MAT0206/MAP0216 - Análise Real - IME - 2007
Prof. Gláucio Terra

2^a Lista de Exercícios - Resolução dos Exercícios 6, 7, 10 e 12

6-) Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências limitadas de números reais. Mostre que:
(a) $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$ e $\underline{\lim}(x_n + y_n) \geqslant \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$
(b) $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$ e $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}\, x_n$
(c) se $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$, então $\overline{\lim}(x_n \cdot y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$ e $\underline{\lim}(x_n \cdot y_n) \geqslant \underline{\lim}\, x_n \cdot \underline{\lim}\, y_n$.

Demonstração:
(a) Sejam $a = \overline{\lim}\, x_n$ e $b = \overline{\lim}\, y_n$. Provemos que, para todo $\epsilon > 0$, $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant a + b + \epsilon$; isto implica $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant a + b$ (por quê?). Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\big(\forall\, n \geqslant n_0\big)\, x_n < a + \epsilon/2$ e existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\big(\forall\, n \geqslant n_1\big)\, y_n < b + \epsilon/2$; assim, tomando $N = \max\{n_0, n_1\}$, tem-se $\big(\forall\, n \geqslant N\big)\, x_n + y_n < a + b + \epsilon$. Isto implica que toda subseqüência convergente de $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite menor ou igual a $a + b + \epsilon$, donde $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant a + b + \epsilon$.

A demonstração da outra desigualdade é análoga.

(b) Decorre imediatamente do fato de que um número real a é valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se, e somente se, $-a$ for valor de aderência de $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (o que trivialmente implica que o simétrico do maior valor de aderência de $(x_n)_n$ é o menor valor de aderência de $(-x_n)_n$, i.e. $-\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}(-x_n)$, e analogamente $-\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}(-x_n)$).

(c) Como $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$, tem-se $0 \leqslant \underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n$ e $0 \leqslant \underline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}\, y_n$.

Sejam $a = \overline{\lim}\, x_n$ e $b = \overline{\lim}\, y_n$. Provemos que, para todo $\epsilon > 0$, $\overline{\lim}(x_n \cdot y_n) \leqslant a \cdot b + \epsilon$; isto implica $\overline{\lim}(x_n \cdot y_n) \leqslant a \cdot b$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta > 0$ tal que $(a + b)\delta + \delta^2 < \epsilon$ (por exemplo, tome $0 < \delta < \min\{1, \frac{\epsilon}{a+b+1}\}$). Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\big(\forall\, n \geqslant n_0\big)\, x_n < a + \delta$ e existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\big(\forall\, n \geqslant n_1\big)\, y_n < b + \delta$; assim, tomando $N = \max\{n_0, n_1\}$, tem-se $\big(\forall\, n \geqslant N\big)\, x_n \cdot y_n < ab + (a + b)\delta + \delta^2 < ab + \epsilon$. Isto implica que toda subseqüência convergente de $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite menor que $a \cdot b + \epsilon$, donde $\overline{\lim}(x_n \cdot y_n) < a \cdot b + \epsilon$.

A demonstração da desigualdade $\underline{\lim}(x_n \cdot y_n) \geqslant \underline{\lim}\, x_n \cdot \underline{\lim}\, y_n$ é análoga.

$\square$

7-) Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências de números reais. Se $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, x_n \leqslant y_n$, então $\overline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, y_n$ e $\underline{\lim}\, x_n \leqslant \underline{\lim}\, y_n$.

Demonstração: Sejam $a = \overline{\lim}\, x_n$ e $b = \overline{\lim}\, y_n$. Suponha $b < a$. Tomando $\epsilon = (a - b)/2 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\big(\forall\, n \geqslant n_0\big)\, y_n < b + \epsilon = a - \epsilon$; como $\big(\forall\, n\big)\, x_n \leqslant y_n$, segue-se $\big(\forall\, n \geqslant n_0\big)\, x_n < a - \epsilon$, portanto a não é valor de aderência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o que contradiz o fato de ser a o limite superior da referida seqüência. A demonstração da outra desigualdade é análoga. $\square$

10-) Diz-se que uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem *variação limitada* se a seqüência $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, \nu_n = \sum_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i|$ for limitada. Prove que, neste caso, $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Prove também que:
(a) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for de variação limitada, então $(x_n)_n$ é convergente.
(b) Se $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, |x_{n+2} - x_{n+1}| \leqslant c|x_{n+1} - x_n|$, com $0 \leqslant c < 1$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem variação limitada.

(c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem variação limitada se, e somente se, $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, x_n = y_n - z_n$, onde $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são seqüências crescentes e limitadas.

Demonstração:

(a) A seqüência $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e limitada, logo convergente. Além disso, segue-se por indução sobre n que $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1$. Ora, a condição de ser $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variação limitada é equivalente a ser a série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ absolutamente convergente, portanto convergente, portanto a seqüência $n \in \mathbb{N} \mapsto x_{n+1} - x_1$ é convergente. Então a seqüência $n \in \mathbb{N} \mapsto x_{n+1}$ é convergente, donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

(b) Tem-se $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leqslant c|x_{n+1} - x_n| \leqslant c^2|x_n - x_{n-1}| \leqslant \cdots$, i.e. por indução sobre n segue-se que $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, |x_{n+2} - x_{n+1}| \leqslant c^n|x_2 - x_1|$. Assim, $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, \nu_n = \sum_{i=1}^{n}|x_{i+1} - x_i| \leqslant |x_2 - x_1|(\sum_{k=0}^{n-1} c^k) \leqslant |x_2 - x_1|\frac{1}{1-c}$, portanto $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

(c) Provemos, inicialmente, que se uma seqüência se escreve como a diferença entre duas seqüências crescentes e limitadas, ela é de variação limitada. Isto segue dos seguintes fatos:

(i) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for crescente e limitada. Então existe $M > 0$ tal que $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, |x_n| < M$ e, $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, \nu_n = \sum_{i=1}^{n}|x_{i+1} - x_i| = \sum_{i=1}^{n}[x_{i+1} - x_i] = x_{n+1} - x_1 < 2M$, portanto $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, i.e. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de variação limitada.

(ii) A soma/diferença de seqüências de variação limitada é uma seqüência de variação limitada. Com efeito, sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências de variação limitada. Ou seja, pondo $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, \nu_n = \sum_{i=1}^{n}|x_{i+1} - x_i|$ e $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, \mu_n = \sum_{i=1}^{n}|y_{i+1} - y_i|$, existem $M > 0, N > 0$ tais que $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, \nu_n \leqslant M, \mu_n \leqslant N$. Ora, pela desigualdade triangular segue-se que $\sum_{i=1}^{n}|(x_{i+1} \pm y_{i+1}) - (x_i \pm y_i)| \leqslant \nu_n + \mu_n \leqslant N + M$, donde $(x_n \pm y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de variação limitada.

Reciprocamente, suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja de variação limitada. Definamos, dado $a \in \mathbb{R}$, $a^+ \doteq \frac{|a|+a}{2} = \max\{a, 0\}$ e $a^- \doteq \frac{|a|-a}{2} = \max\{-a, 0\}$; assim, $a = a^+ - a^-$ e $|a| = a^+ + a^-$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponha $\xi_n \doteq \sum_{i=0}^{n}(x_{i+1} - x_i)^+$, e $\mu_n \doteq \sum_{i=0}^{n}(x_{i+1} - x_i)^-$ (portanto $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são crescentes); então $\nu_n = \xi_n + \mu_n$ (portanto $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são limitadas) e $\xi_n - \mu_n = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1$, e isto conclui a demonstração. $\square$

12-) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a seqüência de números reais dada por $x_1 = 1$ e $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$. Verifique que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de variação limitada e calcule o seu limite.

Demonstração: Tem-se, $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, |x_{n+2} - x_{n+1}| = |(1 + \sqrt{x_{n+1}}) - (1 + \sqrt{x_n})| = |\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}| = \dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}}$. Ora, por indução sobre n segue-se que $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, x_n \geqslant 1$, donde $\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} \geqslant 2$, i.e. $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, \dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}} \leqslant \dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{2}$. Do item (b) da questão 10, segue-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de variação limitada, portanto convergente. Seja c o seu limite. Então c também é o limite da subseqüência $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$; como $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$, segue-se $c = 1 + \sqrt{c}$, donde $(c - 1)^2 = c \Leftrightarrow c^2 - 3c + 1 = 0 \Leftrightarrow c = (3 + \sqrt{5})/2$ ou $c = (3 - \sqrt{5})/2$. Como $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, x_n \geqslant 1$, devemos ter $c \geqslant 1$, donde $c = (3 + \sqrt{5})/2$. $\square$