MAT0206/MAP0216 - Análise Real - IME - 2007
Prof. Gláucio Terra

4^a Lista de Exercícios

Para entregar: exercícios 20, 23, 31, 33 e 37.

Obs.: Regras para ganhar a nota extra referente aos exercícios marcados com "bônus": (1) a resolução deve redigida de forma clara e sem erros, e não há notas intermediárias; (2) a nota máxima a ser dada como bônus é 1,0 ponto na média do semestre; (3) os exercícios devem ser entregues no prazo para entrega da lista.

1-) Exercícios dos capítulos 6 e 7 do Elonzinho.

2-) Sejam $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$, $X = Y \cup Z$, $a \in Y' \cap Z'$. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, tome $g \doteq f|_Y$ e $h \doteq f|_Z$. Se $\lim_{x\to a} g(x) = L$ e $\lim_{x\to a} h(x) = L$, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

3-) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ monótona, com $f(X) \subset [a, b]$. Se $f(X)$ é denso no intervalo $[a, b]$, então $\big(\forall\, c \in X'_+ \cap X'_-\big) \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$. Se $c \in X$, então este limite é igual a $f(c)$.

4-) Se $f : X \to \mathbb{R}$ é monótona, então o conjunto dos pontos $a \in X'_+ \cap X'_-$ para os quais $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$ é enumerável.

5-) Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função limitada em cada intervalo limitado. Se $\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)] = L$, então $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L$. Bônus: vale 0,5 ponto na média do semestre.

A seguinte definição será usada nas questões subseqüentes:

Definição: Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um subconjunto Y de X diz-se *aberto em* X se existir um aberto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $Y = A \cap X$; Y diz-se *fechado em* X se existir um fechado $F \subset \mathbb{R}$ tal que $Y = F \cap X$.

Observação: Na definição acima, note que, se $X \subset \mathbb{R}$ é aberto, então $Y \subset X$ é aberto em X se, e somente se, Y é aberto em $\mathbb{R}$ (mas, se X não for aberto, $Y \subset X$ pode ser aberto em X e não ser aberto em $\mathbb{R}$; por exemplo, $[1, 2)$ é aberto em $[1, 3]$, mas não é aberto em $\mathbb{R}$). Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é fechado, então $Y \subset X$ é fechado em X se, e somente se, Y é fechado em $\mathbb{R}$ (mas, se X não for fechado, $Y \subset X$ pode ser fechado em X e não ser fechado em $\mathbb{R}$; por exemplo, $[1, 2)$ é fechado em $(0, 2)$, mas não é fechado em $\mathbb{R}$).

6-) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e Y um subconjunto de X. São equivalentes as seguintes afirmações:
(a) Y é aberto em X;
(b) para todo $y \in Y$, existe $\delta > 0$ tal que $(y - \delta, y + \delta) \cap X \subset Y$.

7-) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e Y um subconjunto de X. São equivalentes as seguintes afirmações:
(a) Y é fechado em X;
(b) $X \setminus Y$ é aberto em X;
(c) para toda seqüencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de Y tal que $x_n \to a \in X$, tem-se $a \in Y$.

8-) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. São equivalentes:

(a) f é contínua;

(b) para cada $A \subset \mathbb{R}$ aberto, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ é aberta em X;

(c) para cada $F \subset \mathbb{R}$ fechado, a imagem inversa $f^{-1}(F)$ é fechada em X.

Observação: Em particular, se $X \subset \mathbb{R}$ é aberto, então $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa por f de qualquer aberto de $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto (i.e. um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$); se $X \subset \mathbb{R}$ é fechado, então $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa por f de qualquer fechado de $\mathbb{R}$ é um conjunto fechado (i.e. fechado em $\mathbb{R}$).

9-) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se:

(a) os conjuntos $\{x \in X \mid f(x) = a\}$, $\{x \in X \mid f(x) \geqslant a\}$,$\{x \in X \mid f(x) \leqslant a\}$ são todos fechados em X; em particular, se X for fechado, os referidos conjuntos são todos fechados.

(b) os conjuntos $\{x \in X \mid f(x) \neq a\}$, $\{x \in X \mid f(x) > a\}$, $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ são todos abertos em X; em particular, se X for aberto, os referidos conjuntos são todos abertos.

Sugestão: Não há o que fazer; apenas observe que os conjuntos $\{a\}$, $[a, +\infty)$ e $(-\infty, a]$ são fechados, e que os conjuntos $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, $(a, +\infty)$ e $(-\infty, a)$ são abertos, e use a questão anterior.

10-) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Então os conjuntos $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$, $\{x \in X \mid f(x) \geqslant g(x)\}$ e $\{x \in X \mid f(x) \leqslant g(x)\}$ são fechados em X (em particular, fechados em $\mathbb{R}$ se X o for), e os conjuntos $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$, $\{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$ e $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$ são abertos em X (em particular, abertos em $\mathbb{R}$ se X o for).

Sugestão: Também não há o que fazer; aplique a questão anterior para $F \doteq f - g$ e $a = 0$.

11-) Seja $S \subset \mathbb{R}$ não vazio, e defina $d(\cdot, S) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\big(\forall\, x \in \mathbb{R}\big)\; d(x, S) \doteq \inf\{|x - s| : s \in S\}$. Mostre que, $\big(\forall\, x, y \in \mathbb{R}\big)\; |d(x, S) - d(y, S)| \leqslant |x - y|$. Conclua que $d(\cdot, S)$ é uniformemente contínua.

12-) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ uma funções contínuas. Se f e g coincidem num subconjunto denso de X, então elas coincidem em X. Em particular, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e coincidem em $\mathbb{Q}$, então elas são iguais (equivalentemente: se uma função $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ admite uma extensão contínua $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então esta extensão é única).

13-) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Tem-se:

(a) Se $Y, Z \subset X$ são fechados em X tais que $X = Y \cup Z$, então f é contínua se, e somente se, $f_Y \doteq f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ e $f_Z \doteq f|_Z : Z \to \mathbb{R}$ são contínuas.

(b) Se $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família de abertos em X tal que $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, então f é contínua se, e somente se, $\big(\forall\, \alpha \in A\big)\; f_\alpha \doteq f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to \mathbb{R}$ é contínua.

Sugestão: Nos dois casos, uma das implicações é trivial: se f é contínua, então sua restrição a qualquer subconjunto do seu domínio é contínua. Para demonstrar a outra implicação, use a questão **8-)** e: (i) dado $W \subset \mathbb{R}$, em (a) tem-se $f^{-1}(W) = f_Y^{-1}(W) \cup f_Z^{-1}(W)$, e em (b) tem-se $f^{-1}(W) = \cup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(W)$; (ii) verifique que a união de dois conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X (e, por indução, o mesmo vale para qualquer família finita de fechados em X, mas não precisamos disto), e que a união de uma família arbitrária de abertos em X é um conjunto aberto em X.

14-) Sejam $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínuas. Se $f(1) = g(0)$, então a função $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(2x)$ se $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ e $h(x) = g(2x - 1)$ se $1/2 \leqslant x \leqslant 1$ é contínua.

Sugestão: Use a questão anterior.

15-) (Teorema de Extensão de Tietze na Reta) Seja $F \subset \mathbb{R}$ fechado. Então toda função contínua $f : F \to \mathbb{R}$ admite uma extensão contínua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (i.e. existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\phi|_F = f$). Sugestão: Por exemplo, defina ϕ linearmente nos intervalos componentes de $\mathbb{R}\backslash F$, de modo a coincidir com f nos extremos de cada intervalo; mostre que a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assim definida é contínua.

16-) Definição: Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *própria* se, para todo $K \subset \mathbb{R}$ compacto, $f^{-1}(K)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações, dada $f : X \to \mathbb{R}$ contínua:

(a) f é própria;

(b) para toda seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X que não possui subseqüências convergentes para pontos de X, a seqüência $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ não possui subseqüências convergentes.

(c) para toda seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que a seqüência $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subseqüência convergente para um ponto de X.

17-) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. São equivalentes:

(a) f é própria;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty}|f(x)| = +\infty$;

(c) para toda seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tal que $|x_n| \to +\infty$, $|f(x_n)| \to +\infty$.

18-) Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial não-constante. Dado $b \subset \mathbb{R}$, suponha que existe uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tal que $p(x_n) \to b$. Prove que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e que o conjunto dos seus valores de aderência é não-vazio e contido em $p^{-1}(\{b\})$. Em particular, se existe uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ tal que $p(x_n) \to 0$, então p tem alguma raiz real. Bônus: vale 0,25 pontos na média do semestre.

19-) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Para que f se estenda continuamente a uma função $\phi : \overline{X} \to \mathbb{R}$, é necessário e suficiente que exista $\lim_{x\to a} f(x)$ para todo $a \in X'$.

20-) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ monótona, tal que $f(X)$ seja denso num intervalo limitado. Mostre que existe uma única função contínua, monótona, $\phi : \overline{X} \to \mathbb{R}$ tal que $\phi|_X = f$.

21-) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $C_n \doteq \{a \in \mathbb{R} \mid \exists I$ intervalo aberto $, a \in I$ e $(\forall x, y \in I)\ |f(x) - f(y)| < 1/n\}$. Mostre que $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, C_n$ é aberto, e que f é contínua em a se, e somente se, $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, a \in C_n$. Conclua que o conjunto dos pontos de continuidade de qualquer função é uma intersecção enumerável de abertos. Em particular, não existe nenhuma função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua nos racionais e descontínua nos irracionais (vide questão 28 da lista 3).

22-) Mostre que não existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua que transforme todo racional num irracional e vice versa. Bônus: vale 0,25 pontos na média do semestre.

23-) (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão 1) Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ contínua. Prove que f tem um ponto fixo (i.e. existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$). Dê um exemplo de uma função contínua $f : [0, 1) \to [0, 1)$ sem ponto fixo.

24-) Seja n ímpar. Prove que, para todo $y \in \mathbb{R}$, existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n = y$ e que, escrevendo $x = \sqrt[n]{y}$, a função $y \mapsto \sqrt[n]{y}$ assim definida é um homeomorfismo (i.e. uma aplicação contínua, inversível, cuja inversa também é contínua) de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$.

25-) Sejam $K, F \subset \mathbb{R}$ não-vazios, K compacto e F fechado. Mostre que existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $\big(\forall\, x \in K, \forall\, y \in F\big)\, |x_0 - y_0| \leqslant |x - y|$. Dê um exemplo de dois conjuntos fechados e disjuntos F, G tais que $\inf\{|x-y| \mid x \in F, y \in G\} = 0$.

26-) Se toda função contínua, definida num certo conjunto X, é limitada, então X é compacto.

27-) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, então f tem um ponto de mínimo x_0 (i.e. existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = \min f(\mathbb{R})$). Enuncie um resultado análogo para o caso de ser $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

28-) Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau par, cujo coeficiente líder é positivo. Prove que p tem um ponto de mínimo x_0. Se $p(x_0) < 0$, mostre que p tem pelo menos duas raízes reais. Enuncie resultados análogos para o caso em que o coeficiente líder de p é negativo.
Sugestão: Para a primeira parte, use a questão anterior.

29-) Definição: Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$. Definimos $f \vee g, f \wedge g : X \to \mathbb{R}$ por $\big(\forall\, x \in X\big)\, f \vee g(x) \doteq \max\{f(x), g(x)\}$, $f \wedge g(x) \doteq \min\{f(x), g(x)\}$.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$. Mostre que:
(a) Se f e g são contínuas, então $f \vee g$ e $f \wedge g$ são contínuas. Sugestão: verifique que, $\big(\forall\, x \in X\big)\, f \vee g(x) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$ e $f \wedge g(x) = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$.
(b) Se f e g são uniformemente contínuas, então $f+g$, $f \vee g$ e $f \wedge g$ também o são. Se f e g são uniformemente contínuas e uma delas é limitada, o produto $f \cdot g$ é uma função uniformemente contínua. Dê um exemplo de duas funções uniformemente contínuas cujo produto não é uma função uniformemente contínua.
(c) A composta de funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua.

30-) Uma função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua se, e somente se, tiver grau menor ou igual a 1. Bônus: vale 0,25 pontos na média do semestre.

31-) Toda função contínua monótona limitada $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, é uniformemente contínua.

32-) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $\epsilon > 0$, existem $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tais que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\big(\forall\, x, y \in [a_{i-1}, a_i]\big)\, |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

33-) Uma função contínua $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ diz-se *poligonal* se existirem $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tais que $\phi|_{[a_{i-1}, a_i]}$ é um polinômio de grau menor ou igual a 1, para $1 \leqslant i \leqslant n$. Prove que, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, para todo $\epsilon > 0$ existe $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ poligonal tal que $\big(\forall\, x \in [a, b]\big)\, |f(x) - \phi(x)| < \epsilon$.

34-) Uma função $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ diz-se uma *função escada* se existirem $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tais que $\phi|_{]a_{i-1}, a_i[}$ é constante $(= c_i)$, para $1 \leqslant i \leqslant n$. Prove que, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, para todo $\epsilon > 0$ existe $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ escada tal que $\big(\forall\, x \in [a, b]\big)\, |f(x) - \phi(x)| < \epsilon$.

35-) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $g : X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\big(\forall\, x \in X\big)\, |f(x) - g(x)| < \epsilon$. Então f é contínua.

36-) DEFINIÇÃO: Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *semi-contínua superiormente em a* se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \epsilon$; f diz-se *semi-contínua inferiormente em a* se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > f(a) - \epsilon$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *semi-contínua superiormente* (abreviadamente, s.c.s.) ou *semi-contínua inferiormente* (abreviadamente, s.c.i.), se o for em todos os pontos de X.

Mostre que, dados $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$, tem-se:

(a) f é s.c.s. em $a \in X$ se, e somente se, para toda seqüencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \to a$, $\limsup f(x_n) \leqslant f(a)$;

(b) f é s.c.s. em X se, e somente se, a imagem inversa por f de todo aberto da forma $(-\infty, b)$ é aberta em X;

(c) f é s.c.i. em $a \in X$ se, e somente se, para toda seqüencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \to a$, $\liminf f(x_n) \geqslant f(a)$;

(d) f é s.c.s. em X se, e somente se, a imagem inversa por f de todo aberto da forma $(b, +\infty)$ é aberta em X;

(e) f é contínua em a se, e somente se, for semi-contínua superior e inferiormente em a.

37-) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ compacto e $f : X \to \mathbb{R}$. Se f é s.c.s., então f tem um ponto de máximo em X (i.e. existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = \max f(X)$); analogamente, se f é s.c.i., então f tem um ponto de mínimo em X.