MAT0206/MAP0216 - Análise Real - IME - 2007
Prof. Gláucio Terra

7^a Lista de Exercícios

Para entregar: exercícios 15, 23, 37 e 42 do capítulo 10 do Elonzão; exercícios 1 e 2 abaixo.

1-) Seja:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \exp(-1/x), & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Mostre que f é de classe C^∞ e não é analítica.

2-) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Mostre que existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que: (i) $0 \leqslant \phi \leqslant 1$; (ii) $\phi \equiv 0$ em $(-\infty, a]$ e $\phi \equiv 1$ em $[b, +\infty)$. Sugestão: use a questão anterior.

3-) Exercícios do capítulo 12 do Elonzinho.

4-) (Produto de Séries de Potências) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries absolutamente convergentes de números reais. Mostre que a série $\sum c_n$ dada por $\big(\forall\, n \geqslant 0\big)\, c_n \doteq \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ é absolutamente convergente e $\sum_{n=0}^\infty c_n = (\sum_{n=0}^\infty a_n)(\sum_{n=0}^\infty b_n)$. Conclua que, se $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ são séries de potências convergentes em $(-r, r)$, então a série de potências $\sum c_n x^n$ dada por $\big(\forall\, n \geqslant 0\big)\, c_n \doteq \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ é convergente em $(-r, r)$ e, para todo $x \in (-r, r)$, $\sum_{n=0}^\infty c_n x^n = (\sum_{n=0}^\infty a_n x^n)(\sum_{n=0}^\infty b_n x^n)$.

5-) Exercícios 2, 4, 9, 10, 11, 15, 16, 21, 23, 26, 29, 30*, 31, 33, 35, 37, 40, 42 e 43** do capítulo 10 do Elonzão.

Observação:

* O exercício 30 é opcional e não faz parte do conteúdo que será cobrado nas provas. Uma sugestão para o mesmo é a seguinte: use o critério de Dirichlet para convergência uniforme (questão 29); para mostrar que a seqüência das reduzidas de $\sum \operatorname{sen}(nx)$ é uniformemente limitada em $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$, use a exponencial complexa (vide definição no Rudin, caso não conheça) e a identidade $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

** Para fazer o exercício 43, imite a demonstração (página 397 do Elonzão) de que, se $f(x) = \sum a_n x^n$ em $(-r, r)$, e se $a_0 = f(0) \neq 0$, então existe uma série de potências $\sum b_n x^n$, convergente num intervalo $(-s, s) \subset (-r, r)$ tal que, para todo $x \in (-s, s)$, tem-se $1/f(x) = \sum b_n x^n$.