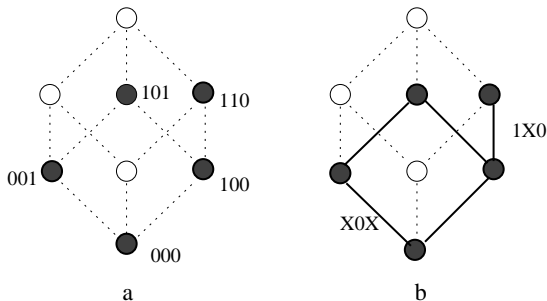


Minimização de funções Booleanas

Algoritmo QM (Quine-McCluskey)



Um **implicante primo** de f é um produto p tal que $p \leq f$, e não há outro produto p' , $p < p'$, tal que $p' \leq f$.

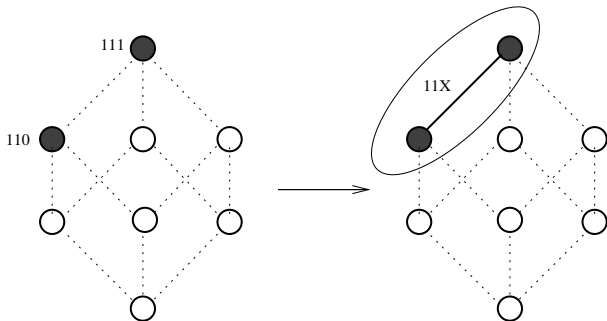


Esquerda: Mintermos de $f = \sum m(0, 1, 4, 5, 6)$.

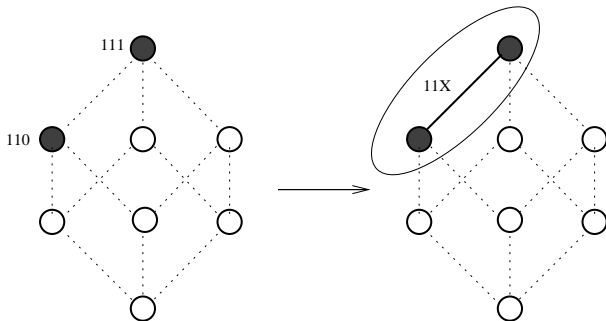
Direita: todos os implicantes primos de f .



Implicantes primos, cubos maximais



Implicantes primos, cubos maximais



$$x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 = x_1x_2(x_3 + \bar{x}_3) = x_1x_2 \cdot 1 = x_1x_2$$

Juntar produtos e eliminar variáveis!



Teorema: *Qualquer produto em uma expressão minimal na forma soma de produtos é um implicante primo.*

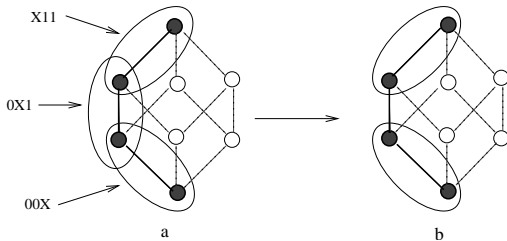


Mas nem todos os implicantes primos fazem parte da forma SOP minimal!



Mas nem todos os implicantes primos fazem parte da forma SOP minimal!

Exemplo:



Esquerda: todos os implicantes primos

Direita: cobertura mínima



Algoritmo de Quine-McCluskey

Consiste de 2 etapas:

- 1 calcular todos os implicantes primos de f
- 2 calcular uma cobertura mínima de f



Passo 1: Listar 0-cubos e agrupar de acordo com quantidade de 1's

função: $f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(0, 1, 4, 5, 6)$

Mintermos em notação cúbica: 000, 001, 100, 101, 110



Passo 1: Listar 0-cubos e agrupar de acordo com quantidade de 1's

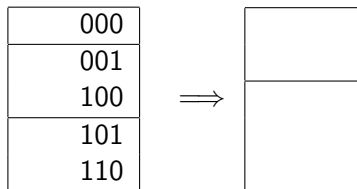
função: $f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(0, 1, 4, 5, 6)$

Mintermos em notação cúbica: 000, 001, 100, 101, 110

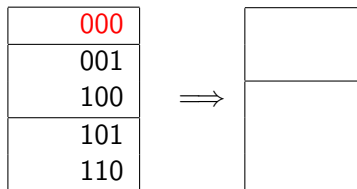
000
001
100
101
110



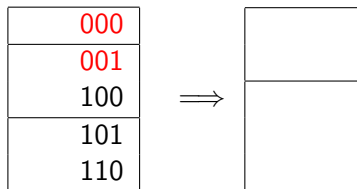
Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes



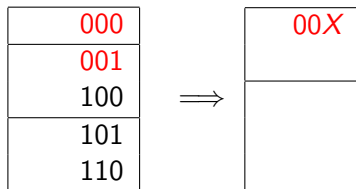
Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

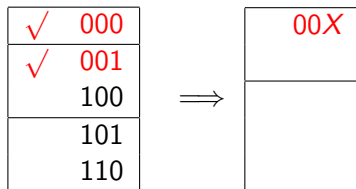


Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

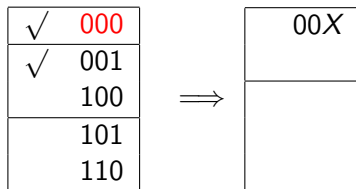


Algoritmo QM — cálculo de implicantes primos

Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

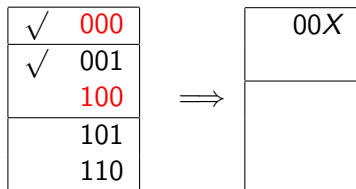


Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes



Algoritmo QM — cálculo de implicantes primos

Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓ 000	⇒	00X
✓ 001		X00
100		
101		
110		



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000
✓	001
✓	100
	101
	110

 \Rightarrow

00X
X00



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

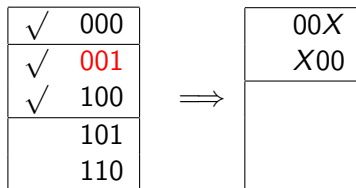
✓	000
✓	001
✓	100
	101
	110

 \Rightarrow

00X
X00



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000
✓	001
✓	100
	101
	110

 \Rightarrow

00X
X00



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000
✓	001
✓	100
	101
	110

 \Rightarrow

00X
X00
X01



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000
✓	001
✓	100
✓	101
	110

 \Rightarrow

00X
X00
X01



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000	\Rightarrow	00X
✓	001		X00
✓	100		X01
✓	101		
	110		



Algoritmo QM — cálculo de implicantes primos

Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000
✓	001
✓	100
✓	101
	110

 \Rightarrow

00X
X00
X01



Algoritmo QM — cálculo de implicantes primos

Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000
✓	001
✓	100
✓	101
	110

 \Rightarrow

00X
X00
X01



Algoritmo QM — cálculo de implicantes primos

Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000
✓	001
✓	100
✓	101
	110

 \Rightarrow

00X
X00
X01
10X



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000	\Rightarrow	00X
✓	001		X00
✓	100		X01
✓	101		10X
	110		



Algoritmo QM — cálculo de implicantes primos

Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000
✓	001
✓	100
✓	101
	110

 \Rightarrow

00X
X00
X01
10X



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000
✓	001
✓	100
✓	101
	110

 \Rightarrow

00X
X00
X01
10X



Algoritmo QM — cálculo de implicantes primos

Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000
✓	001
✓	100
✓	101
	110

 \Rightarrow

00X
X00
X01
10X
1X0



Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

✓	000
✓	001
✓	100
✓	101
✓	110

 \Rightarrow

00X
X00
X01
10X
1X0

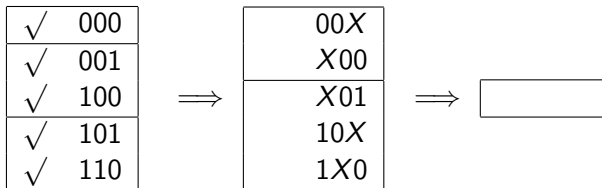


Passo 2: juntar 0-cubos adjacentes

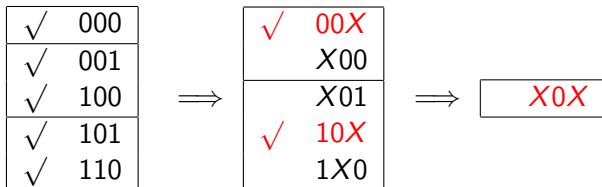
✓	000	\Rightarrow	00X
✓	001		X00
✓	100		X01
✓	101		10X
✓	110		1X0



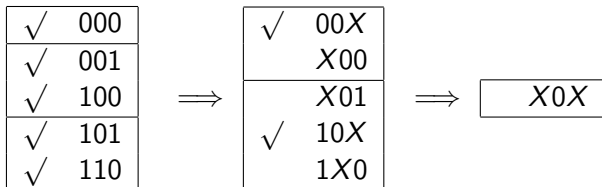
Passo 2: juntar 1-cubos adjacentes, depois 2-cubos adjacentes, ...



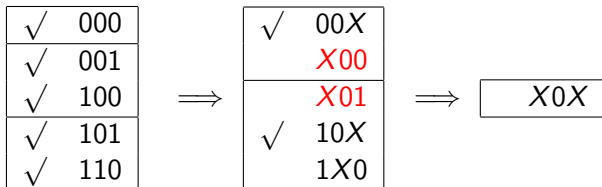
Passo 2: juntar 1-cubos adjacentes, depois 2-cubos adjacentes, ...



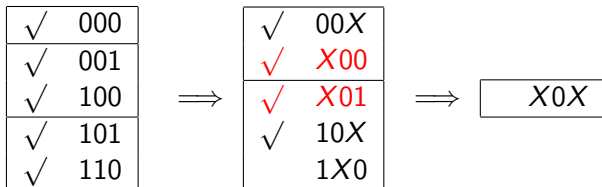
Passo 2: juntar 1-cubos adjacentes, depois 2-cubos adjacentes, ...



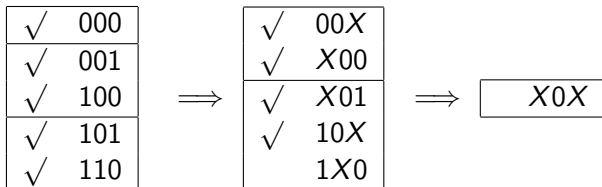
Passo 2: juntar 1-cubos adjacentes, depois 2-cubos adjacentes, ...



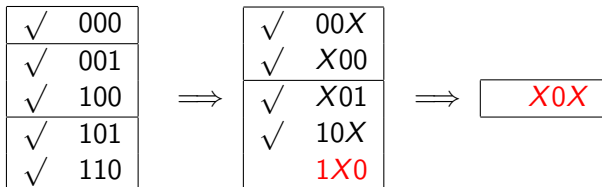
Passo 2: juntar 1-cubos adjacentes, depois 2-cubos adjacentes, ...



Passo 2: juntar 1-cubos adjacentes, depois 2-cubos adjacentes, ...



Passo 2: juntar 1-cubos adjacentes, depois 2-cubos adjacentes, ...



Os implicantes primos são: 1X0 e X0X



Passo 1: contruir a tabela de implicantes primos

		1	2	3	5	9	10	11	18	19	20	21	23	25	26	27
	XX01X		✓	✓			✓	✓	✓	✓					✓	✓
	X10X1					✓		✓						✓		✓
	0X0X1	✓		✓		✓		✓								
	00X01	✓			✓											
	X0101				✓							✓				
	1010X										✓	✓				
	10X11									✓			✓			
	101X1											✓	✓			



Passo 2: selecionar os implicantes primos essenciais

No exemplo, o mintermo 2 é coberto apenas pelo implicante primo $XX01X$. Logo $XX01X$ é essencial.

		1	2	3	5	9	10	11	18	19	20	21	23	25	26	27
*	$XX01X$		✓	✓			✓	✓	✓	✓					✓	✓
	$X10X1$					✓		✓						✓		✓
	$0X0X1$	✓		✓		✓		✓								
	$00X01$	✓			✓											
	$X0101$				✓							✓				
	$1010X$										✓	✓				
	$10X11$									✓			✓			
	$101X1$											✓	✓			
			✓	✓			✓	✓	✓	✓					✓	✓



Passo 2: selecionar os implicantes primos essenciais

No exemplo, o mintermo 2 é coberto apenas pelo implicante primo $XX01X$. Logo $XX01X$ é essencial.

		1	2	3	5	9	10	11	18	19	20	21	23	25	26	27
*	$XX01X$		✓	✓			✓	✓	✓	✓					✓	✓
	$X10X1$					✓		✓						✓		✓
	$0X0X1$	✓		✓		✓		✓								
	$00X01$	✓			✓											
	$X0101$				✓							✓				
	$1010X$										✓	✓				
	$10X11$									✓			✓			
	$101X1$											✓	✓			
			✓	✓			✓	✓	✓	✓					✓	✓



Passo 2: selecionar os implicantes primos essenciais

No exemplo, o mintermo 2 é coberto apenas pelo implicante primo $XX01X$. Logo $XX01X$ é essencial.

		1	2	3	5	9	10	11	18	19	20	21	23	25	26	27
*	$XX01X$		✓	✓			✓	✓	✓	✓					✓	✓
	$X10X1$					✓		✓						✓		✓
	$0X0X1$	✓		✓		✓		✓								
	$00X01$	✓			✓											
	$X0101$				✓							✓				
	$1010X$										✓	✓				
	$10X11$									✓			✓			
	$101X1$											✓	✓			
			✓	✓			✓	✓	✓	✓					✓	✓



Passo 2: selecionar os implicantes primos essenciais

No exemplo, o mintermo 2 é coberto apenas pelo implicante primo $XX01X$. Logo $XX01X$ é essencial.

		1	2	3	5	9	10	11	18	19	20	21	23	25	26	27
*	$XX01X$		✓	✓			✓	✓	✓	✓					✓	✓
	$X10X1$					✓		✓						✓		✓
	$0X0X1$	✓		✓		✓		✓								
	$00X01$	✓			✓											
	$X0101$				✓							✓				
	$1010X$										✓	✓				
	$10X11$									✓			✓			
	$101X1$											✓	✓			
			✓	✓			✓	✓	✓	✓					✓	✓



Passo 2: seleccionar os implicantes primos essenciais (cont.)

Desconsiderar linha correspondente ao implicante primo essencial, bem como as colunas cujos mintermos são cobertos por esse implicante primo. Repetir o processo enquanto existirem implicantes primos essenciais

		1	2	3	5	9	10	11	18	19	20	21	23	25	26	27
*	XX01X		✓	✓			✓	✓	✓	✓					✓	✓
*	X10X1					✓		✓						✓		✓
	0X0X1	✓		✓		✓		✓								
	00X01	✓			✓											
	X0101				✓							✓				
*	1010X										✓	✓				
	10X11									✓			✓			
	101X1											✓	✓			
			✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓



Passo 3: eliminar todas as linhas selecionadas e colunas cobertas por essas linhas

		1	5	23
	0X0X1	✓		
	00X01	✓	✓	
	X0101		✓	
	10X11			✓
	101X1			✓



Passo 4: Eliminar colunas dominantes e linhas dominadas e repetir passo 2



Passo 4: Eliminar colunas dominantes e linhas dominadas e repetir passo 2

		1	5	23
	0X0X1	✓		
	00X01	✓	✓	
	X0101		✓	
	10X11			✓
	101X1			✓



Passo 4: Eliminar colunas dominantes e linhas dominadas e repetir passo 2

		1	5	23
	0X0X1	✓		
	00X01	✓	✓	
	X0101		✓	
	10X11			✓
	101X1			✓

		1	5	23
	0X0X1	✓		
**	00X01	✓	✓	
**	10X11			✓
		✓	✓	✓



Passo 5: Resolver a tabela cíclica

		0	4	13	15	10	26	16
a	0X10X		✓	✓				
b	011XX			✓	✓			
c	01X1X				✓	✓		
d	1X0X0						✓	✓
e	00X00	✓	✓					
f	X1010					✓	✓	
g	X0000	✓						✓



Passo 5: Resolver a tabela cíclica

		0	4	13	15	10	26	16
a	0X10X		✓	✓				
b	011XX			✓	✓			
c	01X1X				✓	✓		
d	1X0X0						✓	✓
e	00X00	✓	✓					
f	X1010					✓	✓	
g	X0000	✓						✓

Como expressar as possibilidades para cobrir todas as colunas?

$$(e + g)(a + e)(a + b)(b + c)(c + f)(d + f)(d + g) = 1$$



Passo 5: Resolver a tabela cíclica (cont.) Ao se expressar

$$(e + g)(a + e)(a + b)(b + c)(c + f)(d + f)(d + g) = 1$$

como soma de produtos, temos que cada produto corresponde a uma possível solução.

Dentre eles, devemos escolher aquele(s) de custo mínimo.

