MAC 105 – Fundamentos de Matemática para Computação

1ª Lista de Exercícios `1.0` – 29/2/2016 – Entrega 7/3/2016

Nas questões abaixo, justifique suas respostas, não fique só num *sim* ou *não*. Se for uma demonstração, diga antes que tipo de método usou (vai direto, vem direto, mistura de vai e vem, mágica,..); uma demonstração detalhada, que mostre claramente os métodos usados, é, neste ponto do curso, mais importante que duas demonstrações mais ou menos.

A lista para nota consiste só das questões marcadas com ❂. Ao lado do símbolo aparece um (número) que é o valor da questão. O peso da lista é a soma dos valores das questões.

Outras questões podem ser entregues para correção, ou comentadas em classe ou no fórum.

1. ❂ $\boxed{2}$ Liste ao menos três respostas plausíveis para cada uma das questões:
   (a) Como mostrar que dois números são iguais?
   (b) Como mostrar que dois conjuntos são iguais?

2. ❂ $\boxed{1}$ Considere a pergunta chave "Como posso provar que um inteiro positivo é primo?". O que está errado com a resposta: "mostre que ele é ímpar".

3. Suponha que você quer provar que " Se $y = m_1x + b_1$ e $y = m_2x + b_1$ são retas paralelas, então $m_1 = m_2$ ". Quais dessas perguntas são úteis e quais não, para o método do vai-e-vem:
   (a) Como posso provar que $m_1 = m_2$?
   (b) Como posso provar que duas linhas são paralelas?
   (c) Como posso provar que dois números reais são iguais?

4. ❂ $\boxed{3}$ Considere o problema de provar " Se

$$\begin{aligned} R &= \{\text{números reais } x \mid x^2 - x \le 0\} \\ S &= \{\text{números reais } x \mid -(x-1)(x-3) \le 0\} \\ T &= \{\text{números reais } x \mid x \ge 1\} \end{aligned}$$

   então $R \cap S \subseteq T$ ". Quais dessas perguntas são úteis e quais não, para o método do vai-e-vem:
   (a) Como mostro que um conjunto é subconjunto de outro?
   (b) Como mostro que $R \cap S \subseteq T$?
   (c) Como mostro que todo elemento de $R \cap S$ é maior ou igual a 1?
   (d) Como mostro que a interseção de dois conjuntos tem um ponto em comum com outro conjunto?
   (e) Que raios significa $R \cap S \subseteq T$?

5. (a) Seja k um inteiro positivo. Mostre que se a e b são congruentes módulo $3k$, então eles são congruentes módulo k.

   (b) Suponha que duas relações de equivalência, denotadas por $\sim$ e $\equiv$, foram definidas num mesmo conjunto A. Suponha também que foi provado que, para quaisquer elementos a, b de A, se $a \sim b$ então $a \equiv b$. Mostre que o número de classes de equivalência de $\equiv$ não é maior que o de classes de $\sim$.

6. Suponha que você já provou que " Se a e b são números reais não negativos, então $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$ ".

   (a) Mostre como usar esse fato acima para provar que se a e b são números reais tais que $b \geq 2|a|$, então $b \geq \sqrt{b^2 - 4a^2}$. Cuidado com a mistura de notação nas duas afirmativas.

   (b) Use a parte (a) para mostrar que se a e b são números reais com $a < 0$ e $b \geq 2|a|$, então uma das raízes da equação $ax^2 + bx + a = 0$ é $\leq -b/a$.

7. Considere o problema de provar que "se x e y são números reais não negativos satisfazendo $x + y = 0$, então $x = 0$ e $y = 0$."

   (a) Analise a prova abaixo, descrevendo os passos *vai* e os passos *vem*, bem como as perguntas chave e suas respostas.

      Prova: Primeiro, vamos mostrar que $x \leq 0$, porque, já que $x \geq 0$, daí seguirá que $x = 0$. Para isso, note que, pela hipótese, $x + y = 0$, logo $x = -y$. Já que $y \geq 0$, segue que $-y \leq 0$, portanto $x = -y \leq 0$. Para completar, como $x = 0$ e $x + y = 0$, vem que $0 = x + y = 0 + y = y$.

   (b) Reescreva essa demonstração totalmente na forma *vem*.