Elementos de Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos

Jaime Campos Ferreira

Uma reedição revista pelo autor
dos capítulos iniciais das
Lições de Análise Real

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
Outubro de 2001

Introdução

Alguns amigos e colegas, regentes das primeiras disciplinas de Análise Matemática no IST, aconselharam uma reedição dos dois primeiros capítulos do texto *Lições de Análise Real* (que redigi há mais de trinta anos), por entenderem que, nas condições actuais do nosso ensino, poderiam ser de alguma utilidade como introdução aos principais assuntos versados nas suas aulas. Foi esta a causa da presente publicação. O texto foi agora submetido a uma revisão ligeira; no entanto, para os estudantes que utilizem também o livro *Introdução à Análise Matemática*, convém mencionar uma pequena diferença: o conjunto dos números naturais (em ambos os trabalhos designado pela letra $\mathbb{N}$) é definido nesse livro por forma a incluir o número zero, enquanto no texto que agora se publica o não inclui. Trata-se evidentemente de uma discrepância em matéria de natureza convencional, da qual, depois de devidamente acentuada, não resultará decerto qualquer inconveniente para os eventuais utilizadores dos dois trabalhos.

Lisboa, Outubro de 2000,

Jaime Campos Ferreira

Uma edição do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico. Setembro de 2001.

Índice

Capítulo 1

Elementos de lógica matemática

Para compreender bem as definições e teoremas que constituem as teorias matemáticas cujo estudo vamos iniciar, é indispensável habituarmo-nos a usar uma linguagem mais precisa e rigorosa do que a que se utiliza, em geral, na vida corrente. A aquisição desse hábito pode ser muito facilitada pelo recurso a algumas noções e símbolos da Lógica Matemática, dos quais indicaremos neste primeiro capítulo, de forma muito resumida e largamente baseada na intuição, aqueles que têm maior interesse para a sequência do nosso curso.

Convém, no entanto, observar que a Lógica Matemática tem hoje aplicações concretas extremamente importantes, em diversos domínios; uma das mais notáveis é, sem dúvida, a sua utilização no planeamento dos modernos computadores electrónicos.

1.1 Termos e proposições. Álgebra proposicional.

A linguagem usada na Matemática, como qualquer outra linguagem, compreende *designações* (também chamadas *nomes* ou *termos*) e *proposições* (ou *frases*). As designações servem para indicar determinados *objectos matemáticos*: números, pontos, conjuntos, funções, operações, figuras geométricas, etc.; as proposições exprimem *afirmações* — que podem ser *verdadeiras* ou *falsas* — a respeito dos mesmos objectos.

Como exemplos de designações registamos as seguintes[1]:

$$7, \quad 3+4, \quad \left(2-\sqrt{\pi}\right)^7, \quad 2+3i, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{R}.$$

Observe-se que as duas primeiras designações se referem ao mesmo objecto: são designações *equivalentes* ou *sinónimas*; para indicar que duas designações, a e b, são equivalentes, escreve-se usualmente $a = b$. Como exemplos de proposições (as duas primeiras verdadeiras, as outras falsas)

[1]Designamos por $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números reais.

podemos indicar:

$$7 = 3 + 4, \quad 4 \leq 4, \quad 2 + 3i = 3 + 2i, \quad 2 + 1 < 1 + 2.$$

Uma proposição é necessariamente verdadeira ou falsa (mas nunca uma coisa e outra); na primeira hipótese, diz-se também por vezes que a proposição tem o *valor lógico* 1, na segunda que tem o *valor lógico* 0. Os símbolos 1 e 0 servem assim, de forma convencional, para designar respectivamente *verdade* e *falsidade*.

Duas proposições dizem-se *equivalentes* quando têm o mesmo valor lógico; por exemplo, são equivalentes as proposições

$$7 \leq 0 \quad e \quad (-2)^5 = 2^5.$$

Para indicar que duas proposições — designadas, por exemplo, pelos símbolos p e q — são equivalentes, costuma-se escrever $p \Longleftrightarrow q$.

Dadas duas proposições, p e q, chama-se *conjunção* ou *produto lógico* de p e q, e designa-se por $p \wedge q$ (ler "p e q") a proposição que consiste em afirmar simultaneamente p e q. A proposição $p \wedge q$ será, portanto, verdadeira se o forem as duas proposições dadas e falsa quando uma destas for falsa (ou quando o forem ambas).

Por exemplo, a conjunção das proposições "4 é um número par" e "4 é um divisor de 10" equivale à afirmação de que "4 é um número par e um divisor de 10" e é, evidentemente, uma proposição falsa.

Por outro lado, chama-se *disjunção* ou *soma lógica* de p e q, e designa-se por $p \vee q$, ("p ou q"), a proposição que consiste em afirmar que pelo menos uma das proposições dadas é verdadeira. Nestas condições, a proposição $p \vee q$ só é falsa quando o forem ambas as proposições p e q. A disjunção das duas proposições consideradas no exemplo anterior é a proposição (verdadeira): "4 é um número par ou é um divisor de 10".

Nas tabelas seguintes, análogas às vulgares tabuadas das operações elementares estudadas na escola primária, indicam-se os valores lógicos das proposições $p \wedge q$ e $p \vee q$, em correspondência com os possíveis valores lógicos de p e q:

Observe-se que o valor lógico de $p \wedge q$ é o *mínimo* dos valores lógicos das proposições p e q, enquanto o valor lógico de $p \vee q$ é o *máximo* dos valores lógicos das mesmas proposições (evidentemente, no caso de estas terem valores lógicos iguais, entende-se por máximo e mínimo desses valores lógicos o seu valor comum).

Nota. *Podem definir-se de forma inteiramente análoga a conjunção e a disjunção no caso de serem dadas mais de duas proposições. Por exemplo, a conjunção das proposições p, q, r,... consiste na afirmação de que todas essas proposições são verdadeiras e é portanto uma proposição que só é falsa se alguma das proposições p, q, r,..., o fôr.*

$p \wedge q$

$q \backslash p$	0	1
0	0	0
1	0	1

$p \vee q$

$q \backslash p$	0	1
0	0	1
1	1	1

Sendo p uma proposição, a *negação* de p é uma nova proposição, que costuma designar-se por $\sim p$ ou *não* p. A proposição $\sim p$ é verdadeira sse[2] p é falsa. A soma dos valores lógicos de p e $\sim p$ é, portanto, sempre igual à unidade.

É evidente que, para toda a proposição p, se tem:

$$\sim (\sim p) \Longleftrightarrow p.$$

Verificam-se também sem dificuldade as seguintes propriedades (conhecidas por *primeiras leis de De Morgan*), que relacionam as três operações lógicas designadas pelos símbolos $\vee$, $\wedge$ e $\sim$:

$$\begin{aligned} \sim (p \wedge q) &\Longleftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q) \\ \sim (p \vee q) &\Longleftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q). \end{aligned}$$

Em linguagem corrente, a primeira destas propriedades poderia exprimir-se da forma seguinte: negar que as proposições p e q sejam ambas verdadeiras equivale a afirmar que pelo menos uma delas é falsa.

Uma outra operação lógica importante é a *implicação*: dadas duas proposições p e q, designa-se correntemente pelo símbolo $p \Longrightarrow q$ (que pode ler-se "p implica q" ou "se p, então q") uma nova proposição que consiste em afirmar que, se p é verdadeira, q também o é. A implicação $p \Longrightarrow q$ só é portanto falsa no caso de p ser verdadeira e q ser falsa, isto é, se o valor lógico de p fôr maior do que o de q. Assim, por exemplo, das proposições:

$$\begin{aligned} 2 \geq 2 &\Longrightarrow 3 > 2 + 1, \\ 3 = 2 &\Longrightarrow 5 < 0, \\ 3 = 2 &\Longrightarrow 5 \geq 0, \\ (1000!)^2 > 2^{20000} &\Longrightarrow 1000! > 2^{10000} \end{aligned}$$

[2] Usamos *sse* como abreviatura da expressão *se e só se*.

só a primeira é falsa.

Evidentemente, quando se verificam conjuntamente as implicações $p \Longrightarrow q$ e $q \Longrightarrow p$, as proposições p e q são equivalentes; simbolicamente:

$$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)] \iff (p \Longleftrightarrow q).$$

1.2 Expressões com variáveis.

Além dos termos e proposições que temos estado a considerar, a linguagem matemática usa constantemente expressões em que intervêm *variáveis*, isto é símbolos (em geral, letras) que podem ser substituídos por designações de acordo com determinadas regras.[3] Por exemplo, as expressões:

$$x, \quad (x-y)^2, \quad x^2 - 2xy + y^2$$

não são propriamente designações, mas converter-se-ão em designações (de números reais) se as letras que nelas figuram forem substituídas por números reais arbitários; assim, se substituirmos x por 1 e y por 0, as três expressões referidas converter-se-ão em designações do número 1.

Às expressões com variáveis que, como as precedentes, se transformam em designações quando as variáveis que nelas figuram são substituídas por designações convenientes, chamaremos *expressões designatórias* . São também expressões designatórias as seguintes:

$$\sqrt{x-1}, \quad \operatorname{cotg} x, \quad \frac{y}{x}.$$

Convém no entanto observar que, para que estas últimas expressões se convertam em designações de números reais, não basta substituir as variáveis por números reais arbitrários: por exemplo, da substituição de x por 0 não resultaria em qualquer dos casos a designação de um número real (fosse qual fosse o valor atribuído à variável y, no caso da terceira expressão).

Duas expressões designatórias numa mesma variável x dizem-se *equivalentes* se todo o valor de x que converta alguma delas numa designação, converter a outra numa designação equivalente. São equivalentes *no conjunto dos reais* as expressões x e $\sqrt[3]{x^3}$, mas não o são as expressões $\sqrt{|x|}$ e $\sqrt{x}$ (substituindo x por -1, por exemplo, a primeira converte-se numa designação do número 1 e a segunda num símbolo sem significado).

Evidentemente, a definição de equivalência é análoga no caso de expressões designatórias com mais de uma variável; assim, por exemplo, são equivalentes as expressões designatórias:

$$(x-y)^2 \quad \text{e} \quad x^2 - 2xy + y^2,$$

[3]Nos casos habituais uma variável pode ser substituída por qualquer termo de entre os que se referem aos objectos de um determinado conjunto, chamado *domínio* da variável em causa. Atribuir à variável, como valor, um certo objecto (pertencente ao domínio) consiste precisamente em substituí-la por qualquer designação desse objecto, em todos os lugares em que ela ocorra na expressão considerada.

(supondo que x e y têm por domínio o conjunto $\mathbb{R}$).

Consideremos agora as expressões:

$$x^2 > 0, \quad 2^x = x^2, \quad x^2 - y^2 = 0, \quad x - y > y - z.$$

Se em qualquer destas expressões substituirmos todas as variáveis por designações de números reais, obteremos desta vez, não designações, mas sim proposições, verdadeiras ou falsas.

As expressões com variáveis, que se transformam em proposições quando as variáveis são substituídas por designações convenientes, chamam-se *expressões proposicionais* ou *condições*.

As expressões proposicionais podem também combinar-se por meio de operações lógicas inteiramente análogas às que considerámos no caso das proposições.

Sejam, por exemplo, $p(x)$ e $q(x)$ duas expressões proposicionais com uma variável.

A *conjunção*, $p(x) \wedge q(x)$, é uma nova condição que se converte numa proposição verdadeira sse forem atribuídos a x valores que tornem verdadeiras as duas condições $p(x)$ e $q(x)$. A *disjunção*, $p(x) \vee q(x)$, é uma condição que só é falsa para os valores da variável que tornam $p(x)$ e $q(x)$ ambas falsas.

A negação de $p(x)$ é a condição $\sim p(x)$, apenas verdadeira para os valores de x que convertem $p(x)$ numa proposição falsa. A *implicação*, $p(x) \Longrightarrow q(x)$, é uma condição que se converte numa proposição falsa sse forem atribuídos à variável x valores para os quais $p(x)$ seja verdadeira e $q(x)$ falsa. Finalmente, a *equivalência*, $p(x) \Longleftrightarrow q(x)$, é a conjunção das implicações $p(x) \Longrightarrow q(x)$ e $q(x) \Longrightarrow p(x)$.

Vejamos alguns exemplos de equivalências (verdadeiras, quaisquer que sejam os valores reais atribuídos às variáveis):

$$[(x > 3) \vee (x = 3)] \Longleftrightarrow x \geq 3,$$
$$[(x < 3) \wedge (x \geq 2)] \Longleftrightarrow 2 \leq x < 3,$$
$$\sim (x < 1) \Longleftrightarrow x \geq 1,$$
$$x^2 > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0.$$

São também sempre verdadeiras as condições:

$$x < 1 \Longrightarrow x < 3,$$
$$[(x < y) \wedge (y < z)] \Longrightarrow x < z,$$

e, supondo que x designa agora uma variável cujo domínio é o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$:

$$\sim (x \text{ é par }) \Longleftrightarrow x \text{ é ímpar},$$
$$x \text{ é múltiplo de } 6 \Longrightarrow x \text{ é múltiplo de } 3,$$
$$[(x \text{ é múltiplo de } 2) \wedge (x \text{ é múltiplo de } 3)] \Longleftrightarrow (x \text{ é múltiplo de } 6).$$

1.3 Quantificadores.

Se, numa dada condição $p(x)$, atribuirmos à variável x um dos valores do seu domínio, obteremos, como vimos, uma proposição. Outra forma, extremamente importante em Matemática, de obter proposições a partir de uma condição $p(x)$, é antepor-lhe um dos símbolos $\forall_x$ ou $\exists_x$, que se chamam *quantificadores* (*quantificador universal* e *quantificador existencial*, respectivamente).

A proposição $\forall_x\, p(x)$ lê-se "qualquer que seja $x, p(x)$" ou "para todo o x, tem-se $p(x)$" e é verdadeira sse, atribuindo a x qualquer valor do seu domínio, $p(x)$ se converter sempre numa proposição verdadeira. A proposição $\exists_x\, p(x)$, que se lê "existe um x tal que $p(x)$" ou "para algum x, tem-se $p(x)$", é falsa sse $p(x)$ se transformar numa proposição falsa sempre que à variável x seja atribuído um valor qualquer do seu domínio.

Por exemplo, sendo x uma variável real, são verdadeiras as proposições:

$$\forall_x\ x^2+1>0, \quad \exists_x\ x^4 \leq 0 \quad e \quad \exists_x\ x^2-3=0.$$

A definição e o uso dos quantificadores, no caso de proposições com mais de uma variável, são inteiramente análogos. Assim, supondo x e y variáveis reais, a proposição $\forall_x \exists_y\ y<x$ pode ler-se "qualquer que seja x existe um y tal que $y<x$" e equivale portanto a afirmar que "não existe um número real que seja menor do que todos os outros". É, evidentemente, uma proposição verdadeira (observe-se que seria falsa se o domínio das variáveis x e y fosse, em vez do conjunto dos reais, o dos naturais).

A proposição $\exists_y \forall_x\ y<x$, que exprime a existência de um número real menor do que qualquer outro (e até menor do que ele próprio), é obviamente falsa.

Convém notar bem que, como acabámos de ver, trocando a posição dos dois quantificadores que intervêm na proposição $\forall_x \exists_y\ y<x$, se obtem uma proposição não equivalente. Este facto verifica-se correntemente, quando os quantificadores trocados são de tipo diferente (um universal, outro existencial).

Em contrapartida, a permutação de quantificadores do mesmo tipo conduz sempre, como é fácil verificar, a uma proposição equivalente à inicial. Por exemplo, são equivalentes as proposições:

$$\forall_x \forall_y\ [x^3=y^3 \Longleftrightarrow x=y]$$
$$\forall_y \forall_x\ [x^3=y^3 \Longleftrightarrow x=y]$$

que podem escrever-se abreviadamente[4]:

$$\forall_{x,y}\ [x^3=y^3 \Longleftrightarrow x=y].$$

[4]Esta proposição, verdadeira no caso de x e y serem variáveis reais, seria falsa se se tratasse de variáveis complexas (isto é, de variáveis tendo por domínio o conjunto dos números complexos). Em qualquer hipótese, porem, era sempre legítima a permutação dos dois quantificadores universais.

Dadas duas condições — $p(x,y)$ e $q(x,y)$ por exemplo — diz-se que a primeira *implica formalmente* a segunda sse é verdadeira a proposição:

$$\forall_{x,y}\ p(x,y) \Longrightarrow q(x,y)$$

Por exemplo, no conjunto dos reais, $x = y^2$ implica formalmente $x^2 = y^4$, mas já a implicação

$$x > y \Longrightarrow x^2 > y^2$$

não é formal.

Observe-se que é vulgar na linguagem matemática usar-se apenas a palavra "implica" no sentido de "implica formalmente" e até escrever somente $p(x) \Longrightarrow q(x)$, em lugar de $\forall_x\ p(x) \Longrightarrow q(x)$. Trata-se de "abusos de linguagem" que, geralmente, não têm inconveniente de maior, porque o próprio contexto permite reconhecer com facilidade se se pretende ou não exprimir uma implicação formal.

De forma análoga, diz-se que as condições $p(x,y)$ e $q(x,y)$ são *formalmente equivalentes* (ou apenas *equivalentes*) sse se tiver:

$$\forall_{x,y}\ p(x,y) \Longleftrightarrow q(x,y),$$

expressão esta em que, muitas vezes, se suprime também o quantificador.

Convém salientar que a implicação formal $p(x,y) \Longrightarrow q(x,y)$ pode também exprimir-se dizendo que "$p(x,y)$ é *condição suficiente* para $q(x,y)$" ou que "$q(x,y)$ é *condição necessária* para $p(x,y)$". No caso de equivalência formal costuma também dizer-se que "$p(x,y)$ é *condição necessária e suficiente* para $q(x,y)$".

Têm importância fundamental as seguintes leis — designadas por *segundas leis de De Morgan* — que indicam como se efectua a negação de proposições com quantificadores:

$$\sim \forall_x\ p(x) \Longleftrightarrow \exists_x \sim p(x),$$
$$\sim \exists_x\ p(x) \Longleftrightarrow \forall_x \sim p(x).$$

Para enunciar esta última, poderia dizer-se que "não existindo nenhum valor de x que torne $p(x)$ verdadeira, todos os valores de x tornam essa proposição falsa, e reciprocamente". Assim, por exemplo:

$$\sim \forall_x\ x^2 > 0 \Longleftrightarrow \exists_x\ x^2 \leq 0,$$
$$\sim \forall_{x,y}\exists_z\ x = yz \Longleftrightarrow \exists_{x,y}\forall_z\ x \neq yz.$$

Exercícios

1. Prove que, quaisquer que sejam as proposições p, q e r, se tem:

$$p \vee q \iff q \vee p \quad \text{(comutatividade da disjunção)},$$
$$(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r) \quad \text{(associatividade da disjunção)},$$
$$p \wedge q \iff q \wedge p \quad \text{(comutatividade da conjunção)},$$
$$(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r) \quad \text{(associatividade da conjunção)},$$
$$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$\text{(distributividade da conjunção a respeito da disjunção)},$$
$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$\text{(distributividade da disjunção a respeito da conjunção)}.$$

2. Prove que, quaisquer que sejam as proposições p, q e r, são verdadeiras as proposições:

$$(p \Longrightarrow q) \iff [(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)] \qquad \text{(regra do contra-recíproco)},$$
$$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q,$$
$$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r).$$

3. Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas (supondo que as variáveis intervenientes têm por domínio: a) o conjunto dos reais; b) o conjunto dos naturais):

$$\forall_x\ x^2+1>1, \quad \forall_x(x>2 \Longrightarrow x>1), \quad \forall_x \exists_y\ y=x^2,$$
$$\exists_y \forall_x\ y=x^2, \quad \forall_{x,y}\exists_z\ x=yz, \qquad \exists_{x,y}\ (x-y)^2=x^2-y^2,$$
$$\forall_{x,y}\ (x-y)^2=x^2-y^2.$$

4. Verifique que, no conjunto dos reais, as condições $\exists_x y=x^2$ e $y \geq 0$ são (formalmente) equivalentes. Observe bem que o quantificador $\exists_x$ converteu a condição com duas variáveis $y=x^2$, numa expressão proposicional equivalente à condição $y \geq 0$, que tem apenas uma variável (a variável y, que se diz *variável não quantificada* ou *variável livre*). Na mesma ordem de ideias verifique as equivalências (formais):

$$\exists_y x=10^y \iff x>0 \qquad (\text{em } \mathbb{R}),$$
$$\forall_x\ y \leq x \iff y=1 \qquad (\text{em } \mathbb{N}),$$
$$\forall_x\ y<x \iff y=y+1 \qquad (\text{em } \mathbb{N}),$$
$$\exists_z\ x=y+z \iff x>y \qquad (\text{em } \mathbb{N}).$$

5. Mostre que as condições $p(x) \Longrightarrow q(x)$ e $\sim q(x) \Longrightarrow \sim p(x)$ são equivalentes, mas que, em geral, qualquer delas não é equivalente a

$q(x) \Longrightarrow p(x)$ (de contrário, como observa Godement no seu livro citado na Bibliografia, do facto de todos os homens serem mortais poderia deduzir-se que todos os cães são imortais...).

6. Escreva a negação de cada uma das condições seguintes:

$$x > z \Longrightarrow |f(x)| < \epsilon, \qquad |f(x)| < \epsilon \Longrightarrow x > z,$$
$$\forall_x\ y = x^2, \qquad \exists_y\ y = x^2, \qquad \forall_x \forall_y\ z - x = x - y,$$
$$\exists_x \forall_y\ z - x = x - y, \qquad \exists_x \exists_y\ z - x = x - y,$$
$$\forall_y \exists_z \forall_x\ x > z \Longrightarrow f(x) > y, \qquad \forall_y \exists_z \forall_x\ x < z \Longrightarrow |f(x)| > y.$$

7. Como é sabido, sendo u_n o termo geral de uma sucessão de termos reais e a um número real, a proposição lim $u_n = a$ é equivalente a

$$\forall_\delta \exists_p \forall_n (n > p \Longrightarrow |u_n - a| < \delta)$$

(onde p e n têm por domínio o conjunto dos naturais e δ o conjunto dos reais positivos). Tendo em conta este facto, mostre que a proposição $\sim (\lim u_n = a)$ equivale a

$$\exists_\delta \forall_p \exists_n (n > p\ \wedge\ |u_n - a| \geq \delta)$$

Serão estas últimas proposições equivalentes a lim $u_n \neq a$?

8. Sabendo que a sucessão (de termo geral) u_n é *limitada* sse $\exists_k \forall_n\ |u_n| < k$, defina a noção de sucessão ilimitada (isto é, não limitada). Mostre que as sucessões que verificam a condição $\forall_n \exists_k\ |u_n| < k$ não são, de forma alguma, apenas as sucessões limitadas.

9. Verifique que sendo z e ϵ números reais, se $\forall_\epsilon (\epsilon > 0 \Rightarrow |z| < \epsilon)$, então $z = 0$.

Bibliografia

[1] F. Dias Agudo. *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica.* 1964.

[2] R. Godement. *Cours d'Algèbre.*

[3] M. Monroe. *Introductory Real Analysis.*

[4] J. Santos Guerreiro. *Curso de Matemáticas Gerais.* Livraria Escolar Editora, 1973.

[5] J. Sebastião e Silva. *Compêndio de Matemática*, volume 1, 1º tomo. Gabinete de Estudos e Planeamento, Ministério da Educação, 1970.

[6] R. Stoll. *Sets, Logic and Axiomatic Theories.*

[7] P. Suppes. *Introduction to Logic.*

Capítulo 2

Elementos de teoria dos conjuntos.

As ideias essenciais da teoria dos conjuntos foram introduzidas por G. Cantor, na parte final do Século XIX. Desde então a teoria dos conjuntos não deixou de desenvolver-se intensamente, de tal forma que hoje pode dizer-se que todos os ramos da Matemática foram profundamente influenciados e enriquecidos por essa teoria. Procuraremos neste Capítulo introduzir algumas das ideias básicas da teoria dos conjuntos, evitando no entanto (mesmo com eventual prejuízo de rigor) uma formulação demasiada abstracta, que julgamos imcompatível com a formação média dos alunos que frequentam o curso. Aliás, o estudo desta teoria poderá ser aprofundado pelos alunos que o desejarem, por meio de alguns dos trabalhos mencionados na Bibliografia.

2.1 Conjuntos. Operações fundamentais.

A noção de *conjunto* é uma das noções primitivas da Matemática Moderna, isto é, um dos conceitos adoptados como ponto de partida e que servem de base para a definição dos outros conceitos introduzidos no desenvolvimento da teoria. Intuitivamente, um conjunto é encarado como uma colecção de objectos de natureza qualquer, os quais se dizem *elementos* do conjunto. Representa-se simbolicamente por $x \in X$ a proposição "x é um elemento do conjunto X" que também se lê "x *pertence* a X"[1]. A negação desta proposição escreve-se $x \notin X$. Assim, são verdadeiras as proposições:

$$2 \in \mathbb{N}, \quad -2 \notin \mathbb{N}, \quad \pi \notin \mathbb{N}.$$

Para designar o conjunto que tem a, b e c por únicos elementos usa-se correntemente o símbolo $\{a, b, c\}$. Da mesma forma, o conjunto dos números naturais menores do que 5 pode ser designado por $\{1, 2, 3, 4\}$, etc. Frequentemente, um conjunto é definido por uma certa condição, $p(x)$: os elementos do conjunto são então precisamente os objectos que convertem $p(x)$ numa

[1]Em estruturações rigorosas da teoria dos conjuntos, a noção expressa pelo sinal "$\in$" é também adoptada como noção primitiva da teoria.

proposição verdadeira. Em tal hipótese, recorre-se, para designar o conjunto, ao símbolo $\{x : p(x)\}$, que pode ler-se "conjunto dos x que verificam a condição $p(x)$" ou "conjunto dos x tais que $p(x)$". Assim, o conjunto dos naturais menores do que 5 poderia também ser designado de qualquer das formas seguintes:

$$\{x : x \in \mathbb{N} \ \wedge \ x < 5\}, \quad \{x : x = 1 \ \vee \ x = 2 \ \vee \ x = 3 \ \vee \ x = 4\}.$$

Sendo A e B dois conjuntos, diz-se que A *está contido* em B ou que A é uma *parte* ou um *subconjunto* de B sse todos os elementos de A pertencem também a B, isto é, sse

$$\forall_x (x \in A \Longrightarrow x \in B).$$

Para afirmar que A está contido em B escreve-se $A \subset B$ e para o negar, $A \not\subset B$. Nestas condições a proposição $A \not\subset B$ é equivalente a

$$\exists_x (x \in A \ \wedge \ x \notin B).$$

Nota. *Em vez de* $\exists_x (x \in A \ \wedge \ x \notin B)$ *pode também escrever-se* $\exists_{x \in A} \ x \notin B$ *(existe um x pertencente a A que não pertence a B); analogamente, a expressão* $\forall_x (x \in A \Longrightarrow x \in B)$*, pode abreviar-se para* $\forall_{x \in A} \ x \in B$ *(todo o x pertencente a A pertence a B). Esta simplificação de notações, que usaremos na sequência em casos análogos é, por vezes, de grande comodidade.*

Com o mesmo significado de $A \subset B$ é também usual escrever-se $B \supset A$, e dizer-se que B *contém* A ou é um *sobreconjunto* de A. Convém notar que o facto de se verificar a relação $A \subset B$ não exclui a possibilidade de se ter também $B \subset A$; quando estas duas relações são conjuntamente verificadas os conjuntos A e B têm precisamente os mesmos elementos e diz-se então que são iguais (ou que são o mesmo conjunto), podendo escrever-se

$$A = B.$$

Quando se tem $A \subset B$, mas não $A = B$, diz-se que A é uma *parte estrita* ou uma *parte própria* de B.

Chama-se *conjunto singular* a qualquer conjunto com um só elemento; o conjunto singular que tem a por único elemento é habitualmente representado por $\{a\}$. Convém notar que neste caso, seria incorrecto escrever $a = \{a\}$: um objecto e o conjunto que o tem por único elemento não são, de forma alguma, o mesmo objecto. Assim, por exemplo, enquanto a proposição $1 \in \{1\}$ é obviamente verdadeira, as proposições

$$\{1\} \in 1, \quad \{1\} \in \{1\}$$

são ambas falsas. Uma condição impossível — isto é, que não seja verificada por nenhum objecto — define também um conjunto, que se chama *conjunto vazio* e se designa usualmente por $\emptyset$. Trata-se, evidentemente, de um conjunto sem elemento algum. Tem-se assim, por exemplo:

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}.$$

Dados dois conjuntos, A e B, a *intersecção* de A com B, designada por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e a B; a *reunião* de A com B é o conjunto $A \cup B$, formado por todos os elementos que pertencem a um, pelo menos, dos conjuntos A e B. Simbolicamente:

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\},$$
$$A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, isto é, se A e B não têm elementos comuns, diz-se que são conjuntos *disjuntos*.

Chama-se *diferença* dos conjuntos A e B, ou *complementar* de B em A, ao conjunto $A \setminus B$ formado pelos elementos de A que não pertencem a B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$

É evidente que se tem $A \setminus B = \emptyset$ sse $A \subset B$. No estudo de diversas questões sucede, por vezes, poder fixar-se de início um conjunto $\mathcal{U}$, tal que todos os conjuntos que interessa considerar no desenvolvimento da teoria são subconjuntos de $\mathcal{U}$. Quando está assim fixado um *conjunto universal*, é usual chamar apenas *complementar* de um dado conjunto A (tal que $A \subset \mathcal{U}$ evidentemente!) ao conjunto $\mathcal{U} \setminus A$, que então se designa de preferência pelo símbolo $\mathcal{C}(A)$. Pode também escrever-se, nessa hipótese (e só nessa):

$$\mathcal{C}(A) = \{x : x \notin A\}.$$

Exercícios

1. Mostre que, quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, se tem $A \subset A$ e $A \subset B \wedge B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

2. Mostre que se tem

$$\{x : p(x)\} \subset \{x : q(x)\} \quad \text{sse} \quad p(x) \text{ implica (formalmente) } q(x)$$

e

$$\{x : p(x)\} = \{x : q(x)\} \quad \text{sse} \quad p(x) \text{ é equivalente a } q(x).$$

3. Recorrendo à equivalência das proposições $A \not\subset B$ e $\exists_x (x \in A \wedge x \notin B)$, mostre que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

4. Indique quais das proposições seguintes são verdadeiras:

$$\emptyset \subset \emptyset, \quad 1 \in \{1\}, \quad \{1\} \in \{1,2,3\},$$
$$2 \in \{1,2\}, \quad 1 \in \{2,3\}, \quad 2 \in \{1,2,3\}$$
$$\{1\} \subset \{1,\{2,3\}\}, \quad \emptyset = \{x : x \in \mathbb{N} \ \wedge \ x = x+1\}.$$

5. Quantos elementos têm os conjuntos seguintes:

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\{\emptyset\}\}?$$

   Indique algumas proposições verdadeiras que exprimam *relações de inclusão* (isto é, da forma $X \subset Y$) e *relações de pertença* ($X \in Y$) entre dois dos conjuntos dados.

6. Indique dois conjuntos A e B para os quais seja verdadeira a proposição $A \in B \ \wedge \ A \ \subset B$.

7. Sendo A um conjunto qualquer, chama-se *conjunto das partes de A* e designa-se por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto cujos elementos são, precisamente, todos os subconjuntos de A. Por exemplo, se $A = \{1,2\}$ é

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$$

   a) Quantos elementos têm os conjuntos

$$\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))?$$

   b) Verifique que as relações $x \in X$ e $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ são equivalentes.

   c) Prove, por indução, que, sendo A um conjunto com n elementos, o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é 2^n.

8. Sendo

$$A = \{1\}, \qquad B = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge \ x \geq 2\}, \qquad C = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge \ x \leq 6\}$$

   e designando em geral por M_n e D_n, respectivamente, o conjunto dos múltiplos e o conjunto dos divisores do número natural n, determine os conjuntos

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad B \cup C, \quad B \cap C, \quad A \cap M_2,$$
$$M_2 \cap D_{12}, \quad \mathbb{N} \setminus A, \quad (\mathbb{N} \setminus D_{12}) \cup (\mathbb{N} \setminus D_{17}).$$

9. a) Interprete geometricamente (como subconjuntos de $\mathbb{R}$) os seguintes conjuntos:

$$A = \{x : |x| < 1\}, \quad B = \{x : |x| < 0\},$$
$$C = \{x : |x - a| < \varepsilon\}, \quad D = \{x : |x| > 0\},$$
$$E = \{x : |x| > -1\}, \quad F = \{x : (x-a)(x-b) < 0\}.$$

b) Determine $A \cap C$, $A \cap D$, $A \cup D$, $E \cap F$.

10. a) Interprete geometricamente, como subconjuntos do "plano" $\mathbb{R}^2$, os seguintes:

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad B = \left\{(x, y) : x > \frac{1}{2}\right\},$$
$$C = \{(x, y) : x < y\}, \quad D = \{(x, y) : xy \geq 0\},$$
$$E = \{(x, y) : x > 0 \ \wedge \ y > \operatorname{sen} x\},$$
$$F = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}, \quad G = \{(x, y) : \max(|x|, |y|) < 1\}.$$

b) Recorrendo à interpretação geométrica, determine $A \cap D$, $\mathcal{C}(B) \cup E$, $B \cap C \cap D$, $A \cap F$, $A \cup G$, $\mathcal{C}(A) \cap F$.

11. Verifique que qualquer das condições seguintes é equivalente a $A \subset B$:

$$A \cap B = A, \quad A \cup B = B$$

e, suposto fixado um conjunto universal, $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{C}(B) \subset \mathcal{C}(A), \quad A \cap \mathcal{C}(B) = \emptyset, \quad \mathcal{C}(A) \cup B = \mathcal{U}.$$

12. Um conjunto $X = \{a, b, \ldots\}$ e duas operações designadas, por exemplo, pelos símbolos $\cup$ e $\cap$, constituem uma *álgebra de Boole* sse forem verificados os seguintes axiomas:

1) $a, b \in X \Longrightarrow a \cup b \in X \wedge \ a \cap b \in X$;
2) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$, $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$ (associatividade);
3) $a \cup b = b \cup a$, $a \cap b = b \cap a$ (comutatividade);
4) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$, $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ (distributividade);
5) existem em X dois elementos, que designaremos por 0 e 1, tais que, para todo o $a \in X$, $a \cup 0 = a$, $a \cap 1 = a$;
6) para todo o $a \in X$ existe $a' \in X$ tal que $a \cup a' = 1$, $a \cap a' = 0$.

Prove que, sendo A um conjunto arbitário, o conjunto $\mathcal{P}(A)$ e as operações de reunião e intersecção de conjuntos, constituem uma álgebra de Boole. Quais são os elementos 0 e 1 dessa álgebra?

2.2 Pares ordenados. Sequências. Produto cartesiano. Relações.

Observemos em primeiro lugar que, sendo a e b dois objectos quaisquer, se tem, evidentemente

$$\{a, b\} = \{b, a\}.$$

Na realidade, segundo a definição atrás indicada, considera-se que dois conjuntos são iguais sse tiverem os mesmos elementos, sem que haja que atender a quaisquer outras circunstâncias. Em contrapartida, na Geometria Analítica plana, se a e b são números reais, as notações (a, b) e (b, a) referem-se a dois pontos distintos (a não ser que $a = b$). Por exemplo, os pares $(2, 5)$ e $(5, 2)$ não correspondem, num dado referencial, ao mesmo ponto do plano. Em casos como este é costume dizer que se trata de *pares ordenados*.[2] De uma forma geral, sendo a e b objectos quaisquer, designaremos por (a, b) o *par ordenado* que tem a por *primeira coordenada* (ou *primeira projecção*) e b por *segunda coordenada* (ou *segunda projecção*). Assim, os símbolos $\{a, b\}$ e (a, b) designam objectos matemáticos distintos (pode dizer-se que o primeiro é um *par*, se fôr $a \neq b$; o segundo, em qualquer hipótese, é um *par ordenado*. Em particular, deve notar-se que dois pares ordenados só são considerados *iguais* se forem iguais tanto as suas primeiras como as suas segundas coordenadas, isto é:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \ \wedge \ b = d.$$

De uma forma análoga, sendo a, b e c três objectos quaisquer, designaremos pelo símbolo (a, b, c) o *terno ordenado* que tem a por primeira coordenada, b por segunda e c por terceira. A noção de terno ordenado pode ser definida a partir da de par ordenado: basta dizer que o termo ordenado (a, b, c) é precisamente o par ordenado $((a, b), c)$, que tem (a, b) por primeira coordenada e c por segunda. Ter-se-á assim, por definição:

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

Desta definição resulta facilmente que a igualdade $(a, b, c) = (a', b', c')$ equivale à conjunção das três igualdades $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$. As noções de par ordenado e terno ordenado podem generalizar-se facilmente: sendo n um número natural maior do que 1[3] e $a_1, a_2, \ldots a_n$ objectos quaisquer, designaremos pelo símbolo $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ a *sequência* cuja primeira coordenada é $a_1, \ldots$ e cuja n^{a} coordenada é a_n. A noção de sequência pode ser definida por indução: para $n = 2$, a sequência de primeira coordenada a_1 e segunda

[2] Pode dar-se uma definição de par ordenado, usando apenas noções já introduzidas. Uma definição possível (que indicamos apenas a título de curiosidade) é a que se exprime pela igualdade seguinte:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Contudo, esta definição, embora permita efectuar as deduções lógicas em que intervem a noção em causa, parecerá certamente demasiado abstracta - por excessivamente afastada da noção intuitiva de par ordenado - a quem inicia o estudo da teoria dos conjuntos. Parece-nos por isso preferível não definir aqui a noção de par ordenado, a qual poderá ser encarada como noção primitiva.

[3] No caso $n = 1$, a sequência (a_1), de primeira (e única) coordenada a_1 é geralmente identificada com o próprio objecto a_1.

coordenada a_2 é precisamente o par ordenado (a_1, a_2); para $n > 2$ põe-se, por definição:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

Reconhece-se sem dificuldade que a igualdade de sequências:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

é equivalente à conjunção das n igualdades

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

Sejam agora A e B dois conjuntos quaisquer. Chama-se *produto cartesiano* de A e B, e designa-se pelo símbolo $A \times B$, o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$. Simbolicamente:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \ \wedge \ y \in B\}.$$

Se, em particular, é $A = B$, o produto cartesiano $A \times B$ (ou $A \times A$) chama-se *quadrado cartesiano de* A e designa-se usualmente por A^2.

Exemplos

1. Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 4\}$, tem-se

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,1), (1,4), (2,1), (2,4), (3,1), (3,4)\}, \\ B \times A &= \{(1,1), (4,1), (1,2), (4,2), (1,3), (4,3)\}, \\ B \times B &= \{(1,1), (1,4), (4,1), (4,4)\}. \end{aligned}$$

2. Sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos reais, o conjunto $\mathbb{R}^2$ é formado por todos os pares ordenados (x, y), tais que $x, y \in \mathbb{R}$ (isto é, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$). Cada um de tais pares pode, como sabemos, ser "identificado" com um ponto de um plano no qual tenha sido instituído um referencial; é esse o ponto de vista adoptado na Geometria Analítica plana. Numa outra ordem de ideias, o par (x, y) pode também "identificar-se" com um número complexo, precisamente o complexo que, mais correntemente, é designado por $x + yi$.

Sendo A, B e C três conjuntos quaisquer, chama-se *produto cartesiano* de A, B e C e designa-se pelo símbolo $A \times B \times C$ o conjunto de todos os ternos ordenados (x, y, z) tais que $x \in A$, $y \in B$ e $z \in C$. No caso particular de ser $A = B = C$ o conjunto $A \times B \times C$ chama-se *cubo cartesiano* de A e designa-se por A^3. Mais geralmente, sendo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos quaisquer, o *produto cartesiano* de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é o conjunto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, formado por todas as sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais que $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$:

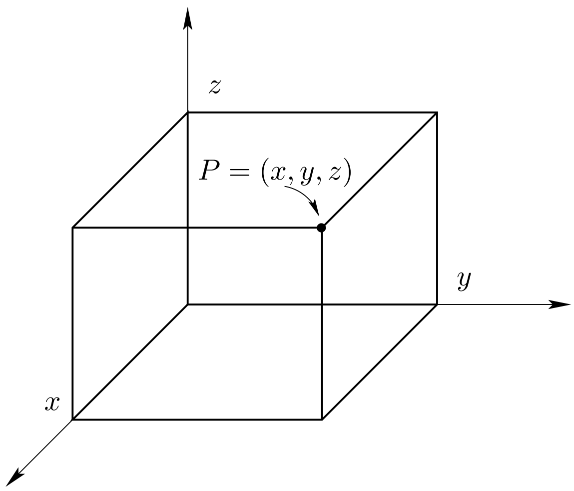
$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge\ x_n \in A_n\}.$$

Se fôr $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, o conjunto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é a n^{a} *potência cartesiana* de A, habitualmente designada por A^n.

Exemplos

1. Sendo n um natural qualquer, a n^{a} potência cartesiana do conjunto dos reais, $\mathbb{R}^n$, é o conjunto de todas as sequências de n números reais; são elementos de $\mathbb{R}^n$, por exemplo, as sequências $(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n})$, $(0, 0 \ldots, 0)$ (com n zeros).

2. Instituído um referencial no "espaço ordinário", cada ponto P deste espaço determina um terno ordenado de números reais (a *abcissa* x, a *ordenada* y e a *cota* z do ponto P, no referencial considerado); reciprocamente, a cada terno ordenado de números reais corresponde um ponto do espaço ordinário. Nesta ordem de ideias, tal como o conjunto



$\mathbb{R}$ pode ser identificado com o conjunto dos pontos de uma recta e o conjunto $\mathbb{R}^2$ com o conjunto dos pontos de um plano, $\mathbb{R}^3$ pode ser interpretado como o conjunto dos pontos do espaço ordinário (fixado um referencial). Para $n > 3$, não há possibilidade de interpretações geométricas intuitivas deste tipo.

Em Geometria Analítica Plana faz-se corresponder à condição $p(x, y)$ — onde x e y são variáveis reais — um subconjunto A de pontos do plano.

Essa correspondência é estabelecida com base na seguinte convenção: para que um ponto, (x_0, y_0), pertença ao conjunto A é necessário e suficiente que $p(x_0, y_0)$ seja uma proposição verdadeira; para exprimir esta ideia, pode também escrever-se, como sabemos:

$$A = \{(x, y) : p(x, y)\}.$$

Assim, por exemplo, às condições $y = 2x$ e $y > x$ — que exprimem certas "relações" entre x e y : "y é o dobro de x", "y é maior do que x" — correspondem respectivamente, uma determinada recta e um determinado semiplano (observe-se, porém, que a mesma recta e o mesmo semiplano corresponderiam também, por exemplo, às condições $10^y = 100^x$ e $y^3 > x^3$, equivalentes a $y = 2x$ e $y > x$, respectivamente).

Em sentido inverso, se for fixado um conjunto de pontos do plano, é também natural pensar que ficará assim definida uma "relação entre x e y": por exemplo, à bissectriz dos quadrantes pares — isto é, ao conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x + y = 0$ — corresponderia a relação de *simetria* ("y é o simétrico de x"); à circunferência de centro na origem e raio 1, ficaria associada uma relação que poderia exprimir-se dizendo que "a soma dos quadrados de x e y é igual à unidade", etc.

Note-se que, nas considerações precedentes, o termo "relação" (que não foi ainda definido) tem estado a ser utilizado na sua acepção intuitiva; tem-se apenas em vista sugerir que a cada "relação" das que foram consideradas, pode associar-se um conjunto de pares ordenados de tal forma que, conhecido este conjunto, poderá dizer-se, em certo sentido, que ficará determinada a relação considerada.

Um outro exemplo: seja H o conjunto dos homens e M o conjunto das mulheres, residentes em determinada localidade. Uma relação entre M e H (ou entre elementos de M e elementos de H) é a que se exprime pela condição "y é o marido de x" (com $x \in M$ e $y \in H$).

Neste caso, para quem dispusesse de uma lista de todos os "casais" (x, y), seria fácil, escolhidos arbitrariamente dois elementos, um de M e outro de H, verificar se eles constituiam ou não um casal, isto é, se estavam ou não na relação considerada. Uma vez mais, o conhecimento de um conjunto de pares ordenados equivaleria ao conhecimento da relação em causa.

Consideremos agora a condição "X é o ponto médio do segmento de extremos Y e Z" (onde pode supor-se que o domínio de qualquer das variáveis X, Y e Z é o espaço ordinário). Esta condição exprime uma relação que pode ser ou não ser verificada por três pontos X, Y e Z arbitrariamente escolhidos (e considerados por certa ordem); do ponto de vista que temos vindo a desenvolver, a essa relação corresponde um conjunto, cujos elementos são todos os ternos ordenados (U, V, W) tais que "U, V, W são pontos do espaço ordinário e U é o ponto médio do segmento que tem V e W por extremos". Trata-se, desta vez, de uma relação que faz intervir três objectos (*relação ternária*).

Analogamente, à condição "os pontos P, Q, R e S são complanares" corresponde um certo conjunto de quaternos ordenados (*relação quaternária*), etc.

Os exemplos anteriores contribuirão talvez para tornar menos artificiais as definições seguintes, que enunciaremos nos termos abstractos característicos da teoria dos conjuntos:

Chama-se *relação binária* a qualquer conjunto de pares ordenados. Mais explicitamente: diz-se que um conjunto A é uma relação binária sse cada um dos elementos que o constituem é um par ordenado, isto é, sse:

$$\forall_{z \in A} \exists_{x,y}\; z = (x, y).$$

Se G é uma relação binária, em vez de dizer que o par (a, b) pertence a G, diz-se também que o elemento a está na relação G com o elemento b e escreve-se, por vezes, $a\ G\ b$.

Consideremos, por exemplo, a relação binária entre números reais que habitualmente se representa pelo sinal $<$. De acordo com a definição anterior, essa relação é um conjunto de pares, tais como $(2, 3)$, $(-1, 5)$, etc. Em vez de dizer que o par $(2, 3)$ pertence à relação considerada, diz-se de preferência que 2 está nessa relação com 3 (ou que "2 é menor do que 3") e escreve-se $2 < 3$.

De forma análoga, uma *relação ternária* é, por definição, qualquer conjunto de ternos ordenados; mais geralmente, sendo $n \in N$, chama-se *relação n-ária* a qualquer conjunto formado por sequências de n objectos. Assim, por exemplo, são relações n-árias os conjuntos de todas as sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n números reais que verificam uma qualquer das três condições seguintes:

1ª) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0,$

2ª) $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0,$

3ª) $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 1 = 0.$

Observe-se de passagem que, no 1º caso, há infinitas sequências que pertencem à relação considerada (se $n > 1$); no 2º caso, a relação é constituída por uma única sequência: a sequência nula, formada por n zeros; no 3º, a relação não contem sequência alguma (relação vazia).

No que vai seguir-se, as relações que terão maior interesse para nós serão as relações binárias; aliás, nesta parte do curso, quase nunca nos referiremos a outras. Convencionamos por isso que o termo "relação" deverá de aqui em diante ser interpretado como abreviatura da expressão "relação binária" (salvo algum caso em que seja evidente que tal interpretação é inaceitável).

Sendo A e B dois conjuntos, qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ é, evidentemente, um conjunto de pares ordenados, e portanto uma relação: é o que por vezes se chama uma *relação entre os conjuntos A* e

B. Se, em particular, for $A = B$, poderá dizer-se que se trata de uma *relação no conjunto* A. É nesta acepção que a usual relação de "maior" pode considerar-se como uma relação no conjunto dos reais, a de "divisor" como uma relação no conjunto dos naturais, a de "irmão", no conjunto das pessoas humanas, etc.

Sendo G uma relação, chama-se *domínio de* G ao conjunto de todos os elementos x para os quais existe (pelo menos) um y tal que $x\,G\,y$ e *contradomínio de* G ao conjunto dos y para os quais existe (pelo menos) um x tal que $x\,G\,y$; o domínio e o contradomínio de G podem designar-se, respectivamente, por D_G e C_G:

$$D_G = \{x : \exists_y \; x\,G\,y\}, \qquad C_G = \{y : \exists_x \; x\,G\,y\}.$$

Assim, o domínio da relação determinada pela condição "y é o marido de x", considerada num dos exemplos anteriores, é o subconjunto de M formado pelas mulheres casadas (cujo marido resida também na localidade considerada); o contradomínio é a parte de H formada pelos homens casados com mulheres do conjunto M. A relação determinada no conjunto dos reais pela condição $x^2 + y^2 = 1$ tem por domínio e por contradomínio o conjunto dos reais compreendidos entre -1 e 1 (incluindo estes dois números). A "relação de pertença" (entre um conjunto qualquer A e o conjunto $\mathcal{P}(A)$, dos seus subconjuntos) formada por todos os pares (x, X) tais que $x \in A$, $X \subset A$ e $x \in X$, tem por domínio o conjunto A e por contradomínio $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Sendo G uma relação, chama-se *inversa* ou *recíproca* de G e representa-se por G^{-1} a relação que se obtém trocando as coordenadas em cada par $(x, y) \in G$, isto é:

$$G^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in G\}.$$

Tem-se, portanto,

$$y\,G^{-1}\,x \iff x\,G\,y.$$

Por exemplo, a inversa da relação de "maior" $(y > x)$ é a relação de "menor" $(y < x)$ e a inversa da relação definida pela condição $x^2+y^2 = 1$ é essa mesma relação. É evidente que, sendo G uma relação arbitrária,

$$D_{G^{-1}} = C_G, \quad C_{G^{-1}} = D_G$$

e ainda $(G^{-1})^{-1} = G$.

Exercícios

1. Prove que

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$$
$$A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \,\vee\, B = \emptyset.$$

2. Prove, por indução, que se A tem m elementos e B tem n elementos, $(m, n \in \mathbb{N})$, $A \times B$ tem mn elementos.

3. Sendo $A = \emptyset, B = \{0, 1\}$, $C = \{1\}$, $D = \{0, 2, 4, 6\}$, forme os produtos cartesianos: $B \times C \times D$, B^3, $A \times B \times D$, C^5 e D^2.

4. a) Verifique que a relação

$$G = \{(0, \{0\}), (0, \{0, 1\}), (1, \{1\}), (1, \{0, 1\})\}$$

é precisamente a usual "relação de pertença" entre elementos do conjunto $A = \{0, 1\}$ e subconjuntos deste mesmo conjunto.

   b) Defina, de forma análoga, a relação de igualdade, entre elementos de A e as relações de igualdade e de inclusão, entre subconjuntos de A.

5. Determine os domínios, os contradomínios e as relações inversas das relações:

   a) de igualdade (em $\mathbb{N}$),
   b) de "divisor" (em $\mathbb{N}$),
   c) de inclusão (em $\mathcal{P}(A)$, sendo A um conjunto arbitrário).

6. O mesmo para as relações em $\mathbb{R}$, formadas por todos os pares (x, y) cujas coordenadas verificam as condições seguintes:

$$x \leq y, \quad x = 3y, \quad x^2 = y, \quad x = \operatorname{sen} y.$$

2.3 Funções. Aplicações. Inversão. Composição.

Introduziremos agora a seguinte definição fundamental:

Uma relação F diz-se uma *função* sse não contém dois pares distintos com igual primeira coordenada; assim, dizer que F é uma função equivale a dizer que, quaisquer que sejam x, y e z

$$(x, y) \in F \ \wedge \ (x, z) \in F \implies y = z.$$

A relação em $\mathbb{R}$, determinada pela condição $x^2 + y^2 = 1$ não é uma função: pertencem-lhe, por exemplo, os pares $(0, 1)$ e $(0, -1)$. No exemplo dos "casais", a relação considerada é uma função (excluída a hipótese de poliandria). A lista telefónica de uma localidade define evidentemente uma relação, associando a cada "assinante" o seu - ou os seus - "números de telefone". Tal relação só será uma função se não houver na localidade assinantes que aí tenham mais de um número de telefone. Intuitivamente, uma função pode ser imaginada como uma tabela, com duas colunas, figurando em cada linha um par (x, y). À coluna dos x corresponderá o domínio da função, à coluna dos y o contradomínio. Evidentemente, tratando-se de facto de uma função, se figurarem, em duas linhas, os pares (x, y) e (x, z), ter-se-á necessariamente $y = z$. Em vez de dizer que uma função F tem por domínio o conjunto A, diz-se também que F é uma função *definida* em A. Seja F uma função e x um elemento qualquer do seu domínio; chama-se *valor de F em x* (ou *valor de F no ponto x*) o (único) objecto y tal que $(x, y) \in F$. O valor de F no ponto x é habitualmente designado por $F(x)$, podendo então escrever-se $y = F(x)$ em lugar de $(x, y) \in F$. Quando se pretende definir uma função é geralmente preferível, em vez de indicar explicitamente os pares que a constituem, descrever o seu domínio e, para cada valor de x nesse domínio, indicar como pode obter-se o correspondente valor da função. Por exemplo, o conjunto de todos os pares (x, x^2), com $x \in \mathbb{R}$ é evidentemente uma função, f. Para descrevê-la, poderá dizer-se: f é a função definida em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 (\forall x \in \mathbb{R})$.

Sendo A e B dois conjuntos quaisquer, designa-se por *aplicação de A em B* qualquer função cujo domínio seja A e cujo contradomínio seja uma parte de B [4]. Para indicar que f é uma aplicação de A em B pode escrever-se $f : A \to B$. Evidentemente, sempre que f seja uma aplicação de A em B, ter-se-á, por definição,

$$D_f = A, \qquad C_f \subset B.$$

No caso particular de ser $C_f = B$, diz-se que a aplicação f é *sobrejectiva* (ou que f é uma *sobrejecção*) de A em B; dizer que $f : A \to B$ é uma sobrejecção equivale portanto a afirmar que é verdadeira a proposição

$$\forall_{y \in B} \exists_{x \in A} \; y = f(x)$$

Por outro lado, uma aplicação $f : A \to B$ diz-se *injectiva* (ou uma *injecção*) sse, para cada $y \in B$, existe quando muito um $x \in A$ tal que $y = f(x)$; doutra forma, dizer que f é injectiva equivale a dizer que:

$$\forall_{x', x'' \in A} \; x' \neq x'' \Longrightarrow f(x') \neq f(x''),$$

ou, o que é o mesmo:

$$\forall_{x', x'' \in A} \; f(x') = f(x'') \Longrightarrow x' = x''.$$

Diz-se ainda que $f : A \to B$ é *bijectiva* (ou que é uma *bijecção*) sse f é injectiva e sobrejectiva. Às aplicações bijectivas de A em B chama-se também *correspondências biunívocas entre A e B* [5].

[4] Em vez de *aplicação de A em B* diz-se também por vezes *função definida em A e com valores em B*.

[5] Usam-se também as expressões: aplicação de A *sobre* B, aplicação *biunívoca* de A *em* B, a aplicação *biunívoca* de A *sobre* B para significar respectivamente, aplicação sobrejectiva, injectiva e bijectiva de A em B.

Exemplos

1. A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2 (\forall x \in \mathbb{R})$ não é injectiva (por exemplo, $f(-3) = f(3)$), nem sobrejectiva (não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -1$).

2. A aplicação $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $g(x) = x^2$, é injectiva mas não sobrejectiva (não existe $x \in \mathbb{N}$ que $g(x) = 2$).

3. A aplicação $D : D \to \{0, 1\}$ definida por

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional,} \end{cases}$$

(aplicação por vezes chamada *função de Dirichlet*) é sobrejectiva mas não injectiva.

4. A aplicação $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \Psi(x) = x^3$ é uma bijecção.

Seja f uma aplicação de A em B. Como qualquer relação, f admite uma relação inversa, f^{-1}. Em geral, porém, f^{-1} não é uma função. Quais serão então as aplicações f para as quais f^{-1} é uma função? A resposta é fácil: para que f^{-1} seja uma função deve ter-se:

$$\forall_{x', x'' \in A}\ f(x') = f(x'') \Longrightarrow x' = x''$$

o que, como vimos, significa que f é injectiva. Assim, a relação inversa f^{-1} de uma aplicação $f : A \to B$ é uma função, sse f é injectiva. Em tal caso, chama-se a f^{-1} a *função inversa* ou a *aplicação inversa* de f.

Sejam A, B e C três conjuntos, f uma aplicação de A em B e g uma aplicação de B em C. A cada $x \in A$ corresponde, por meio de f, um único elemento $y = f(x) \in B$; por sua vez g, aplicação de B em C, associa a esse y um e um só $z = g(y) \in C$. Assim, aplicando, sucessivamente f e g, faz-se corresponder a cada $x \in A$ um único elemento $z = g(f(x)) \in C$, definindo-se portanto uma aplicação de A em C, que se chama aplicação composta de f e g. Em resumo: chama-se *aplicação composta de f e g* e designa-se por $g \circ f$ a aplicação de A em C definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (\forall x \in A).$$

Consideramos, por exemplo, as aplicações:

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \operatorname{sen} x,$$
$$\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Psi(x) = x^2.$$

Tem-se:

$$(\Psi \circ \varphi)(x) = \Psi(\varphi(x)) = (\operatorname{sen} x)^2 = \operatorname{sen}^2 x,$$
$$(\varphi \circ \Psi)(x) = \operatorname{sen}(x^2)$$

e também:

$$(\varphi \circ \varphi)(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x),$$
$$(\Psi \circ \Psi)(x) = x^4.$$

Por outro lado, se fôr

$$\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad \theta(x) = \sqrt{x},$$

ter-se-á ainda:

$$(\varphi \circ \theta)(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x} \quad (\forall x \in \mathbb{N})$$
$$(\Psi \circ \theta)(x) = x \quad (\forall x \in \mathbb{N}),$$

mas as composições $\theta \circ \varphi$, $\theta \circ \Psi$ não poderão formar-se (notar que a composição de duas aplicações f e g só foi definida na hipótese de ser $f : A \to B$ e $g : B \to C$; ver, no entanto, uma *nota* ulterior).

O exemplo anterior revela, em particular, que a composição de aplicações não é uma operação comutativa: existindo $f \circ g$ e $g \circ f$ pode ter-se $f \circ g \neq g \circ f$ (pode também acontecer que uma das composições tenha sentido e a outra não ou que qualquer delas o não tenha). É fácil, porém provar que a composição de aplicações é associativa, isto é, que, sendo $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, se tem sempre

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Deixaremos a demonstração como exercício.

Sendo A um conjunto qualquer, chama-se *aplicação idêntica* em A à aplicação : $I_A : A \to A$ definida por

$$I_A(x) = x \qquad (\forall x \in A).$$

É evidente que a aplicação I_A é uma bijecção e que a inversa, A^{-1}, é a própria aplicação I_A.

Já sabemos que se $\varphi : A \to B$ é uma aplicação bijectiva, a inversa φ^{-1} é também uma bijecção (de B em A). Tem-se então, como logo se reconhece:

$$(\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) = x \qquad \forall x \in A,$$
$$(\varphi \circ \varphi^{-1})(y) = y \qquad \forall y \in B,$$

isto é,

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = I_A, \qquad \varphi \circ \varphi^{-1} = I_B.$$

Introduziremos ainda as seguintes definições, que nos serão necessárias na sequência: Sejam A e B dois conjuntos, f uma aplicação de A em B e C um subconjunto de A. Chama-se *restrição* de f ao conjunto C e designa-se por $f|_C$ a aplicação de C em B definida por:

$$f|_C(x) = f(x), \qquad \forall x \in C.$$

Em particular, ter-se-á evidentemente, $f|_A = f$.

Nas mesmas condições acima referidas, chama-se *imagem* ou *transformado* do conjunto C pela função f e designa-se pelo símbolo $f(C)$, o contradomínio da aplicação $f|_C$, isto é, o conjunto dos valores $f(x)$, que correspondem a todos os elementos $x \in C$. Tem-se assim, por definição:

$$f(C) = \mathcal{C}_{f|_C} = \{y : \exists_{x \in C}\ y = f(x)\},$$

sendo também evidente que $f(A) = \mathcal{C}_f$.

Supondo ainda que f é uma aplicação de A em B, seja agora D um subconjunto de B; chama-se então *imagem inversa* ou *imagem recíproca* de D por f — e designa-se por $f^{-1}(D)$ — o conjunto de todos os elementos $x \in A$ tais que $f(x) \in D$:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

Nas condições referidas ter-se-á portanto $f^{-1}(B) = A$.

Nota. *A noção de aplicação composta pode ser definida com maior generalidade do que foi feito atrás: sendo $f : A \to B$ e $g : C \to D$ duas aplicações (onde agora A, B, C e D são conjuntos quaisquer) chamar-se-á* composta de f com g *e designar-se-á ainda por $g \circ f$ a função que tem por domínio o conjunto $E = \{x \in A : f(x) \in C\}$ e tal que, para cada $x \in E$, se tem*

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Evidentemente, pode acontecer que o conjunto E seja vazio, caso em que $g \circ f$, função com domínio vazio, será a chamada função vazia *(é o que se passa, por exemplo, se fôr $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$ e $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, g(x) = 1/\sqrt{x}$). Convém observar que a maior generalidade da definição acabada de referir é, em certo sentido, apenas aparente: na realidade é fácil verificar que a função $g \circ f$ agora definida não é mais do que a composta $g \circ f|_E$* no sentido previamente considerado *da restrição de f ao conjunto E com a função g. Não é também difícil reconhecer que, mesmo com a definição considerada nesta Nota, a composição de funções é ainda uma operação associativa.*

Exercícios

1. Das relações consideradas nos exercícios 4, 5 e 6 da secção 2.2, indique:

a) as que são funções;

b) as que têm por inversa uma função.

2. Dê exemplos de aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que sejam:

   a) bijectivas,

   b) injectivas mas não sobrejectivas,

   c) sobrejectivas mas não injectivas,

   d) não injectivas nem sobrejectivas.

3. Classifique, numa das quatro classes consideradas nas alíneas do exercício 2, as seguintes funções:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f(x) &= x, \\ g &: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, & g(x) &= x^{-1}, \\ F &: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & F(x) &= x + 1, \\ G &: \mathbb{R} \to \mathbb{N}, & G(x) &= 1 + |C(x)|, \end{aligned}$$

   onde $C(x)$ designe o maior número inteiro inferior ou igual a x.

4. Supondo $A \subset B$, chama-se *aplicação canónica* de A em B à aplicação $I : A \to B$ definida por $I(x) = x \quad (\forall x \in A)$. Prove que I é uma aplicação injectiva. Em que caso é bijectiva?

5. Prove que se $f : A \to B$ é injectiva, $f^{-1} : C_f \to A$ é uma bijecção e que se $g : A \to B$ é uma bijecção, $g^{-1} : B \to A$ é também uma bijecção.

6. Dadas as aplicações de $\mathbb{R}$ em si mesmo definidas por

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x + 1, \quad h(x) = |x|,$$

   determine $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $(f \circ g) \circ h$, $f \circ (g \circ h)$, $f^{-1} \circ g$, $f^{-1} \circ g^{-1}$, $g^{-1} \circ f^{-1}$ e $(f \circ g)^{-1}$.

7. Sendo f, g e h as aplicações do exercício 6 e

$$C = \{-1, 0, 1\}, \qquad D = \{x : x \in R \wedge -2 \leq x < 3\},$$

   determine os conjuntos $f(C)$, $g(C)$, $h(C)$, $f(D)$, $g(D)$, $h(D)$, $f(\mathbb{N})$, $g(\mathbb{N})$, $h(\mathbb{N})$, $f(\mathbb{R})$, $g(\mathbb{R})$ e $h(\mathbb{R})$.

8. Sendo $f : A \to B$, verifique que $f \circ I_A = I_B \circ f = f$.

9. Prove que a composição de aplicações é uma operação associativa.

10. Recordando que uma função foi definida como sendo um *conjunto* de pares ordenados (com certa propriedade especial) e tendo em conta a definição de igualdade de conjuntos, prove que duas funções f e g são iguais sse
$$(D_f = D_g) \ \wedge \ (\forall_{x \in D_f} \ f(x) = g(x)).$$

11. Prove que se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são injectivas (resp. sobrejectivas) $g \circ f$ é injectiva (resp. sobrejectiva).

12. Prove que $f : A \to B$ é uma bijecção sse existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = I_B$ e $g \circ f = I_A$.

13. Sendo A e B dois conjuntos, diz-se que A é *equipotente* a B e escreve-se $A \approx B$ sse existe uma *bijecção* $f : A \to B$. Prove que, quaisquer que sejam A, B e C, se tem:

    a) $A \approx A$.
    b) $A \approx B \Longleftrightarrow B \approx A$.
    c) $A \approx B \ \wedge \ B \approx C \Longrightarrow A \approx C$.

2.4 Relações de equivalência. Relações de ordem.

Seja A um conjunto não vazio. Uma relação G no conjunto A, diz-se uma *relação de equivalência* sse forem verificadas as propriedades seguintes:

$$\begin{aligned} \forall_{x \in A} \ x \, G \, x & \quad \text{(reflexividade)}, \\ \forall_{x,y \in A} \ x \, G \, y \Longrightarrow y \, G \, x & \quad \text{(simetria)}, \\ \forall_{x,y,z \in A} \ x \, G \, y \ \wedge \ y \, G \, z \Longrightarrow x \, G \, z & \quad \text{(transitividade)}. \end{aligned}$$

São relações de equivalência, por exemplo, a relação de “igualdade” (num conjunto qualquer), a relação de paralelismo (no conjunto das rectas do espaço, e admitindo que se considera a coincidência como caso particular do paralelismo), a relação de “semelhança” (entre triângulos, por exemplo), a relação de “equipotência”, entre subconjuntos de um conjunto arbitário (cf. exercício 13), etc. Não são relações de equivalência: a relação de “perpendicularidade”, entre rectas (não é reflexiva, nem transitiva), as relações de “divisor” entre números naturais e de “contido” entre conjuntos (não são simétricas), a relação de “maior” (não é reflexiva, nem simétrica).

Fixada uma relação de equivalência G num conjunto A, diz-se que dois elementos a, b de A são *equivalentes* (*segundo* G) sse $a \, G \, b$. Nas mesmas condições, sendo c um elemento qualquer de A, chama-se *classe de equivalência* de c (segundo G) e designa-se usualmente por $G[c]$, ou apenas $[c]$, o conjunto de todos os elementos de A que são equivalentes a c:

$$x \in [c] \Longleftrightarrow x \, G \, c.$$

No caso da relação de paralelismo, a classe de equivalência de uma recta é o conjunto de todas as rectas que têm a mesma direcção do que a recta dada; para a relação de igualdade num conjunto X, tem-se para qualquer elemento $c \in X, [c] = \{c\}$ (isto é, a classe de equivalência de c tem um único elemento: o próprio c). Demonstraremos agora o seguinte:

Teorema. *Seja G uma relação de equivalência no conjunto A, a e b elementos quaisquer de A. Tem-se então:*

1) $a \in [a]$.

2) $a\,G\,b \Longleftrightarrow [a] = [b]$.

3) $\sim (a\ G\ b) \Longleftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$.

Demonstração:

1) Para provar que *a pertence à sua própria classe de equivalência*, basta atender à definição desta classe e ao facto de que, por hipótese, a é equivalente a si próprio (visto que a relação G é *reflexiva*). Observe-se que de aqui resulta, em particular, que nenhuma classe de equivalência é vazia.

2) Para provar que, *se a e b são equivalentes têm a mesma classe de equivalência*, suponha-se, de facto, $a\,G\,b$ e observe-se que, se c é um elemento qualquer de $[a]$ tem-se (por definição de $[a]$) $c\,G\,a$ e portanto também, pela transitividade de G, $c\,G\,b$, isto é $c \in [b]$. Fica assim provado que $[a] \subset [b]$ e, como poderia provar-se da mesma forma que $[b] \subset [a]$, pode concluir-se que $[a] = [b]$. Reciprocamente, se $[a] = [b]$, tem-se, por (1), $a \in [b]$ e portanto $a\,G\,b$.

3) Para reconhecer *que as classes de equivalência de dois elementos não equivalentes são disjuntas* — ou, o que é o mesmo que, se $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, se tem necessariamente, $a\,G\,b$ — basta notar que, sendo $c \in [a] \cap [b]$, ter-se-á $c\,G\,a$ (visto que $c \in [a]$) e $c\,G\,b$ (visto que $c \in [b]$). Logo, atendendo à simetria de G, ter-se-á também $a\,G\,c$ e $c\,G\,b$ e finalmente, pela transitividade, $a\,G\,b$. Em sentido inverso observe-se que, por (2), $a\,G\,b \Longrightarrow [a] = [b]$ e portanto, como uma classe de equivalência não pode ser vazia, $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

■

Introduziremos ainda a seguinte definição:

Sendo G uma relação de equivalência num conjunto A, chama-se *conjunto quociente de A* (segundo G) e designa-se por A/G o conjunto formado pelas classes de equivalência (segundo G) de todos os elementos de A. Por exemplo, no caso de G ser a relação de igualdade no conjunto A, A/G é o conjunto de todas as partes de A que têm apenas um elemento. Se G for a relação de equivalência, no conjunto das pessoas (não apátridas), definida por:

$$x\,G\,y \iff x \text{ tem a mesma nacionalidade que } y,$$

cada uma das classes de equivalência segundo G será formada por todas as pessoas que têm uma determinada nacionalidade e o conjunto quociente corresponderá, de certo modo, ao conjunto de todas as nacionalidades.

Nota. *Como exemplo particularmente significativo da utilização da noção de conjunto quociente em Matemática, indicaremos nesta nota o processo usualmente adoptado para definir o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros (*0*, ± 1, ± 2,…) a partir do conjunto dos naturais, $\mathbb{N}$, que, por agora, suporemos previamente conhecido. A definição pode indicar-se em poucas palavras (mas só poderá ser bem compreendida se se tiver em conta a motivação que será indicada posteriormente):*

Considere-se o conjunto $\mathbb{N}^2$, de todos os pares ordenados de números naturais,

$$\mathbb{N}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{N}\}$$

e, neste conjunto, a relação de equivalência G definida da seguinte forma:

$$(a,b)\ G\ (c,d) \iff a+d = b+c.$$

Nestas condições, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é, por definição, o conjunto quociente $\mathbb{N}^2/G$.

Qual a ordem de ideias que pode conduzir naturalmente a esta definição? Para a apreender comecemos por lembrar que a consideração do conjunto $\mathbb{Z}$ é essencialmente motivada por uma "insuficiência" do conjunto dos naturais: o facto de nem sempre ser possível em $\mathbb{N}$ a operação de subtracção. Na realidade, supondo $a, b \in \mathbb{N}$, a equação em x:

$$a + x = b$$

só tem solução em $\mathbb{N}$ se fôr $a < b$.

Como esta limitação é indesejável, do ponto de vista algébrico, surge naturalmente a ideia de construir um sobreconjunto $\mathbb{Z}$ do conjunto $\mathbb{N}$, no qual a equação anterior já tenha solução, quaisquer que sejam a e b.

Nesse sentido, observemos primeiramente que, quando a equação considerada tem solução em $\mathbb{N}$ — isto é, quando $a < b$ — essa solução é única ($x = b - a$). Pode exprimir-se este facto dizendo que a cada par (a,b) de números naturais, que verifique a condição $a < b$, *corresponde um e um só natural x, que é solução da equação considerada. Note-se, porém, que a correspondência assim estabelecida entre os números naturais x e os pares ordenados $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, tais que $a < b$, não é biunívoca; por exemplo, a qualquer dos pares $(1,5), (2,6), (3,7), \ldots$ corresponde o mesmo natural, 4 (solução comum das equações $1 + x = 5$, $2 + x = 6, \ldots$).*

Que condição devem então verificar dois pares (a, b) *e* (c, d) *— com* $a < b$ *e* $c < d$ *— para que lhes corresponda o mesmo natural* x*? Facilmente se vê que tal condição pode ser expressa pela igualdade* $a + d = b + c$.

Assim, se utilizarmos esta igualdade para definir uma relação g *no subconjunto de* $\mathbb{N}^2$ *formado pelos pares com primeira coordenada inferior à segunda, isto é, se pusermos, no referido conjunto:*

$$(a, b)\ g\ (c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c,$$

verificamos sem dificuldade que g *é uma relação de equivalência e que as classes de equivalência determinadas por esta relação podem pôr-se em correspondência biunívoca com os números naturais.*

O que se passará, porém, se considerarmos a relação de equivalência G*, definida da mesma forma, não no subconjunto de* $\mathbb{N}^2$ *acima indicado, mas em todo o conjunto* $\mathbb{N}^2$*? Além das classes de equivalência correspondentes aos números naturais (todas formadas por pares em que a primeira coordenada é menor do que a segunda) obteremos agora novas classes que, intuitivamente, poderemos supor corresponderem a números de novo tipo, precisamente os números de que necessitávamos para resolver equações da forma* $a + x = b$*, quando fôr* $a \geq b$.

Agora, para dar uma definição matematicamente correcta dos objectos que constituem o novo conjunto numérico que alcançámos (por enquanto apenas intuitivamente) e que é precisamente o conjunto dos inteiros, o mais simples será chamar número inteiro a qualquer das classes de equivalência determinadas em $\mathbb{N}^2$ *pela relação* G*. Uma tal definição parecerá certamente, a uma primeira vista, um tanto artificial: claro que, na prática, ninguém pensará nunca, ao calcular com inteiros, que eles são certas "classes de equivalência de pares de números naturais".*

Porém, não é de cálculo que agora se trata, mas sim de procurar obter uma definição rigorosa do conjunto $\mathbb{Z}$*, a partir de* $\mathbb{N}$ *e utilizando exclusivamente noções fundamentais da teoria dos conjuntos (tais como a de produto cartesiano e a de conjunto quociente) que, por sua vez, tenham já sido definidas com o indispensável rigor. Ora para este efeito, a definição indicada é perfeitamente satisfatória.*

Designando por $[a, b]$ *a classe de equivalência a que pertence o par* (a, b) *— com* a *e* b *naturais quaisquer — diremos que esta classe corresponde a um número natural sse for* $a < b$*; nesta hipótese, o número natural correspondente ao inteiro* $[a, b]$ *é precisamente o número* $b - a$.

Quando for $a \geq b$*, a classe* $[a, b]$ *é um inteiro que não corresponde já a nenhum número natural.*

Na prática, cada número natural e o número inteiro correspondente — em princípio, objectos matemáticos distintos — são mesmo "identificados", passando-se a designá-los pelo mesmo símbolo. Feita essa identificação, poderá dizer-se que o conjunto $\mathbb{N}$ *é um subconjunto do conjunto* $\mathbb{Z}$.

Vejamos como se definem as operações algébricas fundamentais no conjunto $\mathbb{Z}$*, acabado de construir.*

A adição de dois inteiros é definida pela igualdade [6]*:*

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d].$$

Facilmente se verifica que todos os pares da forma (c,c)*, com* $c\in\mathbb{N}$*), são equivalentes entre si e que se tem, para qualquer inteiro* $[a,b]$*:*

$$[a,b]+[c,c]=[a,b]$$

(atender à igualdade $[a+c,b+c]=[a,b]$*, consequência da equivalência dos pares* $(a+c,b+c)$ *e* (a,b)*).*

Assim, $[c,c]$ *é elemento neutro para a adição: chama-se-lhe zero do conjunto* $\mathbb{Z}$ *e usa-se, para designá-lo, o símbolo* 0*.*

Os inteiros $[a,b]$ *e* $[b,a]$*, de soma igual a zero, são inteiros simétricos; é fácil reconhecer que qualquer inteiro diferente de zero ou é um número natural ou é o simétrico de um número natural (o que, em particular, sugere a forma usual de notação dos inteiros:* $0,\pm1,\pm2,\dots$*).*

No que respeita à multiplicação de inteiros, limitar-nos-emos a indicar que ela pode ser definida pela igualdade

$$[a,b]\cdot[c,d]=[ad+bc,ac+bd],$$

a partir da qual é bastante simples (como o teria sido também no caso da adição) deduzir as propriedades da multiplicação de inteiros já conhecidas do curso liceal.

Finalmente, é importante observar que pode construir-se o conjunto $\mathbb{Q}$*, dos números racionais, a partir do conjunto* $\mathbb{Z}$*, por um processo inteiramente análogo ao que seguimos na passagem de* $\mathbb{N}$ *para* $\mathbb{Z}$*. A ideia orientadora desta nova "ampliação" é a de tornar resolúvel qualquer equação da forma*

$$a\cdot x=b$$

com $a\neq 0$*, isto é, no fundo, a de tornar sempre possível a divisão, com divisor diferente de zero.*

O conjunto $\mathbb{Q}$ *pode então ser definido pela forma seguinte:*

Considere-se o conjunto de todos os pares (a,b) *com* $a,b\in\mathbb{Z}$ *e* $a\neq 0$*, isto é, o conjunto* $(\mathbb{Z}\setminus\{0\})\times\mathbb{Z}$ *— que aqui representaremos abreviadamente por* W *—, e introduza-se em* W *a relação de equivalência* S *definida por*

$$(a,b)\,S\,(c,d)\iff ad=bc.$$

[6] Observe-se que, se os pares (a,b) e (c,d) forem respectivamente equivalentes a (a',b') e (c',d'), também os pares $(a'+c',b'+d')$ e $(a+c,b+d)$ serão equivalentes, o que mostra que a igualdade em referência permite realmente definir uma operação no conjunto dos inteiros (isto é, uma aplicação de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$).

O conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$ é, por definição o quociente W/S. Quanto às operações algébricas, designando por $\frac{b}{a}$ a classe de equivalência a que pertence o par (a, b) — o que, aliás, poderá lançar alguma luz sobre a razão que levou a definir a relação S pela forma indicada... — pôr-se-á, por definição:

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{ad + bc}{a \cdot c},$$
$$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{b \cdot d}{a \cdot c}.$$

Cada número inteiro c será "identificado" com um racional, precisamente o racional $\frac{c}{1}$, passando então a ter-se $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Também neste caso podem deduzir-se sem dificuldade as propriedades operatórias já conhecidas, o que não faremos.

Seja A um conjunto qualquer e suponhamos fixada uma relação binária no conjunto A, relação que designaremos pelo símbolo $\prec$ (que pode ler-se "precede"). Diz-se que $\prec$ é uma *relação de ordem parcial* sse forem verificadas as propriedades seguintes:

$$\forall_{x,y \in A}\ x \prec y \implies x \neq y \quad \text{(anti-reflexividade)},$$
$$\forall_{x,y \in A}\ x \prec y \implies \sim (y \prec x) \quad \text{(anti-simetria)},$$
$$\forall_{x,y,z \in A}\ x \prec y \wedge y \prec z \implies x \prec z \quad \text{(transitividade)}.$$

Se, além destas propriedades, se tiver:

$$\forall_{x,y \in A} \qquad x \prec y \vee x = y \vee y \prec x \quad \text{(tricotomia)}$$

a relação $\prec$ dir-se-á uma *relação de ordem total*, ou simplesmente uma *relação de ordem*. Como exemplos de relações de ordem, registaremos: a relação de $<$ (ou a de $>$), no conjunto dos reais, $\mathbb{R}$ (ou em qualquer dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) e a relação determinada, no conjunto de todas as palavras da língua portuguesa, pela condição "x precede alfabeticamente y". Como exemplos de relações de ordem parcial (além dos anteriores, visto que qualquer relação de ordem total é também uma relação de ordem parcial) indicaremos ainda a relação de "inclusão estrita" — isto é, a relação definida pela condição $X \subset Y \ \wedge \ X \neq Y$ — entre as partes de um conjunto qualquer, a relação de "divisor estrito" no conjunto dos inteiros [7], a relação de "descendente" no conjunto dos seres humanos, etc.

Um conjunto A diz-se *ordenado* (ou *totalmente ordenado*), quando estiver fixada uma relação de ordem em A; da mesma forma, um conjunto no qual se tenha fixado uma relação de ordem parcial é um conjunto *parcialmente ordenado*. Dada uma relação de ordem $\prec$ (total ou parcial), num

[7] "x é divisor estrito de y" equivale a "x divide y e $x \neq y$".

conjunto A, chama-se *relação de ordem lata* associada a $\prec$, a relação $\overline{\prec}$ definida pela forma seguinte:

$$x \mathrel{\overline{\prec}} y \Longleftrightarrow x \prec y \ \vee \ x = y.$$

Por exemplo, a relação de $\leq$, no conjunto dos reais é a relação de ordem lata associada à relação $<$; as relações latas associadas às de "estritamente contido" e de "divisor estrito" são as relações de "contido" e de "divisor", respectivamente.

Facilmente se verifica que, sendo $\prec$ uma relação de ordem parcial no conjunto A, a relação de ordem lata associada a $\prec$ tem as propriedades:

$$\forall_{x \in A}\ x \mathrel{\overline{\prec}} x \quad \text{(reflexividade)},$$
$$\forall_{x,y \in A}\ x \mathrel{\overline{\prec}} y \wedge y \mathrel{\overline{\prec}} x \Longrightarrow x = y \quad \text{(anti-simetria lata)},$$
$$\forall_{x,y,z \in A}\ x \mathrel{\overline{\prec}} y \wedge y \mathrel{\overline{\prec}} z \Longrightarrow x \mathrel{\overline{\prec}} z \quad \text{(transitividade)}$$

e que, se $\prec$ for uma relação de ordem total, se tem ainda:

$$\forall_{x,y \in A} x \prec y \vee y \ \prec \ x \quad \text{(dicotomia)}.$$

Consideremos agora um conjunto (totalmente) ordenado A e, para maior comodidade, designemos pelo símbolo $<$, que leremos mesmo "menor", a relação de ordem fixada em A. Introduzamos ainda as habituais convenções de notação:

$$\begin{aligned}
&a > b \Longleftrightarrow b < a,\\
&a \geq b \Longleftrightarrow a > b \ \vee \ a = b,\\
&a < b < c \Longleftrightarrow a < b \ \wedge \ b < c,\\
&a \leq b < c \Longleftrightarrow a \leq b \ \wedge \ b < c,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nestas condições, sendo a e b elementos de A tais que $a \leq b$, chama-se *intervalo fechado de extremos a e b* (no conjunto A) e designa-se por $[a, b]$, o conjunto:

$$[a, b] = \{x : x \in A \ \wedge \ a \leq x \leq b\}$$

Define-se analogamente o *intervalo aberto de extremos a e b*:

$$]a, b[= \{x : x \in A \ \wedge \ a < x < b\}$$

e os *intervalos semifechados*:

$$[a, b[= \{x : x \in A \ \wedge \ a \leq x < b\}$$
$$]a, b] = \{x : x \in A \ \wedge \ a < x \leq b\}$$

Seja agora X um subconjunto qualquer de A. Diz-se que um elemento c de A é um *minorante* de X sse

$$\forall_{x \in X}\ c \leq x.$$

Evidentemente, se c for um minorante de X, qualquer elemento $c' \in A$ tal que $c' \leq c$ será também um minorante de X.

Diz-se que o conjunto X é *minorado* (ou *limitado inferiormente*) sse X tiver pelo menos um minorante; assim, dizer que X é minorado equivale a afirmar que

$$\exists_{c \in A} \forall_{x \in X}\ c \leq x.$$

Analogamente, chama-se *majorante* de X a qualquer elemento $d \in A$ tal que

$$\forall_{x \in X}\ x \leq d$$

e diz-se que o conjunto X é *majorado* (ou *limitado superiormente*) sse

$$\exists_{d \in A} \forall_{x \in X}\ x \leq d.$$

Um conjunto $X \subset A$ que seja minorado e majorado diz-se um conjunto *limitado*; portanto, X é limitado sse

$$\exists_{c,d \in A} \forall_{x \in X}\ c \leq x \leq d.$$

Exemplos: (considerando sempre como conjunto ordenado — isto é, no lugar do conjunto A das definições precedentes — o conjunto $\mathbb{R}$, com a relação de ordem $<$ usual): $\mathbb{N}$ é um conjunto minorado (qualquer número real ≤ 1 é um minorante) mas não majorado nem, portanto, limitado; o conjunto $\mathbb{Q}^-$, dos racionais negativos é majorado (são majorantes os reais ≥ 0) mas também não é limitado; é limitado o conjunto dos reais que verificam a condição $x^2 < 4$, que é precismente o intervalo $]-2, 2[$ e que tem por minorantes os reais ≤ -2 e por majorantes os reais ≥ 2.

Dado um subconjunto X do conjunto ordenado A pode existir ou não em X um elemento menor do que todos os outros, isto é, um elemento a tal que:

1) $a \in X$,

2) $\forall_{x \in X}\ a \leq x$.

É fácil, porém, reconhecer que, se existir um elemento a nas condições indicadas, esse elemento é único: basta observar que, se a e a' verificam as condições (1) e (2), se tem necessariamente $a' \leq a$ e $a \leq a'$, donde resulta $a = a'$. Um tal elemento a (quando existe) é chamado o *mínimo* do conjunto X e designado por $\min X$. Define-se de forma análoga o máximo de X ($\max X$): b é *máximo* de X sse

1) $b \in X$,

2) $\forall_{x \in X}\ x \leq b$.

Evidentemente, um conjunto $X \subset A$ pode ter ou não ter máximo. Por exemplo, no conjunto $\mathbb{R}$, com a relação de ordem habitual, não têm máximo nem mínimo o intervalo $]0, 1[$ e os conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; têm mínimo ($= 1$) mas não máximo, os conjuntos $\mathbb{N}$, $[1, 3[$; têm máximo ($= 5$) e mínimo ($= 2$), os conjuntos $\{2, 3, 5\}$ e $[2, 5]$, etc. Seja de novo X um subconjunto do conjunto ordenado A, mas admitamos agora que X é majorado, e designemos por V o conjunto de todos os majorantes de X. Chama-se *supremo* de X ($\sup X$) ao mínimo de V (se V não tiver mínimo, diz-se também que X não tem supremo). Assim, o supremo de X (quando existe) é o elemento $s \in A$ caracterizado pelas condições seguintes:

1) $\forall_{x \in X}\ x \leq s$ $\quad$ (isto é, $s \in V, s$ é um majorante de X),

2) $\forall_{v \in V}\ s \leq v$ $\quad$ (não há majorantes de X menores do que s).

Convém observar que esta última condição poderia também exprimir-se da seguinte maneira:

$$\forall_{z \in A}\ [z < s \Longrightarrow \exists_{x \in X}\ z < x].$$

Isto é, qualquer elemento de A menor do que s é também menor de que algum elemento de X (e portanto já não é um majorante deste conjunto). De forma análoga, suponhamos agora que X é um subconjunto minorado de A e designemos por U o conjunto dos minorantes de X. Chama-se *ínfimo* de X ($\inf X$) ao máximo de V, se tal máximo existir; nesta hipótese, o ínfimo de X será o elemento $r \in A$ caracterizado por:

1) $\forall_{x \in X}\ r \leq x$ $\quad$ (isto é, $r \in U, r$ é minorante de X),

2) $\forall_{u \in U}\ u \leq r$ $\quad$ (não há minorantes de X maiores do que r),

podendo ainda esta última condição traduzir-se por:

$$\forall_{y \in A}\ [r < y \Longrightarrow \exists_{x \in X}\ x < y].$$

É fácil reconhecer que um conjunto X que tenha máximo tem também supremo, tendo-se então, precisamente, $\sup X = \max X$; a existência do supremo não garante, porém, que exista máximo: o supremo de X é efectivamente máximo sse pertencer ao conjunto X. Evidentemente, são válidas afirmações análogas a respeito do mínimo e do ínfimo. Exemplos (uma vez mais em $\mathbb{R}$, com a ordenação habitual): os intervalos $[1, 3]$, $[1, 3[$, $]1, 3]$ e $]1, 3[$ têm todos o mesmo ínfimo, 1, e o mesmo supremo, 3; o ínfimo é mínimo apenas no caso dos dois primeiros intervalos, o supremo só é máximo para o 1º e o 3º. Finalmente, o conjunto X formado pelos inversos de todos os números naturais,

$$X = \left\{ x : \exists_{n \in \mathbb{N}}\; x = \frac{1}{n} \right\},$$

tem por supremo 1 (que é máximo) e por ínfimo 0 (que não é mínimo).

Exercícios

1. Indique se gozam das propriedades: 1) reflexiva, 2) simétrica, 3) transitiva, as relações formadas por todos os pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

   a) $x \leq y$,

   b) $|x| = |y|$,

   c) $x^2 + y^2 = 1$,

   d) $x < |y|$,

   e) $|x| \leq |y|$,

   f) $x^3 = y^3$,

   g) $x^2 + y^2 > 0$,

   h) $x^4 + y^4 < 0$.

2. Questão análoga à anterior, para as relações determinadas, no conjunto dos seres humanos, pelas condições:

   x é pai de y, x é mais velho do que y, x e y têm a mesma residência.

3. Dada uma aplicação $f : A \to B$, seja φ a relação no conjunto A definida pela forma seguinte:

   $$x \,\varphi\, y \iff f(x) = f(y)$$

   Mostre que se trata de uma relação de equivalência. Quais são as classes de equivalência, se f fôr injectiva?

4. Escolhido um ponto O no espaço ordinário, considere-se a relação θ definida por

   $$P \,\theta\, Q \iff \text{existe uma recta que contem } O,\ P \text{ e } Q.$$

   onde P e Q designam pontos quaisquer do espaço. Mostre que θ *não* é uma relação de equivalência, mas que o seria sem em vez de considerarmos todos os pontos do espaço, considerássemos todos os pontos *distintos do ponto* O. Quais seriam as classes de equivalência correspondentes?

5. Sendo A um conjunto qualquer, chama-se *partição* de A a qualquer conjunto P de partes de A não vazias, disjuntas duas a duas e cuja reunião seja A; à relação ρ, no conjunto A, definida por

$$x \,\rho\, y \iff \exists_{B \in P}\; x \in B \;\wedge\; y \in B$$

   é uma relação de equivalência. Qual é o conjunto quociente, A/ρ?

   Prove também que qualquer relação de equivalência em A determina, por sua vez, uma partição de A, formada pelas correspondentes classes de equivalência.

6. Prove que, para que uma relação binária $\prec$ num conjunto A seja uma relação de ordem (total), é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas propriedades seguintes:

   1ª — transitividade,

   2ª — sendo x e y elementos quaisquer de A, verifica-se necessariamente *uma e uma só* das condições: $x \prec y$, $x = y$, $y \prec x$.

7. No conjunto ordenado $\mathbb{R}$ com a ordenação usual, verifique se são majorados, minorados e limitados os conjuntos considerados nos exercícios 8 e 9 da secção 2.1 e, se possível, determine máximos, mínimos, supremos e ínfimos dos mesmos conjuntos.

8. Questões análogas às do exercício 7, para os conjuntos de números reais definidos pelas fórmulas:

   a) $1 + \frac{2}{n}$,
   b) $\frac{n}{n-\frac{1}{2}}$,
   c) $1 - \frac{1}{n}$,
   d) $(-1)^n \frac{n+1}{n}$,
   e) $(1 + \frac{1}{n}) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$,
   f) $\frac{1+(-1)^n}{2+(-1)^{n+1}}$.

   onde se supõe que n assume todos os valores naturais.

9. Considere como conjunto ordenado *total* o conjunto $\mathbb{Q}$, dos racionais, com a usual relação de $<$, e verifique que o subconjunto X de $\mathbb{Q}$ definido por:

$$X = \{x : x \in \mathbb{Q} \,\wedge\, x^2 < 2\}$$

   é majorado mas não tem supremo.

10. Prove que, se X e Y são subconjuntos limitados de um conjunto ordenado A, $X \cap Y$ e $X \cup Y$ são também limitados.

11. Sendo X e Y partes de um conjunto ordenado A, tais que $X \subset Y$ e supondo que existem $\sup X$ e $\sup Y$, prove que $\sup X \leq \sup Y$.

Bibliografia

[1] T. Apostol. *Calculus*, volume I. Editorial Reverté, 1972.

[2] T. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 1978.

[3] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*. Addison Wesley, 2ª edição, 1969.

[4] P. Halmos. *Naive Set Theory*. Van Nostrand, 1960.

[5] S. Lipschutz. *Theory and Problems of General Topology*. Schaum Publ. Co., 1965.

Índice remissivo