Week 1 Day 1 Maths Skills

数列、等差数列等比数列	一般数列 $\{a_n\}$	概念	按照一定的次序排列的一列数。分有穷、无穷、增值、递减、摆动、常数数列等。	
		通项公式	数列$\{a_n\}$中的项用一个公式表示，$a_n=f(n)$	$a_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geq 2.\end{cases}$
		前n项和	$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$	
	简单的递推数列解法	累加法	$a_{n+1}=a_n+f(n)$型	解决递推数列问题的基本思想是“转化”，即转化为两类基本数列----等差数列、等比数列求解。
		累乘法	$a_{n+1}=a_nf(n)$型	
		转化法	$a_{n+1}=pa_n+q\cdot p^{n+1}(p\neq 0,1,q\neq 0)\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+q$	
		待定系数法	$a_{n+1}=ca_n+d(c\neq 0,1,d\neq 0)\Leftrightarrow a_{n+1}+\lambda=c(a_n+\lambda)$。 比较系数得出$\lambda$，转化为等比数列。	
	等差数列 $\{a_n\}$	概念	满足$a_{n+1}-a_n=d$（常数），$d>0$递增、$d<0$递减、$d=0$常数数列。	
		通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$	$a_m+a_n=a_p+a_q\Leftrightarrow m+n=p+q$。 $a_m+a_n=2a_p\Leftrightarrow m+n=2p$（公差不为0）
		前n项和公式	$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$	$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$为等差数列。
	等比数列 $\{a_n\}$	概念	满足$a_{n+1}:a_n=q$（$q\neq 0$的常数），单调性由a_1的正负，q的范围确定。	
		通项公式	$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$	$a_ma_n=a_pa_q\Leftrightarrow m+n=p+q$， $a_ma_n=a_p^2\Leftrightarrow m+n=2p$（公比不为1）
		前n项和公式	$S_n=\begin{cases}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q},q\neq 1,\\ na_1,q=1.\end{cases}$	公比不等于-1时， $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m},\cdots$成等比数列。

注：表格中m,n,p,q均为正整数

数列求和及数列的简单应用	常用求和公式	等差数列	$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，特别$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$。	
		等比数列	$S_n=\begin{cases}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q},q\neq 1,\\ na_1,q=1.\end{cases}$，特别$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$。	
		自然数平方和	$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(2n+1)}{3}(1+2+\cdots+n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。	
		自然数立方和	$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$。	
	常用求和方法	公式法	如$a_n=2+2n,a_n=3^n$。	**常用裂项方法**：$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$； $\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$； $\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$； $\frac{n+1}{n(n-1)\cdot 2^n}=\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}-\frac{1}{n\cdot 2^n}$。
		分组法	如$a_n=2n+2^n$，$a_n=(-1)^nn+2$。	
		裂项法	如$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$。	
		错位相减法	如$a_n=(2n-1)\cdot 2^n$。	
		倒序相加法	如$C_n^0+C_n^1+\cdots+kC_n^k+\cdots+C_n^n$。	
	数列模型	等差数列	基本特征是均匀增加或者减少。	
		等比数列	基本特征是指数增长，常见的是增产率问题、存款复利问题。	
		一个简单递推数列	基本特征是指数增长的同时又均匀减少。如年收入增长率为20%，每年年底要拿出a（常数）作为下年度的开销，即数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=1.2a_n-a$。	

注：表中n,k均为正整数