TC

Eduardo Pérez Fraguela

T0.- PRELIMINARES MATEMÁTICOS

P	Q	$\overline{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

$P \rightarrow Q \equiv \overline{P} \vee Q$; $P \Longleftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Leyes de De Morgan: $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ y $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$

Teorema: $\overline{\forall x P(x)} \Longleftrightarrow \exists x \overline{P(x)}$

Partes de A: $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$

$$A = \{a,b,c\} \Rightarrow 2^A = \{\underbrace{\emptyset}_{\text{Conj. vacío}}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \underbrace{\{a,b,c\}}_{A}\}$$

Propiedades:

$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Complementario de B con respecto de A: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$

$A - B = A \cap \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Producto cartesiano: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$

$$A \times (B \cup/\cap/- C) = (A \times B) \cup/\cap/- (A \times C)$$

Relación: $R \subseteq A \times B$

Dominio$(R) = \{a \mid a \in A \text{ y } (a,x) \in R \text{ para algún } x \in B\}$

Imagen$(R) = \{b \mid b \in B \text{ y } (y,b) \in R \text{ para algún } y \in A\}$

Conjunto inductivo: Subconjunto A de $\mathbb{N}$ conjunto inductivo si $\forall a \in A, a+1 \in A$

$n+3 < 5(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n+3 < 5(n+1)\}$ Demostrar que $A = \mathbb{N}$

si $n=0$, $n+3=3$ y $5(n+1)=5 \Rightarrow 3<5$, es cierto

$n \in A$, probemos que $(n+1) \in A$

$$\boxed{5((n+1)+1)} = 5n+10 = 5(n+1)+5 \boxed{>} (n+3)+5 > (n+3)+1 = \boxed{(n+1)+3}$$

Cardinalidad: 2 conjuntos cualesquiera tienen la misma cardinalidad cuando se establece entre ellos una aplicación $f: A \to B$ biyectiva.

$\mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$ misma cardinalidad: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{P}$, $n \rightsquigarrow 2n$

Cardinal de $\mathbb{N}$ se denota como $\aleph_0$

Def.- Un conjunto A es enumerable si $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

Técnica de la diagonal (Cantor):

$2^{\mathbb{N}}$ no es numerable: Suponemos que lo es, $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$

Construimos la retícula:

	A_0	A_1	A_2	A_3	...
0	X		X	X	
1	X		X		
2		X	X		
3				X	
⋮					

Consideramos la diagonal y construimos el conjunto $D = \{n \mid n \notin A_n\}$

Suponemos que D es igual a un A_K:

$$\left.\begin{array}{l} K \in A_K \Rightarrow K \notin D \\ K \notin A_K \Rightarrow K \in D \end{array}\right\} \text{Absurdo, } D = A_K \Rightarrow D \neq A_i$$

Por tanto, en $2^{\mathbb{N}} = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ no están todos los posibles subconjuntos de $\mathbb{N}$

$2^{\mathbb{N}}$ no es numerable.

B1.-

1.- $(P \to Q) \leftrightarrow (Q \to P)$ es $\perp$

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P\to Q) \leftrightarrow (Q \to P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2.- ¿$2^A \cup 2^B = 2^{A \cup B}$?

$A = \{a, b\}$ $\quad 2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$B = \{c\}$

$2^B = \{\emptyset, \{c\}\}$

$2^A \cup 2^B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c\}\}$

$A \cup B = \{a,b,c\}$ $\quad 2^{A\cup B} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$2^A \cup 2^B \neq 2^{A\cup B}$

3.- $n+3 < 5\cdot(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$; inducción

$n = 0 \Rightarrow 3 < 5 \Rightarrow$ se cumple

Suponemos $n \in A$ y probamos que $(n+1)$ pertenezca.

$n+1+3 < 5((n+1)+1) = n+4 < 5n+2$ $\quad n+1 \in A \Rightarrow A = \mathbb{N} \Rightarrow$ es cierta

4.- $A = \{0,1,2,3\}$ $B = \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$, f. tot., parciales y no funciones.

a) $f = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4)\}$

Función total. Inyectiva y no sobreyectiva

b) $f = \{(0,1), (1, \frac{1}{2}), (2,1), (3, \frac{3}{2})\}$

Función total. No inyectiva, no sobreyectiva

Scanned with CamScanner

4.- c) $f = \{(0,0),(1,1),(1,3),(2,4)\}$

No función

d) $f = \{(0,0),(1,-1),(3,2)\}$ Función parcial

e) $f = \{(0,0)\}$ Función parcial

5.- ¿un conj misma cardinalidad que algún subconj suyo?

Sí, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$. $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$, misma cardinalidad para la función biyectiva:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{P},\quad n \rightsquigarrow 2n \qquad \begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 4 \\ 3 \to 6 \\ 4 \to 8 \\ \dots \end{matrix}$$

6.- ¿cierto que Σ^* es infinito numerable?

$\Sigma = \{a_1, a_2, .., a_n\}$, Σ^* es infinito numerable ya que se puede establecer correspondencia entre cadenas sobre Σ y los números de $\mathbb{N}$. Algo es numerable si el procedimiento encuentra cualquier palabra creada que esté es Σ^*

$L0 \longrightarrow \varepsilon \to 0$

$L1 \longrightarrow a_1 \to 1 \quad a_2 \to 2 \quad \dots a_n \to n$

$L2 \longrightarrow \begin{matrix} a_1a_1 \to n+1 & a_2a_1 \to 2n+1 \dots & a_na_1 \to n^2+1 \\ a_1a_2 \to n+2 & \dots & \end{matrix}$

$L3 \longrightarrow a_1a_1a_1 \longrightarrow n^2+n+1 \dots$

7.- ¿quién es $\{\varepsilon^*\}$ y $\{\varepsilon^+\}$? Es ε en ambos casos

8.- u, v y z cadenas de un alfabeto. Indique las falsas.

a) $(uv)z = u(vz)$

b) $x\varepsilon = \varepsilon x$

c) $|xy| < |x| + |y|$ La c es falsa, siempre se cumple que $|xy| = |x| + |y|$

9.- A lenguaje sobre Σ ¿$A^* = A^+$?

$A^* = A^+$ cuando $\varepsilon \in A$

T2 - TC

Lenguajes regulares sobre Σ:

a) $\emptyset$

b) $\{\varepsilon\}$

c) $\{a\}\ \forall a \in \Sigma$

d) A y B regulares sobre $\Sigma \Rightarrow A \cup B, A \cdot B, A^+$ y A^* regulares

e) Ningún otro lenguaje es regular sobre Σ

Ejemplos: $\Sigma = \{a, b, c\}$

- $\emptyset, \{\varepsilon\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{ab\}, \{a, b, ab\}$
- $\{a^i \mid i \geq 0\} = \{a^*\} \Rightarrow \{\varepsilon\}, \{a\}, \{aa\}, \dots$
- $\{a^i b^j \mid i, j \geq 0\} = \{a^*\} \cdot \{b^*\}$ cierre de Kleen de $\{a\}$ concatenado con $\{b\}$
- $\{(ab)^i \mid i \geq 0\} = \{ab\}^*$ es el cierre de Kleen de $\{ab\}$

Sin embargo: $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ NO ES REGULAR

Expresiones regulares sobre Σ:

a) $\emptyset$

b) ε

c) a

d) r y $s \Rightarrow r \cup s, rs, r^*$ y r^+

e) Ninguna otra sec. de símbolos es expresión regular

Toda expresión regular tiene asociado un lenguaje regular que denotamos con $L(r)$.

r y s son equivalentes si $L(r) = L(s)$

Ej: Simplifique: $\underbrace{\emptyset \cup a^*}_{\cancel{\emptyset} a^*} \cup b^* \cup (a \cup b)^* = (a \cup b)^*$

- $(a^* b)^* \cup (b^* a)^* = (a \cup b)^*$
- $(\varepsilon \cup aa)^* = (aa)^*$
- $(a \cup \epsilon) a^* b = a^* b$
- $(a \cup b)^* a (a \cup b)^* =$ no se puede simplificar
- $(aa)^* a \cup (aa)^* = a^*$
- $(\varepsilon \cup aa)(\varepsilon \cup aa)^* = (\varepsilon \cup aa)^+ = \varepsilon \cup (aa)^+ = (aa)^*$
- $a(\varepsilon \cup aa)^* (\varepsilon \cup aa) \cup a = a(\varepsilon \cup aa)^+ \cup a = a(aa)^* \cup a = a(aa)^*$
- $= a(\varepsilon \cup aa)^* a \cup \varepsilon = aa^*$
- $(a \cup b)(\varepsilon \cup aa)^* (\varepsilon \cup aa) \cup (a \cup b) = (a \cup b)(aa)^* \cup (a \cup b) = (a \cup b)(aa)^*$
- $(\varepsilon \cup aa)(\varepsilon \cup aa)^* (ab \cup b) \cup (ab \cup b) = (aa)^* (ab \cup b) \cup (ab \cup b) = (aa)^* (ab \cup b) = \{$

  $= (aa)^* ab \cup (aa)^* b = ((aa)^* a \cup (aa)^*) b = a^* b$

AFD

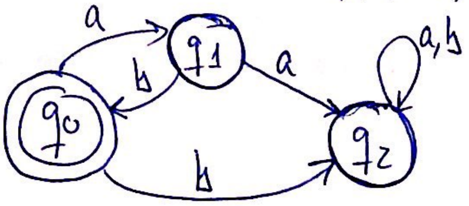
$c^*(a \cup bc^*)^*$ → $abc^5ab \in A$; $cabac^3bc \notin A$

Def.- $M = (Q, \Sigma, s, \delta, F)$
- Q conjunto finito de estados
- Σ alfabeto de símb
- $s \in Q$ estado inicial del autómata.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
- $F \subseteq Q$ estados finales

Ejemplo:

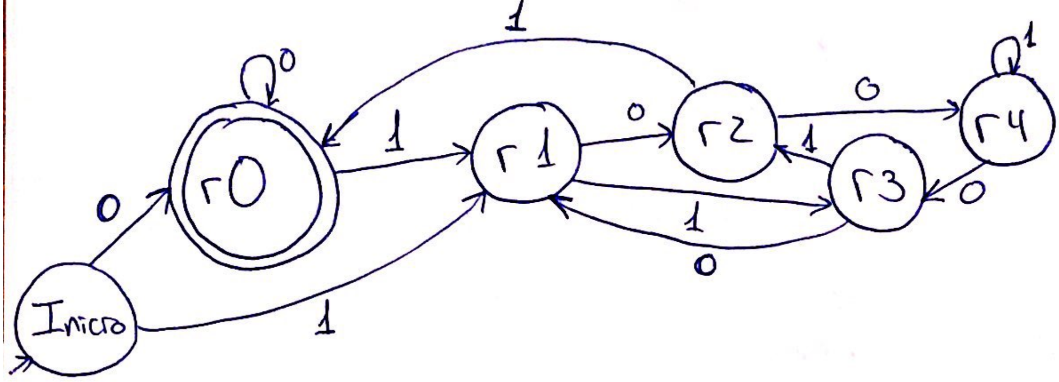
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$s = q_0$
$F = \{q_0\}$

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$
$(q_0, a) \rightsquigarrow q_1$
$(q_0, b) \rightsquigarrow q_2$
$(q_1, a) \rightsquigarrow q_2$
$(q_1, b) \rightsquigarrow q_0$
$(q_2, a) \rightsquigarrow q_2$
$(q_2, b) \rightsquigarrow q_2$



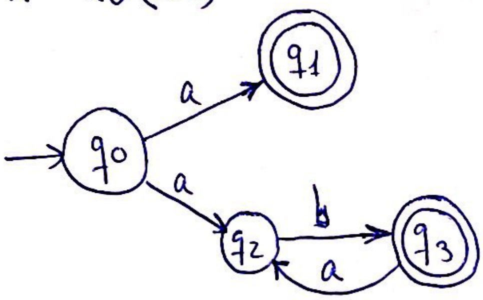
Ejercicio: AFD sobre $\Sigma = \{0,1\}$ acepte múltiplos de 5.

Cada estado es resto de dividir entre 5.

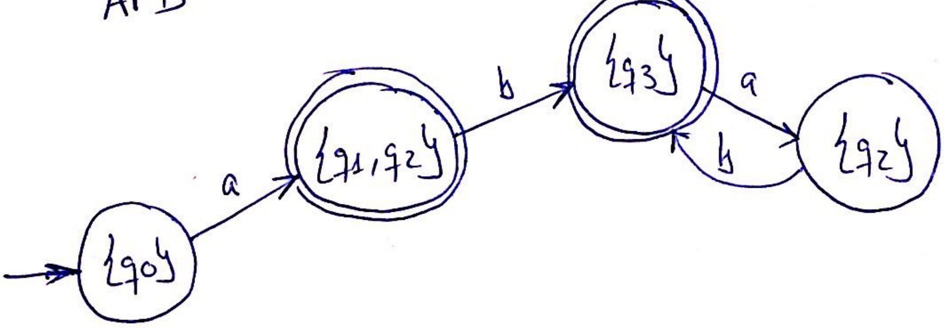


EQUIVALENCIA ENTRE AFN y AFD

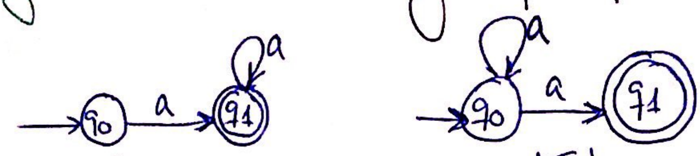
AFN $a \cup (ab)^+$ ~~AFD~~



AFD



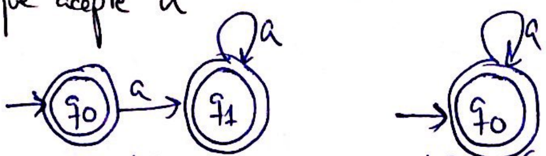
Ejercicio: Construir autómata finito que acepte a^+



AFD AFN

Son equivalentes

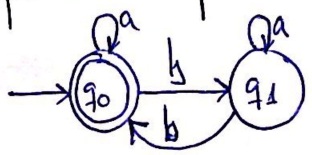
que acepte a^*



AFD AFD mínimo

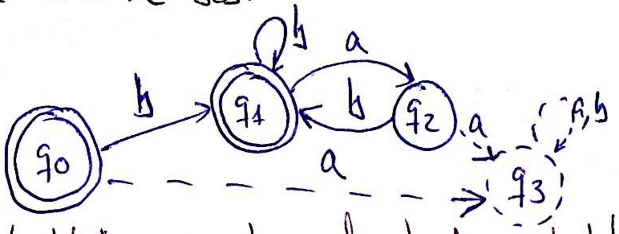
Ejerc. Expresión regular {a,b} que tienen nº par de bes. Construir AFD

$(a^*ba^*ba^*)^* \cup a^*$

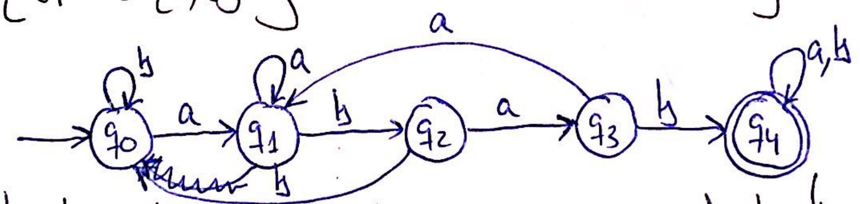


Ejerc. Toda a entre 2 bes.

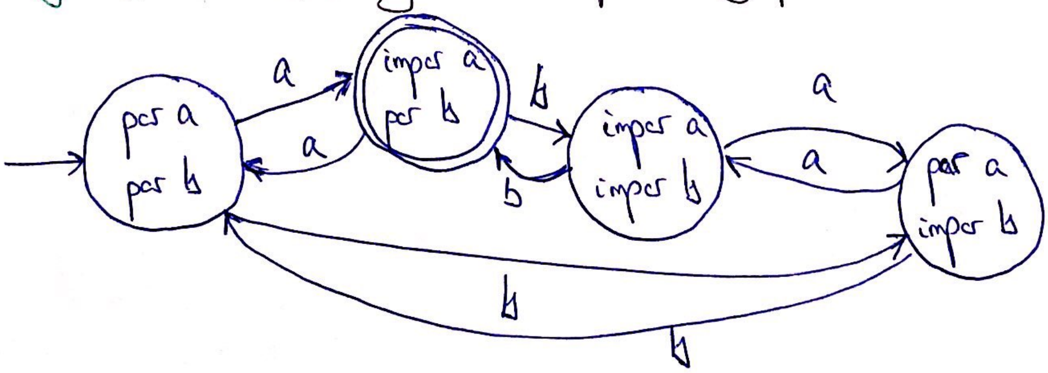
(b^*ab^*)



Ejerc. $\{w \mid w \in \{a,b\}^*$ y w contiene la subcadena abab$\}$

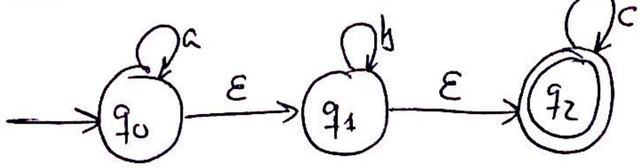


Ejerc. $\{w \mid w \in \{a,b\}^*$ y w número impar aes y par de bes.$\}$



Ejercicio: AFD a AFN-ε

$a^*b^*c^*$



$\varepsilon\text{-}c(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$ $\quad \varepsilon c(q_1) = \{q_1, q_2\}$ $\quad \varepsilon\text{-}c(q_2) = \{q_2\}$

$\Delta'(q_0, a) = \varepsilon\text{-}c[d(\varepsilon\text{-}c(q_0), a)] = \varepsilon\text{-}c[d(\{q_0, q_1, q_2\}, a)] = \varepsilon\text{-}c(\{q_0\}) = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Delta'(q_0, b) = \varepsilon\text{-}c[d(\varepsilon\text{-}c(q_0), b)] = \varepsilon\text{-}c[d(\{q_0, q_1, q_2\}, b)] = \varepsilon\text{-}c(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$

$\Delta'(q_0, c) = \varepsilon\text{-}c[d(\varepsilon\text{-}c(q_0), c)] = \varepsilon\text{-}c[d(\{q_0, q_1, q_2\}, c)] = \varepsilon\text{-}c(\{q_2\}) = \{q_2\}$

$\Delta'(q_1, a) = \varepsilon\text{-}c[d(\varepsilon\text{-}c(q_1), a)] = \varepsilon\text{-}c[d(\{q_1, q_2\}, a)] = \varepsilon\text{-}c(\emptyset) = \emptyset$

$\Delta'(q_1, b) = \varepsilon\text{-}c[d(\varepsilon\text{-}c(q_1), b)] = \varepsilon\text{-}c[d(\{q_1, q_2\}, b)] = \varepsilon\text{-}c(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$

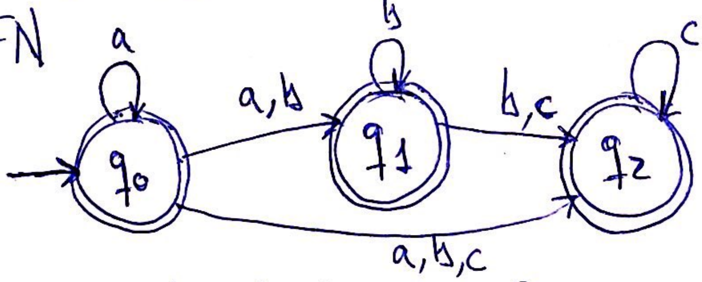
$\Delta'(q_1, c) = \varepsilon\text{-}c[d(\varepsilon\text{-}c(q_1), c)] = \varepsilon\text{-}c[d(\{q_1, q_2\}, c)] = \varepsilon\text{-}c(\{q_2\}) = \{q_2\}$

$\Delta'(q_2, a) = \emptyset$

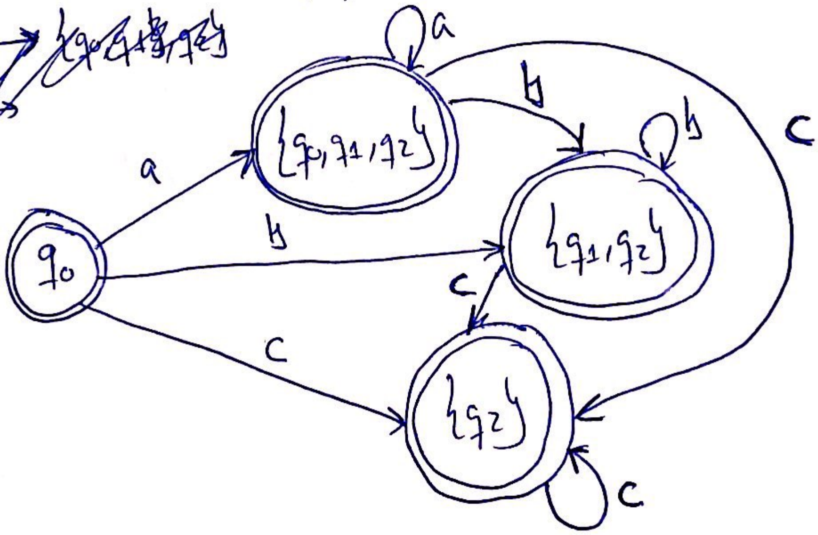
$\Delta'(q_2, b) = \emptyset$

$\Delta'(q_2, c) = \{q_2\}$

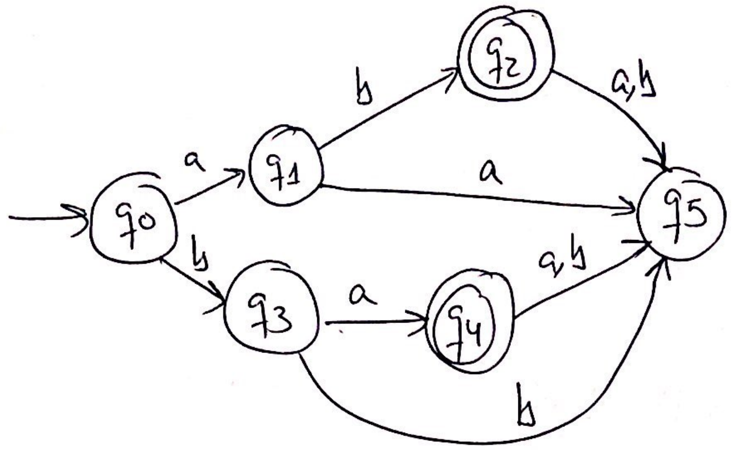
AFN



AFD



AUTÓMATAS FINITOS Y EXPRESIONES REGULARES



$A_0 = aA_1 \cup bA_3 \Rightarrow q_0 = aq_1 \cup bq_3 = \boxed{ab \cup ba}$

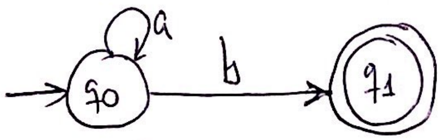
$A_1 = bA_2 \cup aA_5 = b$

$A_2 = (a\cup b)A_5 \cup \varepsilon$ tiene epsilon por ser final $= \varepsilon$

$A_3 = aA_4 \cup bA_5 = a\cdot\varepsilon \cup \emptyset b = a$

$A_4 = (a\cup b)A_5 \cup \varepsilon = \emptyset \cup \varepsilon = \varepsilon$

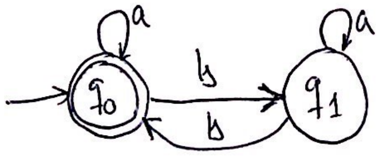
$A_5 = \emptyset$



$\left.\begin{array}{l} A_0 = aA_0 \cup bA_1 \\ A_1 = \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow A_0 = aA_0 \cup b$ No se puede continuar, entonces $\Rightarrow a^*b$

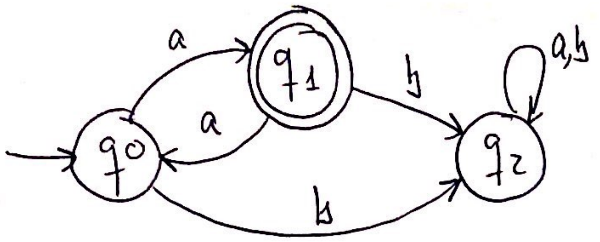
Lema de Arden

$$X = A\cdot X \cup B \quad \varepsilon \notin A \Rightarrow X = A^*\cdot B$$



$A_0 = aA_0 \cup bA_1 \cup \varepsilon = aA_0 \cup ba^*bA_0 \cup \varepsilon = (a\cup ba^*b)A_0 \cup \varepsilon = \boxed{(a\cup ba^*b)^*}$

$A_1 = aA_1 \cup bA_0 = a^*bA_0$



$$A_0 = aA_1 \cup bA_2 = aaA_0 \cup a = \boxed{(aa)^*a}$$

$$A_1 = aA_0 \cup bA_2 \cup \varepsilon = aA_0 \cup \varepsilon$$

$$A_2 = aA_2 \cup bA_2 = (a\cup b)A_2 = (a\cup b)^* \cdot \emptyset = \emptyset$$

Lenguaje NO regular: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$

LEMA DEL BOMBEO

$\exists K$ asociada a L, tal que, si w es cadena de L cuya longitud es mayor o igual que K, es decir, $w \in L, |w| \geq K$,

w se puede descomponer de la forma

$w = uvx$, donde $|v| \geq 1$, $|uv| \leq K$,

y todas las cadenas de la forma uv^ix pertenecerán a L, $\forall i \geq 0$

Sirve para demostrar que un lenguaje es NO regular.

Ex 2017/18

1.- a) Si que puede $\mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$ tienen la misma cardinalidad

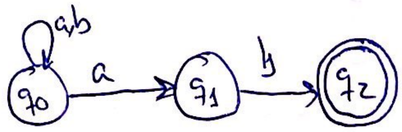
$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{P}$$
$$n \rightsquigarrow 2n \quad \text{aplicación biyectiva}$$

b) Cuando $\varepsilon \in L$

c) $L = \{a^i b^i \mid 0 \leq i \leq 1000\}$ regular porque es finito

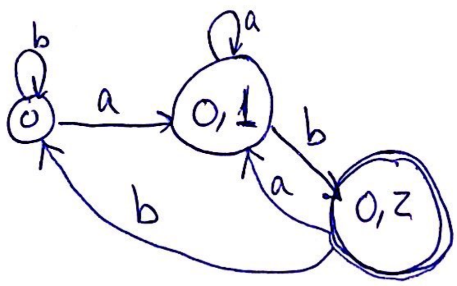
d) K es el Nº de estados de un supuesto AFD que aceptaría L, en caso de que fuera regular.

2.-



	a	b
q_0	q_0, q_1	q_0
q_1	$\emptyset$	q_0, q_2
q_2		

3.-



4.-

5.- $\{a^n b^m \mid n \geq m\}$

Suponemos que L es regular y sea K la constante asociada según el lema

$w \in L$, $w = a^K b^K$ $|w| = 2K \geq K$, cumple condiciones

w se descompone en $w = uvx$, $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq K$ y cualquier bombeo $uv^i x$ debería estar en L, $\forall i \geq 0$

$|uv| \leq K \Rightarrow u,v$ formados solo por aes.

$u = a^r$ $v = a^s$ $x = a^{K-(r+s)} b^K$

$i = 2 \Rightarrow$ se cumple $a > b$

$i = 0 \Rightarrow$ no se cumple $a < b \Rightarrow L$ no es regular.

Bd TC

6.-

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Sigma^* = \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \dots$

Algo es numerable ═ Si el procedimiento encuentra cualquier palabra creada que esté en sigma estrella

Pero no se pueden construir uno tras otro los lenguajes

10.- $\Sigma = \{a, b\}$

~~inselectivo~~

a) Verdadera

b) Falsa, cadena de longitud impar

c) Verdadera, ej: $\underbrace{\underline{aab}\,\underline{abb}}_{\underbrace{a\varepsilon b\ a\varepsilon b}_{a\varepsilon b}}$

d) Verdadera.

11.-

i) $\varepsilon \in P$

ii) $\sigma \in P, \forall \sigma \in \Sigma$

iii) Si $x \in P \Rightarrow \sigma x \sigma \in P, \forall \sigma \in \Sigma$

Con la cadena vacía se pueden hacer palíndromos de longitud par. $a\varepsilon a = aa$

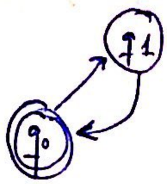
15.- a) Verdadera, 0 iteraciones en la primera a, 1 en la primera b, 2 en la segunda a y 0 en la segunda b

b) Verdadera

c) Falso, ε está en la intersección

d) Falso, cada iteración produce una a al ppo y una b al final

18.-

No, acepta solo la cadena vacía q_0 o hará un lazo y pasará a ser infinito 

20.- c)

B2 TC

25.- Hacemos la tabla:

		a	b
→	0	0,1	0,2
	1	1,3	1
	2	2	2,3
*	3	–	–

30.- Recordar que el lema del bombeo es ~~una expresión NO regular~~ para ver que es NO regular.

32.- Importante, bombeo.

B2

32.- $L = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$

Suponemos que es regular y K cte. asociada según el lema del bombeo

$w = a^K b^K$ $w \in L$ y $|w| = 2K \geq K$, w está en las condiciones.

w debería descomponerse como $w = uvx$, donde $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq K$ y cualquier bombeo $uv^i x$ debería estar en L, $\forall i \geq 0$

Si $|uv| \leq K \Rightarrow u, v$ formadas solo por aes

$u = a^r$ $v = a^s \; (s \geq 1)$ $x = a^{K-(r+s)} b^K$

$i \geq 2$ más aes que bes $\Rightarrow$ se cumple $uv^2x = a^{K+s} b^K$

$i = 0 \Rightarrow uv^0x = ux = a^r a^{K-(r+s)} b^K = a^{K-s} b^K \Rightarrow$ no se cumple, hay menos aes que bes

Por lo tanto, L no es regular.

Ejercicio: Lema bombeo $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ no es regular.

Suponemos que L es regular y sea K cte. asociada según el lema de bombeo

Elegimos $w = a^K b^K$

$w \in L$ y $|w| = 2K \geq K$, w está en condiciones del lema.

Por tanto, w se descompondría como $w = uvx$, donde $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq K$, y cualquier bombeo $uv^i x$ debería estar en L, $\forall i \geq 0$

Si $|uv| \leq K$, entonces u y v están formadas sólo por aes:

$$u = a^r \quad \underbrace{v = a^s \ (s \geq 1)}_{\text{Como tiene que haber al menos un símbolo } s \geq 1} \quad x = a^{K-(r+s)} b^K$$

Si bombeamos $i = 2 \Rightarrow uv^2x = a^r a^{2s} a^{K-(r+s)} b^K = a^{K+s} b^K$

Como $s \geq 1 \Rightarrow$ La cadena $a^{K+s} b^K$ no tiene el mismo número de aes que de bes.

Por lo tanto, L no es regular.