MAC 105 – Fundamentos de Matemática para Computação

2ª Lista de Exercícios 1.0 – 10/5/2017 – Entrega 22/5/2017

Nas questões abaixo, justifique suas respostas, não fique só num *sim* ou *não*. Se for uma demonstração, diga antes que tipo de método usou (vai direto, vem direto, mistura de vai e vem, mágica,..); uma demonstração detalhada, que mostre claramente os métodos usados, é, neste ponto do curso, mais importante que duas demonstrações mais ou menos.

Cada questão vale 2,5. Escolha quatro e entregue.

1. (a) Seja k um inteiro positivo. Mostre que se a e b são congruentes módulo $3k$, então eles são congruentes módulo k.

   (b) Suponha que duas relações de equivalência, denotadas por $\sim$ e $\equiv$, foram definidas num mesmo conjunto A. Suponha também que foi provado que, para quaisquer elementos a, b de A, se $a \sim b$ então $a \equiv b$. Mostre que o número de classes de equivalência de $\equiv$ não é maior que o de classes de $\sim$.

2. Seja R uma relação transitiva sobre um conjunto A. Considere agora a relação E sobre A dada por

   aEb se e só se $a = b$ ou aRb e bRa.

   (a) Mostre que E é uma relação de equivalência.

   (b) Suponha que A consiste de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, e R é a inclusão própria $\subset$. O que é E?

   (c) Suponha que A consiste de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, e R é a inclusão $\subseteq$. O que é E?

   (d) **Opcional, não conta para a nota.** Suponha que A é uma coleção de conjuntos finitos e aRb se existe uma função injetora de a em b. Mostre primeiro que R é transitiva, e tente descrever E usando termos mais comuns (ou seja, de uma forma que não use a palavra "função" nem a "injetora"). Se você não tem muita certeza do que vem a ser um conjunto finito ou como lidar com isso, não se preocupe - tente se virar (afinal, não vale nota).

3. Seja A o conjunto dos enunciados envolvendo um número inteiro n (vamos supor que existe esse conjunto). Para cada uma das relações abaixo sobre A, identifique se é reflexiva, simétrica ou transitiva. Se R_i não tem a propriedade, dê um contraexemplo.

   (a) pR_aq se $p = \text{NÃO}\, q$ para todo inteiro n.

   (b) pR_bq se $p\, \text{OU}\, q$ é V para todo inteiro n.

   (c) pR_cq se $p\, \text{E}\, q$ é V para todo inteiro n.

   (d) pR_dq se $p\, \text{implica}\, q$ para todo inteiro n.

Ex (é uma parte da questão, de graça): para mostrar que R_b não é transitiva, considere os seguintes enunciados, onde n representa um número inteiro:

- p: $n \geq -1$
- q: $n \leq 2$
- r: $n \geq 1$

Então, pR_bq e qR_br mas não vale que pR_br.

4. Considere o enunciado:

   > Sejam a, b, c números reais. Se $a \neq 0$, então $f(x) = ax^2 + bx + c$ não é injetora.

   (a) Como começaria uma prova disso por contradição?

   (b) Qual é o contrapositivo desse enunciado? Enuncie de forma que a palavra *injetora* não apareça, e não apareçam negações.

   (c) Complete a demonstração por um dos dois métodos.

   (d) Vale o reverso: "Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ não é injetora então $a \neq 0$" ?

5. Repita os itens da questão anterior com o enunciado

   > Se x é um número real tal que para todo real $\epsilon > 0$, $x \geq -\epsilon$, então $x \geq 0$.

6. Mostre que

   > Para todo número real positivo a, a função $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ tem um único ponto fixo positivo.

   Escolha o método de prova que quiser, mas explique o método usado.
   Uma curiosidade, que dá para verificar usando uma calculadora, ou escrevendo um programa: escolha algum a, e algum x. Repita a atribuição $x \leftarrow f(x)$ algumas vezes. Veja que o valor de x vai chegando perto do ponto fixo (na verdade, converge para ele).