MAT0206/MAP0216 - Análise Real - IME - 2007

Prof. Gláucio Terra

3^a Lista de Exercícios

Para entregar: exercícios 10, 12, 29, 30.

Obs.: Regras para ganhar a nota extra referente aos exercícios marcados com "bônus": (1) a resolução deve redigida de forma clara e sem erros, e não há notas intermediárias; (2) a nota máxima a ser dada como bônus é 1,0 ponto na média do semestre; (3) os exercícios devem ser entregues no prazo para entrega da lista.

1-) Exercícios do capítulo 5 do Elonzinho.

2-) Toda coleção de abertos não-vazios, dois a dois disjuntos, é enumerável.

3-) (a) O conjunto dos valores de aderência de uma seqüência é um conjunto fechado.

(b) Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais e $X \doteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então $\overline{X} = X \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ é valor de aderência de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$.

4-) Definição: Seja $X \subset \mathbb{R}$; uma *cisão* de X é um par de subconjuntos $A, B \subset X$ tal que: (i) $A \cup B = X$ e (ii) $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ (i.e. nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A; em particular, A e B são disjuntos). A cisão diz-se *trivial* se A ou B for vazio; $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *conexo* se admitir apenas a cisão trivial (i.e. se (i) e (ii) acima implicarem $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$).

Mostre que todo intervalo real é conexo. Sugestão: Está demonstrado no Elonzinho, mas tente um pouco antes de olhar a referida demonstração.

5-) Sejam F, G conjuntos fechados disjuntos tais que $F \cup G$ seja um intervalo fechado. Então $F = \emptyset$ ou $G = \emptyset$.

6-) Seja $E \subset \mathbb{R}$ enumerável. Mostre que existe uma seqüência cujo conjunto de valores de aderência é $\overline{E}$. Use este fato para mostrar que todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$ é o conjunto dos valores de aderência de alguma seqüência. Bônus: vale 0,25 pontos na média do semestre.

7-) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Mostre que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê um exemplo no qual a inclusão não se reduz a uma igualdade.

8-) Um conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, satisfaz a seguinte condição: $\big(\forall\, a, b \in X\big)\; a < x < b \Rightarrow x \in X$.

9-) Um conjunto é denso em $\mathbb{R}$ se, e somente se, o seu complementar tem interior vazio.

10-) Defina a *distância* de um ponto $a \in \mathbb{R}$ a um conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ por $d(a, X) \doteq \inf\{|x-a| \mid x \in X\}$. Mostre que:

(a) $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow a \in \overline{X}$;

(b) Se $F \subset \mathbb{R}$ é fechado, então $\big(\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists b \in F\big)\; d(a, F) = |b-a|$.

11-) Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, $\overline{X}$ também o é. Além disso, $\sup X = \sup \overline{X}$. Enuncie e prove um resultado análogo para inf.

12-) Para todo $X \subset \mathbb{R}$, X' é fechado.

13-) Um número real a é ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, for ponto de acumulação de $\overline{X}$.

14-) $(X \cup Y)' = X' \cup Y'$.

15-) Sejam $F \subset \mathbb{R}$ fechado e $x \in F$. Então x é ponto isolado de F se, e somente se, $F \setminus \{x\}$ é fechado.

16-) Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ diz-se *perfeito* se $F = F'$ (i.e. F é um conjunto fechado sem pontos isolados). Mostre que um conjunto perfeito não-vazio não é enumerável.
Sugestão: (a) Demonstre o seguinte lema: seja $F = F'$ não-vazio; então, para todo $x \in F$, existe $F_x \subset F$ não-vazio, perfeito e limitado tal que $x \notin F_x$.

(b) Use o lema do item anterior e a mesma técnica que foi usada para demonstrar que $\mathbb{R}$ não é enumerável. Se não conseguir demonstrar usando esta sugestão, veja a demonstração no Elonzão.

17-) Seja $F \subset \mathbb{R}$ fechado, infinito enumerável. Então F possui uma infinidade de pontos isolados. Bônus: vale 0,25 pontos na média do semestre.

18-) Todo número real é limite de uma seqüência de números transcendentes dois a dois distintos.

19-) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *discreto* se todos os seus pontos forem isolados. Mostre que todo conjunto discreto é enumerável. Sugestão: Conforme demonstrado em aula, todo $X \subset \mathbb{R}$ possui um subconjunto enumerável denso em X.

20-) Se $X \subset \mathbb{R}$ não é enumerável, então $X \cap X' \neq \emptyset$.

21-) Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto e discreto (vide questão **19-)**). Então X é finito.

22-) (Teorema de Lindelöf) Seja $X \subset \mathbb{R}$. Toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável. Bônus: vale 0,25 pontos na média do semestre.

23-) Definição: Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é um *ponto de acumulação à direita* de X se, para todo $\epsilon > 0$, o intervalo $(a, a+\epsilon)$ contém algum ponto de X. Isto é equivalente a uma das seguintes condições:

(a) a é ponto de acumulação (ordinário) de $X \cap [a, +\infty)$;

(b) existe uma seqüência de elementos de X, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\; x_n > a$ e tal que $x_n \to a$;

(c) para todo $\epsilon > 0$, o intervalo $(a, a+\epsilon)$ tem uma infinidade de pontos de X.

Analogamente se define um *ponto de acumulação à esquerda* de X.

notação: $X'_+ \doteq \{a \in \mathbb{R} \mid a$ ponto de acumulação à direita de $X\}$,

$X'_- \doteq \{a \in \mathbb{R} \mid a$ ponto de acumulação à esquerda de $X\}$.

Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que a é um *ponto de acumulação bilateral* de X se $a \in X'_+ \cap X'_-$ (i.e. se for ponto de acumulação à direita e à esquerda), e que a é um *ponto de acumulação unilateral* se $a \in X'_+ \setminus X'_-$ ou $a \in X'_- \setminus X'_+$ (i.e. se for ponto de acumulação à direita e não o for à esquerda, ou se for ponto de acumulação à esquerda e não o for à direita).

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Mostre que, se todo ponto de acumulação de X é unilateral, então X é enumerável. BÔNUS: VALE 0,25 PONTOS NA MÉDIA DO SEMESTRE.

24-) As seguintes afirmações a respeito de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:

(a) X é limitado;

(b) Todo subconjunto infinito de X possui ponto de acumulação (que pode não pertencer a X);

(c) Toda seqüência de pontos de X possui uma subseqüência convergente (cujo limite pode não estar em X).

25-) DEFINIÇÃO: Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado. Define-se o *diâmetro* de A por: $\operatorname{diam} A \doteq \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de X. Um número real $\delta > 0$ chama-se um *número de Lebesgue* para a cobertura $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de X se , para todo subconjunto $I \subset X$ com diâmetro menor ou igual a δ, existe $\lambda \in L$ tal que $I \subset A_\lambda$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Mostre que toda cobertura aberta $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ admite um número de Lebesgue. BÔNUS: VALE 0,25 PONTOS NA MÉDIA DO SEMESTRE.

26-) Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de $[a, b]$. Mostre que é possível decompor $[a, b]$ em um número finito de intervalos justapostos, de modo que cada um deles esteja contido em algum A_λ. Mostre ainda que estes intervalos podem ser tomados todos com o mesmo comprimento. SUGESTÃO: Use a questão anterior.

27-) (TEOREMA DE BAIRE) Seja $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}$, tal que $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, F_n$ é fechado e tem interior vazio. Então $S \doteq \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ tem interior vazio. SUGESTÃO: Pela questão **9-)**, é equivalente mostrar que a intersecção dos complementares dos F_n's é densa em $\mathbb{R}$; imite a demonstração que fizemos para mostrar que $\mathbb{R}$ não é enumerável. BÔNUS: VALE 0,25 PONTOS NA MÉDIA DO SEMESTRE.

28-) O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos números irracionais não pode ser expresso como reunião enumerável de fechados. SUGESTÃO: Use a questão anterior.

29-) Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *localmente limitada* se, para cada $x \in X$, existe um intervalo aberto I_x contendo x tal que $f|_{I_x \cap X}$ é limitada (i.e. se f for limitada numa vizinhança aberta de cada ponto de X). Mostre que, se X é compacto, toda função $f : X \to \mathbb{R}$ localmente limitada é limitada. SUGESTÃO: propriedade de Borel-Lebesgue.

30-) Se $X \subset \mathbb{R}$ é não-enumerável, X' também o é.

31-) DEFINIÇÃO: Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é um *ponto de condensação* de X se todo intervalo aberto de centro a contiver uma infinidade não-enumerável de pontos de X.

Sejam $F \subset \mathbb{R}$ fechado e F_0 o conjunto dos pontos de condensação de F. Mostre que F_0 é um conjunto perfeito (vide questão **16-)**) e que $F \setminus F_0$ é enumerável. Conclua daí o *teorema de Bendixon*: todo fechado da reta é a reunião de um conjunto perfeito com um conjunto enumerável.

BÔNUS: VALE 0,25 PONTOS NA MÉDIA DO SEMESTRE.

32-) Seja K o conjunto de Cantor (vide definição no Elonzinho ou Elonzão). Dado $\epsilon > 0$, mostre que existem intervalos abertos $\big(\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\big)\, J_i = (a_i, b_i)$ tais que $K \subset \cup_{i=1}^n J_i$ e $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \epsilon$.