MAT0206/MAP0216 - Análise Real - IME - 2007
Prof. Gláucio Terra

1^a Lista de Exercícios - Resolução dos Exercícios 2, 11 e 16

2-) (a) Sejam X e Y conjuntos, e denote por $\mathcal{F}(X,Y)$ o conjunto de todas as funções de X em Y. Prove que, se X for finito e Y enumerável, então $\mathcal{F}(X,Y)$ é enumerável.

(b) Dada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, seja $A_f \doteq \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq 1\}$. Seja X o conjunto formado por todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que A_f é finito. Prove que X é enumerável.

Demonstração:

(a) Os casos em que X é vazio ou Y é finito são triviais (nestes casos $\mathcal{F}(X,Y)$ seria finito, sendo um subconjunto do conjunto finito $2^{X\times Y}$). Suponha, pois, que X seja finito com n elementos e Y seja infinito enumerável. Tomando bijeções $\phi : I_n \to X$ e $\psi : \mathbb{N} \to Y$, a aplicação $f \in \mathcal{F}(X,Y) \mapsto \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ é uma bijeção $\mathcal{F}(X,Y) \to \mathcal{F}(I_n,\mathbb{N})$; por meio desta bijeção, a demonstração fica reduzida a provar que $\mathcal{F}(I_n,\mathbb{N})$ é enumerável. Ora, $\mathcal{F}(I_n,\mathbb{N}) = \mathbb{N}^n$ (i.e. produto cartesiano de n fatores $\mathbb{N}$) é enumerável (isto foi provado em aula para $n = 2$; o caso geral segue por indução sobre n. Ou diretamente, pelo seguinte argumento: tome $p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos, e $F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ dada por $F : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n p_i^{x_i}$; então F é injetiva, pela unicidade da decomposição em fatores primos).

(b) Para cada $Y \subset \mathbb{N}$ finito, denotemos por A_Y o conjunto $\{f \in X \mid A_f = Y\}$. Então X é a reunião da família $\{A_Y \mid Y \subset \mathbb{N} \text{ finito}\}$. Verifiquemos que esta família é enumerável e que cada A_Y é enumerável; então seguirá que X é enumerável, sendo a reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis. Com efeito, dado $Y \subset \mathbb{N}$ finito, a aplicação $\mathcal{F}(Y,\mathbb{N}) \to A_Y$ dada por $f \mapsto \widetilde{f}$, onde $\widetilde{f}$ é a extensão de f que é constante e igual a 1 em $\mathbb{N} \setminus Y$, é uma bijeção; ora, já foi demonstrado no item anterior que $\mathcal{F}(Y,\mathbb{N})$ é enumerável. Resta mostrar que $\{Y \subset \mathbb{N} \mid Y \text{ finito}\}$ é enumerável. Tal conjunto é a reunião da família enumerável $\{Y \subset \mathbb{N} \mid Y \text{ tem } n \text{ elementos}\}_{n\geqslant 0}$. Ora, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \doteq \{Y \subset \mathbb{N} \mid Y \text{ tem } n \text{ elementos}\}$ é enumerável, pois a aplicação $f \in \mathcal{F}(I_n,\mathbb{N}) \mapsto f(I_n) \in A_n$ é sobrejetiva e já demonstramos que $\mathcal{F}(I_n,\mathbb{N})$ é enumerável. Então segue-se que $\{Y \subset \mathbb{N} \mid Y \text{ finito}\}$ é enumerável, sendo a reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis.

$\square$

11-) Seja $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$. Mostre que é enumerável e denso em $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais da forma m/p^n, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

(i) Seja X o conjunto dos números reais da forma m/p^n, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \mapsto m/p^n \in X$ é sobrejetiva, portanto X é enumerável, uma vez que $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ é enumerável, por ser o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis. Resta mostrar que X é denso em $\mathbb{R}$.

(ii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $p^n > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{p^n} < \epsilon$; isto já foi demonstrado em aula, usando a desigualdade de Bernoulli.

(iii) Seja (a,b) um intervalo aberto; queremos mostrar que existe um elemento de X neste intervalo. Tomando-se, no item anterior, $\epsilon = b - a$, conclui-se que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p^n} < b - a$.

(iv) Suponha $b > 0$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot \frac{1}{p^n} > b$, de modo que o conjunto $A \doteq \{m \in \mathbb{N} \mid m \cdot \frac{1}{p^n} \geqslant b\}$ é não-vazio; pelo princípio da boa ordenação, A possui um elemento mínimo m_0. Afirmo que $\frac{m_0-1}{p^n} \in (a,b)$. Com efeito, tem-se $\frac{m_0-1}{p^n} < b$, pela minimalidade de m_0; se fosse $\frac{m_0-1}{p^n} \leqslant a$, ter-se-ia $\frac{m_0}{p^n} - \frac{m_0-1}{p^n} = \frac{1}{p^n} \geqslant b-a$. Assim, $\frac{m_0-1}{p^n} > a$, o que conclui a prova da afirmação.

(v) Se $b \leqslant 0$, tem-se $-a > 0$; assim, pelo item anterior existe um elemento m/p^n de X no intervalo $(-b,-a)$, donde $-m/p^n \in (a,b)$.

□

16-) Um conjunto G de números reais chama-se um *grupo aditivo* quando $0 \in G$ e $x, y \in G \Rightarrow x - y \in G$. Então $x \in G \Rightarrow -x \in G$ e $x, y \in G \Rightarrow x + y \in G$.

Seja G um grupo aditivo de números reais, e denote por G^+ o conjunto dos elementos positivos de G. Suponha $G \neq \{0\}$, de modo que G^+ seja não-vazio. Prove que:

(a) se $\inf G^+ = 0$, então G é denso em $\mathbb{R}$;

(b) se $\inf G^+ = a > 0$, então $a \in G^+$ e $G = \{0, \pm a, \pm 2a, \dots\}$.

(c) Conclua que, se $\alpha \in \mathbb{R}$ é irracional, os números reais da forma $m + n\alpha$, $m, n \in \mathbb{Z}$, formam um subconjunto denso de $\mathbb{R}$.

Demonstração:

(a) Seja $(a,b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto; como $\inf G^+ = 0$, existe $g \in G^+$ tal que $g < b - a$. Usando o mesmo argumento da questão anterior, com g no lugar de $1/p^n$, conclui-se que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $mg \in (a,b)$. Como $(\forall n \in \mathbb{Z})\, ng \in G$, e como (a,b) foi tomado arbitrariamente, segue-se que G é denso em $\mathbb{R}$.

(b) Afirmo que $a \in G^+$. Com efeito, se $a \notin G^+$, existiria $h \in G^+$ tal que $a < h < a + \frac{a}{2}$, pois $a + \frac{a}{2}$ não é cota inferior de G^+. Pelo mesmo argumento, existe $g \in G^+$ tal que $a < g < h$. Portanto, $g, h \in G^+$ são tais que $a < g < h < a + \dfrac{a}{2}$, donde $h - g < a/2$; como $h - g \in G^+$, isto contraria o fato de ser a o ínfimo de G^+. Assim, $a \in G^+$.

Seja $g \in G^+$. Pelo fato de ser $\mathbb{R}$ arquimediano, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $ma > g$, o que mostra ser não-vazio o conjunto $A \doteq \{n \in \mathbb{N} \mid na > g\}$. Assim, pelo princípio da boa ordenação, A tem um elemento mínimo n; tome $r \doteq g - (n-1)a$. Então $r \geqslant 0$, pela minimalidade de n; e, se fosse $r \geqslant a$, ter-se-ia $g \geqslant (n-1)a + a = na$, contrariando $n \in A$. Assim, $0 \leqslant r < a$. Como $r = g - (n-1)a \in G$, e $a = \inf G^+$, não é possível $0 < r < a$, donde $r = 0$. Isto prova que todo elemento de G^+ é da forma na para algum $n \in \mathbb{N}$. Por conseguinte, todo elemento de G^- é da forma $-na$ para algum $n \in \mathbb{N}$, donde $G = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(c) $G \doteq \{m + n \cdot \alpha \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ é um subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$. Suponha $\inf G^+ = a > 0$. Então, pelo item anterior, tem-se $G = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Como $1 \in G^+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na = 1$, donde $a = 1/n$. Então, sendo $\alpha \in G$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha = ma = m/n$, portanto $\alpha \in \mathbb{Q}$, o que é uma contradição. Deste modo, não podemos ter $\inf G^+ > 0$, donde $\inf G^+ = 0$ e do item anterior segue-se que G é denso em $\mathbb{R}$. □