MAC 105 – Fundamentos de Matemática para Computação

3ª Lista de Exercícios `1.1` – 14/3/2016 – Entrega 28/3/2016
Eduardo Hashimoto - nº USP 6514136

Nas questões abaixo, justifique suas respostas, não fique só num *sim* ou *não*. Se for uma demonstração, diga antes que tipo de método usou (vai direto, vem direto, mistura de vai e vem, mágica,..); uma demonstração detalhada, que mostre claramente os métodos usados, é, neste ponto do curso, mais importante que duas demonstrações mais ou menos.

A lista para nota consiste só das questões marcadas com ✪. Ao lado do símbolo aparece um (número) que é o valor da questão. O peso da lista é a soma dos valores das questões.

Outras questões podem ser entregues para correção, ou comentadas em classe ou no fórum.

1. ✪ $\boxed{3}$ Considere a demonstração de "*Se $m < n$ são inteiros positivos, então existe um número racional r tal que $\frac{1}{n} < r < \frac{1}{m}$.*"

   Prova: Seja q um inteiro positivo tal que $q(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}) > 1$. Seja p algum inteiro tal que $\frac{q}{n} < p < \frac{q}{m}$. Definindo $r = \frac{p}{q}$, segue que $\frac{1}{n} < r < \frac{1}{m}$, completando a prova.

   (a) Para que o autor define p e q nas duas primeiras sentenças?
   O autor está construindo um objeto $r = \frac{p}{q}$ que satisfaz a conclusão da proposição. Para tanto, claramente, ele deve definir p e q.

   (b) O autor afirma que existe q tal que $q(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}) > 1$. Como justificar isso?
   Como $m < n$, então $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$. Manipulando algebricamente, temos $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{n-m}{nm} > 0$. Como n e m são inteiros e $n > m$, então $n - m1$. Seja q um inteiro positivo tal que $q > zmn$, com z inteiro positivo tal que $z > 1$, então $q(\frac{n-m}{nm}) = z(n-m) > 1$.

   (c) E o que garante que existe p tal que $\frac{q}{n} < p < \frac{q}{m}$?
   Da conclusão anterior temos que $\frac{q}{m} - \frac{q}{n} > 1$. Claramente, $\frac{q}{m} > \frac{q}{n} + 1 > \frac{q}{n}$. Assim, existe pelo menos um p tal que $\frac{q}{n} < p < \frac{q}{m}$.

   (d) E a afirmativa $\frac{1}{n} < r < \frac{1}{m}$, como se justifica?
   Dividindo a inequação anterior por q, temos $\frac{1}{m} < \frac{p}{q} < \frac{1}{n}$.

   (e) Para escrever $r = \frac{p}{q}$ é bom que $q \neq 0$. Como se sabe que isso vale?
   Em sua prova o autor define que q é um inteiro positivo, logo $q \neq 0$.

2. ✪ $\boxed{3}$ Reescreva cada afirmativa abaixo de forma que o quantificador **existe** apareça explicitamente. Em seguida, identifique o *objeto*, a *propriedade* e o que *acontece*.

(a) Algum elemento do conjunto S é > 0.

Existe um elemento x no conjunto S tal que $x > 0$.
Objeto: x
Propriedade: $x > 0$
Acontece: $x \in S$

(b) A interseção dos conjuntos S e T é não vazia.

Existe um elemento s em S tal que s está em T.
Objeto: elemento s
Propriedade: nenhuma
Acontece: s está em S e em T (de modo que a interseccção dos cojuntos é não vazia)

(c) $x^2 - kx + 2 = 0$ para algum inteiro positivo k.

Existe $k > 0$ tal que $x^2 - kx + 2 = 0$.
Objeto: inteiro k
Propriedade: $k > 0$
Acontecen: $x^2 - kx + 2 = 0$

3. ✪ $\boxed{4}$ Considere em $\mathbb{Z}$ a equivalência $\equiv(9)$; isto é, $a \equiv b$ sse $a - b$ é divisível por 9. Abaixo vamos apresentar algumas definições em cima de $\mathbb{Z}/\equiv$. Em cada caso, decida se está ou não bem definida (e explique porque).

Uma classe de equivalência de x é o conjunto de todos os elementos que são equivalente a x pela relação. Assim, na relação $\equiv(9)$, temos as seguintes classes:

- $...[-9] = [0] = [9] = [18] = ...$
- $...[-8] = [1] = [10] = [19] = ...$
- $...[-7] = [2] = [11] = [20] = ...$
- $...[-6] = [3] = [12] = [21] = ...$
- $...[-5] = [4] = [13] = [22] = ...$
- $...[-4] = [5] = [14] = [23] = ...$
- $...[-3] = [6] = [15] = [24] = ...$
- $...[-2] = [7] = [16] = [25] = ...$
- $...[-1] = [8] = [17] = [26] = ...$

(a) $[n]$ é *par* se n é par.

A classe [0], por exemplo, apesar de ser par contem 9, por exemplo, que é impar. Portanto o conjunto não está bem definido.

(b) $[n]$ é *triplo* se n é divisível por 3.

n é divisível por 3 nas classes de [0], [3] e [6], que são triplas. Logo, o conjunto está bem definido.

(c) $[m] < [n]$ se $m < n$.

Se tomarmos, por exemplo, os números 10 e 18, temos que 10 < 18, mas 10 pertence a classe [1] e 18 pertence a classe [0] e, portanto, [1] > [0], logo o conjunto não está bem definido.