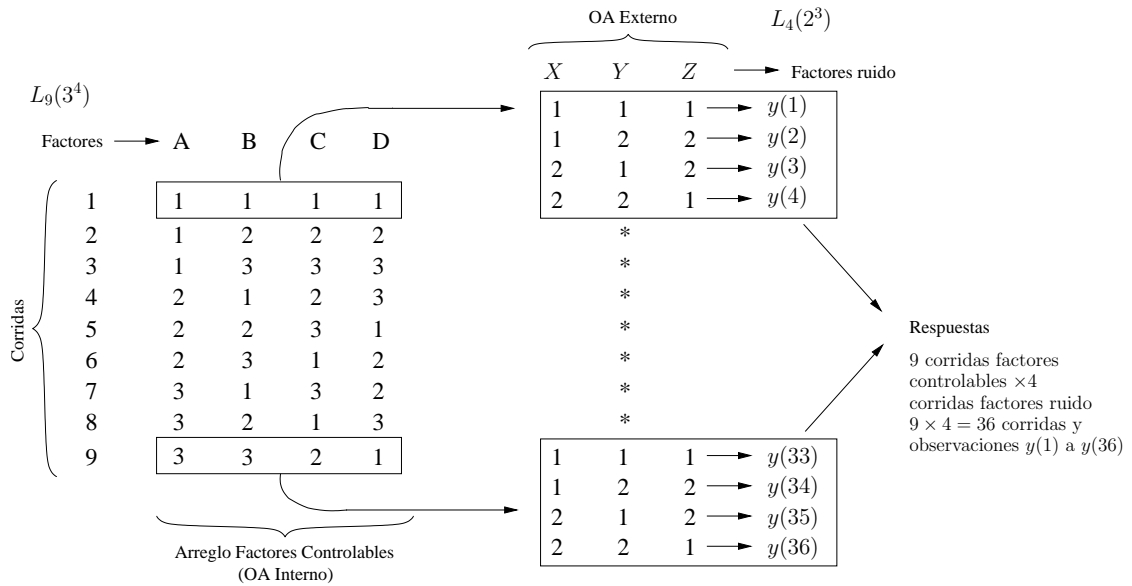


Figura 9.2: Arreglo Ortogonal Producto

Este arreglo cumple un rol muy importante en el diseño de parámetros propuesto por Taguchi lo cuál se verá en el Capítulo 10.

9.2.2. El Rol de los OA en el Diseño de Parámetros.

Según Ghosh (1990) el OA es una herramienta importante en el Diseño de Parámetros:

“Los OA son utilizados para encontrar el diseño óptimo de un producto o proceso y se basan en asignar principalmente efectos principales. La estrategia de asignar sólo efectos principales requiere la hipótesis de que todas las interacciones son despreciables. La existencia de interacciones significativas es el resultado del conocimiento deficiente de la función respuesta.”

Los OA son considerados como elementos de prueba para verificar la existencia o no-existencia de interacciones significativas, confirmando un diseño experimental pobre, producto de la pérdida de información del fenómeno.

Es esencial conducir experimentos tales que los efectos principales no estén confundidos con las interacciones. Si existen interacciones significativas la optimización es deficiente.

Phadke, M. en Nair (1992), menciona tres razones por las cuales las interacciones entre factores de control son altamente indeseables, según el papel asignado por Taguchi; estas son:

- a) Aumentan el tamaño del experimento.
- b) Dificulta la división del sistema en subsistemas independientes entre sí.
- c) Su ausencia involucra una mayor aditividad en los efectos de los factores de control sobre una característica de desempeño, lo cual es útil al momento de reproducir los resultados logrados en el experimento, en el producto o proceso final.

También Phadke, M. en Nair (1992) propone tres formas para reducir las interacciones entre los factores de control:

- a) Elegir adecuadamente la respuesta o característica de calidad bajo estudio.
- b) Elegir adecuadamente una medida de desempeño, por ejemplo, la *SNR*.
- c) Elegir adecuadamente los factores de control y sus niveles.

No obstante lo anterior, Phadke, en el mismo artículo, reconoce las dificultades para lograr estos objetivos al decir que "... no existen reglas que puedan garantizar la ausencia de interacciones, lo cual debe alcanzarse sobre un análisis caso a caso y aún, algunas veces, por ensayo y error."

Nair(1992) menciona que el rol que Taguchi asigna a los *OA* y a las interacciones entre factores de control, ha sido objeto de varios debates entre estadísticos e ingenieros. Por ejemplo, Kacker, R. en Nair(1992) al respecto menciona que: "... no es realista asumir que siempre será posible encontrar una característica de desempeño que sea aditiva para los efectos de los factores de control."

Las principales diferencias entre la aproximación de Taguchi y la aproximación del diseño experimental convencional están en su filosofía, diseño y análisis de datos. La aproximación de Taguchi es más orientada a la ingeniería que a la ciencia. La ciencia explica la naturaleza mientras que la ingeniería utiliza la naturaleza. Los métodos de Taguchi sirven para el mejoramiento de la calidad y la reducción de costos más que para descubrir relaciones causales. No busca desarrollar un modelo matemático de causa y efecto, sino contribuir a la selección de los efectos principales en orden a consolidar lo robusto del diseño de un proceso o producto.

Lo que distingue la idea de diseño de parámetro de Taguchi del diseño de experimentos convencional es la modelación simultánea de tanto la media como la variabilidad. También los arreglos ortogonales se utilizan extensivamente en diseños de parámetros para arreglos factoriales fraccionales. En el diseño convencional los arreglos ortogonales se utilizan escasamente.

Otra diferencia es que mientras los diseños estadísticos clásicos tratan los factores como fijos o aleatorios, Taguchi los tiene clasificados entre factores de control, ruido, señal, ajuste, indicativos y de bloques. Cada tipo de factor tiene una cierta importancia desde

el punto de vista de la ingeniería. Para el análisis de los datos, Taguchi propone varias técnicas analíticas nuevas, tales como: el uso de razón SNR , el método de acumulación y el método scoring para datos no estándar. Respuestas no estándar tales como datos binarios (bueno o malo), categóricos ordenados (pobre, bueno, excelente) o de Poisson (números de ítem defectuosos) ocurren frecuentemente en la práctica. El análisis clásico del diseño no presta mucha atención a aquellos problemas.

9.3. Gráficas Lineales.

Una de las contribuciones que el método de Taguchi ha hecho para el uso de arreglos ortogonales en el diseño de experimentos es el concepto de gráficas lineales. Estas representan equivalentes gráficos de las matrices triangulares que facilitan la asignación complicada de factores e interacciones a columnas de un arreglo ortogonal.

Una gráfica lineal está compuesta de puntos, líneas y números. Un punto se utiliza para indicar un efecto principal, y el segmento de línea representa una interacción entre los dos efectos principales (puntos) que se conectan. Un número asignado a un punto o a una línea indica la asignación de la columna. Un factor puede ser asignado a una línea. En la siguiente figura se muestran dos gráficas lineales estándar para un arreglo L_8 .

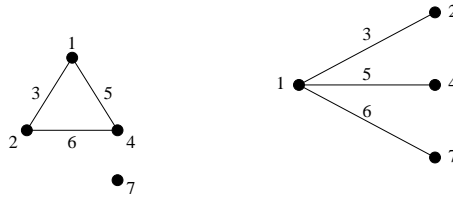


Figura 9.3: Gráficas lineales de una tabla L_8 .

En la primera gráfica lineal de la figura (izquierda), la interacción entre las columnas 1 y 2 se asigna a la columna 3, la interacción entre las columnas 1 y 4 a la columna 5, y la interacción entre las columnas 2 y 4 a la columna 6. La columna 7 es una columna independiente disponible para un efecto principal.

En resumen la gráfica lineal se utiliza como sigue:

- Los factores se asignan a los puntos.
- Se asigna una interacción entre dos factores al segmento de línea que conecta los dos puntos correspondientes.
- Si una interacción entre dos factores se considera irrelevante, entonces puede asignarse un factor al segmento de línea correspondiente.

Por ejemplo, utilizando la gráfica lineal de la izquierda, si el factor A se asigna a la columna 1 y el factor B se asigna a la columna 4, el segmento de línea 5 indica que la interacción $A \times B$ debe asignarse a la columna 5.

Ejemplo 9.1

Para asignar un experimento con 5 factores a dos niveles, A, B, C, D, F , y las interacciones $A \times B$ y $A \times C$, al arreglo L_8 , la estructura gráfica requerida se muestra a continuación:

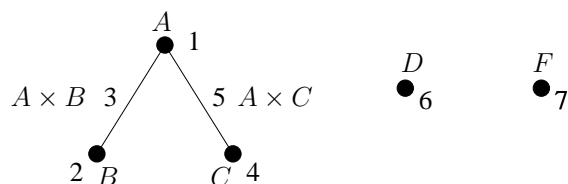


Figura 9.4: Estructura gráfica de un experimento

En este caso, fácilmente se pueden asignar los factores e interacciones a los números de las columnas de la primera gráfica lineal de un arreglo L_8 empatándolos gráficamente. Los resultados son que A se asigna a la columna 1, B a la 2, C a la 4, $A \times B$ a la 3, $A \times C$ a la 5, F a la 7 y D a la columna 6. Alternativamente, se puede asignar F a la columna 6 y D a la columna 7.

Ejemplo 9.2**Fuerza de Desactivación de una Válvula al Vacío.**

Se trata de incrementar la fuerza de desactivación de la válvula al vacío utilizada en el control automático de velocidad de un automóvil. La especificación mínima es de 30 lb. Cuando se accionan los frenos, la válvula da una distribución sesgada hacia abajo del límite inferior de especificación.

Los factores considerados en el experimento fueron: material, tiempo de reacción, temperatura del caudín, presión del soporte y método de soldadura.

¿Cuál es la combinación óptima de niveles de los factores para incrementar la fuerza de desactivación?

Factores y niveles		
Factores	Nivel 1	Nivel 2
A : Material	M-270	M-90
B : Tiempo de reacción	2,7 seg.	2,2 seg.
C : T° del caudín ambiente	410 F	500 F
D : Presión del soporte	60 lbs.	80 lbs.
E : Soldadura sónica	Si (sónico.)	No (sónico.)

Tabla 9.4: Factores y niveles de experimento fuerza desactivación válvula al vacío

Realizando un experimento factorial completo, se puede obtener información sobre todas las posibles interacciones. Por ejemplo, de un factorial completo (2^5) de 5 factores,

se puede obtener información sobre los efectos principales, interacciones dobles, interacciones triples, interacciones cuádruples e interacciones quíntuples. En la ingeniería de la calidad no es práctico estudiar todas las interacciones. Aún cuando existan, son difíciles de manejar como para aplicarlas. La intención es seleccionar lo que es de interés para los ingenieros, en términos de la optimización del diseño de la válvula al vacío. Desde el punto de vista de Taguchi, esto significa que se deben utilizar tantos efectos principales como sea posible. Suponga que, después de una tormenta de ideas, se decide que se deban investigar las interacciones $B \times C$ y $C \times D$, junto con los efectos principales A, B, C, D y E . Entonces se diseña un experimento para investigarlos utilizando un arreglo ortogonal.

ASIGNACIÓN DE FACTORES A UN ARREGLO ORTOGONAL: Se quiere asignar los efectos principales e interacciones a un arreglo ortogonal. Para llevar a cabo lo anterior, se procede de la siguiente forma:

Paso 1: Se selecciona el arreglo ortogonal apropiado.

- Se cuenta el número total de grados de libertad que se necesitan. Con los factores A, B, C, D, E a dos niveles y las interacciones $B \times C$ y $C \times D$, g.l. = $5 + 2 = 7$.
- Un arreglo ortogonal de dos niveles de m columnas tiene m grados de libertad. Se selecciona un arreglo que cubra su total.

L_8	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
	A	B	$A \times B$	C	$A \times C$	D	E

Tabla 9.5: Arreglo Ortogonal L_8 para el Ejemplo 9.2

Paso 2: Se dibuja la gráfica lineal requerida.

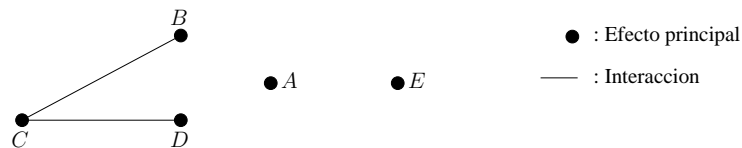


Figura 9.5: Gráfica lineal para el Ejemplo 9.2

Paso 3: Se selecciona la gráfica lineal estándar apropiada. Puede haber varias opciones. Hay que decidir por una de ellas.

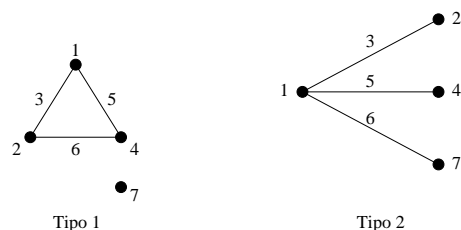


Figura 9.6: Gráficas lineales estándar de una tabla L_8 .

Paso 4: Se ajusta la gráfica lineal requerida a una de las gráficas lineales estándar del arreglo ortogonal que se seleccionó.

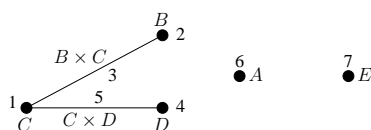


Figura 9.7: Gráfica lineal L_8 ajustada para el Ejemplo 9.2

Paso 5: Se asigna cada efecto principal y cada interacción a la columna apropiada.

	C	B	$B \times C$	D	$C \times D$	A	E
L_8	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

Tabla 9.6: $OA L_8$ ajustado para el Ejemplo 9.2

EJERCICIOS.

Nota: Para realizar los ejercicios se debe utilizar las gráficas lineales que se muestran a continuación.

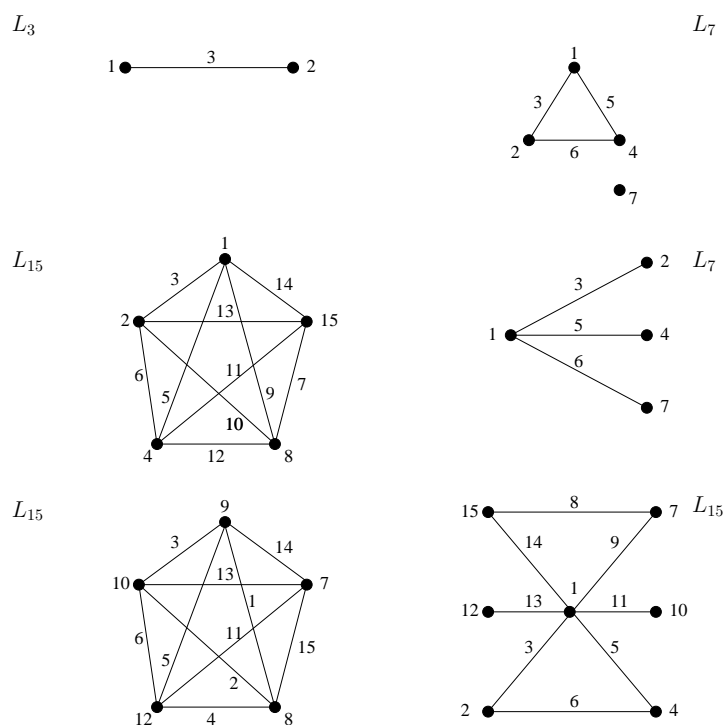


Figura 9.8: Algunas gráficas lineales para Arreglos Ortogonales de 2 niveles

Ejercicio 9.1

Asigne los siguientes experimentos:

- a) Factores a dos niveles: $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$
Interacciones: $A \times B, A \times C, B \times C, B \times G, G \times H$
- b) Factores a dos niveles: $A, B, C, D, E, F, G, H, I$
Interacciones: $A \times B, A \times C, A \times D, A \times E, E \times F$
- c) Factores a dos niveles: A, B, C, D, E, F, G, H
Interacciones: $A \times B, A \times C, A \times E, B \times C, G \times H$

Ejercicio 9.2

Asigne los siguientes experimentos:

a) Factores a dos niveles: A, B, C, D, E, F, G, H

Interacciones: $A \times B, A \times C, A \times D, A \times E, B \times C, C \times D, E \times B$

b) Factores a dos niveles: $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ Interacciones: $A \times B, E \times F, E \times G, G \times H$

c) Factores a dos niveles: A, B, C, D, E

Interacciones: $A \times D, B \times E$

Capítulo 10

Diseño de Parámetros

Introducción

El diseño de parámetros es un método de ingeniería usado en el mejoramiento de la productividad durante la etapa de investigación y desarrollo, tal que productos de alta calidad pueden ser producidos rápidamente y a bajo costo. Es la esencia del diseño robusto y tal vez la mayor contribución a la ingeniería de la calidad. Puede ser de utilidad para construir calidad tanto en nuevos productos / procesos o como para mejorar la calidad de productos / procesos ya existentes.

El diseño de parámetros tiene las siguientes características. Primero, sean los productos o procesos referidos como un sistema. Entonces Taguchi clasifica las entradas a un sistema (factores los cuales afectan las características de calidad) entre dos grupos:

- a) Parámetros de control o factores de control \underline{x} : parámetros / factores que pueden ser controlados y manipulados fácilmente, y
- b) Variables de ruido o factores de ruido \underline{N} : variables / factores que son difíciles o costosos de controlar, o sencillamente incontrolables. Variaciones en \underline{N} durante la manufactura o operación causan variación en la medida de desempeño del sistema para alguna característica de calidad y .

La idea básica en el diseño de parámetros es identificar, a través de la explotación de las interacciones entre los parámetros de control y variables de ruido, apropiados “settings” (valores a ajustar) de parámetros de control para los cuáles el desempeño del sistema es robusto a variaciones incontrolables en \underline{N} . Por esta razón, la aproximación se llama *diseño de parámetro*. El término diseño se refiere aquí al diseño de un sistema más que al diseño estadístico de experimentos. Entonces la meta es hacer el sistema *robusto* frente a variaciones en las variables de ruido, es por eso que la aproximación también se denomina *diseño robusto*.

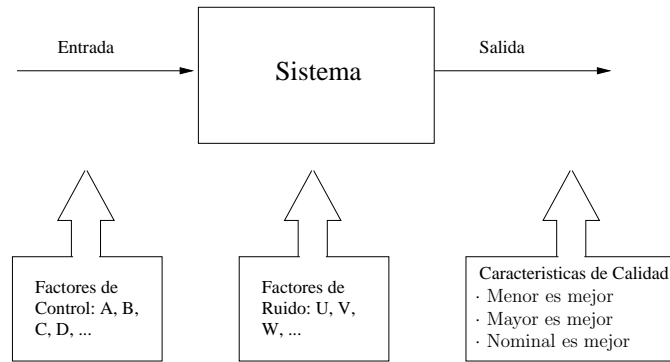


Figura 10.1: Diagrama de relación entre factor y características.

Segundo, el diseño de parámetros generalmente utiliza dos arreglos ortogonales: El OA de los parámetros de control \underline{x} se varían de acuerdo a un arreglo ortogonal (arreglo de “control interno (inner).”) Para cada setting de los parámetros de control, se evalúan los efectos de las variables de ruido, variándolas sistemáticamente utilizando arreglos de “ruido” o “externo (outer)”. La siguiente tabla muestra un experimento con un arreglo interno (L_8) para los factores de control, y un arreglo externo (L_4) para los factores de ruido:

Tipo de arreglo:		Arreglo Interno (L_8)							Arreglo externo (L_4)				
Asignación de factores de control y número de columna									Fila de datos				Razón SNR
									Experimento N ^o				Asignar Factores de ruido
									1	2	3	4	
N ^o	A	B	C	D	E	e	e	1	1	2	2	U	
Experimento	1	2	3	4	5	6	7	1	2	1	2	V	
								1	2	2	1	W	
1	1	1	1	1	1	1	1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	SNR_1	
2	1	1	1	2	2	2	2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	SNR_2	
3	1	2	2	1	1	2	2	...				SNR_3	
4	1	2	2	2	2	1	1	...					
5	2	1	2	1	2	1	2	...					
6	2	1	2	2	1	2	1	...					
7	2	2	1	1	2	2	1	...					
8	2	2	1	2	1	1	2	Y_{81}	Y_{82}	Y_{83}	Y_{84}	SNR_8	

Tabla 10.1: OA interno y externo para un diseño robusto

Un diseño con esta estructura se llama *diseño directo de productos*, donde dos arreglos ortogonales separados se utilizan y se registran sus observaciones para todas las combinaciones de estos dos arreglos. En este caso se tiene $8 \times 4 = 32$ observaciones en el diseño de parámetros. Por ejemplo, Y_{22} se observa a los niveles $A_1 B_1 C_1 D_2 E_2$ y $U_1 V_2 W_2$.

Taguchi clasifica también los problemas de diseño de parámetros en diferentes categorías y define una medida de desempeño, la cual denomina razón “señal-ruido” (SNR),

para cada categoría. Por ejemplo, cuando el sistema se fija en un *target* ideal, utiliza la razón SNR $10 \log_{10} (E(y)^2 / \text{Var}(y))$ como la medida apropiada de variabilidad. La razón SNR estimada se analiza utilizando la ANOVA para identificar los settings de los parámetros de control que producirán el desempeño robusto. Los parámetros de control que no afectan la razón SNR se utilizan para ajustar el desempeño promedio sobre el *target*. Tales parámetros se llaman *factores de ajuste*, y estos se pueden conocer a priori o ser identificados a través del análisis de los datos.

Tercero, para observaciones repetidas, $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$, en cada fila i (i -ésima condición experimental de los factores de control), se calcula la razón SNR . La razón señal ruido es una medida la cual resume varias repeticiones en un solo valor, y la cual refleja la respuesta promedio y la cantidad de variación presente al mismo tiempo. Esta razón para n observaciones se calcula de la siguiente forma:

1. Característica tipo menor es mejor

$$SNR_i = -10 \log \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 \right)$$

2. Característica tipo mayor es mejor

$$SNR_i = -10 \log \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{y_{ij}^2} \right)$$

3. Característica tipo nominal es mejor

$$SNR_i = 10 \log \left(\frac{1}{n} (S_{m(i)} - V_i) / V_i \right)$$

o aproximadamente

$$SNR_i = 10 \log \left(\frac{1}{n} (S_{m(i)}) / V_i \right) = 10 \log \left(\frac{(\bar{y}_i)^2}{V_i} \right)$$

donde

$$V_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \text{varianza muestral para la } i\text{-ésima fila}$$

$$S_{m(i)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n y_{ij} \right)^2 = n (\bar{y}_i)^2 = \text{término de corrección para la } i\text{-ésima fila}$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij} = \text{media muestral para la } i\text{-ésima fila}$$

10.1. Etapas del Diseño de Parámetros.

Se necesitan varias etapas en el diseño de parámetros y análisis de datos, diferenciándose de acuerdo al tipo de característica de calidad:

1. Características del tipo menor es mejor y mayor es mejor:
 - a) Construya el diagrama de relación factor-característica para un experimento dado.
 - b) Seleccione los *OA* apropiados para los arreglos interno y externo, y asigne factores de control y ruido a los arreglos.
 - c) Conduzca el experimento, y calcule la razón *SNR* para cada fila del arreglo interno.
 - d) Encuentre los factores significativos los cuales afectan la razón *SNR* a través de la ANOVA. Encuentre las condiciones óptimas para factores de control significativos.
 - e) Para factores de control no significativos, encuentre condición óptima basado en otras consideraciones tales como economía, operabilidad y facilidad.
 - f) Estime la respuesta media para la condición óptima total, y realice una prueba confirmatoria para la condición óptima para así chequear que la condición óptima obtenida produce las respuestas deseadas.
 2. Características del tipo nominal es mejor:
 - a) Igual que en 1.
 - b) Igual que en 1.
 - c) Conduzca el experimento, y calcule la razón *SNR* y la sensibilidad para cada fila del arreglo interno.
 - d) Encuentre los factores de control significativos los cuáles afectan la razón *SNR* por medio de la ANOVA. Encuentre también factores de control los cuáles afectan la sensibilidad a través de la ANOVA. Clasifique los factores de control en las siguientes tres categorías.
 - I) Factor de control de dispersión: factores significativos para la razón señal ruido.
 - II) Factor de ajuste de la media: factores significativos para la sensibilidad.
 - III) Factores no significativos: otros factores de control.Si un factor es factor de dispersión y de ajuste de la media, se clasifica como factor de control de dispersión.
 - e) Encuentre las condiciones óptimas como sigue.
 - I) Factor de control de dispersión: nivel el cuál maximiza la razón *SNR*.
 - II) Factores de ajuste de la media: el nivel da la respuesta estimada más cercana al valor de respuesta *target*.
-

III) Factores no significativos: Los niveles se eligen basados en otras consideraciones tales como economía, operabilidad y simplicidad.

f) Igual que en 1.

Por lo tanto, se deduce de los pasos d) y e), que la menor variación es la primera prioridad para hallar las condiciones óptimas. La segunda prioridad es la respuesta media. La condición que tiene menor variación contra factores de ruido es la propiedad de robustez deseada.

10.1.1. Estrategia para Seleccionar los Factores de Ruido.

Un experimento que involucra un gran número de factores de ruido es demasiado costoso. Seleccionando cuidadosamente los factores de ruido a considerar, el tamaño del experimento estará dentro de límites manejables.

ESTRATEGIA: Para evitar un experimento demasiado grande, se pueden reunir varios ruidos dentro de 1, 2 ó 3 factores de ruido. Si no se está seguro de como reunirlos, se colocan los ruidos dentro de un arreglo ortogonal y se seleccionan entonces aquellos cuyo efecto sea mayor en el rendimiento del proceso.

Seleccione los ruidos más importantes. La experiencia ha demostrado que si un diseño es robusto contra un ruido importante, es muy probable que lo sea incluso contra otros factores de ruido.

10.2. Caso Característica del Tipo Menor es Mejor.

Ejemplo 10.1

El siguiente ejemplo ilustra un experimento de diseño de parámetros del tipo menor es mejor.

FACTORES DE CONTROL:

- A: Tiempo del ciclo – 2 niveles
 - B: Temperatura del molde – 2 niveles
 - C: Grosor de la cavidad – 2 niveles
 - D: Presión de sostenimiento – 2 niveles
 - E: Velocidad de la hélice – 2 niveles
 - F: Tiempo de sostenimiento – 2 niveles
 - G: Tamaño de la entrada – 2 niveles
-

FACTORES DE RUIDO:

H: % Repulverización – 2 niveles

I: Contenido de humedad – 2 niveles

J: Temperatura del ambiente – 2 niveles

RESPUESTA: % de encogimiento.

Se empleará un arreglo L_8 para el arreglo interior y un L_4 para el exterior.

Tipo de arreglo:		Arreglo Interno (L_8)							Arreglo externo (L_4)				
Asignación de factores de control y número de columna									Fila de datos				Razón SNR
									Experimento N ^o				Asignar Factores de ruido
									1	2	3	4	
N ^o	A	B	C	D	E	F	G	1	2	2	1	J	
Experimento	1	2	3	4	5	6	7	1	2	1	2	I	
								1	1	2	2	H	
1	1	1	1	1	1	1	1	2,2	2,1	2,3	2,3	-6,95	
2	1	1	1	2	2	2	2	0,3	2,5	2,7	0,3	-5,35	
3	1	2	2	1	1	2	2	0,5	3,1	0,4	2,8	-6,49	
4	1	2	2	2	2	1	1	2,0	1,9	1,8	2,0	-5,70	
5	2	1	2	1	2	1	2	3,0	3,1	3,0	3,0	-9,62	
6	2	1	2	2	1	2	1	2,1	4,2	1,0	3,1	-9,12	
7	2	2	1	1	2	2	1	4,0	1,9	4,6	2,2	-10,57	
8	2	2	1	2	1	1	2	2,0	1,9	1,9	1,8	-5,58	

Tabla 10.2: $OA L_8$ para diseño robusto, Ejemplo 10.1

1. Calcule las relaciones SNR .
2. Complete las tabla de respuesta y las gráficas factoriales.
3. Determine la mejor combinación de niveles.

Una vez calculadas las razones SNR , se elabora la tabla de respuestas y luego las gráficas para elegir la mejor combinación.

Factor Nivel	A	B	C	D	E	F	G
1	-6,12	-7,76	-7,11	-8,4	-7,03	-6,96	-8,08
2	-8,72	-7,09	-7,73	-6,43	-7,81	-7,88	-6,76

Tabla 10.3: Respuestas \overline{SNR} para Ejemplo 10.1

donde $\overline{SNR} = \sum SNR/4$ (Señal ruido promedio en el i -ésimo nivel, $i = 1, 2$)

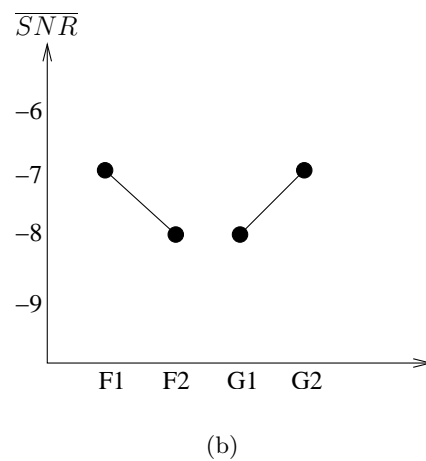
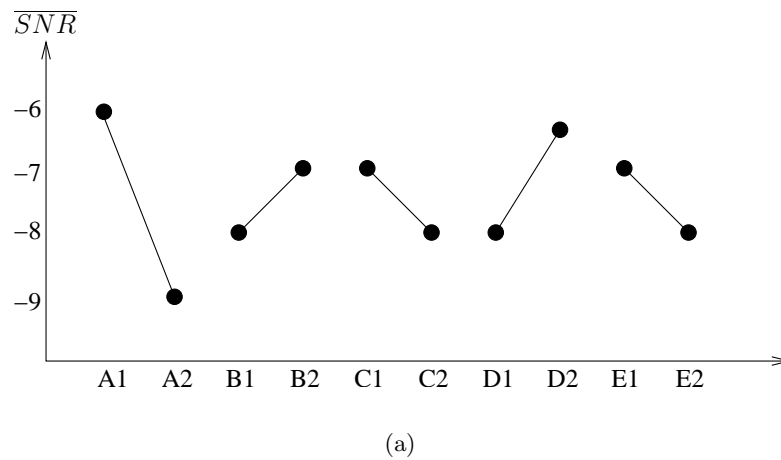


Figura 10.2: Gráficas \overline{SNR} para Ejemplo 10.1

La mejor combinación es: $A_1 B_2 C_1 D_2 E_1 F_1 G_2$

Tarea: Comprobar los resultados utilizando la tabla ANOVA.

10.3. Caso Característica del Tipo Mayor es Mejor.

Ejemplo 10.2

El siguiente ejemplo ilustra un experimento de diseño de parámetros del tipo mayor es mejor.

FACTORES DE CONTROL:	NIVEL 1	NIVEL 2
A: Peso molecular	Bajo	Alto
B: Tipo de aluminio	I	II
C: Material de limpieza	Existente	Nuevo
D: Porcentaje de catalizador	Bajo	Alto
E: Presión de molido	Baja	Alta
F: Tiempo de reposo	Bajo	Alto
G: Temperatura de reposo	Baja	Alta
H: Tiempo luego del reposo	Bajo	Alto
I: Temperatura luego del reposo	Baja	Alta

FACTORES DE RUIDO:

M: Tipo de superficie	Rugosa	Lisa
N: Proveedor del plástico	I	II
O: Temperatura inicial del metal	Baja	Alta

RESPUESTA: Oposición al desgarre del plástico.

Se empleará un arreglo L_{12} para el arreglo interior y un L_4 para el exterior.

Tipo de arreglo:		Arreglo Interno (L_{12})											Arreglo externo (L_4)				
		Asignación de factores de control y número de columna											Fila de datos				Razón SNR
													Experimento N°				Asignar Factores de ruido
													1	2	3	4	
N°		A	B	C	D	E	F	G	H	I	e	e	1	2	2	1	O
Experi-	mento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	1	2	N
													1	1	2	2	M
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	32,5	45,0	35,0	50,0	31,77685
2		1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	62,5	67,5	55,0	80,0	36,18746
3		1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	20,0	30,0	30,0	37,5	28,66994
4		1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2	20,0	27,5	27,5	50,0	28,58187
5		1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1	42,5	55,0	32,5	60,0	32,78038
6		1	2	2	2	2	2	2	1	2	1	1	22,5	45,0	47,5	50,0	30,81924
7		2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	60,0	80,0	45,0	62,5	35,28762
8		2	1	2	1	1	2	2	1	1	1	2	45,0	47,5	27,5	55,0	31,88771
9		2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1	47,5	62,5	75,0	80,0	35,87858
10		2	2	2	1	2	1	1	2	2	1	2	55,0	62,5	55,0	47,5	34,68403
11		2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2	60,0	45,0	40,0	42,5	33,11972
12		2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1	45,0	35,0	20,0	30,0	29,09983

Tabla 10.4: OA interno y externo para Ejemplo 10.2

1. Calcule las relaciones SNR .
2. Complete la tabla de respuesta y las gráficas factoriales.

3. Determine la mejor combinación de niveles.

Una vez calculadas las razones SNR , se elabora la tabla de respuestas y luego las gráficas para elegir la mejor combinación.

Factor Nivel	A	B	C	D	E
1	31,46929	33,28136	32,44072	32,73605	33,64582
2	33,32625	31,51418	32,35482	32,05949	31,14972

	F	G	H	I	
1	31,35002	32,81825	30,89555	32,23903	
2	33,44552	31,97729	33,89999	32,55651	

Tabla 10.5: Tabla de respuesta \overline{SNR} para Ejemplo 10.2

donde $\overline{SNR} = \sum SNR/4$ (Señal ruido promedio en el i -ésimo nivel, $i = 1, 2$)

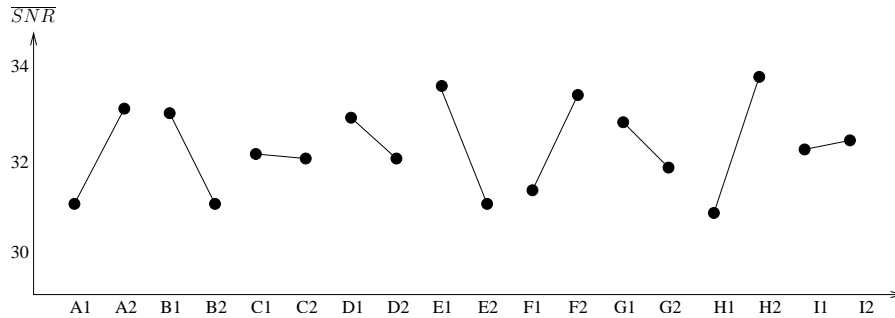


Figura 10.3: Gráfica \overline{SNR} para Ejemplo 10.2

La condición óptima es: $A2 B1 C1 D1 E1 F2 G1 H2 I2$.

Compruebe con la Tabla ANOVA.

10.4. Caso Característica del Tipo Nominal es Mejor.

Observaciones.

1. Cuantitativamente, el método de Taguchi relaciona su Función de Pérdida con dos *Métricas Estadísticas*, esto es, la Media y la Variabilidad. Con este fin emplea el Diseño de Parámetros, el cual está basado en el Diseño de Experimentos.
2. Las técnicas estadísticas utilizadas por esta metodología (las cuales, en su mayoría, eran ampliamente conocidas) quedan subordinadas a los aspectos ingenieriles del diseño más que a sus cualidades de optimalidad, cuando se las mira estrictamente desde el punto de vista estadístico. Es decir, las razones dadas para justificar el uso de una determinada técnica estadística son de carácter ingenieril más que estadístico.

3. Lo anterior explica el primer esfuerzo realizado por la comunidad estadística occidental (norteamericana e inglesa, principalmente) que consistió en explicar el Diseño de Parámetros utilizando un lenguaje estadístico.
4. Al efectuarse el punto (3) queda de manifiesto que muchos de los procedimientos estadísticos utilizados en el diseño de parámetros adolecen de graves deficiencias desde el punto de vista estadístico, lo cual generó un conjunto de Procedimientos Alternativos con mejores cualidades estadísticas.
5. Lamentablemente cada uno de los grupos que ha generado algún Procedimiento Alternativo ha puesto demasiado énfasis en mostrar su procedimiento como *la* alternativa válida frente a los métodos utilizados por Taguchi. En Nair (1992) se realizó una discusión en la que se presentaron las distintas corrientes y aristas generadas por el método de Taguchi integrándose los aspectos metodológicos, técnicos y prácticos.
6. Se presentan, en lo que sigue, los elementos constituyentes del Diseño de Parámetros junto con la solución dada por Taguchi y los Procedimientos Alternativos que han sido propuestos.

En todo lo que resta se restringirá el análisis a Características de Calidad Cuantificables del tipo Nominal es Mejor.

10.4.1. Diagrama en Bloques (para un problema simple de Diseño de Parámetros, para el caso Nominal es Mejor).

Dado un “setting” (valores a ajustar) particular de los Parámetros de Diseño (\underline{x}); las Variables de Ruido (\underline{N}) producen una Respuesta (Y) la cual está determinada por la Función de Transferencia ($f(\underline{N}, \underline{x})$). Se asume que el ruido es aleatorio, por lo que la respuesta también lo será. Se incurrirá en una pérdida (L) si la respuesta (Y) no es igual al valor nominal (τ).

Lo anterior queda representado en el siguiente diagrama en bloques:

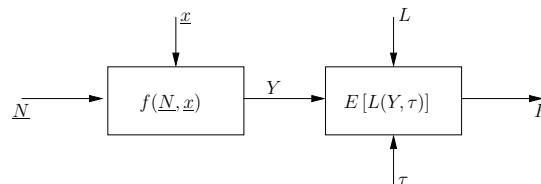


Figura 10.4: Diagrama en bloques caso Nominal es Mejor

\underline{x}	: Vector de Factores Controlables (o Parámetros de Diseño) Son de fácil control.
\underline{N}	: Vector de Factores no Controlables (o Variables de Ruido) Su control es difícil y/o caro.
$f(\underline{N}, \underline{x})$: Función de Transferencia.
L	: Función de Pérdida.
τ	: Valor Nominal (Target)
R	: Pérdida Esperada.
Y	: Respuesta (caracteriza el desempeño del sistema)

10.4.2. Objetivo del Diseño de Parámetros.

Determinar: $\underline{x} = \underline{x}^*$ tal que: $\min_{\underline{x}} M(\underline{x}^*)$, en donde:

$$MSE(\underline{x}) = M(\underline{x}) = \sigma_Y^2(\underline{x}) + [\mu_Y(\underline{x}) - \tau]^2, \text{ ya que:}$$

$$R = E[L(Y, \tau)] = E[(Y - \tau)^2] = \text{var}(Y) + [E(Y) - \tau]^2$$

$$\text{con: } E(Y) = \mu_Y(\underline{x}), \text{var}(Y) = \sigma_Y^2(\underline{x})$$

Como el análisis se centra en los Parámetros de Control (\underline{x}) esta metodología se denomina: Diseño de Parámetros. La aleatoriedad de Y está generada por el ruido, por lo que minimizar $MSE(\underline{x})$ equivale, en términos ingenieriles, a reducir la sensibilidad del sistema a la presencia de fuentes incontrolables de variabilidad, esto es, al ruido. Dicho en otros términos, se intenta “robustecer” el sistema (producto o proceso) con respecto del ruido. Esto motiva el nombre alternativo: **Diseño Robusto de Parámetros** o **Diseño Robusto**.

10.4.3. Postulado Fundamental.

El conjunto formado por los Parámetros de Diseño (los elementos de \underline{x}): $\{x_1, \dots, x_q\}$ admite la partición:

$$\{x_1, \dots, x_q\} = \{x_{1s}, \dots, x_{qs}\} \cup \{x_{1d}, \dots, x_{qd}\} \cup \{x_{1e}, \dots, x_{qe}\}, \text{ tal que :}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \mu_Y &= \mu_Y(\underline{x}_s) \\ \text{b) } \sigma_Y^2 &= P(\underline{x}_s, \underline{x}_D) \phi(\underline{x}_D) \end{aligned} \quad (10.1)$$

En donde: $\underline{x}_S = (x_{1s}, \dots, x_{qs})$, $\underline{x}_D = (x_{1d}, \dots, x_{qd})$.

OBSERVACIONES:

- a) Los elementos del conjunto $\{x_{1s}, \dots, x_{qs}\}$ se denominan Factores (o Parámetros) de Señal (o Ajuste.)

Constituyen los Parámetros de Señal un subconjunto de los Parámetros de Diseño, que está formado por aquellos factores que afectan significativamente, y de manera única, el valor medio de la Característica de Calidad o Respuesta bajo estudio.

- b) Los elementos del conjunto $\{x_{1d}, \dots, x_{qd}\}$ se denominan Factores o Parámetros de Dispersión (o de Control). Constituyen los Parámetros de Dispersión un subconjunto de los Parámetros de Diseño, que está formado por aquellos factores que satisfacen (10.1)

10.4.4. Razón Señal-Ruido y Procedimientos Alternativos.

La aproximación de Taguchi al diseño experimental utiliza la llamada razón señal-ruido (SNR). La idea general es utilizar una razón SNR que sea apropiada para una situación particular. Esta razón SNR , la cuál ha de ser maximizada, se presume que es un estimador lógico de alguna medida de desempeño.

Por ejemplo, si se utiliza un valor *target*, el error cuadrático podría ser una función de pérdida lógica, y la pérdida esperada será igual a la varianza más $[E(Y) - \tau]^2$. Si el promedio muestral y la varianza muestral son independientes, los factores que afectarán el valor de una característica de calidad en particular podrían ser separados en dos categorías: aquellos que afectan la varianza y aquellos que afectan la media, pero que podrían tener un pequeño, sino ningún, efecto sobre la varianza.

El objetivo entonces sería variar los niveles del primer conjunto de factores (aquellos que se asumieron que afectaban la varianza) en un diseño experimental con el propósito de determinar los niveles de aquellos factores que minimizarán la variabilidad de los valores de una característica de calidad en particular. En general, el objetivo es utilizar los resultados de este experimento para diseñar productos en los cuáles la calidad del producto sea relativamente insensible al ruido.

Una vez que se han determinado los niveles del primer conjunto de factores, el segundo conjunto de factores (llamados parámetros de ajuste) son utilizados para conducir la característica de calidad a su valor objetivo utilizando los niveles apropiados de los factores.

Entonces, es un procedimiento de dos etapas. Para la primera etapa, se podría utilizar alguna función lógica de σ^2 (o tal vez el mismo σ^2) como medida de desempeño.

10.4.5. Medida de Desempeño Independiente de los Parámetros de Ajuste PerMIA (Performance Measure Independent of Adjustment)

León, Shoemaker y Kackar (1987) propusieron una alternativa a la utilización de la razón SNR : una medida de desempeño independiente de los parámetros de ajuste PerMIA. La aproximación general cuando se utiliza un PerMIA es esencialmente la misma que cuando se utiliza una razón SNR . Esto es, un procedimiento de dos etapas donde los niveles apropiados de los factores de no-ajuste se determinan usando un PerMIA (más que una razón SNR) como la variable respuesta. La segunda etapa se establece

utilizando los niveles apropiados de los factores de ajuste para conducir la característica de calidad hacia su valor objetivo, lo mismo que se hace con la aproximación de Taguchi.

Una función ϕ que satisfaga (10.1) se dirá una Medida de Desempeño Independiente de los Parámetros de Ajuste. En la notación de León et.al (1987) se dirá una PerMIA.

- En el método de diseño robusto, Taguchi se basa en la evidencia empírica obtenida por el investigador, y postula el uso del coeficiente de variación : $\gamma = \frac{\sigma}{\mu}$ como PerMIA a través de la expresión:

$$SNR_T = 10 \log \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) = -10 \log(\gamma^2)$$

La *SNR Razón Señal / Ruido*, se deriva del concepto análogo al utilizado en la Ingeniería Electrónica:

Es decir,

$$\gamma(\underline{x}_D) = \frac{\sigma_Y(\underline{x}_S, \underline{x}_D)}{\mu_Y(\underline{x}_S)}, \quad \text{lo cual equivale a:}$$

$$\sigma_Y^2(\underline{x}_S, \underline{x}_D) = \mu_Y^2(\underline{x}_S) \gamma^2(\underline{x}_D)$$

lo que involucra que implícitamente se da una estructura particular para la varianza de la respuesta bajo estudio, es decir,

$$\text{var}(Y) = [\mu]^2 \cdot \phi \quad (10.2)$$

en donde ϕ es constante con respecto a los Parámetros de Ajuste.

10.4.6. Procedimiento de Optimización a Dos Etapas de Taguchi.

Para cumplir con el objetivo del Diseño de Parámetros, Taguchi propuso el siguiente procedimiento:

Etapas 1: Determinar \underline{x}_D^* tal que : $\max_{\underline{x}_D} SNR_T(\underline{x}_D) = SNR_T(\underline{x}_D^*)$

Etapas 2: Determinar \underline{x}_S^* tal que : $|\mu_Y(\underline{x}) - \tau|$ sea mínimo.

Lo anterior equivale a minimizar la varianza, en primer lugar, para luego acercar el Valor Medio de la Respuesta a su Valor Nominal.

OBSERVACIÓN:

Inconveniente Fundamental: El método de Taguchi no relaciona formalmente ambos procedimientos de optimización, es decir, no explica formalmente el por qué su Procedimiento a Dos Etapas equivale a minimizar $M(\underline{x})$.

Proposición 10.1. (León et.al.(1987)) *El Procedimiento de Optimización a Dos Etapas de Taguchi, equivale a minimizar $M(\underline{x})$, ssi*

- I. *La Función de Transferencia $f(\underline{N}, \underline{x})$ sigue un modelo multiplicativo, es decir,*

$$Y(\underline{x}_S, \underline{x}_D) = \mu(\underline{x}_S, \underline{x}_D) \varepsilon(\underline{N}, \underline{x}_D)$$

- II. *La Función de Pérdida es cuadrática, es decir, $L = (Y - \tau)^2$*

Demostración En efecto: basta considerar

$$\gamma^2 = \frac{\mu_Y^2(\underline{x}_S, \underline{x}_D) \text{var } \varepsilon(\underline{N}, \underline{x}_D)}{\mu_Y^2(\underline{x}_S, \underline{x}_D)} = \text{var } \varepsilon(\underline{N}, \underline{x}_D) = \sigma_\varepsilon^2(\underline{x}_D)$$

10.4.7. Observaciones.

- a) Asumiendo un Modelo Aditivo: $Y(\underline{x}) = \mu(\underline{x}_D, \underline{x}_S) + \varepsilon(\underline{N}, \underline{x}_D)$, se tiene que $\text{var}(Y(\underline{x})) = \text{var } \varepsilon(\underline{N}, \underline{x}_D) = \sigma_\varepsilon^2(\underline{x}_D)$, es una PerMIA, mientras que: SNR_T no es una PerMIA.

Es decir, que bajo Aditividad; optimizar $M(\underline{x})$ se reduce a minimizar directamente la varianza de la respuesta.

Además el Modelo Aditivo involucra:

$$\sigma_Y^2 = \mu^0 \cdot \phi \quad (10.3)$$

como estructura para la varianza de la respuesta original, en donde no depende de los Factores de Señal.

- b) Si se tiene:

$Y(\underline{x}) = \mu(\underline{x}_D, \underline{x}_S) \varepsilon(\underline{N}, \underline{x}_D)$, y si es posible tomar \ln , se tendrá:

$\ln Y(\underline{x}) = \ln \mu(\underline{x}_D, \underline{x}_S) + \ln \varepsilon(\underline{N}, \underline{x}_D)$, es decir,

$Y^*(\underline{x}) = \mu^*(\underline{x}_D, \underline{x}_S) + \varepsilon^*(\underline{N}, \underline{x}_D)$. Para lo cual:

$\text{var}(Y^*(\underline{x})) = \text{var}(\ln Y(\underline{x}_D)) = \sigma_{\ln Y}^2(\underline{x}_D)$, es una PerMIA.

Conclusión: La Metodología de SNR y/o PerMIA deja los siguientes problemas abiertos:

- ¿Cómo distinguir entre un Modelo Aditivo y uno Multiplicativo?.
- ¿Cómo efectuar la partición de los Parámetros de Diseño?.
- ¿Cómo determinar la Relación Funcional de μ y ϕ , con respecto de los Parámetros de Ajuste y Dispersión respectivamente?.

10.4.8. Transformaciones.

Uno de los principales *Procedimientos Alternativos* se basa en el uso de Transformaciones tal como se expone a continuación:

La función $\phi = \phi(\underline{x}_D)$, al no depender de los Parámetros de Ajuste (\underline{x}_S) tampoco está dependiendo del valor medio de la respuesta, pues ésta depende sólo de éstos ($\mu = \mu(\underline{x}_S)$).

Luego el particionar el conjunto de Parámetros de Diseño, involucra una efectiva separación entre la media y la varianza.

OBSERVACIÓN.

En el punto (b) de la observación 10.4.7 se observó que una Transformación logarítmica, además de inducir aditividad en el modelo, logró que la varianza de la variable transformada quedase independiente de la media.

Lo anterior motiva la búsqueda de la Transformación T , tal que la varianza de la nueva variable sea independiente de su Valor Medio. Al respecto se recuerda que Box & Cox (1964) sugirieron una técnica para seleccionar una Transformación adecuada de los datos con la cual se obtuvieran:

- a) Normalidad
- b) Constancia de la varianza del error o equivalentemente independencia entre la media y varianza muestral en cada prueba o ensayo experimental.
- c) Aditividad de los efectos con respecto de la respuesta.

Elección de T .

En lo que sigue se denotará a la variable original por: y , mientras que a la variable obtenida luego de aplicar una Transformación T se la denotará por: Y , es decir, $Y = T(y)$. Además $f^{(i)}(u)$; $i = 1, 2, \dots$ se usará, en general, para denotar a la i -ésima derivada de f , con respecto a u .

- Se asume que μ_y y σ_y satisfacen la relación funcional $\sigma_y = f(u_y)$.

Proposición 10.2. *Existe una transformación T tal que:*

$$T^{(1)}(\mu_y) \cong \frac{\sigma_Y}{f(\mu_y)} \quad (10.4)$$

en donde σ_Y es constante, es decir, $\sigma_Y^2 = \sigma_Y^2(\underline{x}_D)$.

Demostración Expandiendo la función $Y = T(y)$ en serie de Taylor, en torno del punto: $(\mu_y, T(\mu_y))$

$$T(y) = T(\mu_y) + (y - \mu_y)T^{(1)}(\mu_y) + \frac{1}{2}(y - \mu_y)^2T^{(2)}(\mu_y) + \dots,$$

calculando varianza

$$\text{var}(T(y)) = \left[T^{(1)}(\mu_y) \right]^2 \text{var}(y - \mu_y) + \dots, \text{ despreciando términos de orden superior}$$

$$\text{var}(T(y)) \cong \left[T^{(1)}(\mu_y) \right]^2 \text{var}(y), \text{ esto es,}$$

$$\sigma_Y^2 \cong \left[T^{(1)}(\mu_y) \right]^2 \sigma_y^2, \text{ despejando}$$

$$T^{(1)}(\mu_y) \cong \frac{\sigma_Y}{\sigma_y}, \text{ se obtiene finalmente}$$

$$T^{(1)}(\mu_y) \cong \frac{\sigma_Y}{f(\mu_y)}$$

Se nota que (10.4) equivale a: $\sigma_Y^2(\underline{x}_S, \underline{x}_D) \approx [T^{(1)}(\mu_y(\underline{x}_S, \underline{x}_D))]^{-2} \sigma_y^2(\underline{x}_D)$, es decir,

$$\text{var}(y) \approx h(E(y)) \phi \quad (10.5)$$

en donde, ϕ es funcionalmente independiente de la media.

Conclusión: Suponer la existencia de una Transformación T , tal que $Y = T(y)$, que permita lograr una efectiva separación entre la varianza y la media de la respuesta Y , equivale a suponer una relación funcional entre la varianza y la media de la respuesta original y , dada por la ecuación (10.5), en donde la relación entre T y h , está dada por:

$$h(\mu_y) = \left[T^{(1)}(\mu_y) \right]^2$$

Proposición 10.3 (Logothetis (1990)). : Si se asume como relación funcional entre la varianza y la media de la respuesta original a la potencia de la media, esto es,

$$\sigma_y = f(\mu_y) = \alpha(\mu)^\beta \quad (10.6)$$

La Transformación T apropiada está dada por:

$$T(\mu) = \begin{cases} C_1 \mu^{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1 \\ C_1 \log \mu & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

en donde C_1 es una constante real adecuada.

Demostración Ver Logothesis (1990).

- Box (1988) aborda el uso de transformaciones suponiendo esencialmente la estructura dada por la ecuación (10.4) y menciona la relación funcional dada por (10.6) como un caso importante. Sin embargo, el procedimiento empírico que él propone es aplicable en situaciones más generales.

Ejemplo 10.3 Estampado de Metal

El siguiente ejemplo ilustra un experimento de diseño de parámetros del tipo nominal es mejor.

FACTORES DE DISEÑO:

- A: Altura del rodillo – 2 niveles
- B: Proveedor del material – 2 niveles
- C: Ajuste del alimentador – 2 niveles

FACTORES DE RUIDO:

- H: Cantidad de aceite – 2 niveles
- I: Grosor del material – 2 niveles
- J: Dureza del material – 2 niveles

RESPUESTA: Distancia del agujero al borde.

VALOR META: 0,40 pulgadas (el dato es codificado como $40 = 0,40$).

Se empleará un arreglo L_4 para el arreglo interior (factores de diseño) y un L_4 para el exterior (factores de ruido.). Con la información reunida, se calcula \bar{y}_i , V_i y SNR para cada combinación de factores de control.

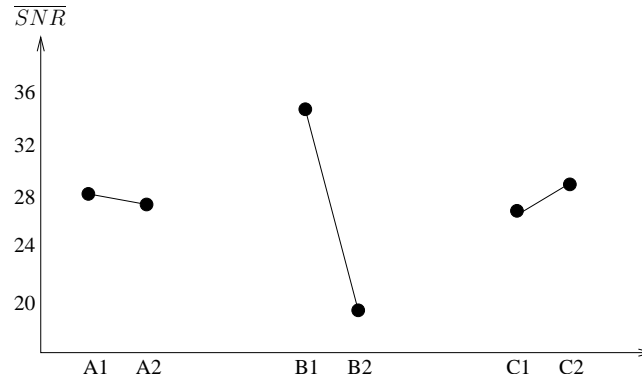
Tipo de arreglo:		Arreglo Interno (L_4)			Arreglo externo (L_4)			
Asignación de factores de control y número de columna		Fila de datos Experimento N°				Razón SNR		
		1	2	3	4	Asignar Factores de ruido		
N°	A	B	C			J		
Experi- mento	1	2	3			I	\bar{y}_i	V_i
						H		
1	1	1	1	37	38	36	37	33.12495
2	1	2	2	35	39	40	33	20.92425
3	2	1	2	45	44	44	46	33.39375
4	2	2	1	41	52	46	42	19.14747
								45.25
								24.92

Tabla 10.6: Arreglo interno y externo para Ejemplo 10.3

FACTORES QUE AFECTAN LA VARIACIÓN: El primer análisis se hace usando la relación señal ruido. Se buscan los factores que afectan significativamente la SNR , debido a que ello implica que afecten la variación. El análisis se lleva a cabo de la misma manera.

1. Se completa la tabla de respuestas y las gráficas de respuestas.
2. Se determina los factores que afecta la variación.

Factor Nivel	A	B	C
1	27.02460	33.25935	26.13621
2	26.27061	20.03586	27.15900

Tabla 10.7: Tabla de respuestas \overline{SNR} para Ejemplo 10.3Figura 10.5: Gráfico de \overline{SNR} para Factores a dos niveles

FACTORES QUE SE USAN PARA AJUSTAR LA MEDIA: Después de haber usado la relación SNR para identificar a B como un factor que afecta la variación, se analizan enseguida los promedios para identificar los factores de ajuste. Se buscan los factores que afecten significativamente la media, pero no la variación. El análisis se lleva a cabo en la manera acostumbrada.

1. Se completa la tabla de respuestas y las gráficas factoriales siguientes.
2. Se encuentra un factor de ajuste para posicionar la media.

Factor Nivel	A	B	C
1	36,88	40,88	41,13
2	45,00	41,00	40,75

Tabla 10.8: Respuesta media \bar{y}

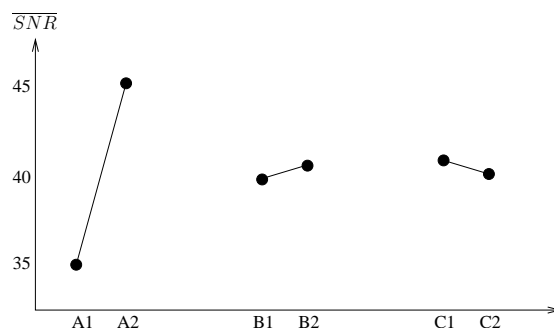


Figura 10.6: Gráfico de Factores para ajuste de la media

Luego, se seleccionará el nivel B_1 para disminuir variabilidad y con el factor A se llevará la característica de calidad al valor objetivo.

Existen diversas maneras de implementar el diseño de parámetros en forma práctica, no obstante todas las metodologías comparten el uso de 5 etapas básicas (actividades operacionales):

1. ETAPA 1: Definición del problema y objetivos.
2. ETAPA 2: Identifique las respuestas, factores de control y factores de ruido.
3. ETAPA 3: Diseño estadístico del experimento.
4. ETAPA 4: Ejecución del experimento y predicción de las condiciones de mejora.
5. ETAPA 5: Diseñar y ejecutar experimentos de confirmación.

ESTUDIO DE CASO: Crecimiento de la capa epitaxial en galletas de sílice.

Este estudio completo fue publicado en: Kackar, R. And Shoemaker, A. C. (1989). **Robust Design: A cost effective method for improving manufacturing processes.** Quality Control, Robust Design and The Taguchi Method. Dehnad, K., Editor. Wadsworth.

ETAPA 1: Definición del problema y objetivos.

El primer paso en el procesamiento de galletas de sílice para la fabricación de Circuitos Integrados es crear una capa epitaxial sobre las galletas de sílice pulidas. Para ello grupos de 14 galletas se procesan juntas.

El procesamiento se lleva a cabo utilizando una estructura cilíndrica de siete caras (susceptor) localizada dentro de una cámara de gases. A medida que el susceptor rota, se introducen vapores químicos a través de inyectores en la parte superior de la cámara. La capa epitaxial sobre las galletas se crea como consecuencia de la reacción de los vapores con el sílice a alta temperatura.

PROBLEMA: La causa mayor de problemas en las galletas de sílice es la variación del espesor de la capa epitaxial, entre diferentes galletas y dentro de una misma galleta, del valor deseado que es 14,5 micrones.

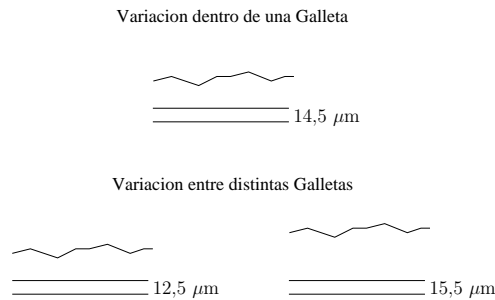


Figura 10.7: Variación del espesor de la capa epitaxial en galletas de sílice

OBJETIVO: Reducir la no-uniformidad de la capa epitaxial y mantener el espesor promedio en 14,5 μm .

ETAPA 2: Identifique las respuestas, factores de control y factores de ruido.

RESPUESTAS: Espesor epitaxial: valor deseado 14,5 μm . Actualmente el promedio es 14,5 y la desviación estándar 0,4.

FACTORES DE CONTROL:

- Método de rotación del susceptor.
- Código de galletas.
- Temperatura de deposición.
- Tiempo de deposición.
- Tasa de flujo del gas de arsénico.
- Temperatura del ácido hidroclorehídrico.
- Tasa de flujo del ácido hidroclorehídrico.
- Posición de los inyectores.

A continuación se muestra una tabla con los distintos valores de los factores de control a ser considerados:

Parámetros de Control	Initial Setting	Test Setting 0	Test Setting 1
A: Método de Rotación del Susceptor	Oscilación	Continuo	Oscilación
B: Código de Galleta	678D4	668G4	678D4
C: Temperatura de Deposición	1215° C.	1210° C.	1220° C.
D: Tiempo de Deposición	Bajo	Alto	Bajo
E: Tasa de Flujo del Gas de Arsénico	57 %	55 %	59 %
F: Temperatura del Ácido Hidroclorehídrico	1200° C.	1180° C.	1215° C.
G: Tasa de Flujo del Ácido Hidroclorehídrico	12 %	10 %	14 %
H: Posición de los Inyectores	4	2	6

Tabla 10.9: Settings inicial y de prueba para cada parámetro de control.

FACTORES DE RUIDO:

- Variación de temperatura en la cámara.
- Concentración no uniforme de vapor.
- Composición no uniforme de vapor.
- Variaciones en los valores de los factores de control.

Se decidió que las tres primeras fuentes de ruido eran principalmente responsables por la no-uniformidad del espesor en la capa epitaxial. Estas tres fuentes están directamente relacionadas con la posición en que se esté dentro de la cámara.

ETAPA 3: Diseño estadístico del experimento.

El objetivo del experimento es variar sistemáticamente los valores de los factores de control y ruido simultáneamente, para estudiar los efectos del ruido sobre la respuesta para diferentes combinaciones de los valores de los parámetros de control.

El primer paso es construir una *matriz de control* para los factores de control. En vez de tratar cada una de las 256 posibles combinaciones de valores para los 8 factores de control, se usó un subconjunto reducido de 16 (L_{16} .)

Corrida Experimental	Parámetros de Control							
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Cont	668G4	1210	Alto	55	1180	10	2
2	Cont	668G4	1210	Alto	59	1215	14	6
3	Cont	668G4	1220	Bajo	55	1180	14	6
4	Cont	668G4	1220	Bajo	59	1215	10	2
5	Cont	678D4	1210	Bajo	55	1215	10	6
6	Cont	678D4	1210	Bajo	59	1180	14	2
7	Cont	678D4	1220	Alto	55	1215	14	2
8	Cont	678D4	1220	Alto	59	1180	10	6
9	Oscil	668G4	1210	Bajo	55	1215	14	2
10	Oscil	668G4	1210	Bajo	59	1180	10	6
11	Oscil	668G4	1220	Alto	55	1215	10	6
12	Oscil	668G4	1220	Alto	59	1180	14	2
13	Oscil	678D4	1210	Alto	55	1180	14	6
14	Oscil	678D4	1210	Alto	59	1215	10	2
15	Oscil	678D4	1220	Bajo	55	1180	10	2
16	Oscil	678D4	1220	Bajo	59	1215	14	6

Tabla 10.10: Arreglos de control para el experimento del proceso epitaxial.

Nota: El arreglo de control especifica las corridas experimentales.

La matriz de control para este experimento se construyó asignando los distintos factores de control a las columnas del arreglo ortogonal $OA16(2^{15})$:

Corrida experimental	Asignación de columnas para los parámetros de control														
	A	B	C	D	E	F	G	H							
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
6	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
8	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
9	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
10	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
11	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
12	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
13	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
14	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
15	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
16	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0

Tabla 10.11: Matriz de control para diseño robusto capa epitaxial

La asignación de columnas en este caso, conlleva a lo que se denomina un plan de resolución IV. Estos planes permiten la estimación eficiente de los efectos de primer orden (lineales) de cada uno de los factores de control.

El siguiente paso es diseñar un plan para medir sistemáticamente el efecto de los factores de ruido. En este caso particular el efecto debe ser medido indirectamente. Para recoger el efecto del ruido en el espesor para distintas galletas, se tomaron mediciones del espesor en galletas localizadas en el tope y en el fondo del susceptor. Similarmente, para recoger el efecto del ruido en el espesor para distintas galletas, se tomaron medidas del espesor en 5 sitios dentro de las galletas. Esto resulta en 70 (14×5) mediciones para cada fila de la matriz de control.

ETAPA 4: Ejecución del experimento y predicción de las condiciones de mejora.

Como se describió en la etapa anterior se tomaron 70 medidas de espesor en cada una de las 16 combinaciones de la matriz de control. Antes de analizar los resultados, se debe decidir que medidas de rendimiento usar. En este caso, dado que se estableció en la Etapa 1 que el objetivo era reducir al mínimo la variabilidad en el espesor al mismo tiempo que se mantenga el espesor promedio deseado (14,5), es sensato utilizar como medidas de rendimiento la media y la varianza de cada una de las 16 muestras de 70 mediciones.

La siguiente tabla muestra los valores de \bar{y} y de $\log s^2$ para cada corrida experimental. (Se toma el logaritmo de s^2 para mejorar las propiedades estadísticas del análisis).

Corrida experimental	Media \bar{y} (μm)	Log de varianza $\log s^2$
1	14.821	-0.4425
2	14.888	-1.1989
3	14.037	-1.4307
4	13.880	-0.6505
5	14.165	-1.4230
6	13.360	-0.4969
7	14.757	-0.3267
8	14.921	-0.6270
9	13.972	-0.3467
10	14.032	-0.8563
11	14.843	-0.4369
12	14.415	-0.3131
13	14.878	-0.6154
14	14.932	-0.2292
15	13.907	-0.1190
16	13.914	-0.8625

Tabla 10.12: Media y logaritmo de la varianza del espesor epitaxial para cada corrida de prueba

A fin de reducir la variación en el espesor epitaxial, se buscan los factores de control que tienen el mayor efecto en $\log(s^2)$ y se escoge el valor de estos, que según los datos del experimento, minimiza el valor de la varianza.

Parámetros de control	$\log s^2$ promedio		
	Test setting 0	Test setting 1	Diferencia
A	-0.8245	-0.4724	0.3521
B	-0.7095	-0.5875	0.1220
C	-0.7011	-0.5958	0.1053
D	-0.5237	-0.7732	-0.2495
E	-0.6426	-0.6543	-0.0117
F	-0.6126	-0.6843	-0.0717
G	-0.5980	-0.6989	-0.1008
H	-0.3656	-0.9313	-0.5658

Tabla 10.13: Valor promedio de $\log s^2$ para diferentes *test setting* (niveles)

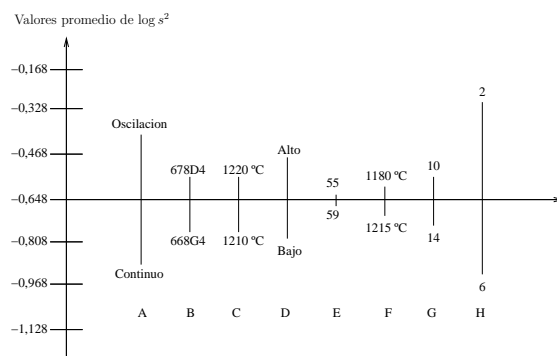


Figura 10.8: Valores promedios de $\log s^2$ para cada settings de parámetros de control.

Como resultado del análisis de los valores del experimento para la varianza, se llegó a la conclusión de que la posición de los inyectores y el método de rotación son los factores que más contribuyen a disminuir la varianza del espesor epitaxial. De acuerdo al análisis, el método de rotación sugerido es “continuo” y la posición de los inyectores sugerida es “6”. Los demás factores fueron dejados intactos.

ETAPA 5: Experimento de confirmación.

Los resultados del experimento de confirmación se dan en la siguiente tabla:

Corrida experimental	Parámetros de control								Valor promedio		
	A	B	C	D	E	F	G	H	\bar{y}	$\log s^2$	S^2
Initial settings	Oscit	678D4	1215	Bajo	57	1200	12	4	14,10	-0.845	0,143
New settings	Cont	678D4	1215	Bajo	57	1200	12	6	14,17	-1.244	0,057

Tabla 10.14: Propuestas experimento confirmación capa epitaxial

Como se ve, la nueva configuración produce una reducción del 60 % en la variación del espesor epitaxial. Nótese, sin embargo, que el espesor promedio es diferente del deseado.

¿Cómo ajustar el promedio al valor deseado?

Encontrando los parámetros de ajuste de la media. Como se ha mencionado con anterioridad, en procesos de manufactura uno o más parámetros de control se pueden utilizar para cambiar una característica funcional media, o valor medio, sin afectar la variabilidad del proceso. Cuando existen estos parámetros de ajuste de la media, se puede elegir un setting (valores a ajustar) de los otros parámetros de control para minimizar la variabilidad, mientras se ignora la media. Entonces, los parámetros de ajuste se utilizan para mover la media al *target*.

La siguiente tabla y gráfico muestran los efectos de cada uno de los factores de control en el espesor promedio de la capa epitaxial:

Parámetros de control	Promedios \bar{y}		
	Test setting 0	Test setting 1	Diferencia
A	14,3536	14,3616	0,0008
B	14,3610	14,3543	-0,0067
C	14,3810	14,3342	-0,0468
D	14,8069	13,9084	-0,8965
E	14,4225	14,2928	-0,1297
F	14,2964	14,4189	0,1225
G	14,4376	14,2776	-0,1600
H	14,2555	14,4597	0,2042

Tabla 10.15: Valor promedio de \bar{y} para diferentes *test setting* (niveles)

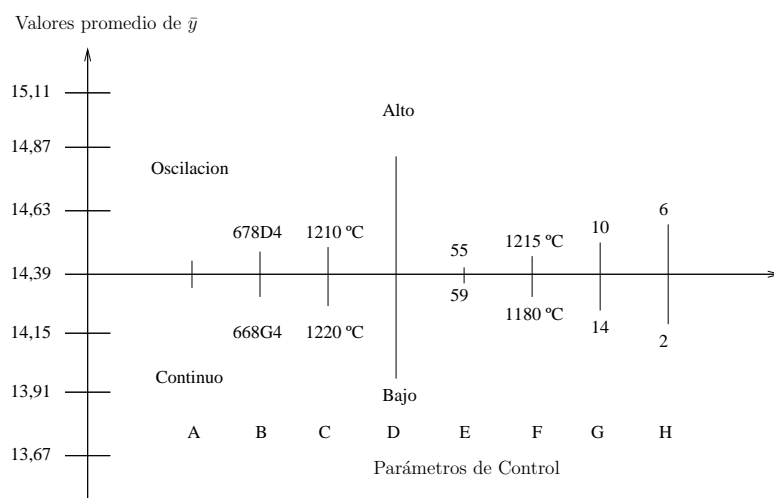


Figura 10.9: Valores promedios de \bar{y} para cada *setting* de parámetros de control

De aquí se desprende que el tiempo de deposición es un parámetro de ajuste adecuado, debido a que afecta sustancialmente el promedio sin cambiar mucho la varianza.

EJERCICIOS.

Ejercicio 10.1

Un equipo de ingenieros de manufactura y profesionales de calidad de una compañía proveedora automotriz desarrollaron un experimento para optimizar el proceso de moldear el panel interior de un automóvil. Se sospecha que es influenciado por cuatro factores de control y tres factores de ruido. Estos factores se encuentran en las tablas siguientes, para las cuales se utilizó un arreglo L_8 para los factores de control y un L_4 para los factores de ruido:

Factores de control:

Factor	Nivel 1	Nivel 2
A: Tipo de ensamblado	Ensamblado	Ensamblado 2
B: Calor	Bajo	Alto
C: Presión	Standard	Alta
D: Tiempo de ensamblado	Actual	Aumentado

Factores de ruido:

Factor	Nivel 1	Nivel 2
U: Temperatura Ambiente	Frío	Calor
V: Humedad	Baja	Alta
W: Mantenimiento equipo	Frecuente	Aleatoria

La característica de calidad medida es el factor de forma, que indica que tan bien el panel se ajusta al interior del automóvil. Se definió esta característica de forma que a mayor número, mejor es el ajuste logrado. Después de completado el experimento se obtuvieron los siguientes resultados:

Tipo de arreglo:	Arreglo Interno (L_8)				Arreglo externo (L_4)				
Asignación de factores de control					Fila de datos				Razón SNR
					Experimento N ^o				Asignar Factores de ruido
					1	2	3	4	
N ^o Experimento	A	B	C	D	1	2	2	1	W
					1	2	1	2	V
					1	1	2	2	U
1	1	1	1	1	8	9	8	9	
2	1	1	1	2	8	7	8	7	
3	1	2	2	1	6	5	6	5	
4	1	2	2	2	9	8	9	7	
5	2	1	2	1	7	6	5	6	
6	2	1	2	2	2	3	3	3	
7	2	2	1	1	4	4	6	4	
8	2	2	1	2	6	2	2	4	

Se pide:

- a) Determinar las condiciones óptimas de los factores de control para la característica mayor es mejor.

Ejercicio 10.2 Diseño Robusto de Pintado Automático

Una compañía productora de automóviles tiene un problema con su línea de pintado automática. La línea de pintado automática de carrocerías utiliza una tobera por donde sale la pintura la que pinta una franja de la lámina metálica. Desafortunadamente la franja pintada no tiene un ancho constante, sino que tiene mucha variabilidad. Por ello, deben pintarse las láminas metálicas con franjas con un gran traslape, lo que ocasiona un empleo alto de pintura. Para mejorar lo anterior se definió un experimento de diseño robusto en el cual se emplearon los siguientes factores de control y ruido:

Factores de Control:

- A : Tipo de tobera: tipo 1, tipo 2 y tipo 3
 B : Flujo de pintura: alto, medio, bajo
 C : Aire de ventilación: alto, medio, bajo
 D : Aire de atomización: alto, medio, bajo

Factores de ruido:

- U : Color de la pintura: color 1, color 2
 V : Presión aire de entrada a la tobera: alta, baja
 W : Viscosidad de la pintura: alta, baja

Para los factores de control se empleó un $OA L_9$ y para los factores de ruido un $OA L_4$, como se muestra a continuación:

Tipo de arreglo: Arreglo interno (L_9)		Arreglo externo (L_4)			
Asignación de Factores de Control		Fila de datos			
		Experimento N°			
		1	2	3	4
N° experimento	A	B	C	D	Asignar Factores de ruido
1	1	2	2	2	W
2	1	3	3	3	V
3	1	1	1	1	U
4	2	1	2	3	
5	2	2	3	1	
6	2	3	1	2	
7	3	1	3	2	
8	3	2	1	3	
9	3	3	2	1	

La respuesta es el ancho de la franja de pintura obtenida, medida en centímetros.

Se pide:

- a) Encontrar los mejores niveles de los factores de control para reducir al máximo la variabilidad del ancho de la franja de pintado obtenida.
 - b) Una vez que se efectuó lo anterior, el gerente a cargo del proceso decidió ser más ambicioso y fijar un valor nominal de 40 cm para la franja pintada. Encontrar los niveles de los factores de control para obtener lo anterior.
-

Apéndice A

Tabla F

La Tabla A.1 muestra los valores de la Distribución F para un nivel de significación (α) = 5 % y diferentes valores para grados de libertad del numerador (n_1) y denominador (n_2).

Ejemplo: $F(n_1 = 3, n_2 = 16) = 3,24$

Para encontrar valores de F para n_1 y/o n_2 que no figuran en la tabla se usa interpolación lineal: p. ej.: $F(5, 33) = 2,53 + (2,45 - 2,53) * 3 / 10 = 2,53 - 0,024 = 2,51$

n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Tabla A.1: Distribución F para un nivel de significación $\alpha = 5\%$ y diferentes valores para grados de libertad

Apéndice B

Glosario de Términos

ANOVA: Análisis de varianza.

Arreglo Bifactorial: Un listado, en forma de matriz, de todas las posibles combinaciones de todos los niveles de dos factores.

Arreglo factorial completo: Diseño experimental que explora todas las posibles combinaciones de todos los niveles de todos los factores así como sus interacciones.

Arreglo factorial fraccionado: Diseño experimental que explora solo una fracción de todas las posibles combinaciones de todos los niveles de todos los factores.

Arreglo ortogonal: Un arreglo ortogonal (AO) es una matriz de números distribuidos en filas y columnas. Cada fila representa el estado (nivel) de los factores en un experimento dado. Cada columna representa un factor o condición específica que puede ser cambiada de un experimento a otro. El arreglo se llama ortogonal, porque los efectos resultantes de los factores del experimento pueden ser evaluados separadamente.

Característica de calidad: Característica de un proceso o producto que define la calidad de ese proceso / producto; es una medida del grado de conformidad con respecto a un estándar conocido.

Diseño de parámetros: Es la etapa de diseño donde los niveles de los parámetros de la característica de calidad son determinados, para que el producto tenga un comportamiento óptimo (menor variabilidad) al menor costo.

Diseño de sistema: Es la primera etapa en el diseño del producto donde el conocimiento de la ingeniería es aplicado para seleccionar materiales, partes, componentes y sistemas de ensamblaje para que el comportamiento del producto o proceso llegue al valor meta deseado. Es donde se define el concepto del diseño.

Diseño de tolerancias: Es la etapa del diseño donde se modifican las tolerancias asociadas a los componentes del sistema (por ejemplo, reducir la amplitud de la tol-

erancia cuando el costo de esta modificación es menor que la pérdida en calidad que de otra manera se tendría.)

Duración diseñada: Cantidad de tiempo para la cual un producto / proceso fue diseñado para servir o durar.

Estimador de la varianza del error: Estimador de la varianza esperada bajo cualquier nivel. Está basado en los resultados experimentales.

Experimento confirmatorio: El experimento escogido define condiciones óptimas en el diseño del producto / proceso. Una corrida experimental en estas condiciones, que tiene el propósito de verificar las predicción experimental, se llama “experimento confirmatorio”.

Factores: Parámetros o variables que tienen un impacto en el comportamiento de un producto / proceso.

Factores de control: Factores cuyos valores pueden ser seleccionados y controlados.

Factores de señal: Con características dinámicas, son los factores cuyo control responde a una manera especificada o designada. En estudios medidos, son los factores usados para generar diferentes respuestas medibles.

Función de pérdida de calidad: Aproximación parabólica de la pérdida de calidad que resulta cuando la característica de calidad se desvía de su mejor valor (objetivo).

Grados de libertad: Es el número de comparaciones pareadas; o también, el número de cuadrados independientes asociados con un factor dado. (Generalmente, es el número de factores menos uno.)

Gráfica lineal: La gráfica lineal es una serie de líneas numeradas y puntos que tienen una correspondencia uno a uno con las columnas del arreglo ortogonal con que está relacionada. Cada gráfica lineal está asociada con un arreglo ortogonal. Sin embargo, un arreglo ortogonal dado puede tener varias gráficas lineales. Las gráficas lineales facilitan la asignación de factores a columnas específicas del arreglo ortogonal, cuando se desea analizar las interacciones.

Interacciones: Condiciones en las cuales el impacto de un factor sobre una característica de calidad cambia dependiendo del nivel de otro factor. Si esto sucede, se dice que los factores interactúan entre sí.

Mayor es mejor: Tipo de parámetro que al aumentar su valor, mejora el funcionamiento, (por ejemplo, fuerza de tensión.). Pertenece al grupo de características de calidad cuyo mejor valor es infinito.

Menor es mejor: Tipo de parámetro que, al disminuir su valor, mejora el funcionamiento (por ejemplo, desgaste, deterioro, etc.) Este parámetro pertenece al grupo de características de calidad cuyo mejor valor es cero.

Nominal es mejor: Nombre dado a aquellas características de desempeño en las que se busca obtener cierto valor nominal o meta. Ejemplo, Longitud, voltaje, etc.

Respuesta: Resultado obtenido.

Robustez: Es el nombre usado para describir el diseño de un producto / proceso que tiene poca variación a pesar de diversos cambios de las condiciones del ambiente o de variación entre las componentes. Es decir, un producto o proceso que ha reducido o limitado su variación funcional a pesar de la presencia de ruido.

Ruido: Cualquier factor no controlable que causa que la característica de calidad de un producto varíe. Hay tres tipos de ruido:

- Ruido provocado por causa externa, como temperatura ambiente, humedad, etc.
- Ruido provocado por causa interna, como deterioro.
- Ruido provocado por variación entre unidad y unidad.

Relación Señal / Ruido (SR): La razón SR es un estándar de medición que se usa para proyectar (basándose en los resultados experimentales) el desempeño cualitativo en el campo. SR se expresa generalmente en decibeles, y depende del tipo de característica que se está siendo considerada.

La relación SR toma en cuenta la aditividad mucho mejor que los datos en unidades reales.

Apéndice C

Gráficas Lineales de algunos Arreglos Ortogonales de Dos Niveles frecuentemente usados

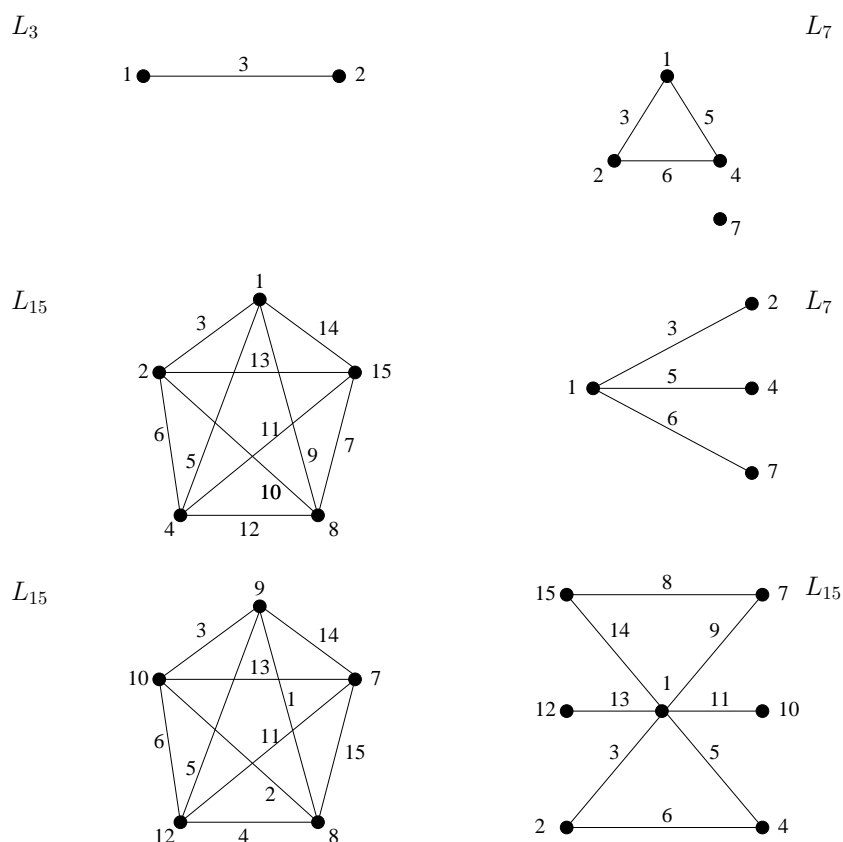


Figura C.1: Algunas gráficas lineales para Arreglos Ortogonales de 2 niveles

Bibliografía

- [1] Abraham B. and MacKay J. Variation Reduction and Designed Experiments. *International Statistical Review*, 61:121–129, 1993.
- [2] Allende H. *Modelo de Variación en Diseño de Parámetros*, volume 12, pages 1–17. Ed. Sociedad Argentina de Estadística, Buenos Aires, Argentina, 1995.
- [3] Allende H. and Galbiati J. Discussion of Using Statistics and Statistical Thinking to Improve Organizational Performance. *International Statistical Review*, 67(2):122–126, 1999.
- [4] Box G.E.P. Signal-to-Noise Ratios, Performance Criteria and Transformations. *Technometrics*, 30(1):1–17, 1988.
- [5] Box G.E.P. and Hunter J.S. The 2^{K-P} Fractional Factorial Designs. *Technometrics*, 3:311–352, 1961.
- [6] Box G.E.P. and Wilson K.B. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B* 13:1–45, 1951.
- [7] Engel J. Modelling Variation in Industrial Experiments. *Applied Statistics*, 41:579–593, 1992.
- [8] Ghosh S. *Statistical Design and Analysis of Industrial Experiments*, volume 109. Ed. Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1990.
- [9] Hunter J.S. Statistical Design Applied to Product Design. *Journal of Quality Technology*, 17:210–221, 1985.
- [10] Kacker R. N. Offline Quality Control, Parameter Design and the Taguchi Method. *Journal of Quality Technology*, 22:1–14, 1985.
- [11] Kacker R. N. et. al. Taguchi's Fixed-Element Arrays are Fractional Factorials. *Journal of Quality Technology*, 23:107–116, 1991.
- [12] Kacker R.N. and Shoemaker A.C. Robust Design: A Cost Effective Method for Improving Manufacturing Processes. *A.T.&T. Technical Journal*, 65(2):39–50, 1986.

- [13] León, Shoemaker, and Kacker. Performance Measures Independent of Adjustment: An Explication and Extension of Taguchi's Signal-to-Noise ratios (with response). *Technometrics*, 29:253–265, 283–285, 1987.
- [14] Logothetis N. Box-Cox Transformations and the Taguchi Method. *Applied Statistics*, 39:31–48, 1990.
- [15] Nair et. al. Analyzing Dispersion Effects from Replicated Factorial Experiments. *Technometrics*, 30(3):247–256, 1988.
- [16] Nair V. N. et. al. Discussion of Taguchi's Robust Parameter Design Method. *Technometrics*, 34(2):127–161, May 1992. Panel Discussion edited by V.N. Nair.
- [17] Phadke M. S. and Nair V. N. Taguchi's Parameter Design: A Panel Discussion. *Technometrics*, 34:142–143, 1992.
- [18] Pignatiello J. J. and Ramberg J. S. The Top-Ten Triumphs and Tragedies of Genichi Taguchi. *Quality Engineering*, 4(2):221–225, 1991.
- [19] Rao C. R. Factorial Experiments Derivable from Combinatorial Arrangements of Arrays. *Journal of the Royal Statistical Society*, 9:128–139, 1946, 1947a, 1947b.
- [20] Shoemaker A. C. et. al. Economical Experimentation Methods for Robust Design. *Technometrics*, 33:415–428, 1991.
- [21] Steinberg D. M. et. al. Dispersion Effects in Robust-Design Experiments with Noise Factors. *Journal of Quality Technology*, 26(1):12–20, 1994.
- [22] Wu J. and Nair V. N. Taguchi's Parameter Design: A Panel Discussion. *Technometrics*, 34:155–156, 1992.