

Soluções dos exercícios de Análise do livro de Elon
Lages Lima:Curso de análise vol.1.

Rodrigo Carlos Silva de Lima [‡]

Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ

rodrigo.uff.math@gmail.com

[‡]

15 de setembro de 2011

Sumário

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Soluções-Curso de análise vol.1 | 6 |
| 1.1 | Notações | 6 |
| 1.2 | Capítulo 2-Conjuntos finitos, Enumeráveis e não-enumeráveis | 7 |
| 1.2.1 | Questão 1 | 7 |
| 1.2.2 | Questão 2 | 8 |
| 1.2.3 | Questão 3 | 8 |
| 1.2.4 | Questão 5 | 8 |
| 1.2.5 | Questão 6 | 9 |
| 1.2.6 | Questão 7 | 10 |
| 1.2.7 | questão 8 | 11 |
| 1.2.8 | Questão 9 | 11 |
| 1.2.9 | Questão 10 | 12 |
| 1.2.10 | Questão 11 | 13 |
| 1.2.11 | Questão 12 | 13 |
| 1.2.12 | Questão 13 | 14 |
| 1.2.13 | Questão 14 | 14 |
| 1.2.14 | Questão 15 | 15 |
| 1.2.15 | Questão 16 | 15 |
| 1.2.16 | Questão 17 | 16 |
| 1.2.17 | Questão 18 | 16 |
| 1.2.18 | Questão 19 | 17 |
| 1.2.19 | Questão 20 | 17 |
| 1.2.20 | Questão 21 | 19 |
| 1.2.21 | Questão 22 | 19 |

| | | |
|--------|---------------------------|----|
| 1.2.22 | Questão 23 | 19 |
| 1.2.23 | Questão 24 | 20 |
| 1.2.24 | Questão 25 | 20 |
| 1.2.25 | Questão 26 | 22 |
| 1.2.26 | Questão 27 | 23 |
| 1.3 | Capítulo 3 -Números reais | 24 |
| 1.3.1 | Questão 1 | 24 |
| 1.3.2 | Questão 2 | 24 |
| 1.3.3 | Questão 3 | 26 |
| 1.3.4 | Questão 4 | 27 |
| 1.3.5 | Questão 5 | 28 |
| 1.3.6 | Questão 6 | 29 |
| 1.3.7 | Questão 7 | 29 |
| 1.3.8 | Questão 8 | 29 |
| 1.3.9 | Questão 9 | 29 |
| 1.3.10 | Questão 10 | 30 |
| 1.3.11 | Questão 11 | 30 |
| 1.3.12 | Questão 12 | 30 |
| 1.3.13 | Questão 13 | 31 |
| 1.3.14 | Questão 14 | 32 |
| 1.3.15 | Questão 15 | 32 |
| 1.3.16 | Questão 16 | 32 |
| 1.3.17 | Questão 17 | 33 |
| 1.3.18 | Questão 18 | 33 |
| 1.3.19 | Questão 19 | 34 |
| 1.3.20 | Questão 20 | 34 |
| 1.3.21 | Questão 22 | 36 |
| 1.3.22 | Questão 23 | 38 |
| 1.3.23 | Questão 24 | 39 |
| 1.3.24 | Questão 25 | 39 |
| 1.3.25 | Questão 26 | 39 |
| 1.3.26 | Questão 27 | 40 |
| 1.3.27 | Questão 28 | 41 |

| | | |
|--------|---|----|
| 1.3.28 | Questão 29 | 41 |
| 1.3.29 | Questão 30 | 42 |
| 1.3.30 | Questão 31 | 42 |
| 1.3.31 | Questão 32 | 43 |
| 1.3.32 | Questão 33 | 43 |
| 1.3.33 | Questão 34 | 44 |
| 1.3.34 | Questão 35 e 36 | 44 |
| 1.3.35 | Questão 37 | 45 |
| 1.3.36 | Questão 38 | 46 |
| 1.3.37 | Questão 39 | 48 |
| 1.3.38 | Questão 40 | 49 |
| 1.3.39 | Questão 42 | 50 |
| 1.3.40 | Questão 43 | 51 |
| 1.3.41 | Questão 44 | 52 |
| 1.3.42 | Questão 45 | 53 |
| 1.3.43 | Questão 46 | 54 |
| 1.3.44 | Questão 48 | 54 |
| 1.3.45 | Questão 49 | 54 |
| 1.3.46 | Questão 50 | 55 |
| 1.3.47 | Questão 53 | 56 |
| 1.3.48 | Questão 57 | 56 |
| 1.4 | Capítulo 4-Sequências e séries de números reais | 57 |
| 1.4.1 | Questão 1 | 57 |
| 1.4.2 | Questão 2 | 57 |
| 1.4.3 | Questão 3 | 57 |
| 1.4.4 | Questão 4 | 58 |
| 1.4.5 | Questão 5 | 58 |
| 1.4.6 | Questão 6 | 58 |
| 1.4.7 | Questão 7 | 59 |
| 1.4.8 | Questão 8 | 59 |
| 1.4.9 | Questão 9 | 59 |
| 1.4.10 | Questão 10 | 59 |
| 1.4.11 | Questão 11 | 59 |

| | | |
|--------|------------------------------|----|
| 1.4.12 | Questão 11a. | 60 |
| 1.4.13 | Questão 12 | 60 |
| 1.4.14 | Questão 14 | 61 |
| 1.4.15 | Questão 15 | 62 |
| 1.4.16 | Questão 18 | 63 |
| 1.4.17 | Questão 19 | 63 |
| 1.4.18 | Questão 20 | 65 |
| 1.4.19 | Questão 21 | 66 |
| 1.4.20 | Questão 22 | 67 |
| 1.4.21 | Questão 25 | 67 |
| 1.4.22 | Questão 31 | 70 |
| 1.4.23 | Questão 35 | 71 |
| 1.4.24 | Questão 36 | 71 |
| 1.4.25 | Questão 40 | 72 |
| 1.4.26 | Questão 42 | 73 |
| 1.4.27 | Questão 43 | 74 |
| 1.4.28 | Questão 44 | 74 |
| 1.4.29 | Questão 46 | 75 |
| 1.4.30 | Questão 48 | 76 |
| 1.5 | Capítulo 5-Topologia da reta | 76 |
| 1.5.1 | Questão 1 | 76 |
| 1.5.2 | Questão 3 | 77 |
| 1.6 | Capítulo 8-Derivadas | 78 |
| 1.6.1 | Questão 1 | 78 |
| 1.6.2 | Questão 2 | 79 |
| 1.6.3 | Questão 3 | 79 |
| 1.6.4 | Questão 4 | 80 |
| 1.6.5 | Questão 5 | 81 |

Capítulo 1

Soluções-Curso de análise vol.1

Esse texto ainda não se encontra na sua versão final, sendo, por enquanto, constituído apenas de anotações informais. Sugestões para melhoria do texto, correções da parte matemática ou gramatical eu agradeceria que fossem enviadas para meu Email **rodrigo.uff.math@gmail.com**.

Se houver alguma solução errada, se quiser contribuir com uma solução diferente ou ajudar com uma solução que não consta no texto, também peço que ajude enviando a solução ou sugestão para o email acima, colocarei no texto o nome da pessoa que tenha ajudado com alguma solução. Espero que esse texto possa ajudar alguns alunos que estudam análise pelo livro do Elon.

1.1 Notações

Denotamos (x_n) uma sequência (x_1, x_2, \dots) . Uma n upla (x_1, x_2, \dots, x_n) podemos denotar como $(x_k)_1^n$.

O conjunto de valores de aderência de uma sequência (x_n) iremos denotar como $A[x_n]$.

Usaremos a abreviação *PBO* para princípio da boa ordenação.

Denotamos $f(x+1) - f(x) = \Delta f(x)$.

Usando a notação $Qx_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

1.2 Capítulo 2-Conjuntos finitos, Enumeráveis e não-enumeráveis

1.2.1 Questão 1

Axioma 1. Existe uma função $s : N \rightarrow N$ injetiva, chamada de função sucessor, o número natural $s(n)$ é chamado sucessor de n .

Corolário 1. Como s é uma função, então o sucessor de um número natural é único, isto é, um número natural possui apenas um sucessor.

Axioma 2. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro natural, esse número simbolizamos por 1.

Axioma 3 (Axioma da indução). Dado um conjunto $A \subset N$, se $1 \in A$ e $\forall n \in A$ tem-se $s(n) \in A$ então $A = N$.

Propriedade 1. Supondo os axiomas 1 e 2 então o axioma 3 é equivalente a proposição: Para todo subconjunto não vazio $A \subset N$ tem-se $A \setminus S(A) \neq \emptyset$.

Demonstração.

\Rightarrow). Supondo o axioma (3) válido. Suponha por absurdo que exista $A \neq \emptyset$, $A \subset N$ tal que $A \setminus S(A) = \emptyset$ então $A \subset S(A)$, isto é, $\forall x \in A$ existe $y \in A$ tal que $x = s(y)$. Sabemos que $1 \notin A$, pois se não $1 \in A \setminus S(A)$. Se $n \notin A$, vamos mostrar que $s(n) \notin A$. Se fosse $s(n) \in A$, chegaríamos em uma contradição com $A \subset S(A)$, pois deveria haver $y \in A$ tal que $s(y) = s(n)$ e por injetividade seguiria $y = n \in A$, o que contraria a hipótese, logo $s(n) \notin A$, A é vazio pois não contém nenhum número natural, mas consideramos que A não é vazio como hipótese, absurdo!.

\Leftarrow).

Pelo axioma 2 temos que 1 é o único elemento de $N \setminus S(N)$, pelo axioma 1 temos que $S(N) \subset N$ daí temos $N = \{1\} \cup S(N)$ o que implica $1 \in A, \forall n \in N s(n) \in A \Leftrightarrow A = N$.

1.2.2 Questão 2

Propriedade 2. Dados m e n naturais então existe x natural tal que

$$x.n > m.$$

Demonstração. Vale $n \geq 1$ daí multiplicando por $m+1$ segue $(m+1)n \geq m+1 > m$ logo $(m+1)n > m$.

1.2.3 Questão 3

Propriedade 3. Seja $n_0 \in N$. Se $A \subset N$ tal que $n_0 \in A$ e $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ então todo $x \in N$ com $x \geq a$ pertence à A .

Demonstração. Se $a = 1$ nada temos a fazer pois $A = N$. Se $a > 1$ então $a = b+1$ é sucessor de b . Vamos mostrar que $b+n \in A \forall n \in N$. Sabemos que $b+1 \in A$. Supondo que $b+n \in A$ então $b+(n+1) \in A$ daí por indução segue que $b+n \in A \forall n \in N$. Lembrando que $x > b$ significa que existe p natural tal que $b+p = x$, como $b+p \in A \forall p \in N$ então $x \in A$. Outro fato que usamos é que se $x > b$ então $x \geq b+1 = a$ pois não existe natural entre b e $b+1$, $b \in N$.

1.2.4 Questão 5

Definição 1 (Antecessor). $m \in N$ é antecessor de $n \in N$ quando $m < n$ mas não existe $c \in N$ tal que $m < c < n$.

Propriedade 4. 1 não possui antecessor e qualquer outro número natural possui antecessor.

Demonstração. Não vale $m < 1$ para algum natural m , logo 1 não possui antecessor. Agora para todo outro $n \in N$ vale $n > 1$ logo existe $p \in N$ tal que $p+1 = n$, vamos mostrar que $p = m$ é o antecessor de n . Vale $p < p+1$, logo a primeira condição é satisfeita, a segunda condição também é satisfeita pois não existe $c \in N$ tal que $p < c < p+1$. Vamos mostrar agora que existe um único antecessor. Suponha existência de dois antecessores m e m' distintos então existe um deles que é o maior, digamos m' , daí $m < m'$ e $m' < n$ por transitividade segue $m < m' < n$ o que contraria a definição de antecessor, então existe um único.

1.2.5 Questão 6

Questão 6 a)

Propriedade 5. Mostrar que

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demonstração. Por indução sobre n . Para $n = 1$ a igualdade vale pois

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(2)}{2}.$$

Supondo a validade para n

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

vamos provar para $n + 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Por definição de somatório temos

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^n k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

onde usamos a hipótese da indução

□.

Questão 6 b)

Propriedade 6. Mostrar que

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Demonstração. Por indução sobre n . Para $n = 1$ temos

$$\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2.$$

supondo a validade para n ,

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

vamos provar para $n + 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2.$$

Usando a definição de somatório e hipótese da indução tem-se

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + 2n+1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \square.$$

Questão 6 c)

Exemplo 1. Mostrar por indução que

$$(a-1) \sum_{k=0}^n a^k = a^{n+1} - 1.$$

Para $n = 1$ temos

$$(a-1) \sum_{k=0}^1 a^k = (a-1)(a+1) = a^2 - 1.$$

Supondo que $(a-1) \sum_{k=0}^n a^k = a^{n+1} - 1$ vamos provar que $(a-1) \sum_{k=0}^{n+1} a^k = a^{n+2} - 1$. Por definição de somatório e pela hipótese da indução temos

$$(a-1) \sum_{k=0}^{n+1} a^k = (a-1)a^{n+1} + (a-1) \sum_{k=0}^n a^k = a^{n+2} - a^{n+1} + a^{n+1} - 1 = a^{n+2} - 1 \quad \square.$$

Questão 6 d)

Exemplo 2. Mostre que se $n \geq 4$ então $n! > 2^n$.

Para $n = 4$ vale $4! = 24 > 2^4 = 16$. Suponha validade para n , $n! > 2^n$, vamos provar para $n+1$, $(n+1)! > 2^{n+1}$. Multiplicando $n! > 2^n$ por $n+1$ de ambos lados segue que

$$(n+1)! > \underbrace{(n+1)}_{>2} 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \square.$$

1.2.6 Questão 7

Propriedade 7 (Unicidade da fatoração em primos). Seja $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Se $n = \prod_{k=1}^m p_k =$

$\prod_{k=1}^s q_k$ onde cada p_k e q_k são primos, não necessariamente distintos então $m = s$ e $p_k = q_k \forall k$, após, se necessário, uma renomeação dos termos.

Demonstração. Vamos provar usando o segundo princípio da indução, para $n = 2$ a propriedade vale. Suponha a validade para todo $t < n$ vamos provar que nessas condições vale para n .

$$n = p_m \prod_{k=1}^{m-1} p_k = q_s \prod_{k=1}^{s-1} q_k$$

p_m divide o produto $\prod_{k=1}^s q_k$ então deve dividir um dos fatores, por exemplo q_s (se não, renomeamos os termos), como $p_m | q_s$ então $p_m = q_s$

$$p_m \prod_{k=1}^{m-1} p_k = p_m \prod_{k=1}^{s-1} q_k \Rightarrow \prod_{k=1}^{m-1} p_k = \prod_{k=1}^{s-1} q_k = n_0 < n$$

como n_0 é menor que n , usamos a hipótese da indução, que implica $m-1 = s-1$, $q_k = p_k$ de $k = 1$ até $m-1$, daí segue que $m = n$ e $q_k = p_k$ de $k = 1$ até m .

1.2.7 questão 8

Propriedade 8. Sejam A e B conjuntos com n elementos, então o número de bijeções de $f : A \rightarrow B$ é $n!$

Demonstração.

Por indução sobre n , para $n = 1$, tem-se uma função $A = \{a_1\}$ e $B = \{b_1\}$, $f : A \rightarrow B$ tal que $f(a_1) = b_1$. Supondo a validade para conjuntos com n elementos, vamos provar que vale para conjuntos com $n+1$ elementos. Tomando $A = \{a_k, k \in I_{n+1}\}$ e $B = \{b_k, k \in I_{n+1}\}$, dado $s \in I_{n+1}$, fixamos as bijeções f com $f(a_1) = b_s$ daí a quantidade dessas funções é dada pela quantidade de bijeções de $A \setminus \{a_1\}$ em $B \setminus \{b_s\}$, que é $n!$ para cada s variando de 1 até $n+1$, o total então é $(n+1)n! = (n+1)!$.

Corolário 2. O mesmo vale se $A = B$.

1.2.8 Questão 9

Questão a)

Propriedade 9. Se A e B são finitos e disjuntos com $|A| = n$ e $|B| = m$ então $A \cup B$ é finito com $|A \cup B| = m + n$.

Demonstração. Existem bijeções $f : I_n \rightarrow A$, $g : I_m \rightarrow B$. Definimos $h : I_{m+n} \rightarrow A \cup B$ como $h(x) = f(x)$ se $1 \leq x \leq n$ e $h(x) = g(x - n)$ se $1 + n \leq x \leq m + n$ ($1 \leq x - n \leq m$), como h é bijeção segue o resultado.

Propriedade 10. Se A e B são conjuntos finitos não necessariamente disjuntos vale a relação

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demonstração. Escrevemos A como a união disjunta $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, daí $|A| - |A \cap B| = |A \setminus B|$ agora escrevemos $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, união disjunta logo

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B|$$

usando a primeira expressão segue que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

1.2.9 Questão 10

Propriedade 11. Seja A finito. Existe uma bijeção $g : I_n \rightarrow A$ para algum n , pois A é finito, a função $f : A \rightarrow A$ é injetiva ou sobrejetiva $\Leftrightarrow g^{-1} \circ f \circ g : I_n \rightarrow I_n$ é injetiva ou sobrejetiva, respectivamente.

Demonstração.

\Rightarrow). Se f é injetiva ou sobrejetiva então $g^{-1} \circ f \circ g : I_n \rightarrow I_n$ é injetiva ou sobrejetiva, por ser composição de funções com essas propriedades.

\Leftarrow). Seja $g^{-1} \circ f \circ g : I_n \rightarrow I_n$ sobrejetiva vamos mostrar que f também é sobrejetiva. Dado $y \in A$ vamos mostrar que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $g : I_n \rightarrow A$ é sobrejetiva então existe $x_1 \in I_n$ tal que $g(x_1) = y$ e pelo fato de $g^{-1} \circ f \circ g$ ser sobrejetiva então existe $x_2 \in I_n$ tal que $g^{-1}(f(g(x_2))) = x_1 = g^{-1}(y)$ como g^{-1} é injetiva segue que $f(g(x_2)) = y$ logo f é sobrejetiva.

Se $g^{-1} \circ f \circ g$ é injetiva então f é injetiva. Sejam x, y quaisquer em A , existem $x_1, x_2 \in I_n$ tais que $g(x_1) = x$, $g(x_2) = y$. Vamos mostrar que se $f(x) = f(y)$ então $x = y$.

Se $f(x) = f(y)$ então $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ e $g^{-1}(f(g(x_1))) = g^{-1}(f(g(x_2)))$ com $g^{-1} \circ f \circ g$ segue que $x_1 = x_2$ que implica $g(x_1) = g(x_2)$, isto é, $x = y$.

Propriedade 12. Seja A um conjunto finito. $f : A \rightarrow A$ é injetiva \Leftrightarrow é sobrejetiva.

Demonstração.

\Rightarrow).

Consideramos o caso $f : I_n \rightarrow I_n$, se f for injetiva então $f : I_n \rightarrow f(I_n)$ é uma bijeção com $f(I_n) \subset I_n$. f_n não pode ser parte própria de I_n pois se não $f^{-1}(I_n) \rightarrow I_n$ seria bijeção de um conjunto com sua parte própria, logo $f(I_n) = I_n$ e $f : I_n \rightarrow I_n$ é bijeção.

\Leftarrow). Se f for sobrejetiva então para cada $y \in I_n$ (imagem) podemos escolher $x \in I_n$ (domínio) tal que $f(x) = y$ e daí definir $g : I_n \rightarrow I_n$ tal que $g(y) = x$, g é injetiva, pois f é função, logo pelo resultado já mostrado g é bijetora, implicando que f também é.

1.2.10 Questão 11

Propriedade 13 (Princípio das gavetas de Dirichlet- Ou princípio da casas dos pombos.).

Se temos m conjuntos $(A_k)_1^m$ e n elementos $n > m$, com $\sum_{k=1}^n |A_k| = n$ então existe A_t em $(A_k)_1^m$ tal que $|A_t| > 1$.

Esse resultado diz que se temos n elementos e m conjuntos tais que $n > m$ então deve haver um conjunto com pelo menos 2 elementos.

Demonstração. Supondo que $|A_k| \leq 1 \forall k$ então aplicando a soma $\sum_{k=1}^n$ em ambos lados dessa desigualdade temos

$$n = \sum_{k=1}^n |A_k| \leq m \Rightarrow n \leq m$$

o que contraria a hipótese de $n > m$, portanto deve valer $|A_t| > 1$ para algum $t \in I_n$.

1.2.11 Questão 12

Propriedade 14. Seja A um conjunto com n elementos, então o número de funções injetivas $f : I_p \rightarrow A$ é $\prod_{k=0}^{p-1} (n - k)$.

Demonstração. Se $p > n$ o resultado vale pois não existe função injetiva de $f : I_p \rightarrow A$, pois se não $f : I_p \rightarrow f(A)$ seria bijeção e $f(A) \subset A$ daí A iria possuir um subconjunto

com p elementos que é maior que o número de elementos de A , o que é absurdo. Iremos provar o resultado para outros valores de $p \leq n$. Para $p = 1$ temos n funções, que são

$$f_1(1) = a_1, f_2(1) = a_2, \dots, f_n(1) = a_n.$$

Suponha que para I_p temos $\prod_{k=0}^{p-1} (n-k)$ funções que são injetivas, vamos mostrar que para I_{p+1} temos $\prod_{k=0}^p (n-k)$ funções. Seja o conjunto das funções $f : I_{p+1} \rightarrow A$ injetivas, podemos pensar o conjunto das f restritas à I_p tendo $\prod_{k=0}^{p-1} (n-k)$ funções, por hipótese da indução, agora podemos definir essas funções no ponto $p+1$, onde temos $n-p$ escolhas, para cada uma dessas escolhas temos $\prod_{k=0}^{p-1} (n-k)$ funções, portanto temos um total de $(n-p) \prod_{k=0}^{p-1} (n-k) = \prod_{k=0}^p (n-k)$ funções.

1.2.12 Questão 13

Propriedade 15. Se X possui n elementos então tal conjunto possui $\binom{n}{p}$ subconjuntos com p elementos.

Demonstração. Vamos provar por indução sobre n e p livre. Para $n = 0$ ele só possui um subconjunto com 0 elementos $\binom{0}{0} = 1$ e para outros valores de $p > 0 \in \mathbb{N}$ vale $\binom{0}{p} = 0$.

Suponha que para um conjunto qualquer A com n elementos, temos $\binom{n}{p}$ subconjuntos, agora podemos obter um conjunto com $n+1$ elementos, adicionando um novo elemento $\{a_{n+1}\}$, continuamos a contar os $\binom{n}{p}$ subconjuntos que contamos com elementos de A e podemos formar mais subconjuntos com p elementos adicionando o ponto $\{a_{n+1}\}$ aos conjuntos com $p-1$ elementos, que por hipótese da indução temos $\binom{n}{p-1}$, então temos no total $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ pela identidade de Stifel, como queríamos demonstrar.

1.2.13 Questão 14

Propriedade 16. Seja $|A| = n$ então $|P(A)| = 2^n$.

Demonstração. Por indução sobre n , se $n = 1$, então $A = \{a_1\}$ possui dois subconjuntos que são \emptyset e $\{a_1\}$. Suponha que qualquer conjunto qualquer B com n elementos tenha $|P(B)| = 2^n$, vamos provar que um conjunto C com $n + 1$ elementos implica $|P(C)| = 2^{n+1}$. Tomamos um elemento $a \in C$, $C \setminus \{a\}$ possui 2^n subconjuntos (por hipótese da indução), s_k de $k = 1$ até $k = 2^n$, que também são subconjuntos de C , porém podemos formar mais 2^n subconjuntos de C com a união do elemento $\{a\}$, logo no total temos $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos de C e mais nenhum subconjunto, pois não temos nenhum outro elemento para unir aos subconjuntos dados.

1.2.14 Questão 15

Exemplo 3. Existe $g : N \rightarrow N$ sobrejetiva tal que $g^{-1}(n)$ é infinito para cada $n \in N$.

Seja $f : N \rightarrow N$ definida como $f(n) = k$ se n é da forma $n = p_k^{\alpha_k}$ onde p_k é o k -ésimo número primo e $f(n) = n$ caso contrário, f é sobrejetiva e existem infinitos $n \in N$ tais que $f(n) = k$ para cada k natural.

1.2.15 Questão 16

Propriedade 17. $P_n = \{A \subset N \mid |A| = n\}$ é enumerável.

Demonstração. Definimos a função $f : P_n \rightarrow N^n$ da seguinte maneira: Dado $A = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$, $f(A) = (x_1, \dots, x_n)$. Tal função é injetiva pois dados $A = \{x_k, k \in I_n\}$ e $B = \{y_k, k \in I_n\}$ não pode valer $x_k = y_k$ para todo k , pois se não os conjuntos seriam iguais.

Se trocamos N por outro conjunto X enumerável o resultado também vale, basta definir uma função $f : P_n \rightarrow X^n$ e $g : X \rightarrow N$ injetiva, enumeramos um subconjunto finito qualquer com n elementos $A \subset X$ como $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ onde $g(x_1) < g(x_2) < \dots < g(x_n)$ e definimos $f(A) = (x_1, \dots, x_n)$.

Corolário 3. o conjunto P_f dos subconjuntos finitos de N é enumerável pois

$$P_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$$

é união enumerável de conjuntos enumeráveis. O mesmo vale trocando N por um conjunto enumerável qualquer A .

1.2.16 Questão 17

Propriedade 18. X é finito \Leftrightarrow existe $f : X \rightarrow X$ que só admite subconjuntos estáveis \emptyset e X .

Demonstração. Iremos considerar sempre conjuntos não vazios.

\Rightarrow). Suponha X finito, então $X = \{a_1, \dots, a_n\}$, definimos $f : X \rightarrow X$ como $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$, em geral $f(a_k) = a_{k+1}$ se $k < n$ e $f(a_n) = a_1$. f não possui subconjunto estável diferente de X , pois, suponha um conjunto $Y \neq X$ estável, a_1 não pode pertencer ao conjunto, pois se não $f(a_1) = a_2 \in Y$, $f(a_2) = a_3 \in Y$ até $f(a_{n-1}) = a_n \in Y$ então teríamos $Y = X$ o que é absurdo, da mesma maneira se $a_t \in Y$ então $f(a_t) = a_{t+1} \in Y$, $f(a_{t+1}) = a_{t+2} \in Y$, em menos de n aplicações da função teremos $f(a_{n-1}) = a_n \in Y$ e daí $f(a_n) = a_1 \in Y$ o que implica $Y = X$, logo não podemos ter outro subconjunto estável além de X com a função f definida acima.

\Leftarrow).

Suponha X infinito, vamos mostrar que qualquer função $f : X \rightarrow X$ possui subconjunto estável $Y \neq X$.

Tomamos $a_1 \in X$, consideramos $f(a_1) := a_2$ se $a_1 = a_2$ paramos e temos o conjunto $Y = \{a_1\} \neq X$ pois X é infinito, se não continuamos a aplica a função $f(a_2) := a_3$, se $a_3 = a_2$ ou a_1 então paramos e tomamos $Y = \{a_1, a_2\}$, continuamos o processo recursivamente $f(a_k) := a_{k+1}$ se a_{k+1} é igual a algum dos elementos de $\{a_1, \dots, a_k\}$, então paramos o processo e tomamos $Y = \{a_1, \dots, a_k\}$, se para todo $k \in \mathbb{N}$ os elementos $a_{k+1} = f(a_k)$ não pertencem ao conjunto $\{a_1, \dots, a_k\}$, então temos um conjunto

$$= \{a_2 = f(a_1), f(a_2) = a_3, f(a_3) = a_4, \dots, f(a_n) = a_{n+1}, \dots\}$$

tomamos tal conjunto como Y e temos

$$f(Y) = \{f(a_2) = a_3, f(a_3) = a_4, \dots\} \subset Y$$

podemos observar que $Y \neq X$ pois $a_1 \notin Y$. Assim concluimos nossa demonstração.

1.2.17 Questão 18

Propriedade 19. Seja $f : A \rightarrow A$ injetiva, tal que $f(A) \neq A$, tomando $x \in A \setminus f(A)$ então os elementos $f^k(x)$ de $O(x) = \{f^k(x), k \in \mathbb{N}\}$ são todos distintos. Estamos denotando $f^k(x)$ pela k -ésima composição de f com ela mesma.

Demonstração. Para todo t vale que f^t é injetiva, pois a composição de funções injetivas é injetiva.

Se existisse $k \neq t$ tal que $f^k(x) = f^t(x)$, $t > k$, então existe $p > 0 \in \mathbb{N}$ tal que $t = k + p$

$$f^{k+p}(x) = f^k(f^p(x)) = f^k(x)$$

por injetividade de f^k segue que $f^p(x) = x$, logo $x \in f(A)$ o que contraria a hipótese de $x \in A \setminus f(A)$. Portanto os elementos são distintos.

1.2.18 Questão 19

Propriedade 20. Se A é infinito então existe função injetiva $f : \mathbb{N} \rightarrow A$.

Demonstração. Podemos definir f indutivamente. Tomamos inicialmente $x_1 \in A$ e definimos $f(1) = x_1$ e para $n \in \mathbb{N}$ escolhemos $x_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{k=1}^n \{x_k\}$ definido $f(n+1) = x_{n+1}$.

$A \setminus \bigcup_{k=1}^n \{x_k\}$ nunca é vazio pois A é infinito. f é injetora pois tomando $m > n$ tem-se $f(n) \in \bigcup_{k=1}^{m-1} \{x_k\}$ e $f(m) \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} \{x_k\}$.

Corolário 4. Existe função injetiva de um conjunto finito B num conjunto infinito A , usamos o mesmo processo do exemplo anterior, mas o processo para depois de definir a função $|B|$ pontos.

Propriedade 21. Sendo A infinito e B finito existe função sobrejetiva $g : A \rightarrow B$.

Demonstração. Existe função injetiva $f : B \rightarrow A$, logo $f : B \rightarrow f(B) \subset A$ é bijeção, possuindo inversa $g^{-1} : f(B) \rightarrow B$. Considere a função $f : A \rightarrow B$ definida como $f(x) = g^{-1}(x)$ se $x \in f(B)$ e $f(x) = x_1 \in B$ se $x \notin f(B)$, f é função sobrejetiva.

1.2.19 Questão 20

Questão 20-a)

Propriedade 22. O produto cartesiano finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração. Seja $\prod_{k=1}^s A_k$ o produto cartesiano dos conjuntos A_k enumeráveis, então para cada k existe uma função $f_k : N \rightarrow A_k$ que é sobrejetiva, então definimos a função $f : N^s \rightarrow \prod_{k=1}^s A_k$ dada por

$$f(x_k)_1 = (f_k(x_k))_1^s$$

,isto é,

$$f(x_1, \dots, x_s) = (f_1(x_1), \dots, f_s(x_s))$$

como tal função é sobrejetiva e N^s é enumerável segue que $\prod_{k=1}^s A_k$ é enumerável.

Corolário 5. Se X é finito e Y é enumerável, então $F(X, Y)$ é enumerável. Basta considerar o caso de $X = I_n$, então $F(X, Y) = \prod_{k=1}^n Y = Y^n$, que é enumerável.

Questão 20-b)

Propriedade 23. Para cada $f : N \rightarrow N$ seja $A_f = \{n \in N \mid f(n) \neq 1\}$. O conjunto M das funções, $f : N \rightarrow N$ tais que A_f é finito é um conjunto enumerável.

Demonstração. Seja B_n o conjunto das $f : N \rightarrow N$, tais que $|A_f| = n$, vamos mostrar inicialmente que B_n é enumerável. Cada $f : N \rightarrow N$ é uma sequência $(f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots)$, os elementos de B_n são as sequências que diferem da unidade em exatamente n valores. Para cada elemento f de B_n temos n termos diferentes de 1, que serão simbolizados por

$$f(k_1), f(k_2), \dots, f(k_n) \text{ onde } k_1 < k_2 < \dots < k_n$$

definimos $g : B_n \rightarrow N^n$ como

$$g(f) = (p_{k_1}^{f(k_1)}, p_{k_2}^{f(k_2)}, \dots, p_{k_n}^{f(k_n)})$$

onde cada p_t é o t -ésimo primo. A função definida dessa forma é injetora, pois se vale $g(f) = g(h)$ então

$$(p_{k_1}^{f(k_1)}, p_{k_2}^{f(k_2)}, \dots, p_{k_n}^{f(k_n)}) = (q_{k'_1}^{f(k'_1)}, q_{k'_2}^{f(k'_2)}, \dots, q_{k'_n}^{f(k'_n)})$$

por unicidade de fatoração em primos segue que $q_t = p_t$ e $k_t = k'_t \forall t$.

Agora escrevemos $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis, portanto o conjunto das funções $f : N \rightarrow N$ tais que A_f é finito é enumerável.

1.2.20 Questão 21

Exemplo 4. Expressar $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ onde os conjuntos são infinitos e dois a dois disjuntos.

Tome $N_{k+1} = \{p_k^{\alpha_k}, \alpha_k \in N \text{ onde } p_k \text{ o } k\text{-ésimo primo}\}$ e $N_1 = N \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} N_k$, cada um deles é infinito, são disjuntos e sua união dá N .

1.2.21 Questão 22

Exemplo 5. $f : N \times N \rightarrow N$ definida como $f(m, n) = 2^{m-1}(2n - 1)$ é uma bijeção. Dado um número natural n qualquer, podemos escrever esse número como produto dos seus fatores primos

$$n = \prod_{k=1}^n p_k^{\alpha_k} = 2^{\alpha_1} \cdot \prod_{k=2}^n p_k^{\alpha_k}$$

como os primos maiores que 2 são ímpares e o produto de ímpares é um número ímpar então $n = 2^m(2n - 1)$. Agora vamos mostrar que a função é injetora seja $f(m, n) = f(p, q)$

$$2^m(2n - 1) = 2^p(2q - 1)$$

se $m \neq p$ os números serão diferentes pela unicidade de fatoração ($2s - 1$ não possui fatores 2 pois sempre é ímpar), então devemos ter $m = p$, daí segue que $n = q$ e termina a demonstração.

1.2.22 Questão 23

Propriedade 24. Todo conjunto $A \subset N$ é enumerável.

Demonstração. Se A é finito então A é enumerável. Se A é infinito podemos enumerar seus elementos da seguinte maneira $x_1 = \min A$, $x_{n+1} = \min A \setminus \bigcup_{k=1}^n \{x_k\}$, daí

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\}$$

pois se existisse $x \in A$ tal que $x \neq x_k$ daí teríamos $x > x_k$ para todo k que é absurdo, pois nenhum conjunto infinito de números naturais é limitado superiormente. A função x

definida é injetora e sobrejetora. Vamos mostrar agora que ela é a única bijeção crescente entre A e N . Suponha outra bijeção crescente $f : N \rightarrow A$. Deve valer $f(1) = x_1$, pois se fosse $f(1) > x_1$ então f não seria crescente. Supondo que vale $f(k) = x_k \forall k \leq n \in N$ vamos mostrar que $f(n+1) = x_{n+1}$, não pode valer $f(n+1) < x_{n+1}$ com $f(n+1) \in A$ pois a função é injetora e os possíveis termos já foram usados em $f(k)$ com $k < n+1$, não pode valer $f(n+1) > x_{n+1}$ pois se não a função não seria crescente, ela teria que assumir para algum valor $x > n+1$ o valor de x_{n+1} , a única possibilidade restante é $f(n+1) = x_{n+1}$ o que implica por indução que $x_n = f(n) \forall n \in N$.

1.2.23 Questão 24

Propriedade 25. Todo conjunto infinito se decompõe como união de uma infinidade enumerável de conjuntos infinitos, dois a dois disjuntos.

Demonstração. Todo conjunto X infinito possui um subconjunto infinito enumerável $E = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, tomamos $b_{2k} = x_k$ e formamos o conjunto $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Definimos $B_k = \{x_{p_k}^{\alpha_k}, \alpha_k \in N\}$, onde p_k é o k -ésimo primo e $B_0 = A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, cada um desses conjuntos B_0, B_1, \dots é infinito e todos são disjuntos, vale $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$, definimos $B_{-1} = (E \cup X) \setminus A$ que é infinito e não possui elemento e disjunto com todo outro B_k , com isso temos

$$X = \bigcup_{k=-1}^{\infty} B_k$$

que é uma união enumerável de conjuntos infinitos disjuntos.

1.2.24 Questão 25

Definição 2 (Função característica). Sejam um conjunto A e V um subconjunto qualquer de A , definimos

$$C_v(t) = 0 \text{ se } x \notin V$$

$$C_v(t) = 1 \text{ se } x \in V$$

Propriedade 26. Sejam $X, Y \subset A$. Valem as propriedades.

- $C_{x \cap y} = C_x C_y$
- $C_{x \cup y} = C_x + C_y - C_{x \cap y}$ e $C_{x \cap y} = 0 \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$.
- Se $X \subset Y \Leftrightarrow C_x \leq C_y$.
- $C_{A \setminus X} = 1 - C_x$.

Demonstração.

- $C_{x \cap y} = C_x C_y$. Temos dois casos a analisar, se $t \in X \cap Y$ então

$$C_{x \cap y}(t) = 1 = \underbrace{C_x(t)}_1 \underbrace{C_y(t)}_1,$$

se $t \notin X \cap Y$ podemos supor $t \notin Y$ então

$$C_{x \cap y}(t) = 0 = C_x(t) \underbrace{C_y(t)}_0.$$

- $C_{x \cup y} = C_x + C_y - C_{x \cap y}$ e $C_{x \cap y} = 0 \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$.

Analizamos três casos.

1. Se $t \in X \cap Y$ então $C_{x \cup y}(t) = 1$, $C_x(t) + C_y(t) - C_{x \cap y}(t) = 1 + 1 - 1 = 1$, logo vale a igualdade.
2. Se $t \notin X \cap Y$ e $t \in X$ (sem perda de generalidade), então $C_{x \cup y}(t) = 1$, $C_x(t) + C_y(t) - C_{x \cap y}(t) = 1 + 0 - 0 = 1$, logo vale a igualdade.
3. Agora o último caso, se $t \notin X, Y$, $C_{x \cup y}(t) = 0$ e $C_x(t) + C_y(t) - C_{x \cap y}(t) = 0 + 0 - 0 = 0$, valendo novamente a igualdade.

$C_{x \cup y} = C_x + C_y \Leftrightarrow C_{x \cap y} = 0 \Leftrightarrow C_{x \cap y}(t) = 0 \forall t \in A$, isso significa que X e Y são disjuntos.

- Se $X \subset Y \Leftrightarrow C_x \leq C_y$. \Rightarrow). Analizamos três casos

1. $t \notin Y$ e $t \notin Y$ daí $t \notin x$ e vale $C_x(t) = 0 \leq C_y(t)$.
2. Se $t \in Y$ e $t \notin x$ então $C_x(t) = 0 \leq C_y(t) = 1$.
3. Se $t \in Y$ tem-se $t \in Y$ daí $C_x(t) = 1 \leq 1 = C_y(t)$.

Em qualquer caso vale a desigualdade.

\Leftarrow). Suponha que X não esteja contido em Y , então existe t tal que $t \in X$, $t \notin Y$ portanto vale $c_x(t) = 1$ e $c_y(t) = 0$ e não se verifica a desigualdade.

- $C_{A \setminus X} = 1 - C_x$.

Analizamos dois casos

1. Se $t \notin X$ então $C_{A \setminus X}(t) = 1 = 1 - \underbrace{C_x(t)}_0$.
2. Se $t \in X$ $C_{A \setminus X}(t) = 0 = 1 - \underbrace{C_x(t)}_1$.

1.2.25 Questão 26

Propriedade 27. O conjunto das sequências crescentes de números naturais não é enumerável.

Demonstração. Seja A o conjunto das sequências crescentes de números naturais. Suponha que seja enumerável, então existe uma bijeção $x : N \rightarrow A$

$$x_1 = (y_{(1,1)}, y_{(2,1)}, y_{(3,1)}, y_{(4,1)}, \dots)$$

$$x_2 = (y_{(1,2)}, y_{(2,2)}, y_{(3,2)}, y_{(4,2)}, \dots)$$

$$\vdots$$

$$x_n = (y_{(1,n)}, y_{(2,n)}, y_{(3,n)}, y_{(4,n)}, \dots)$$

vamos mostrar que existe uma sequência crescente que sempre escapa a essa enumeração, tomamos a sequência s como

$$s = (y_{(1,1)} + 1, y_{(2,2)} + y_{(1,1)} + 1, y_{(3,3)} + y_{(2,2)} + y_{(1,1)} + 1, y_{(4,4)} + y_{(3,3)} + y_{(2,2)} + y_{(1,1)} + 1, \dots)$$

denotando $y_{(0,0)} = 1$ o t -ésimo termo da sequência acima é $s_t = \sum_{k=0}^t y_{(k,k)}$, tal sequência é crescente e ela difere de cada x_t na t -ésima coordenada, portanto ela não pertence a enumeração, o que é absurdo, portanto o conjunto das sequências crescentes é não enumerável.

1.2.26 Questão 27

Propriedade 28. Sejam (N, s) e (N', s') dois pares formados por um conjunto e uma função em que ambos cumprem os axiomas de Peano. Então existe uma única bijeção $f : N \rightarrow N'$ tal que $f(1) = 1'$, $f(n+1) = f(n) + 1'$ e vale ainda que

- $f(m) + f(n) = f(m+n)$
- $f(m.n) = f(m)f(n)$
- $m < n \Leftrightarrow f(m) < f(n)$.

Demonstração. Primeiro vamos provar que f deve ser obrigatoriamente da forma $f(n) = n' \forall n \in N$, por indução sobre n , a propriedade vale para $n = 1$, suponha a validade para n , vamos provar para $n+1$

$$f(n+1) = f(n) + 1' = n' + 1' = s'(n) = (n+1)'.$$

Então para todo $n \in N$ fica provado que $f(n) = n'$, f é única por construção, sendo também sobrejetora.

- Vale que $f(m) + f(n) = f(m+n)$, vamos provar por indução sobre n . Para $n = 1$ ela vale por definição da função, supondo a validade para n , vamos provar para $n+1$

$$f((m+n)+1) = f(m+n) + f(1) = f(m) + (f(n) + f(1)) = f(m) + f(n+1)$$

logo fica provada a propriedade. f é injetiva, pois se houvessem dois valores distintos $m > n$ tais que $f(m) = f(n)$ então existe $p \in N$ tal que $n+p = m$, aplicando a função temos $f(n) + f(p) = f(m) = f(n)$, isto é $n' + p' = n'$ então $n' > n'$ o que é absurdo, portanto a função é injetiva.

- $f(m.n) = f(m)f(n)$. Por indução sobre n , para $n = 1$ ela vale. Suponha validade para n , vamos provar para $n+1$

$$f(m.(n+1)) = f(mn+m) = f(m)f(n) + f(m) = f(m)[f(n) + 1] = f(m)f(n+1)$$

como queríamos provar.

- $m < n \Leftrightarrow f(m) < f(n)$. \Rightarrow). Se vale $m < n$ então existe $p \in N$ tal que $m+p = n$ e daí aplicando f tem-se $m' + p' = n'$ o que implica $n' > m'$, isto é, $f(n) > f(m)$.
 \Leftarrow) Da mesma forma se $f(m) < f(n)$ então $m' < n'$ e daí existe p' tal que $m' + p' = n'$ $\Rightarrow f(m+p) = f(n)$ que por injetividade segue $m+p = n$, portanto $n > m$.

1.3 Capítulo 3 -Números reais

1.3.1 Questão 1

Questão 1-1°

Primeiro provamos um lema, depois a questão pedida.

Propriedade 29.

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}.$$

Demonstração.

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = d^{-1}a + d^{-1}c = d^{-1}(a+c) = \frac{a+c}{d}$$

por distributividade do produto em relação a soma.

Propriedade 30.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Demonstração.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \frac{b}{b} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Questão 1-2°

Propriedade 31.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Demonstração.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a.b^{-1}.c.d^{-1} = ac.b^{-1}.d^{-1} = ac.(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}.$$

1.3.2 Questão 2

Questão 2-1°

Propriedade 32. Para todo m inteiro vale

$$a^m \cdot a = a^{m+1}.$$

Demonstração. Para m natural vale pela definição de potência, agora para $m = -n, n > 0 \in \mathbb{N}$ um inteiro vamos provar $a^{-n}.a = a^{-n+1}$. Para $n = 1$ temos

$$a^{-1}a = a^{-1+1} = a^0 = 1.$$

Vamos provar agora para $n > 1, n - 1 > 0$

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{n-1}a)^{-1} = a^{-n+1}a^{-1}$$

multiplicando por a de ambos lados $a^{-n}.a = a^{-n+1}$ como queríamos demonstrar.

Propriedade 33.

$$a^m.a^n = a^{m+n}.$$

Demonstração. Primeiro seja m um inteiro qualquer e n natural, vamos provar a identidade por indução sobre n , para $n = 0$ vale

$$a^m.a^0 = a^m = a^{m+0}$$

para $n = 1$ vale

$$a^m.a^1 = a^ma = a^{m+1}.$$

Supondo válido para n

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

vamos provar para $n + 1$

$$a^m.a^{n+1} = a^{m+n+1}$$

temos

$$a^m.a^{n+1} = a^ma^na = a^{m+n}.a = a^{m+n+1} \quad \square.$$

Agora para $-n$ com n natural, se m é natural temos que a propriedade já foi demonstrada

$$a^ma^{-n} = a^{m-n}$$

se m é inteiro negativo temos

$$a^ma^{-n} = a^{m-n}$$

pois o inverso de a^ma^{-n} é $a^{-m}a^n = a^{-m+n}$ propriedade que já está provada por $-m$ e n serem naturais e $a^{m-n}a^{n-m} = 1$ por unicidade do inverso de $a^ma^{-n} = a^{-m}a^n = a^{-m+n}$ é a^ma^{-n} logo fica provado para n e m inteiros. Para potência negativa $-n$ podemos fazer como se segue

$$a^ma^{-n} = (a^{-m})^{-1}(a^n)^{-1} = (a^{-m}a^n)^{-1} = (a^{-m+n})^{-1} = a^{m-n}.$$

Questão 2-2°**Propriedade 34.**

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

para m e n inteiros.

Demonstração. Primeiro por indução para m inteiro e n natural

$$(a^m)^0 = 1 = a^{m \cdot 0}$$

$$(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}.$$

Supondo válido para n

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

vamos provar para $n + 1$

$$(a^m)^{n+1} = a^{m(n+1)}$$

temos pela definição de potência e pela hipótese da indução que

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n a^m = a^{mn} a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}$$

onde usamos a propriedade do produto de potência de mesma base. Para n inteiro negativo

$$(a^m)^{-n} = ((a^m)^n)^{-1} = (a^{mn})^{(-1)} = a^{-mn}.$$

1.3.3 Questão 3

Exemplo 6. Se $\frac{x_k}{y_k} = \frac{x_s}{y_s}$ para todos $k, s \in I_n$, num corpo K , prove que dados, $a_k \in K, k \in I_n$ tais que $\sum_{k=1}^n a_k y_k \neq 0$ tem-se

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k x_k}{\sum_{k=1}^n a_k y_k} = \frac{x_1}{y_1}.$$

Chamando $\frac{x_1}{y_1} = p$ temos $\frac{x_k}{y_k} = p$ logo $x_k = p y_k$ e a soma

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = p \sum_{k=1}^n a_k y_k$$

logo

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k x_k}{\sum_{k=1}^n a_k y_k} = p = \frac{x_1}{y_1} \quad \square.$$

1.3.4 Questão 4

Definição 3 (Homomorfismo de corpos). Sejam A, B corpos. Uma função $f : A \rightarrow B$ chama-se um homomorfismo quando se tem

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(1_A) = 1_B$$

para quaisquer $x, y \in A$. Denotaremos nesse caso as unidades 1_A e 1_B pelos mesmos símbolos e escrevemos $f(1) = 1$.

Propriedade 35. Se f é homomorfismo então $f(0) = 0$.

Demonstração. Temos

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) = f(0)$$

somando $-f(0)$ a ambos lados segue

$$f(0) = 0.$$

Propriedade 36. Vale $f(-a) = -f(a)$.

Demonstração. Pois

$$f(a - a) = f(0) = 0 = f(a) + f(-a)$$

daí $f(-a) = -f(a)$.

Corolário 6.

$$f(a - b) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b).$$

Propriedade 37. Se a é invertível então $f(a)$ é invertível e vale $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Demonstração.

$$f(a.a^{-1}) = f(1) = 1 = f(a).f(a^{-1})$$

então pela unicidade de inverso em corpos segue que $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$.

Propriedade 38. f é injetora.

Demonstração. Sejam x, y tais que $f(x) = f(y)$, logo $f(x) - f(y) = 0$, $f(x - y) = 0$, se $x \neq y$ então $x - y$ seria invertível logo $f(x - y)$ não seria nulo, então segue que $x = y$.

Propriedade 39. Se $f : A \rightarrow B$ com $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(x.y) = f(x)f(y)$ para x, y arbitrários, então $f(x) = 0 \forall x$ ou $f(1) = 1$.

Demonstração. $f(1) = f(1.1) = f(1)f(1)$, logo $f(1) = f(1)^2$ por isso $f(1) = 1$ ou $f(1) = 0$. Se $f(1) = 0$ então $f(x.1) = f(x)f(1) = 0$, $f(x) = 0 \forall x$.

1.3.5 Questão 5

Propriedade 40. Se $f : Q \rightarrow Q$ é um homomorfismo então $f(x) = x \forall x \in Q$.

Demonstração. Vale que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, tomando $x = kh$ e $y = h$ fixo, tem-se

$$f((k + 1)h) - f(kh) = f(h)$$

aplicamos a soma $\sum_{k=0}^{n-1}$ de ambos lados, a soma é telescópica e resulta em

$$f(nh) = nf(h)$$

tomando $h = 1$ segue que $f(n) = n$, tomando $h = \frac{p}{n}$ segue

$$f(n\frac{p}{n}) = f(p) = p = nf(\frac{p}{n}) \Rightarrow f(\frac{p}{n}) = \frac{p}{n}.$$

1.3.6 Questão 6

1.3.7 Questão 7

1.3.8 Questão 8

Propriedade 41. Seja K um conjunto onde valem todos os axiomas de corpo, exceto a existência de inverso multiplicativo. Seja $a \neq 0$. $f : K \rightarrow K$ com $f(x) = ax$ é bijeção $\Leftrightarrow \exists a^{-1} \in K$.

Demonstração. \Rightarrow). A função é sobrejetora logo existe x tal que $f(x) = 1 = ax$ portanto a é invertível com $a^{-1} = x \in K$.

\Leftarrow). Dado qualquer $y \in K$ tomamos $x = ya^{-1}$ daí $f(x) = aa^{-1}y = y$ e a função é sobrejetiva. f também é injetiva, pois se $f(x_1) = f(x_2)$, $ax_1 = ax_2$ implica por lei do corte que $x_1 = x_2$. Em geral f é injetiva \Leftrightarrow vale a lei do corte por essa observação.

Propriedade 42. Seja K finito. Vale a lei do corte em $A \Leftrightarrow$ existe inverso para cada elemento não nulo de K ,

Demonstração. \Rightarrow). Se vale a lei do corte, pela propriedade anterior tem-se que para qualquer $a \neq 0$ em K , $f : K \rightarrow K$ com $f(x) = ax$ é injetiva, como f é injetiva de K em K que é um conjunto finito, então f é bijetiva, o que implica a ser invertível.

\Leftarrow). A volta é trivial pois existência de inverso implica lei do corte.

1.3.9 Questão 9

Exemplo 7. O conjunto dos polinômios de coeficiente racionais $Q[t]$ não é um corpo, pois por exemplo o elemento x não possui inverso multiplicativo, se houvesse haveria $\sum_{k=0}^n a_k x^k$

tal que $x \sum_{k=0}^n a_k x^k = 1 = \sum_{k=0}^n a_k x^{k+1}$ o que não é possível pois o coeficiente do termo independente x^0 é zero em $\sum_{k=0}^n a_k x^{k+1}$ e deveria ser 1.

O conjunto dos inteiros Z não é um corpo, pois não possui inverso multiplicativo para todo elementos, por exemplo não temos o inverso de 2.

1.3.10 Questão 10

Propriedade 43. Dados $x, y \in R$, $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Demonstração. \Rightarrow). Suponha que $x \neq 0$, então $x^2 > 0$ e $y^2 \geq 0$ de onde segue que $x^2 + y^2 > 0$, absurdo então deve valer $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ logo temos também $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$, portanto $x = y = 0$.

\Leftarrow). Basta substituir $x = y = 0$ resultando em 0.

1.3.11 Questão 11

Exemplo 8. A função $f : K^+ \rightarrow K^+$ com $f(x) = x^n$, $n \in N$ é crescente. Sejam $x > y > 0$ então $x^n > y^n$ pois $x^n = \prod_{k=1}^n x > \prod_{k=1}^n y = y^n$, por propriedade de multiplicação de positivos. Se $f : Q^+ \rightarrow Q^+$, Q^+ o conjunto dos racionais positivos, então f não é sobrejetiva para $n = 2$, pois não existe $x \in Q$ tal que $x^2 = 2 \in Q^+$.

$f(K^+)$ não é um conjunto limitado superiormente de K , isto é, dado qualquer $x \in K$ existe $y \in K^+$ tal que $y^n > x$. O limitante superior do conjunto, se existisse, não poderia ser um número negativo ou zero, pois para todo y positivo tem-se y^n positivo, que é maior que 0 ou qualquer número negativo. Suponha que x positivo seja, tomando $y = x + 1$ temos $y^n = (x + 1)^n \geq 1 + nx > x$, logo $f(K^+)$ não é limitado superiormente.

1.3.12 Questão 12

Propriedade 44. Sejam X um conjunto qualquer e K um corpo, então o conjunto $F(X, K)$ munido de adição e multiplicação de funções é um anel comutativo com unidade, não existindo inverso para todo elemento. Lembrando que em um anel comutativo com unidade temos as propriedades, associativa, comutativa, elemento neutro e existência de inverso aditivo, para adição. valendo também a comutatividade, associatividade, existência de unidade 1 para o produto e distributividade que relaciona as duas operações.

Demonstração.

- Vale a associatividade da adição

$$((f + g) + h)(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f + (g + h))(x)$$

- Existe elemento neutro da adição $0 \in K$ e a função constante $0(x) = 0 \forall x \in K$, daí

$$(g + 0)(x) = g(x) + 0(x) = g(x).$$

- Comutatividade da adição

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

- Existe a função simétrica, dado $g(x)$, temos f com $f(x) = -g(x)$ e daí

$$(g + f)(x) = g(x) - g(x) = 0.$$

- Vale a associatividade da multiplicação

$$(f(x).g(x)).h(x) = f(x).(g(x).h(x))$$

- Existe elemento neutro da multiplicação $1 \in K$ e a função constante $I(x) = 1 \forall x \in K$, daí

$$(g.I)(x) = g(x).1 = g(x).$$

- Comutatividade da multiplicação

$$(f.g)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (g.f)(x)$$

Por último vale a distributividade $(f(g + h))(x) = f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x) = (f.g + f.h)(x)$.

Não temos inverso multiplicativo para toda função, pois dada uma função, tal que $f(1) = 0$ e $f(x) = 1$ para todo $x \neq 1$ em K , não existe função g tal que $g(1)f(1) = 1$, pois $f(1) = 0$, assim o produto de f por nenhuma outra função gera a identidade.

1.3.13 Questão 13

Propriedade 45. Sejam $x, y > 0$. $x < y \Leftrightarrow x^{-1} > y^{-1}$.

Demonstração. \Rightarrow). Como $y > x$ e x^{-1} e y^{-1} são positivos, multiplicamos a desigualdade por $x^{-1}y^{-1}$ em ambos lados $x^{-1}y^{-1}y > x^{-1}y^{-1}x$ implicando $x^{-1} > y^{-1}$, então se $y > x$ temos $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

\Leftarrow). Se $x^{-1} > y^{-1}$. x, y são positivos, multiplicamos a desigualdade por xy em ambos lados, de onde segue que $y > x$.

1.3.14 Questão 14

Propriedade 46. Sejam $a > 0$ em K e $f : Z \rightarrow K$ com $f(n) = a^n$. Nessas condições f é crescente se $a > 1$, decrescente se $a < 1$ e constante se $a = 1$.

Demonstração. Para qualquer $n \in Z$ vale $f(n+1) - f(n) = a^{n+1} - a^n = a^n(a - 1)$, a^n é sempre positivo, então o sinal da diferença depende do sinal de $a - 1$. Se $a = 1$ vale $f(n+1) = f(n) \forall n \in Z$ logo f é constante, se $a - 1 < 0$, $a < 1$ então $f(n+1) - f(n) < 0$, $f(n+1) < f(n)$, f é decrescente e finalmente se $a - 1 > 0$, $a > 1$ então $f(n+1) > f(n)$ e a função é crescente.

Perceba que as propriedades citadas valem para todo $n \in Z$, por exemplo no caso de $a > 1$ temos

$$\cdots < f(-4) < f(-3) < f(-2) < f(-1) < f(0) < f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(n) < f(n+1) < \cdots$$

analogamente para os outros casos.

1.3.15 Questão 15

Exemplo 9. Para todo $x \neq 0$ real, prove que $(1+x)^{2n} > 1+2nx$.

Se $x > -1$ tomamos a desigualdade de bernoulli com $2n$ no expoente. Se $x < -1$ vale $1+x < 0$ porém elevando a uma potência par resulta num número positivo, por outro lado $2nx < -2n$ logo $1+2nx < 1-2n < 0$ então $(1+x)^{2n}$ é positivo e $1+2nx$ é negativo, logo nesse caso vale $(1+x)^{2n} > 1+2nx$ \square .

1.3.16 Questão 16

Exemplo 10. Se $n \in N$ e $x < 1$ então $(1-x)^n \geq 1-nx$, pois de $x < 1$ segue que $-x > -1$ e daí aplicamos a desigualdade de Bernoulli $(1+y)^n \geq 1+ny$ com $y = -x$.

1.3.17 Questão 17

Corolário 7. Se a e $a + x$ são positivos, então vale

$$(a + x)^n \geq a^n + na^{n-1}x.$$

Pois $\frac{a+x}{a} = (1 + \frac{x}{a}) > 0$ então podemos aplicar a desigualdade de Bernoulli $(1 + y)^n \geq 1 + ny$ com $y = \frac{x}{a}$, resultando em

$$(a + x)^n \geq a^n + na^{n-1}x.$$

Se $a \neq 0$, arbitrário em R , podendo agora ser negativo, substituímos $y = \frac{x}{a}$ em $(1 + x)^{2n} > 1 + 2nx$. chegando na desigualdade

$$(a + x)^{2n} > a^{2n} + a^{2n-1}2nx.$$

Se vale $\frac{x}{a} < 1$ então da desigualdade $(1 - y)^n \geq 1 - ny$, novamente tomamos $y = \frac{x}{a}$ de onde segue

$$(a - x)^n \geq a^n - a^{n-1}nx.$$

1.3.18 Questão 18

Propriedade 47. Sejam sequências (a_k) , (b_k) em um corpo ordenado K onde cada b_k é positivo, sendo $\frac{a_1}{b_1}$ o mínimo e $\frac{a_n}{b_n}$ o máximo dos termos da sequência de termo $\frac{a_k}{b_k}$ então vale

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n b_k} \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

Demonstração. Para todo k vale $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow b_k \frac{a_1}{b_1} \leq a_k \leq b_k \frac{a_n}{b_n}$ pois $b_k > 0$, aplicamos a soma $\sum_{k=1}^n$ em ambos lados, de onde segue

$$\sum_{k=1}^n b_k \frac{a_1}{b_1} \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k \frac{a_n}{b_n}$$

dividindo por $\sum_{k=1}^n b_k$ que é positivo, temos finalmente

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n b_k} \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

1.3.19 Questão 19

Propriedade 48 (Multiplicatividade).

$$|a||b| = |a.b|$$

para a e b reais quaisquer.

Demonstração. Vale que $|x.y|^2 = (x.y)^2 = x^2.y^2$ e $(|x||y|)^2 = |x|^2|y|^2 = x^2.y^2$ os quadrados desses números são iguais e eles são não negativos, então segue que $|x.y| = |x||y|$.

$$\textbf{Demonstração.}[2] \quad |a.b| = \sqrt{(a.b)^2} = \sqrt{a^2.b^2} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b^2} = |a||b|.$$

Propriedade 49. Se $x \neq 0$ então $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}$.

Demonstração. Vale $|x||\frac{1}{x}| = |\frac{x}{x}| = 1$ daí $|\frac{1}{x}|$ é inverso de $|x|$, sendo $\frac{1}{|x|}$.

Corolário 8 (Preserva divisão).

$$|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}.$$

1.3.20 Questão 20

Propriedade 50.

$$\prod_{k=1}^n |a_k| = |\prod_{k=1}^n a_k|$$

Demonstração. Por indução, para $n = 1$ vale, supondo para n números

$$\prod_{k=1}^n |a_k| = |\prod_{k=1}^n a_k|$$

vamos provar para $n + 1$

$$\prod_{k=1}^{n+1} |a_k| = \left| \prod_{k=1}^{n+1} a_k \right|$$

temos

$$\prod_{k=1}^{n+1} |a_k| = \prod_{k=1}^n |a_k| \cdot |a_{n+1}| = \left| \prod_{k=1}^n a_k \right| |a_{n+1}| = \left| \prod_{k=1}^n a_k a_{n+1} \right| = \left| \prod_{k=1}^{n+1} a_k \right| \quad \square.$$

Propriedade 51 (Desigualdade triangular generalizada). Sejam $g(k)$ definida para k inteiro, $a, b \in \mathbb{Z}$, então vale

$$\left| \sum_{k=a}^b g(k) \right| \leq \sum_{k=a}^b |g(k)|.$$

Demonstração. Para cada k vale

$$-|g(k)| \leq g(k) \leq |g(k)|$$

aplicando o somatório em ambos lados segue

$$-\sum_{k=a}^b |g(k)| \leq \sum_{k=a}^b g(k) \leq \sum_{k=a}^b |g(k)|$$

que implica

$$\left| \sum_{k=a}^b g(k) \right| \leq \sum_{k=a}^b |g(k)| = \sum_{k=a}^b |g(k)|$$

pois os termos $|g(k)|$ somados são não negativos, logo a soma desses termos é não-negativa e o módulo da soma é igual a soma.

Propriedade 52. A identidade que provamos acima vale para números reais, vamos provar agora por indução que se vale $|z + w| \leq |z| + |w|$ para quaisquer z, w então vale

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

de maneira que possa ser usada para números complexos, normas e outras estruturas que satisfazem a desigualdade triangular.

Demonstração.[2] Por indução sobre n , para $n = 1$ tem-se

$$\left| \sum_{k=1}^1 z_k \right| = |z_1| \leq \sum_{k=1}^1 |z_k| = |z_1|$$

logo vale. Supondo a validade para n

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

vamos provar para $n + 1$

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Da hipótese da indução somamos $|z_{n+1}|$ em ambos lados, logo

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = |z_{n+1}| + \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq |z_{n+1}| + \sum_{k=1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

Vejamos outras¹ demonstrações da desigualdade triangular

1.3.21 Questão 22

Vamos resolver um caso mais geral do problema.

Definição 4 (Mediana). Dada uma sequência finita $(y_k)_1^n$ seus termos podem ser rearranjados para forma uma sequência não-decrescente $(x_k)_1^n$. A mediana \tilde{X} é definida da seguinte maneira

- Se n é ímpar $\tilde{X} = x_{\frac{n+1}{2}}$.
- Se n é par $\tilde{X} = \frac{x_{\frac{n}{2}+1} + x_{\frac{n}{2}}}{2}$.

Exemplo 11. Seja $(x_k)_1^n$ uma sequência crescente $f : R \rightarrow R$ com $f(x) = \sum_{k=1}^n |x - x_k|$.

Se $x < x_1$ então

$$f(x) = -nx + \sum_{k=1}^n x_k$$

logo f é decrescente para $x < x_1$. Tomando $x > x_n$

$$f(x) = nx - \sum_{k=1}^n x_k$$

logo f é crescente para $x > x_n$.

¹Essas demonstrações aprendi com Pedro Kenzo, obrigado por compartilhar as soluções.

Seja agora $x \in [x_t, x_{t+1})$, t variando de 1 até $n - 1$

$$f(x) = \sum_{k=1}^t (x - x_k) - \sum_{k=t+1}^n (x - x_k) = (2t - n)x + \sum_{k=1}^t x_k - \sum_{k=t+1}^n x_k$$

portanto a função é decrescente se $t < \frac{n}{2}$ e crescente se $t > \frac{n}{2}$, de $t = 1$ até $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ em cada intervalo $[x_t, x_{t+1})$ a função é decrescente, sendo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ segmentos decrescentes, de $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ até $n - 1$, temos $n - 1 - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ segmentos crescentes.

- Se n é ímpar f é decrescente em $[x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1})$ e crescente em $[x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2})$ logo o ponto $x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} = x_{\frac{n+1}{2}}$ é o único ponto de mínimo.
- Se n é par a função é constante em $[x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n}{2} + 1})$, todos os pontos desse intervalo são pontos de mínimo. Em especial o ponto $\frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2} + 1}}{2}$ é ponto de mínimo.

Concluimos que um ponto de mínimo acontece sempre na mediana da sequência.

Exemplo 12. Achar o mínimo da função $f(x) = \sum_{k=1}^n |x - k|$ para n ímpar e para n par.

Trocando n por $2n$ temos que o mínimo acontece no ponto $x_{\frac{2n}{2}} = x_n = n$, substituímos então tal valor na função

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} |n - k| &= \sum_{k=1}^n |n - k| + \sum_{k=n+1}^{2n} |n - k| = \sum_{k=1}^n (n - k) + \sum_{k=n+1}^{2n} (-n + k) = \\ &= \sum_{k=1}^n (n - k) + \sum_{k=1}^n (k) = \sum_{k=1}^n n = n \cdot n = n^2. \end{aligned}$$

portanto o mínimo de $\sum_{k=1}^{2n} |x - k|$ é n^2 .

- $\min\{|x - 1| + |x - 2|\} = 1$
- $\min\{|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4|\} = 4$
- $\min\{|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| + |x - 6|\} = 9$
- $\min\{|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| + |x - 6| + |x - 7| + |x - 8|\} = 16.$

Agora para n ímpar, trocamos n por $2n + 1$ o mínimo acontece no ponto $x_{\frac{(2n+1)+1}{2}} = x_{n+1} = n + 1$, aplicando na função temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1} |n+1-k| &= \sum_{k=1}^{n+1} |n+1-k| + \sum_{k=n+2}^{2n+1} |n+1-k| = \sum_{k=1}^{n+1} (n+1-k) + \sum_{k=n+2}^{2n+1} -(n+1)+k = \\ &= \sum_{k=1}^n (n+1-k) + \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n (n+1) = n(n+1). \end{aligned}$$

- $\min\{|x-1| + |x-2| + |x-3|\} = 2$
- $\min\{|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5|\} = 6$
- $\min\{|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| + |x-6| + |x-7|\} = 12$
- $\min\{|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| + |x-6| + |x-7| + |x-8| + |x-9|\} = 20.$

1.3.22 Questão 23

Propriedade 53. $|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b| + \varepsilon.$

Demonstração. Partindo da desigualdade $|a - b| < \varepsilon$, somamos $|b|$ a ambos lados

$$|a - b| + |b| < \varepsilon + |b|$$

e usamos agora a desigualdade triangular

$$|a| \leq |a - b| + |b| < \varepsilon + |b|$$

daí segue

$$|a| \leq \varepsilon + |b|.$$

Da mesma forma vale se $|a - b| < \varepsilon$ então $|b| \leq \varepsilon + |a| \Rightarrow |b| - \varepsilon \leq |a|$ e com $|a| \leq \varepsilon + |b|$ temos

$$|b| - \varepsilon \leq |a| \leq \varepsilon + |b|.$$

Vimos que $|a - b| < \varepsilon$ implica $|a| < |b| + \varepsilon$, mas como $a \leq |a|$ segue $a < |b| + \varepsilon$.

1.3.23 Questão 24

Propriedade 54. Dado um corpo ordenado K , são equivalentes

1. K é arquimediano.
2. Z é ilimitado superiormente e inferiormente.
3. Q é ilimitado superiormente e inferiormente.

Demonstração.

- $1 \Rightarrow 2$. $N \subset Z$ então Z é ilimitado superiormente. Suponha por absurdo que Z seja limitado inferiormente, então existe $a \in K$ tal que $a < x \forall x \in Z$, logo $-a > -x$, porém existe n natural tal que $n > -a \Rightarrow \underbrace{-n}_{\in Z} < a$ o que contraria a hipótese.
- $2 \Rightarrow 3$. $Z \subset Q$ portanto Q é ilimitado superiormente e inferiormente.
- $3 \Rightarrow 1$. Para todo $y \in K$ existe $\frac{a}{b} \in Q$ com $a, b > 0$ naturais tal que $\frac{a}{b} > y$, daí $a > yb$, podemos tomar $y = \frac{x}{b}$, logo $a > x$, $a \in N$, portanto N é ilimitado superiormente e o corpo é arquimediano.

1.3.24 Questão 25

Propriedade 55. Seja K um corpo ordenado. K é arquimediato $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ em K existe $n \in N$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Demonstração.

\Rightarrow). Como K é arquimediano, então $\forall \varepsilon > 0$ existe $n \in N$ tal que $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n + 1 > n > \frac{1}{\varepsilon}$ por desigualdade de Bernoulli temos $2^n > n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

\Leftarrow). Se $\forall \varepsilon > 0$ em K existe $n \in N$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, tomamos $\varepsilon = \frac{1}{x}$, $x > 0$ arbitrário então $x < 2^n$, com $2^n = m \in N$ então K é arquimediano, N não é limitado superiormente.

1.3.25 Questão 26

Propriedade 56. Seja $a > 1$, K corpo arquimediano, $f : Z \rightarrow K$ com $f(n) = a^n$, então

- $f(Z)$ não é limitado superiormente.
- $\inf(F(Z)) = 0$.

Demonstração.

- Vale que $a > 1$ então $a = p + 1$ onde $p > 0$, por desigualdade de Bernoulli temos $(p + 1)^n \geq 1 + pn$. $\forall x > 0 \in K$ existe n tal que $n > \frac{x}{p} \Rightarrow pn > x \Rightarrow (p + 1)^n \geq 1 + pn > x$, logo $f(Z)$ não é limitado superiormente.
- 0 é cota inferior de $f(Z)$ pois vale $0 < a^n \forall n \in Z$. Suponha que exista x tal que $0 < x < a^m \forall m \in Z$, sabemos que existe $n \in N$ tal que $a^n > \frac{1}{x}$ daí $x > \frac{1}{a^n} = a^{-n}$, absurdo, então 0 deve ser o ínfimo.

1.3.26 Questão 27

Propriedade 57. Se s é irracional e $u \neq 0$ é racional então $u.s$ é irracional.

Demonstração. Suponha que s é irracional e $u.s$ seja racional, então $u.s = \frac{p}{q}$ com $p \neq 0$ e $q \neq 0$ inteiros e como $u \neq 0$ é racional ele é da forma $u = \frac{j}{v}$, $j \neq 0$ e $v \neq 0$, inteiros, logo

$$\frac{j}{v}s = \frac{p}{q}$$

multiplicando por $\frac{v}{j}$ ambos lados segue

$$s = \frac{p.v}{j.q}$$

que é um número racional, logo chegamos a um absurdo.

Propriedade 58. Se s é irracional e t racional, então $s + t$ é irracional.

Demonstração. Suponha $s + t$ racional, então $s + t = \frac{p}{q}$ daí $s = \frac{p}{q} - t$ que seria racional por ser diferença de dois racionais, um absurdo então segue que $s + t$ é irracional.

Exemplo 13. Existem irracionais a e b tais que $a + b$ e $a.b$ sejam racionais. Exemplos

$a = 1 + \sqrt{5}$, $b = 1 - \sqrt{5}$ daí $a + b = 2$ e $a.b = 1 - 5 = -4$.

1.3.27 Questão 28

Propriedade 59. Sejam a, b, c, d racionais então

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

Demonstração.

\Leftarrow). Se $a = c$ e $b = d$ a temos $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$.

\Rightarrow). Suponha $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ então $a - c = \sqrt{2}(d - b)$, se $d = b$ então $a = c$ e terminamos, se não vale que

$$\frac{a - c}{d - b} = \sqrt{2}$$

o que é absurdo pois $\sqrt{2}$ é irracional.

1.3.28 Questão 29

Exemplo 14. O conjunto da forma $\{x + y\sqrt{p}\}$ onde x e y são racionais é subcorpo dos números reais.

- O elemento neutro da adição 0 pertence ao conjunto. Pois $0 = 0 + 0\sqrt{p}$
- O elemento neutro da multiplicação 1 pertence ao conjunto. Pois $1 = 1 + 0\sqrt{p}$
- A adição é fechada. Pois $x + y\sqrt{p} + z + w\sqrt{p} = x + z + (y + w)\sqrt{p}$.
- O produto é fechado. Pois $(x + y\sqrt{p})(z + w\sqrt{p}) = xz + xw\sqrt{p} + yz\sqrt{p} + y.w.p$.
- Dado $x \in A$ implica $-x \in A$. Pois dado $x + y\sqrt{p}$ temos o simétrico $-x - y\sqrt{p}$.
- Dado $x \neq 0 \in A$ tem-se $x^{-1} \in A$. Pois dado $x + y\sqrt{p}$ temos inverso

$$\frac{x - y\sqrt{p}}{x^2 - y^2p}$$

como inverso multiplicativo.

Exemplo 15. O conjunto dos elementos da forma $a + b\alpha$ onde $\alpha = \sqrt[3]{2}$ não é um corpo pois o produto não é fechado, vamos mostrar que α^2 não pertence ao conjunto.

Suponha que $\alpha^2 = a + b\alpha$ então $\alpha^3 = a\alpha + b\alpha^2 = 2$ substituindo a primeira na segunda temos que

$$a\alpha + b(a + b\alpha) = a\alpha + ab + b^2\alpha = \alpha(b^2 + a) + ab = 2 \Rightarrow \alpha(b^2 + a) = 2 - ab$$

se $b^2 + a \neq 0$ então $\alpha = \frac{2 - ab}{b^2 + a}$ o que é absurdo pois α é irracional, então devemos ter $a = -b^2$, multiplicamos a expressão $a\alpha + b\alpha^2 = 2$ por α , de onde segue $a\alpha^2 + 2b = 2\alpha$, substituindo $\alpha^2 = a + b\alpha$ nessa última temos

$$a(a + b\alpha) + 2b = a^2 + ab\alpha + 2b = 2\alpha \Rightarrow \alpha(2 - ab) = 2b + a^2$$

se $2 \neq ab$ chegamos num absurdo de $\alpha = \frac{2b + a^2}{2 - ab}$, temos que ter então $2 = ab$ e $a = -b^2$ de onde segue $2 = -b^3$, porém não existe racional que satisfaz essa identidade, daí não podemos escrever α^2 da forma $a + b\alpha$ com a e b racionais, portanto o produto de elementos não é fechado e assim não temos um corpo.

1.3.29 Questão 30

Propriedade 60. Sejam $a, b \in \mathbb{Q}^+$. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional $\Leftrightarrow \sqrt{a}$ e \sqrt{b} são racionais.

Demonstração.

\Rightarrow).

Se $a = b$ então $2\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ o que implica $\sqrt{a} = \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Agora o caso de $a \neq b$.

Suponha que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional então seu inverso também racional, que é $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$, daí $\sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, a soma $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ logo $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, a diferença de números racionais também é um número racional $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a} = \sqrt{b}$, portanto \sqrt{a} e \sqrt{b} são racionais.

\Leftarrow). A volta vale pois a soma de racionais é um racional.

1.3.30 Questão 31

Propriedade 61. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ não vazio limitado e $c \in \mathbb{R}$, então

1. $c \leq \sup(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A$ tal que $c - \varepsilon < x$.

2. $c \geq \inf(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A$ tal que $c + \varepsilon > x$.

Demonstração.

1. \Rightarrow). Para todo $\varepsilon > 0$ vale que $c - \varepsilon < \sup(A)$. Dado $\varepsilon > 0$ fixo, se não existisse $x \in A$ tal que $c - \varepsilon < x$ então $c - \varepsilon$ seria cota superior menor que o supremo, o que é absurdo, contraria o fato do supremo ser a menor das cotas superiores.

\Leftarrow). Suponha por absurdo que fosse $c > \sup(A)$, poderíamos tomar $c - \sup(A) = \varepsilon$ daí $c - c + \sup(A) = \sup(A) < x$ o que é absurdo.

2. \Rightarrow). Para todo $\varepsilon > 0$ vale que $c + \varepsilon < \inf(A)$. Dado $\varepsilon > 0$ fixo, se não existisse $x \in A$ tal que $c + \varepsilon > x$ então $c + \varepsilon$ seria cota superior menor que o ínfimo, o que é absurdo, contraria o fato do ínfimo ser a menor das cotas inferiores.

\Leftarrow). Suponha por absurdo que fosse $c < \inf(A)$, poderíamos tomar $\inf(A) - c = \varepsilon$ daí $x < c + \inf(A) - c = \inf(A)$ o que é absurdo.

1.3.31 Questão 32

Exemplo 16. Seja $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\inf A = 0$. Sabemos que 0 é uma cota inferior, agora vamos mostrar que 0 é a menor delas. Dado $0 < x$, x não pode ser cota inferior, pois existe n natural tal que $\frac{1}{n} < x$, logo 0 é o ínfimo.

1.3.32 Questão 33

Propriedade 62. Se A é limitado inferiormente e $B \subset A$ então $\inf(A) \leq \inf(B)$.

Demonstração. $\inf A$ é cota inferior de A , logo também é cota inferior de B , sendo cota inferior de B vale $\inf A \leq \inf B$, pois $\inf B$ é a maior cota inferior de B .

Propriedade 63. Se A é limitado superiormente e $B \subset A$ então $\sup(A) \geq \sup(B)$.

Demonstração. Toda cota superior de A é cota superior de B , logo o $\sup(A)$ é cota superior de B , como $\sup(B)$ é a menor das cotas superiores de B segue que $\sup(A) \geq \sup(B)$.

Corolário 9. Se A e B são conjuntos limitados com $B \subset A$ então vale $\sup(A) \geq \sup(B) \geq \inf(B) \geq \inf(A)$ pois temos $\sup(A) \geq \sup(B)$ e $\inf(A) \leq \inf(B)$, tendo ainda que $\sup(B) \geq \inf(B)$.

1.3.33 Questão 34

Propriedade 64. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \leq y$. Então $\sup A \leq \inf B$.

Demonstração. Todo $y \in B$ é cota superior de A , logo $\sup A \leq y$ para cada y pois $\sup A$ é a menor das cotas superiores, essa relação implica que $\sup A$ é cota inferior de B logo $\sup A \leq \inf B$, pois $\inf B$ é a maior cota inferior.

Propriedade 65. $\sup A = \inf B \Leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$ dado, existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \varepsilon$.

Demonstração. \Leftarrow , usamos a contrapositiva. Não podemos ter $\inf B < \sup A$ pela propriedade anterior, então temos forçosamente que $\inf B > \sup A$, tomamos então $\varepsilon = \inf B - \sup A > 0$ e temos $y - x \geq \varepsilon$ para todo $x \in A$ e $y \in B$ pois $y \geq \inf B$ e $\sup A \geq x$ de onde segue $-x \geq -\sup A$, somando esta desigualdade com a de y tem-se $y - x \geq \inf B - \sup A = \varepsilon$.

\Rightarrow , Se $\sup A = \inf B$. Então sendo para qualquer $\varepsilon > 0$, $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ não é cota superior de A , pois é menor que o $\sup A$ (que é a menor cota superior), da mesma maneira $\inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ não é cota inferior de B , então existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq \sup A = \inf B \leq y < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\inf B - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq y < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$$

de onde segue $\inf B - \frac{\varepsilon}{2} < x$, $-x < \frac{\varepsilon}{2} - \inf B$ e $y < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$ somando ambas tem-se $y - x < \varepsilon$. \square

1.3.34 Questão 35 e 36

Propriedade 66. Se $c > 0$ então $\sup(c.A) = c \cdot \sup A$.

Demonstração. Seja $a = \sup A$. Para todo $x \in A$ tem-se $x \leq a$, de onde segue $cx \leq ca$, assim ca é cota superior de cA . Seja d tal que $d < ca$ então $\frac{d}{c} < a$ logo $\frac{d}{c}$ não é cota superior de A , implicando a existência de pelo menos um x tal que $\frac{d}{c} < x$, $d < cx$ de onde segue que d não é cota superior de cA , assim ca é a menor cota superior de cA logo o supremo.

Propriedade 67. Se $c > 0$, $\inf cA = c \inf A$.

Demonstração.

Seja $a = \inf A$, então vale $a \leq x$ para todo x , multiplicando por c segue $ca \leq cx$ de onde concluímos que ca é cota inferior de cA . Seja d tal que $ca < d$, então $a < \frac{d}{c}$, implicando que $\frac{d}{c}$ não é cota inferior de A assim existe $x \in A$ tal que $x < \frac{d}{c} \Rightarrow cx < d$, logo d não é cota inferior de cA , implicando que ca é a maior cota inferior, logo o ínfimo do conjunto.

Propriedade 68. Se $c < 0$ então $\inf(cA) = c \sup A$.

Demonstração. Seja $a = \sup A$. Tem-se $x \leq a$ para todo $x \in A$, multiplicando por c segue $cx \geq ca$ para todo $x \in A$. Então ca é uma cota inferior de cA . Se $d > ca$ tem-se $\frac{d}{c} < a$ como a é supremo, isso significa que existe $x \in A$ tal que $\frac{d}{c} < x$ logo $d > cx$, assim esse d não é cota inferior, implicando que ca é a menor cota inferior, então ínfimo do conjunto.

A questão 35 segue da próxima propriedade com $c = -1$.

Propriedade 69. Se $c < 0$ então $\sup(cA) = c \inf A$.

Demonstração. Seja $b = \inf A$ então vale $b \leq x$ para todo $x \in A$, multiplicando por c segue $cb \geq cx$ assim cb é cota superior de cA . Agora tome d tal que $cb > d$ segue $b < \frac{d}{c}$, como b é ínfimo existe $x \in A$ tal que $x < \frac{d}{c}$, $cx > d$ assim esse d não pode ser cota superior de cA , então cb é a menor cota superior, logo o ínfimo.

1.3.35 Questão 37

Item I

Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$, conjuntos limitados .

Propriedade 70. O conjunto $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ também é limitado.

Demonstração. Se A é limitado, existe t tal que $|x| < t$ para todo $x \in A$ e se B é limitado existe u tal que $|y| < u \forall y \in B$. Somando as desigualdades e usando desigualdade triangular segue $|x| + |y| < u + t$ e $|x + y| \leq |x| + |y| < u + t$ logo o conjunto $A + B$ é limitado.

Item II

Propriedade 71 (Propriedade aditiva). Vale $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Demonstração. Como A, B são limitados superiormente, temos $\sup A := a$ e $\sup B := b$, como vale $a \geq x$ e $b \geq y$ para todos $x, y \in A, B$ respectivamente segue que $a + b \geq x + y$ logo o conjunto $A + B$ é limitado superiormente. Para todo e qualquer $\varepsilon > 0$ existem x, y tais que

$$a < x + \frac{\varepsilon}{2}, \quad b < y + \frac{\varepsilon}{2}$$

somando ambas desigualdades-segue-se que

$$a + b < x + y + \varepsilon$$

que mostra que $a + b$ é a menor cota superior, logo o supremo, fica valendo então

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Item III

Propriedade 72. $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Demonstração. Sejam $a = \inf A$ e $b = \inf B$ então $\forall x, y \in A, B$ tem-se $a \leq x, b \leq y$ de onde segue por adição $a + b \leq x + y$, assim $a + b$ é cota inferior de $A + B$. $\exists x, y \in A, B$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ vale $x < a + \frac{\varepsilon}{2}$ e $y < b + \frac{\varepsilon}{2}$ pois a e b são as maiores cotas inferiores, somando os termos das desigualdades segue $x + y < a + b + \varepsilon$, que implica que $a + b$ é a maior cota inferior logo o ínfimo.

1.3.36 Questão 38

Definição 5 (Função limitada). Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é dita limitada quando o conjunto $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$, se $f(A)$ é limitado superiormente então dizemos que f é

limitada superiormente e caso $f(A)$ seja limitado inferiormente dizemos que A é limitado inferiormente.

Seja uma função limitada $f : V \rightarrow R$.

Definição 6.

$$\sup f := \sup f(V) = \sup\{f(x) \mid x \in V\}$$

Definição 7.

$$\inf f := \inf f(V) = \inf\{f(x) \mid x \in V\}$$

Propriedade 73. A função soma de duas funções limitadas é limitada.

Demonstração. Vale $|f(x)| \leq M_1$ e $|g(x)| \leq M_2 \forall x \in A$ então

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2 = M$$

portando a função soma $f + g$ de duas funções limitadas é também uma função limitada.

Sejam $f, g : V \rightarrow R$ funções limitadas e $c \in R$.

Propriedade 74.

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g.$$

Demonstração.

Sejam

$$A = \{f(x) \mid x \in V\}, \quad B = \{g(y) \mid y \in V\}, \quad C = \{g(x) + f(x) \mid x \in V\}$$

temos que $C \subset A + B$, pois basta tomar $x = y$ nos conjuntos, logo

$$\sup(A + B) \geq \sup(f + g)$$

$$\sup(A) + \sup(B) = \sup f + \sup g \geq \sup(f + g)$$

Propriedade 75.

$$\inf(f + g) \geq \inf(f) + \inf(g).$$

Demonstração. De $C \subset A + B$ segue tomando o ínfimo

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) = \inf(f) + \inf(g) \leq \inf(C) = \inf(f + g).$$

Exemplo 17. Sejam $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$

- Vale $\sup f = 1$, $\sup g = 0$, $f + g = 0$ logo $\sup(f + g) = 0$ vale então

$$\sup f + \sup g = 1 > \sup(f + g) = 0.$$

- Temos ainda $\inf f = 0$, $\inf g = -1$, $f + g = 0$, $\inf(f + g) = 0$ logo

$$\inf f + \inf g = -1 < \inf(f + g) = 0.$$

As desigualdades estritas também valem se consideramos as funções definidas em $[-1, 1]$, nesse caso $\sup f + \sup g = 2$ e $\inf f + \inf g = -2$ e $\sup(f + g) = 0 = \inf(f + g)$.

1.3.37 Questão 39

Definição 8. Sejam A e B conjuntos não vazios, definimos $A.B = \{x.y \mid x \in A, y \in B\}$.

Propriedade 76. Sejam A e B conjuntos limitados de números positivos, então vale $\sup(A.B) = \sup(A). \sup(B)$.

Demonstração. Sejam $a = \sup(A)$ e $b = \sup(B)$ então valem $x \leq a$ e $y \leq b$, $\forall x \in A, y \in B$ daí $x.y \leq a.b$, logo $a.b$ é cota superior de $A.B$. Tomando $t < a.b$ segue que $\frac{t}{a} < b$ logo existe $y \in B$ tal que $\frac{t}{a} < y$ daí $\frac{t}{y} < a$ logo existe $x \in A$ tal que $\frac{t}{y} < x$ logo $t < x.y$ então t não pode ser uma cota superior, implicando que $a.b$ é o supremo do conjunto.

Propriedade 77. Sejam A e B conjuntos limitados de números positivos, então vale $\inf(A.B) = \inf(A). \inf(B)$.

Demonstração. Sejam $a = \inf(A)$ e $b = \inf(B)$ então valem $x \geq a$ e $y \geq b$, $\forall x \in A, y \in B$ daí $x.y \geq a.b$, logo $a.b$ é cota inferior de $A.B$. Tomando $t > a.b$ segue que $\frac{t}{a} > b$ logo existe $y \in B$ tal que $\frac{t}{a} > y$ daí $\frac{t}{y} > a$ logo existe $x \in A$ tal que $\frac{t}{y} > x$ logo $t < x.y$ então t não pode ser uma cota inferior, implicando que $a.b$ é o ínfimo do conjunto.

1.3.38 Questão 40

Propriedade 78. Sejam $f, g : A \rightarrow R$ funções limitadas então $f.g : A \rightarrow R$ é limitada.

Demonstração. Vale que $|f(x)| < M_1$ e $|g(x)| < M_2$ então $|f(x)g(x)| < M_1M_2 = M \forall x \in A$, portanto $f.g : A \rightarrow R$ é limitada.

Propriedade 79. Sejam $f, g : A \rightarrow R^+$ limitadas superiormente, então

$$\sup(f.g) \leq \sup(f) \sup(g).$$

Demonstração. Sejam $C = \{g(x).f(x) \mid x \in A\}$, $B = \{g(y) \mid y \in A\}$ e $A = \{f(x) \mid x \in A\}$. Vale que $C \subset A.B$ para ver isso basta tomar $x = y$ nas definições acima, daí

$$\sup(A.B) \geq \sup(C)$$

$$\sup(A) \sup(B) \geq \sup(C)$$

$$\sup(f) \sup(g) \geq \sup(f.g).$$

Propriedade 80. Sejam $f, g : A \rightarrow R^+$ limitadas inferiormente, então

$$\inf(f.g) \geq \inf(f) \inf(g).$$

Demonstração. Sejam $C = \{g(x).f(x) \mid x \in A\}$, $B = \{g(y) \mid y \in A\}$ e $A = \{f(x) \mid x \in A\}$. Vale que $C \subset A.B$, daí

$$\inf(A.B) \leq \inf(C)$$

$$\inf(A) \inf(B) \leq \inf(C)$$

$$\inf(f) \inf(g) \leq \inf(f.g).$$

Exemplo 18. Sejam $f, g : [1, 2] \rightarrow R$ dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, vale $\sup f = 2$, $\sup g = 1$ $\sup f.g = 2$ e $\sup(f.g) = 1$, pois $f.g = 1$ logo

$$\sup f \sup g > \sup(f.g).$$

Da mesma maneira $\inf f = 1$, $\inf g = \frac{1}{2}$ vale $\inf f.g = \frac{1}{2}$ e $\inf(f.g) = 1$ portanto

$$\inf f.g < \inf(f.g).$$

Propriedade 81. Seja $f : A \rightarrow R^+$ limitada superiormente então $\sup(f^2) = (\sup f)^2$.

Demonstração. Seja $a = \sup f$ tem-se $f(x) \leq a \quad \forall x$ daí $f(x)^2 \leq a^2$ então a^2 é cota superior de f^2 , e é a menor cota superior pois se $0 < c < a^2$ então $\sqrt{c} < a$ logo existe x tal que $\sqrt{c} < f(x) < a$ e daí $c < f(x)^2 < a^2$ logo a^2 é a menor cota superior $\sup(f^2) = (\sup f)^2$.

Propriedade 82. Seja $f : A \rightarrow R^+$ então $\inf(f^2) = (\inf f)^2$.

Demonstração. Seja $a = \inf f$ tem-se $f(x) \geq a \quad \forall x$ daí $f(x)^2 \geq a^2$ então a^2 é cota inferior de f^2 , e é a maior cota inferior pois se $a^2 < c$ então $a < \sqrt{c}$ logo existe x tal que $a < f(x) < \sqrt{c}$ e daí $a^2 < f(x)^2 < c$ logo a^2 é a maior cota inferior $\inf(f^2) = (\inf f)^2$.

1.3.39 Questão 42

Teorema 1 (Teorema das raízes racionais). Se o polinômio

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

de coeficientes inteiros, tem uma raiz racional $x = \frac{r}{s}$ tal que $\text{mdc}(r, s) = 1$ então $s|a_n$ e $r|a_0$.

Demonstração. Se $x = \frac{r}{s}$ é raiz de $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, então temos

$$f\left(\frac{r}{s}\right) = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{r}{s}\right)^k = 0$$

multiplicando por s^n em ambos os lados temos

$$\sum_{k=0}^n a_k r^k \cdot s^{n-k} = 0$$

como $s|0$ então $s \mid \sum_{k=0}^n a_k r^k \cdot s^{n-k}$, na soma s não aparece como fator apenas quando $n - k = 0$, $n = k$, logo abrindo o limite superior do somatório temos

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \cdot s^{n-k} + a_n r^n \cdot s^{n-n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \cdot s^{n-k} + a_n r^n = 0$$

daí s deve dividir $a_n r^n$, como s é primo com r implica que também é primo com r^n , portanto s deve dividir a_n . Pelo mesmo argumento, temos que $r|0$ logo r deve dividir $\sum_{k=0}^n a_k r^k . s^{n-k}$, como o único fator onde r não aparece é quando $k = 0$, abrimos o limite inferior do somatório

$$a_0 r^0 . s^{n-0} + \sum_{k=1}^n a_k r^k . s^{n-k} = a_0 . s^n + \sum_{k=1}^n a_k r^k . s^{n-k} = 0$$

logo r deve dividir $a_0 . s^n$, mas como r é primo com s^n , ele deve dividir a_0 .

Corolário 10. Se o polinômio de coeficientes inteiros $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ possui raízes racionais então elas devem pertencer ao conjunto

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \mid p|a_0 \ q|a_n \right\}.$$

Corolário 11. Se $a_n = 1$ em um polinômio de coeficientes inteiros $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ então suas raízes racionais devem ser inteiras, pois

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \mid p|a_0 \ q|1 \right\}$$

então $q = 1$ ou $q = -1$, e de qualquer forma implica que as soluções são da forma $x = p$ para algum $p \in \mathbb{Z}$. Então, nessas condições, as raízes do polinômio $P(x)$ são inteiras ou irracionais.

Propriedade 83. Seja $P(x) = x^n - a$, $a > 0 \in \mathbb{Z}$, se a não é n -ésima potência de um número natural então a única raiz positiva de P , que é $\sqrt[n]{a}$, é irracional.

Demonstração. Como P possui coeficiente $a_n = 1$ então ele possui raiz irracional ou inteira, se a raiz positiva m fosse inteira (logo natural) teríamos $m^n - a = 0$ e daí $a = m^n$ é potência de um número natural, o que contraria a hipótese de a não ser n -ésima potência de um número natural, logo $\sqrt[n]{a}$ é irracional.

1.3.40 Questão 43

Propriedade 84. Sejam I um intervalo não degenerado e $k > 1$ natural. O conjunto $A = \left\{ \frac{m}{k^n} \in I \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ é denso em I .

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $k^n > \frac{1}{\varepsilon}$, daí os intervalos $[\frac{m}{k^n}, \frac{m+1}{k^n}]$ tem comprimento $\frac{m+1}{k^n} - \frac{m}{k^n} = \frac{1}{k^n} < \varepsilon$.

Existe um menor inteiro $m+1$ tal que $x + \varepsilon \leq \frac{m+1}{k^n}$ daí $\frac{m}{k^n} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ pois se fosse $x + \varepsilon < \frac{m}{k^n}$ iria contrariar a minimalidade de $m+1$ e se fosse $\frac{m}{k^n} < x - \varepsilon$ então $[\frac{m}{k^n}, \frac{m+1}{k^n}]$ teria comprimento maior do que de $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, que é ε , uma contradição com a suposição feita anteriormente.

1.3.41 Questão 44

Propriedade 85. O conjunto dos polinômios com coeficientes racionais é enumerável.

Demonstração. Seja P_n o conjunto dos polinômios com coeficientes racionais de grau $\leq n$ a função $f : P_n \rightarrow Q^{n+1}$ tal que

$$P(\sum_{k=0}^n a_k x^k) = (a_k)_1^n$$

é uma bijeção. Como Q^{n+1} é enumerável por ser produto cartesiano finito de conjuntos enumeráveis, segue que P_n é enumerável.

Sendo A o conjunto dos polinômios de coeficientes racionais, vale que

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$$

portanto A é união enumerável de conjuntos enumeráveis, sendo assim A é enumerável.

Definição 9 (Número algébrico). Um número real (complexo) x é dito algébrico quando é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros.

Propriedade 86. O conjunto dos números algébricos é enumerável.

Demonstração.[1] Enumeramos $A = \{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$, o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros, definimos B_k como conjunto das raízes reais de f_k , então vale que

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

como cada B_k é finito B fica sendo união enumerável de conjuntos finitos, então B é enumerável.

Demonstração.[2] Seja B o conjunto dos algébricos e A o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros. Para cada algébrico x escolhemos um polinômio P_x tal que $P_x(x) = 0$.

Definimos a função $f : B \rightarrow A$ tal que $f(x) = P_x$. Dado $P_x \in F(B)$, temos que o conjunto $g^{-1}(P_x)$ dos valores $x \in B$ tal que $f(x) = P_x$ é finito pois $\underbrace{P_x}_{=y}$ possui um número finito de raízes e daí tem-se

$$B = \bigcup_{y \in f(B)} g^{-1}(y)$$

logo B é união enumerável de conjuntos enumeráveis (no caso finitos), então B é enumerável.

Corolário 12. Existem números reais que não são algébricos, pois se todos fossem algébricos R seria enumerável.

Definição 10 (Números transcendentais). Os números reais que não são algébricos são ditos transcendentais

Propriedade 87. O conjunto dos números algébricos é denso em R , pois todo racional é algébrico, o racional $\frac{b}{a}$ é raiz do polinômio com coeficientes inteiros

$$ax - b = P(x)$$

$$ax - b = 0 \Leftrightarrow ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}. \text{ E } Q \text{ é denso em } R.$$

1.3.42 Questão 45

Propriedade 88. Seja A enumerável e $B = R \setminus A$, então para cada intervalo (a, b) , $(a, b) \cap B$ é não enumerável, em especial B é denso em R .

Com esse resultado garantimos que o complementar de um conjunto enumerável é denso em R .

Demonstração. Sabemos que (a, b) é não enumerável, escrevemos

$$(a, b) = [(a, b) \cap A] \cup [(a, b) \cap (R \setminus A)] = [(a, b) \cap A] \cup [(a, b) \cap B],$$

sabemos que $(a, b) \cap A$ é enumerável se $(a, b) \cap B$ também o fosse, chegaríamos no absurdo de (a, b) ser enumerável, por ser união finita de conjuntos enumeráveis, portanto $(a, b) \cap B$ é não enumerável e B é denso em R .

Exemplo 19. Um conjunto pode não ser enumerável e também não ser denso em R , como (a, b) .

1.3.43 Questão 46

Corolário 13. O conjunto T dos números transcendentais é não enumerável e denso em R . Pois A o conjunto dos números algébricos é enumerável, $T = R \setminus A$, como complementar dos números algébricos T é não enumerável e denso em R .

1.3.44 Questão 48

Exemplo 20. Sendo $A_k = [k, \infty)$ temos uma sequência de intervalos que são conjuntos fechados porém a interseção

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

é vazia, pois suponha que exista $t \in A$, daí existe $k > t$ e $t \notin [k, \infty) = A_k$ logo não pode pertencer a interseção de todos esses conjuntos.

Da mesma maneira existe uma sequência decrescente de intervalos abertos limitados com interseção vazia, sendo $B_k = (0, \frac{1}{k})$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B$$

B é vazio, pois se houvesse um elemento nele $x > 0$, conseguimos k tal que $\frac{1}{k} < x$ daí x não pertence ao intervalo $(0, \frac{1}{k}) = B_k$ portanto não pode pertencer a interseção.

1.3.45 Questão 49

Propriedade 89. Sejam $B \subset A$ não vazios, A limitado superiormente, se $\forall x \in A$ existe $y \in B$ tal que $y \geq x$ então $\sup(B) = \sup(A)$.

Demonstração. B é limitado superiormente pois está contido em um conjunto limitado e vale que $\sup(A) \geq \sup(B)$, pois $B \subset A$, suponha que fosse $c = \sup(A) > \sup(B)$, então tomando $\varepsilon = \sup(A) - \sup(B) > 0$, existe $x \in A$ tal que $x > c - \varepsilon = \sup(A) - \sup(A) + \sup(B) = \sup(B)$, por hipótese existe $y \geq x > \sup(B)$ com $y \in B$, o que é absurdo, pois não pode existir um elemento maior que o supremo.

Propriedade 90. Sejam $B \subset A$ não vazios, A limitado inferiormente, se $\forall x \in A$ existe $y \in B$ tal que $y \leq x$ então $\inf(B) = \inf(A)$.

Demonstração. B é limitado inferiormente pois está contido em um conjunto limitado e vale que $\inf(A) \leq \inf(B)$, pois $B \subset A$, suponha que fosse $c = \inf(A) < \inf(B)$, então tomando $\varepsilon = \inf(B) - \inf(A) > 0$, existe $x \in A$ tal que $x < c + \varepsilon = \inf(A) - \sup(A) + \inf(B) = \inf(B)$, por hipótese existe $y \leq x < \inf(B)$ com $y \in B$, o que é absurdo, pois não pode existir um elemento menor que o ínfimo.

1.3.46 Questão 50

Definição 11 (Corte de Dedekind). Um corte de Dedekind é um par ordenado (A, B) onde $A, B \in Q$ não vazios, tais que A não possui máximo, $A \cup B = Q$ e $\forall x \in A, y \in B$ vale $x < y$.

Seja C o conjunto dos cortes de Dedekind.

Propriedade 91. Em (A, B) vale $\sup(A) = \inf(B)$.

Demonstração. Já sabemos que vale $\sup(A) \leq \inf(B)$, pois $\forall x \in A, y \in B$ vale $x < y$ implica $\sup(A) < y$ e $\sup(A)$ ser cota inferior implica $\sup(A) \leq \inf(B)$, suponha por absurdo que fosse $\sup(A) < \inf(B)$, então o intervalo $(\sup(A), \inf(B))$ não possui valores $x \in A$, pois se não $x > \sup(A)$, nem $y \in B$ pois daí $y < \inf(B)$, mas como existem racionais em tal intervalo, pois Q é denso e $A \cup B = Q$, chegamos em um absurdo.

Propriedade 92. Existe bijeção entre R e C o conjunto dos cortes.

Demonstração. Definimos $f : C \rightarrow R$ como $f(A, B) = \sup(A) = \inf(B)$.

- f é injetora, suponha $f(A, B) = f(A', B')$ então $\sup(A) = \inf(B) = \sup(A') = \inf(B')$.

Dado $x \in A$ vamos mostrar que $x \in A'$.

$$x < \sup(A') = \inf(B') \leq y', \forall y' \in B', \text{ daí } x \in A'$$

a inclusão $A' \subset A$ é análoga. Então vale $A = A'$.

- Dado $y \in B$, vamos mostrar que $y \in B'$.

$$x' < \sup(A) < \inf(B') \leq y$$

com isso $y \in B'$. De maneira similar, $B' \subset B$ portanto $B = B'$. Como vale $B = B'$ e $A = A'$ então a função é injetiva.

- A função é sobrejetiva. Para qualquer $y \in R$, tomamos os conjuntos $(-\infty, y) \cap Q = A$ e $B = [y, \infty) \cap Q$, A não possui máximo, para todo $x \in A$ e $y \in B$ tem-se $y > x$ e $Q = [(-\infty, y) \cap Q] \cup [[y, \infty) \cap Q]$, além disso vale $\sup(A) = y = \inf(B)$, portanto $f(A, B) = y$ e a função é sobrejetora, logo sendo também injetora f é bijeção.

1.3.47 Questão 53

Propriedade 93 (Média aritmética e geométrica.). Se $a, b > 0$ vale

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}.$$

Demonstração.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

1.3.48 Questão 57

Exemplo 21. A função $f : R \rightarrow (-1, 1)$ com $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é bijetora.

Ela está bem definida em R , pois o único problema possível seria o termo dentro da raiz no denominador ser não positivo, o que não acontece pois $x^2 + 1 \geq 1$, ela é injetora pois $\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} = \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \Rightarrow x_1 = x_2$, sua imagem está contida no intervalo $(-1, 1)$ pois $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|$ logo $|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}| < 1$ sendo também sobrejetora, pois dado

$y \in (-1, 1)$ temos $|y| < 1 \Rightarrow y^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - y^2$, podemos tomar $x = \sqrt{\frac{y^2}{1 - y^2}}$ se $x \geq 0$ e $x = -\sqrt{\frac{y^2}{1 - y^2}}$ caso $x < 0$ e daí vale $f(x) = y$ (Podemos perceber pela definição que $x \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$ e $x \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$).

1.4 Capítulo 4-Sequências e séries de números reais

1.4.1 Questão 1

Propriedade 94. Se $\lim x_n = a$ então $\lim |x_n| = |a|$.

Demonstração. Se $\lim x_n = a$ então

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

porém temos a desigualdade $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$ logo $||x_n| - |a|| < \varepsilon$ e $\lim |x_n| = |a|$.

Exemplo 22. $\lim |x_n|$ pode existir porém $\lim x_n$ pode não existir, por exemplo tomamos $x_n = (-1)^n$, ela não converge porém $|(-1)^n| = 1$ é constante logo convergente.

1.4.2 Questão 2

Exemplo 23. Se $\lim x_n = 0$ e $y_n = \min\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ então $\lim y_n = 0$.

Por definição vale que $0 \leq y_n \leq |x_n|$, como $|x_n| \rightarrow 0$ então por sanduíche segue que $\lim y_n = 0$.

1.4.3 Questão 3

Propriedade 95. Se $\lim x_{2n} = a$ e $\lim x_{2n-1} = a$ então $\lim x_n = a$.

Demonstração. Sejam $y_n = x_{2n}$ e $z_n = x_{2n-1}$ como temos $\lim y_n = \lim z_n = a$, para qualquer $\varepsilon > 0$ existem n_0 e n_1 tais que para $n > n_0$ vale $y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $n > n_1$ vale $z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, escolhendo $n_2 > \max\{n_0, n_1\}$ temos para $n \geq n_2$ simultaneamente $z_n, y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $x_{2n-1}, x_{2n} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, então para $n > 2n_2 - 1$ temos $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ logo vale $\lim x_n = a$.

1.4.4 Questão 4

Propriedade 96. Se $N = \bigcup_{k=1}^p N_k$ e $\lim_{n \in N_k} x_n = a$ então $\lim x_n = a$.

Demonstração.

Dado $\varepsilon > 0$ fixo e arbitrário existe $n_k \in N_k$ tal que $\forall n > n_k, n \in N_k$ vale $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ pelo fato de $\lim_{n \in N_k} x_n = a$. Tomamos $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_p\}$, daí vale para $n > n_0, x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para todo $n \in N_k$ com todo k , com isso uniformizamos o valor do índice para o qual os termos da sequência estão no mesmo intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Como todo $n \in N$ pertence a algum N_k então para $n \in N$ suficientemente grande vale x_n em $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Vamos tentar deixar mais clara a última proposição.

Seja $n'_0 = \min\{n > n_0 \mid x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \forall n \in N_k, \forall k\}$, tal conjunto é não vazio logo possui mínimo. Para todo $n \in N, n > n'_0$ vale $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, pois dado $n > n'_0 > n_0$ x_n pertence à algum N_k e nas condições colocadas na construção do conjunto para N_k vale $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

1.4.5 Questão 5

Exemplo 24. Pode valer $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ com $\lim_{n \in N_k} x_n = a$ e $\lim x_n \neq a$.

Como por exemplo, definimos $N_2 = \{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots\}$ em geral $N_{k+1} = \{p_k^1, p_k^2, \dots, p_k^n, \dots\}$ onde p_k é o k -ésimo primo, definindo N_1 como o complemento de $\bigcup_{k=2}^{\infty} N_k$ em N . Definimos em $N_2, x_2 = 2, x_n = 0$ para os outros valores, da mesma forma em N_{k+1} definimos $x_{p_k} = p_k$ e $x_n = 0$ para os outros valores. Em N_1 definimos $x_n = 0$ para todo n . A sequência x_n não converge possui uma subsequência que tende a infinito. $x_2 = 2, x_3 = 3, x_5 = 5, \dots, x_{p_k} = p_k, \dots$ a subsequência dos primos.

1.4.6 Questão 6

Corolário da adição e multiplicação de limites.

Corolário 14. Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n - y_n = 0$ então $\lim y_n = a$ pois $\lim y_n - x_n = 0$ e pelo limite da soma $\lim y_n - x_n + x_n = \lim y_n - x_n + \lim x_n = 0 + a = a = \lim y_n$.

1.4.7 Questão 7

Corolário 15. Seja $a \neq 0$. Se $\lim \frac{y_n}{a} = 1$ então $\lim y_n = a$, pois usando linearidade do limite $\lim \frac{y_n}{a} = \frac{1}{a} \lim y_n = 1$ portanto $\lim y_n = a$.

1.4.8 Questão 8

Corolário 16. Se $\lim x_n = a$ e $\lim \frac{x_n}{y_n} = b \neq 0$ então $\lim y_n = \frac{a}{b}$, pois $\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{b}$ e daí por limite do produto

$$\lim x_n \frac{y_n}{x_n} = \lim y_n = \frac{a}{b}.$$

1.4.9 Questão 9

Corolário 17. Se $\lim x_n = a \neq 0$ e $\lim x_n y_n = b$ então $\lim y_n = \frac{b}{a}$.

Vale que $\lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$, daí $\lim x_n y_n \lim \frac{1}{x_n} = \lim x_n y_n \frac{1}{x_n} = \lim y_n = \frac{b}{a}$.

1.4.10 Questão 10

Propriedade 97. Se existem $\varepsilon > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $\varepsilon \leq x_n \leq n^p$ para $n > n_0 \in \mathbb{N}$ então $\lim (x_n)^{\frac{1}{n}}$.

Demonstração. Vale $\varepsilon \leq x_n \leq n^p$, tomando a raiz n -ésima tem-se

$$\varepsilon^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq (n^p)^{\frac{1}{n}}$$

tomando-se o limite segue pelo teorema do sanduíche que $\lim (x_n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

1.4.11 Questão 11

Exemplo 25. Usando que a média aritmética é maior ou igual a média geométrica, na sequência de $n + 1$ números com n números iguais à $(1 + \frac{t}{n})$ e um deles sendo a unidade 1, com isso temos

$$\left(\frac{1 + \sum_{k=1}^n (1 + \frac{t}{n})}{n + 1} \right) \geq \left(\prod_{k=1}^n (1 + \frac{t}{n}) \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\left(\frac{n+1+t}{n+1}\right) = 1 + \frac{t}{n+1} \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \left(1 + \frac{t}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

com $t \geq -1$ real. Em especial a sequência de termo $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e para $n = 2$ temos

$$x_2 = \frac{1}{4}$$

daí $x_n \geq \frac{1}{4}$ para $n > 1$.

1.4.12 Questão 11a.

Exemplo 26. Vale que

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim 1^n = 1$$

daí $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

1.4.13 Questão 12

Propriedade 98. Sejam $a \geq 0, b \geq 0$ então

$$\left|a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}\right| \leq |a - b|^{\frac{1}{n}}$$

Demonstração. Supondo $a \geq b$, definindo $c = a^{\frac{1}{n}}$ e $d = b^{\frac{1}{n}}$, então $c - d \geq 0$ por expansão binomial tem-se

$$c^n = ((c - d) + d)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (c - d)^k d^{n-k} \geq d^n + (c - d)^n \geq 0$$

daí $c^n - d^n \geq (c - d)^n \geq 0$ implicando

$$|a - b| \geq |a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}|^n$$

e daí

$$\left|a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}\right| \leq |a - b|^{\frac{1}{n}}.$$

Propriedade 99. Se $x_n \geq 0$ e $\lim x_n = a$ então $\lim (x_n)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p}}$

Demonstração. Como $\lim x_n = a$ então $\forall \varepsilon > 0$ conseguimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ tem-se $|x_n - a| < \varepsilon^p$ e daí $|x_n - a|^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$, da desigualdade anterior temos que

$$|x_n^{\frac{1}{p}} - a^{\frac{1}{p}}| \leq |x_n - a|^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

e daí $\lim (x_n)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p}}$.

Propriedade 100. Seja m racional e (x_n) de termos positivos. Se $\lim x_n = a$ então $\lim x_n^m = a^m$.

Demonstração.

Escrevemos $m = \frac{p}{q}$, daí

$$\lim x_n^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{1}{q}}$$

usando propriedade do produto segue

$$\lim x_n^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

1.4.14 Questão 14

Propriedade 101. Seja $a, b \geq 0$ e então $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

Demonstração. Seja $c = \max\{a, b\}$ então vale $a^n \leq c^n$, $b^n \leq c^n$ e daí $a^n + b^n \leq 2c^n$ da mesma maneira $c^n \leq a^n + b^n$, pois c é a ou b , logo

$$c^n \leq a^n + b^n \leq 2c^n$$

$$c \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2} c$$

tomando limites, temos pelo teorema do sanduíche

$$\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = c.$$

Propriedade 102. Sejam $(a_k \geq 0)_1^m$ e $c = \max\{a_k, k \in I_m\}$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^m a_k^n} = c.$$

Demonstração. Vale $a_k^n \leq c^n$, tomando a soma, tem-se $\sum_{k=1}^m a_k^n \leq m.c^n$, tem-se também $c^n \leq \sum_{k=1}^m a_k^n$ então vale

$$c^n \leq \sum_{k=1}^m a_k^n \leq m.c^n$$

tomando a raiz

$$c \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^m a_k^n} \leq \sqrt[n]{m.c^n}$$

e novamente por teorema do sanduíche tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\sum_{k=1}^m a_k^n} = c.$$

1.4.15 Questão 15

Definição 12 (Termo destacado). Dizemos que x_n é um termo destacado quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Isto é quando x_n é maior ou igual a todos seus sucessores.

Propriedade 103. Toda sequência possui subsequência monótona .

Demonstração.

Seja $A \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices s da sequência (x_n) , tais que x_s é destacado, existem dois casos a serem analisados

- Se A é infinito, então podemos tomar uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ de termos destacados formada pelos elementos com índices em A que é não-crescente com $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ e com $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq \dots$.
- Se A é finito, tomamos um n_1 maior que todos elementos de A daí x_{n_1} não é destacado, existindo $x_{n_2} \geq x_{n_1}$ com $n_2 > n_1$, por sua vez x_{n_2} não é destacado logo existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \geq x_{n_2}$, assim construímos uma subsequência não-decrescente .

1.4.16 Questão 18

Generalizamos o exercício em dois resultados.

Propriedade 104. Sejam (a_n) e (b_n) seqüências limitada tais que $a_n + b_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$, (z_n) e (t_n) com o mesmo limite a , então $\lim a_n \cdot z_n + b_n \cdot t_n = a$.

Demonstração. Escrevemos

$$\begin{aligned} a_n \cdot z_n + b_n \cdot t_n &= a_n \cdot z_n - a \cdot a_n + a \cdot \underbrace{a_n}_{=1-b_n} + b_n \cdot t_n = a_n(z_n - a) + a(1 - b_n) + b_n \cdot t_n = \\ &= a_n(z_n - a) + a - a \cdot b_n + b_n \cdot t_n = a_n(z_n - a) + a + b_n(t_n - a) \end{aligned}$$

daí

$$\lim a_n(z_n - a) + a + b_n(t_n - a) = a = \lim a_n \cdot z_n + b_n \cdot t_n$$

pois a_n e b_n são limitadas e $z_n - a, t_n - a$ tendem a zero.

Propriedade 105. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} z_k(n) = a \forall k$ e cada $(x_k(n))$ é limitada com $\sum_{k=1}^p x_k(n) = v_n \rightarrow b$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p x_k(n) z_k(n) = a \cdot b$.

Demonstração. Vale $x_1(n) = v_n - \sum_{k=2}^p x_k(n)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p x_k(n) z_k(n) &= x_1(n) z_1(n) + \sum_{k=2}^p x_k(n) z_k(n) = \\ &= z_1(n) v_n - \sum_{k=2}^p x_k(n) z_1(n) + \sum_{k=2}^p x_k(n) z_k(n) = \\ &= \underbrace{z_1(n) v_n}_{\rightarrow a \cdot b} + \sum_{k=2}^p x_k(n) \underbrace{(z_k(n) - z_1(n))}_{\rightarrow 0} \rightarrow a \cdot b. \end{aligned}$$

1.4.17 Questão 19

Definição 13 (Seqüência de variação limitada). Uma seqüência (x_n) tem variação limitada quando a seqüência (v_n) com

$$v_n = \sum_{k=1}^n |\Delta x_k| \text{ é limitada.}$$

Propriedade 106. Se (x_n) tem variação limitada então (v_n) converge.

Demonstração. (v_n) é limitada e não-decrescente, pois $\Delta v_n = |\Delta x_{n+1}| \geq 0$, logo é convergente.

Propriedade 107. Se (x_n) tem variação limitada então existe $\lim x_n$.

Demonstração. A série $\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|$ converge portanto $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta x_k$ converge absolutamente e vale

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k + x_1$$

logo x_n é convergente.

Exemplo 27. Se $|\Delta x_{n+1}| \leq c|\Delta x_n| \forall n \in N$ com $0 \leq c < 1$ então (x_n) possui variação limitada. Definimos $g(k) = |\Delta x_k|$ logo a desigualdade pode ser escrita como $g(k+1) \leq cg(k)$, $Qg(k) \leq c$ aplicamos $\prod_{k=1}^{n-1}$ de ambos lados, daí

$$g(n) = |\Delta x_n| \leq c^{n-1}g(1)$$

somando em ambos lados temos

$$\sum_{k=1}^n |\Delta x_k| \leq \sum_{k=1}^n c^{k-1}g(1)$$

como o segundo termo converge por ser série geométrica segue que (x_n) é de variação limitada, logo converge.

Propriedade 108. (x_n) tem variação limitada $\Leftrightarrow x_n = y_n - z_n$ onde (y_n) e (z_n) são sequências não-decrescentes limitadas.

Demonstração.

\Leftarrow).

Seja $x_n = y_n - z_n$ onde (y_n) e (z_n) são sequências não-decrescentes limitadas, então x_n tem variação limitada.

$$v_n = \sum_{k=1}^n |\Delta x_k| = \sum_{k=1}^n |\Delta y_k - \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |\Delta y_k| + \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq \left| \sum_{k=1}^n \Delta y_k \right| + \left| \sum_{k=1}^n \Delta z_k \right|$$

$$= |y_{n+1} - y_1| + |z_{n+1} - z_1| < M$$

pois (y_n) e (z_n) são limitadas, logo (v_n) é limitada, isto é, (x_n) tem variação limitada.

\Rightarrow). Dada (x_n) com variação limitada. (x_n) tem variação limitada $\Leftrightarrow (x_n + c)$ tem variação limitada, pois Δ aplicado as duas sequências tem o mesmo valor. Escrevemos

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k$$

Para cada n definimos P_n o conjunto dos k da soma $\sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k$ tais que $\Delta x_k \geq 0$ e N_n o conjunto dos k da mesma soma tais que $\Delta x_k < 0$, com isso temos uma partição do conjunto dos índices e vale

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k = \underbrace{\sum_{k \in P_n} \Delta x_k}_{y_n} - \underbrace{\sum_{k \in N_n} (-\Delta x_k)}_{z_n}$$

(y_n) é não decrescente, pois $y_{n+1} = y_n$ caso não seja adicionado índice a P_{n+1} em relação a P_n e $y_{n+1} \geq y_n$ caso seja adicionado um índice a P_{n+1} , pois adicionamos um termo da forma $\Delta x_k \geq 0$ o mesmo para (z_n) .

(y_n) é limitada pois

$$\sum_{k \in P_n} \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta x_k| = \sum_{k \in P_n} |\Delta x_k| + \sum_{k \in N_n} |\Delta x_k| = \sum_{k \in P_n} \Delta x_k + \sum_{k \in N_n} (-\Delta x_k) < M$$

da mesma maneira (z_n) é limitada.

Exemplo 28. Existem sequências convergentes que não possuem variação limitada, como

por exemplo $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k}$, que é convergente porém $\Delta x_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow |\Delta x_n| = \frac{1}{n}$ e

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ não é limitada.

1.4.18 Questão 20

Exemplo 29. Seja (x_n) definida como $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, então vale que

$$|\Delta x_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |\Delta x_n|.$$

- Primeiro vale que $x_n \geq 1$ para todo n pois vale para $n = 1$, supondo validade para n , então vale para $n + 1$, pois $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$.
- Vale que $|x_{n+1}x_n| \geq 2$ para todo n , pois, substituindo $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ isso implica que $x_{n+1}x_n \geq x_n + 1 \geq 2$.
- De $|x_{n+1}x_n| \geq 2$ segue que $|\frac{1}{x_{n+1}x_n}| \leq \frac{1}{2}$, multiplicando por $|x_{n+1} - x_n|$ em ambos lados segue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}x_n} \right| &\leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{2} \\ \left| \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right| &= \left| \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right)}_{x_{n+2}} - \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)}_{x_{n+1}} \right| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{2} \end{aligned}$$

portanto $|\Delta x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|\Delta x_n|$ portanto a sequência é convergente. Calculamos seu limite $\lim x_n = a$

$$a = 1 + \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

cujas raízes são $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ficamos com a raiz positiva pois a sequência é de termos positivos, logo

$$\lim x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

1.4.19 Questão 21

Exemplo 30. Estudar a convergência da sequência $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$ com $x_1 = 1$.

A sequência é crescente, pois $x_2 = 2 > x_1$, supondo $x_{n+1} > x_n$ temos

$$\sqrt{x_{n+1}} > \sqrt{x_n} \Rightarrow 1 + \sqrt{x_{n+1}} > 1 + \sqrt{x_n} \Rightarrow x_{n+2} > x_{n+1}.$$

A sequência é limitada superiormente, por 3, por exemplo, pois $x_1 < 3$, supondo $x_n < 3 < 4$ tem-se

$$\sqrt{x_n} < 2 \Rightarrow 1 + \sqrt{x_n} < 3 \Rightarrow x_{n+1} < 3.$$

Agora calculamos o limite da sequência

$$a = 1 + \sqrt{a} \Rightarrow (a - 1)^2 = a \Rightarrow a^2 - 3a + 1 = 0$$

cujas raízes são $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, não podendo ser $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ que é menor que 1 logo o limite é $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

1.4.20 Questão 22

Propriedade 109. (x_n) não possui subsequência convergente $\Leftrightarrow \lim |x_n| = \infty$.

Demonstração.

\Rightarrow).

Se (x_n) não possui subsequência convergente então $\lim |x_n| = \infty$.

Se não fosse $\lim |x_n| = \infty$, existiria $A > 0$ tal que $\forall n_0$, existe $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n_1}| < A$, aplicando o resultado com n_1 no lugar de n_0 , existe $n_2 > n_1$ tal que $|x_{n_2}| < A$ e assim construímos uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ limitada, que possui uma subsequência convergente, o que é absurdo.

\Leftarrow).

Suponha por absurdo que $\lim |x_n| = \infty$ e (x_n) possui subsequência convergente, convergindo para a . Por definição de limite infinito, sabemos que existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $|x_n| > |a| + 10$, por (x_n) ter subsequência que converge para a , existe n_1 tal que $n > n_1$ e n índice da subsequência, implica $|x_n - a| < 10 \Rightarrow |x_n| < |a| + 10$, podemos tomar índice da subsequência tal que $n > n_1$ e $n > n_2$, logo valeria $|x_n| < |a| + 10$ e $|x_n| > |a| + 10$ o que é absurdo, portanto (x_n) não pode possuir subsequência convergente.

1.4.21 Questão 25

Propriedade 110 (Teste da razão para sequências.). Se $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ e $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c < 1$ para n suficientemente grande então $\lim x_n = 0$.

Demonstração. Existe n_0 tal que para $k > n_0$ vale $0 < \frac{x_{k+1}}{x_k} \leq c < 1$, aplicamos o produto $\prod_{k=n_0+1}^n$ em ambos, de onde segue

$$0 < \prod_{k=n_0+1}^n \frac{x_{k+1}}{x_k} \leq \prod_{k=n_0+1}^n c$$

$$0 < x_{n+1} < x_{(n_0+1)} c^{n-n_0}$$

como $\lim c^n = 0$, tem-se pelo teorema do sanduíche que $\lim x_n = 0$.

Corolário 18. Dada uma sequência de termos não nulos (x_n) , então $(|x_n|)$ é uma sequência de termos positivos, se ela satisfaz a propriedade anterior então $\lim |x_n| = 0$ o que implica $\lim x_n = 0$.

Propriedade 111. Seja (x_n) sequência de termos positivos, se $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq c > 1$ para n suficientemente grande então $\lim x_n = \infty$.

Demonstração. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > n_0$ implica $\frac{x_{k+1}}{x_k} \geq c$, onde $c > 1$. Aplicando o produtório na desigualdade tem-se

$$\prod_{k=n_0+1}^n \frac{x_{k+1}}{x_k} > c^{n-n_0}$$

$$x_{n+1} > \frac{x_{n_0+1}}{c^{n_0}} c^n$$

como $\lim c^n = \infty$ segue que $\lim x_n = \infty$.

Corolário 19. Na propriedade anterior podemos trocar x_n por $|x_n|$ onde x_n não se anula, pois $(|x_n|)$ é uma sequência de positivos.

Corolário 20. Se $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$ então para n suficientemente grande vale $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c < 1$, logo também vale $\lim x_n = 0$.

Corolário 21. Se $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = c > 1$ a propriedade também se verifica pois existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $\frac{x_{n+1}}{x_n} > a > 1$ para algum a .

Propriedade 112.

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Demonstração. Definimos $x_n = \frac{n!}{n^n}$ e vale $x_n > 0$, aplicamos a regra da razão

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

o limite é $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e} < 1$.

n^n cresce mais rápido que $n!$

Propriedade 113. Para todo $a > 0$ real temos $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

Demonstração. Pelo teste da razão, definimos $x_n = \frac{a^n}{n!}$ temos $x_n > 0$ segue $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}n!}{(n+1).n!a^n} = \frac{a}{n+1}$ e temos $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$, logo $\lim x_n = 0$.
A propriedade nos diz que $n!$ cresce mais rápido que a^n .

Corolário 22. $\lim \frac{n!}{a^n} = \infty$, pois $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, isso significa que $\forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \frac{n!}{a^n} > A$, em especial para $A = 1$, tem-se $n! > a^n$ para n suficientemente grande.

Propriedade 114. Se $a > 1$ e p natural fixo vale

$$\lim \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

Demonstração. Definimos $x_n = \frac{n^p}{a^n}$, vale $x_n > 0$ daí podemos aplicar o teste da razão

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^p a^n}{a^{n+1} n^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \frac{1}{a} \Rightarrow \lim x_{n+1}x_n = \underbrace{\frac{1}{a}}_{0 < } < 1$$

daí o limite é zero.

Corolário 23. Se $a > 1$, $p \in \mathbb{N}$ então $\lim \frac{a^n}{n^p} = \infty$ pois $\lim \frac{n^p}{a^n} = 0$.

Tal propriedade mostra que a exponencial a^n cresce muito mais rápido que n^p para n grande.

Questão 27

Questão 27

Feita no outro gabarito.

Questão 28

Feita no outro gabarito.

1.4.22 Questão 31

Exemplo 31. Mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Iremos calcular o limite das diferenças do inverso da sequência

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{(n+1)^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} n^k] + (p+1)n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} n^k}{(n+1)^p}}_{\rightarrow 0} + \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{(p+1)n^p}{(n+1)^p}}_{\rightarrow p+1} = p+1$$

daí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Questão 33

Questão digitada errada

Propriedade 115. Se $\lim x_n = \infty$, com $x_n > 0$ então $\lim(\prod_{k=1}^n x_k^{\frac{1}{n}}) = \infty$

Demonstração. Se $\lim x_n = \infty$ então $\lim \frac{1}{x_n} = 0$ daí $\lim(\underbrace{\prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}_{=y_n})^{\frac{1}{n}} = 0$ que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (\prod_{k=1}^n x_k^{\frac{1}{n}}).$$

Exemplo 32. Provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \infty$. Tomamos $x_n = \frac{(2n)!}{n!}$ daí temos $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)} = 2(2n+1) \rightarrow \infty$ logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \infty$.

Exemplo 33. Mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}} = \frac{4}{e}$.

Tomamos $x_n = \frac{(2n)!}{n!n^n}$, daí $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \rightarrow \frac{4}{e}$.

1.4.23 Questão 35

Propriedade 116. Sejam $\sum_{n=u}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=s}^{\infty} b_n$ séries de termos positivos. Se $\sum_{n=s}^{\infty} b_n = \infty$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ para todo $n > n_0$ então $\sum_{n=u}^{\infty} a_n = \infty$.

Demonstração. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $Qa_k \geq Qb_k$ tomando o produtório com k variando de $k = n_0 + 1$ até $n - 1$ na desigualdade em ambos lados segue

$$\prod_{k=n_0+1}^{n-1} Qa_k = \frac{a_n}{a_{n_0+1}} \geq \prod_{k=n_0+1}^{n-1} Qb_k = \frac{b_n}{b_{n_0+1}}, \quad a_n \geq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} b_n$$

pois temos termos positivos, tomando a série temos

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \geq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n = \infty$$

logo a série tende ao infinito por comparação.

1.4.24 Questão 36

Propriedade 117. 1. Sejam duas séries $\sum a_k$ e $\sum b_k$ de termos positivos, se existe

$$\lim \frac{a_k}{b_k} = a \neq 0 \text{ então } \sum a_k \text{ converge } \Leftrightarrow \sum b_k \text{ converge.}$$

2. Se $\lim \frac{a_k}{b_k} = 0$ então a convergência de $\sum b_k$ implica convergência de $\sum a_k$.

Demonstração.

1. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k > n_0$ tem-se

$$0 < t_1 < a - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < a + \varepsilon < t_2$$

como $b_k > 0$ tem-se

$$t_1 b_k < a_k < t_2 b_k$$

aplicamos a soma $\sum_{k=n_0+1}^n$, daí

$$t_1 \sum_{k=n_0+1}^n b_k < \sum_{k=n_0+1}^n a_k < t_2 \sum_{k=n_0+1}^n b_k$$

usando essa desigualdade temos por comparação que se $\sum b_k$ converge então $\sum a_k$ converge e se $\sum a_k$ converge então $\sum b_k$ converge.

2. De maneira similar ao item anterior.

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k > n_0$ tem-se

$$0 \leq \frac{a_k}{b_k} < \varepsilon < t_2$$

como $b_k > 0$ tem-se

$$0 \leq a_k < t_2 b_k$$

aplicamos a soma $\sum_{k=n_0+1}^n$, daí

$$0 \leq \sum_{k=n_0+1}^n a_k < t_2 \sum_{k=n_0+1}^n b_k$$

usando essa desigualdade temos por comparação que se $\sum b_k$ converge então $\sum a_k$ converge.

Exemplo 34. Pode valer que $\sum a_k$ converge, valendo $\lim \frac{a_k}{b_k} = 0$ e $\sum b_k$ não converge, tome por exemplo $a_k = \frac{1}{k^2}$, $b_k = \frac{1}{k}$, $\sum b_k$ não converge, $\lim \frac{a_k}{b_k} = \lim \frac{k}{k^2} = \lim \frac{1}{k} = 0$ e $\sum a_k$ converge, logo a recíproca do item 2 da propriedade anterior não vale.

1.4.25 Questão 40

Exemplo 35. A série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^2}{(1+a^2)^k}$$

converge com qualquer $a \in \mathbb{R}$. Vale que $1 \leq a^2 + 1 \forall a \in \mathbb{R}$ logo $0 < \frac{1}{1+a^2} \leq 1$, portanto a série converge por ser série geométrica. Sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} b^k = \frac{1}{1-b}$, substituindo $b = \frac{1}{a^2 + 1}$, chegamos no resultado

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+a^2)^k} = \frac{a^2 + 1}{a^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^2}{(1+a^2)^k} = a^2 + 1.$$

1.4.26 Questão 42

Propriedade 118. Sejam as séries $\sum a_k$ e $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$. $\sum a_k$ converge $\Leftrightarrow \sum \frac{a_k}{1+a_k}$ converge.

Demonstração. \Rightarrow . $\sum a_k$ converge e vale

$$0 \leq a_k \Rightarrow 1 \leq 1 + a_k \Rightarrow \frac{1}{1 + a_k} \leq 1 \Rightarrow \frac{a_k}{1 + a_k} \leq a_k$$

pelo critério de comparação segue que $\sum \frac{a_k}{1 + a_k}$ converge.

\Leftarrow . $\sum \frac{a_k}{1 + a_k}$ converge então

$$\lim \frac{a_k}{1 + a_k} = 0 \Rightarrow \lim 1 - \frac{1}{a_k + 1} = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{a_k + 1} = 1$$

daí por propriedade de limite $\lim a_k + 1 = 1 \Rightarrow \lim a_k = 0$ então existe n_0 tal que para $k > n_0$ tem-se $a_k \leq 1$

$$a_k + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{a_k + 1} \Rightarrow \frac{a_k}{2} \leq \frac{a_k}{a_k + 1}$$

logo por comparação $\sum a_k$ converge .

Propriedade 119. Seja (x_k) uma sequência de números não negativos com a série $\sum x_k$ convergente então $\sum x_k^2$ é convergente.

Demonstração.[1] Como $\sum a_k$ é convergente, vale $\lim a_k = 0$ e daí para $k > n_0$ vale $x_k < 1$ que implica $x_k^2 \leq x_k$ logo por comparação $\sum x_k^2$ converge.

Demonstração.[2] Como temos $x_k \geq 0$ segue também $x_k^2 \geq 0$, sendo então $s(n) = \sum_{k=b}^n x_k^2$ temos $\Delta s(n) = x_{n+1}^2 \geq 0$, logo $s(n)$ é não decrescente, se mostrarmos que a série é limitada superiormente teremos uma sequência que é limitada e monótona logo convergente. Temos que $s(n)$ é limitada superiormente da seguinte maneira

$$\sum_{k=b}^n x_k^2 \leq \left(\sum_{k=b}^n x_k \right) \left(\sum_{k=b}^n x_k \right)$$

logo a série é convergente.

1.4.27 Questão 43

Propriedade 120. Se $\sum a_k$, $a_k > 0$ converge então a série $\sum \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ também converge .

Demonstração. Usando a desigualdade de Cauchy

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$$

com $y_k = \frac{1}{k}$ e $x_k = \sqrt{a_k}$ tem-se

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_k}}{k}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)$$

e tem-se também

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_k}}{k} \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_k}}{k}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)$$

de onde por comparação segue o resultado .

Corolário 24. Se $\sum x_k^2$, converge então a série $\sum \frac{x_k}{k}$ também converge, basta usar o resultado anterior com $a_k = x_k^2$.

1.4.28 Questão 44

Propriedade 121. Seja (a_n) uma sequência não-crescente de números reais positivos. Se $\sum a_k$ converge então $\lim na_n = 0$.

Demonstração. Usaremos o critério de Cauchy . Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n+1 > n_0$ vale

$$\frac{2na_{2n}}{2} = na_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \varepsilon$$

logo $\lim 2na_{2n} = 0$. Agora mostramos que a subsequência dos ímpares também tende a zero. Vale $a_{2n+1} \leq a_{2n}$ daí $0 < (2n+1)a_{2n+1} \leq 2na_{2n} + a_{2n}$ por teorema do sanduíche segue o resultado. Como as subsequências pares e ímpares de (na_n) tendem a zero, então a sequência tende a zero.

Corolário 25. A série harmônica $\sum \frac{1}{k}$ diverge, pois $\left(\frac{1}{n}\right)$ é decrescente e vale $\lim \frac{n}{n} = 1 \neq 0$.

1.4.29 Questão 46

Propriedade 122 (Critério de condensação de Cauchy). Seja (x_n) uma sequência não-crescente de termos positivos então $\sum x_k$ converge $\Leftrightarrow \sum 2^k \cdot x_{2^k}$ converge.

Demonstração. Usaremos a identidade

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} f(k) = \sum_{k=1}^{2^n-1} f(k).$$

\Rightarrow).

Vamos provar que se $\sum x_k$ converge então $\sum 2^k \cdot x_{2^k}$ converge, usando a contrapositiva, que é equivalente logicamente, vamos mostrar que se $\sum 2^k \cdot x_{2^k}$ diverge então $\sum x_k$ diverge.

Como x_k é não-crescente então vale

$$2^s x_{2^{s+1}} = \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_{2^{s+1}} \leq \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_k$$

aplicando $2 \sum_{s=0}^{n-1}$ segue

$$\sum_{s=0}^{n-1} 2^{s+1} x_{2^{s+1}} \leq \sum_{k=1}^{2^n-1} x_k$$

logo se $\sum 2^s x_{2^s}$ diverge então $\sum x_k$ diverge.

\Leftarrow).

Vamos provar que se $\sum 2^k \cdot x_{2^k}$ converge então $\sum x_k$ converge, de maneira direta. Usando que

$$\sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_k \leq \sum_{k=2^s}^{2^{s+1}-1} x_{2^s} = 2^s x_{2^s}$$

aplicando $\sum_{s=0}^{n-1}$ segue que

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} x_k \leq \sum_{s=0}^{n-1} 2^s x_{2^s}$$

daí se $\sum 2^s x_{2^s}$ converge então $\sum x_k$ converge \square .

1.4.30 Questão 48

Propriedade 123. Sejam $a, b > 0 \in \mathbb{R}$, $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Então (x_n) e (y_n) convergem para o mesmo limite.

Demonstração. Sabemos que $y_n \geq x_n$ pela desigualdade das médias, então

$$x_n \cdot y_n \geq x_n^2 \Rightarrow \sqrt{x_n \cdot y_n} \geq x_n \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n,$$

então (x_n) é crescente. Da mesma maneira y_n é decrescente pois de $x_n \leq y_n$ tem-se $x_n + y_n \leq 2y_n$ daí $y_{n+1} = \frac{(x_n + y_n)}{2} \leq y_n$. Como vale $x_1 \leq x_n \leq y_n \leq y_1$ para todo n , concluímos que x_n e y_n são convergentes, por serem monótonas e limitadas.

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

tomando o limite

$$y = \frac{x + y}{2} \Rightarrow x = y.$$

Definição 14 (Média aritmético-geométrica). Dados dois números reais positivos a e b o valor comum para o qual convergem as sequências (x_n) e (y_n) definidas na propriedade anterior se chama média aritmético-geométrica de a e b .

1.5 Capítulo 5-Topologia da reta

1.5.1 Questão 1

Propriedade 124 (Caracterização de abertos por meio de sequências). Seja $A \subset \mathbb{R}$. A é aberto $\Leftrightarrow \forall (x_n)$ com $\lim x_n = a \in A$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$$

então A é aberto. Em outras palavras A é aberto $\Leftrightarrow \forall (x_n)$ com $\lim x_n = a \in A$ se verifica $x_n \in A$ para n suficientemente grande.

Demonstração. \Rightarrow).

Suponha A aberto, com $a \in A$ logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$ e por $\lim x_n = a$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ logo $x_n \in A$.

\Leftarrow). Vamos usar a contrapositiva que no caso diz: Se A não é aberto então existe (x_n) com $\lim x_n = a \in A$ e $x_n \notin A$. Lembrando que a contrapositiva de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$, (onde \neg é o símbolo para negação da proposição) sendo proposições equivalentes, as vezes é muito mais simples provar a contrapositiva do que a proposição diretamente.

Se A não é aberto, existe $a \in A$ tal que a não é ponto interior de A , assim $\forall \varepsilon > 0$, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (R \setminus A) \neq \emptyset$, então podemos tomar uma sequência (x_n) em $R \setminus A$ que converge para $a \in A$.

1.5.2 Questão 3

Propriedade 125. Se A é aberto e $x \in R$ então $x + A = \{x + a, a \in A\}$ é aberto .

Demonstração.[1-Critério de sequências] Seja (x_n) tal que $\lim x_n = x + a \in x + A$, vamos mostrar que $x_n \in x + A$ para todo n suficientemente grande, daí $x + A$ é aberto.

$x_n = x + y_n$ com $y_n \rightarrow a$, daí como A é aberto, segue que $y_n \in A$ para n suficientemente grande, o que implica $x_n = x + y_n \in x + A$ para os mesmos valores de n , logo $x + A$ é aberto.

Demonstração.[2]

- Primeiro observamos que $w \in x + A \Leftrightarrow w - x \in A$.

\Rightarrow). Se $w \in x + A$ então $w = x + a$ para algum $a \in A$, logo $w - x = a \in A$.

\Leftarrow). Se $w - x \in A$ existe $a \in A$ tal que $w - x = a$ logo $w = x + a$, daí segue $w \in x + A$.

- Tomamos $y \in x + A$, vamos mostrar que y é ponto interior . Sabemos que existe $a \in A$ tal que $y = x + a$ e a é ponto interior de A , logo existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$a - \varepsilon < t < a + \varepsilon \Rightarrow t \in A.$$

Seja w arbitrário tal que $y - \varepsilon < w < y + \varepsilon$, isto é, $w \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, substituindo $y = x + a$ temos $x + a - \varepsilon < w < x + a + \varepsilon$, subtraindo x de ambos lados

$$a - \varepsilon < w - x < a + \varepsilon,$$

daí $w - x \in A$ de onde segue $w \in x + A$, logo $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset x + A$.

Propriedade 126. Se $x \neq 0$ e A é aberto então $x.A = \{x.a, a \in A\}$ é aberto .

Demonstração. Utilizaremos o critério de seqüências. Seja (x_n) com $\lim x_n = x.a \in xA$, vamos mostrar que para n suficientemente grande $x_n \in xA$, de onde tem-se xA aberto. x_n é da forma xy_n onde $y_n \rightarrow a \in A$, como A é aberto segue que para n suficientemente grande vale $y_n \in A$, daí para os mesmos valores de n vale $x_n = xy_n \in xA$ como queríamos demonstrar.

1.6 Capítulo 8-Derivadas

1.6.1 Questão 1

Propriedade 127 (Teorema do sanduíche para derivadas). Sejam $f, g, h : X \rightarrow R$ tais que para todo $x \in X$ se tenha

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

. Se num ponto $a \in X \cap X'$ tem-se $f(a) = h(a)$ e existem $f'(a) = h'(a)$ então existe $g'(a) = f'(a)$.

Demonstração. Da identidade $f(a) = h(a)$ e da desigualdade $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, temos

$$f(a) \leq g(a) \leq h(a) = f(a), \Rightarrow g(a) = f(a) = h(a)$$

tem-se também

$$f(a+h) \leq g(a+h) \leq h(a+h), \Leftrightarrow f(a+h) - f(a) \leq g(a+h) - g(a) \leq h(a+h) - h(a)$$

pois $f(a) = h(a) = g(a)$, como as derivadas $f'(a)$ e $h'(a)$ existem, então também existem as derivadas laterais

$$f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a) = g'(a) = h'_+(a) = h'_-(a)$$

dividindo a última desigualdade por $h > 0$ e tomando o limite a direita segue

$$f'(a) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \leq f'(a)$$

e dividindo por $h < 0$ e tomando o limite a esquerda

$$f'(a) \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \geq f'(a)$$

assim

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) = g'(a) \quad \square.$$

1.6.2 Questão 2

Se f é derivável à direita no ponto a e $f(a)$ é máximo local então $f'_+(a) \leq 0$. Se fosse $f'_+(a) > 0$ existiria $\delta > 0$ tal que $a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) < f(x)$ então $f(a)$ não seria máximo local. Da mesma maneira se f é derivável à esquerda no ponto a então $f'_-(a) \geq 0$, pois se fosse $f'_-(a) < 0$ existiria $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x < a$ implicaria $f(a) < f(x)$ daí $f(a)$ não seria máximo local.

Exemplo 36. As derivadas laterais em um ponto de máximo podem existir sendo diferentes, como é o caso da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = -|x|$, que possui máximo no ponto $x = 0$ e as derivadas laterais são

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-|h|}{h} = -1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-|h|}{h} = 1 \end{aligned}$$

pois no primeiro caso $|h| = h$, pois $h \rightarrow 0^+$ e no segundo $|h| = -h$, pois $h \rightarrow 0^-$.

1.6.3 Questão 3

Propriedade 128. Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau ímpar e t um número par. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$D^t p(c) = 0.$$

Demonstração. Basta mostrar que a t -ésima derivada de um polinômio de grau ímpar é um polinômio de grau ímpar (ou função nula) se t é par, pois todo polinômio de grau ímpar possui solução real. Sejam, $n > t$ e

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

basta saber a t -ésima derivada de x^n o termo de mais alto grau, como vale $D^t x^n = t! \binom{n}{t} x^{n-t}$, n ímpar e t é par implicam que $n - t$ é ímpar, daí $D^t p(x)$ é polinômio de grau ímpar e existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $D^t p(c) = 0$. No caso de $t > n$ tem-se $D^t p(x) = 0 \forall x$.

Corolário 26. Em especial se $t = 2$, existe $c \in R$ tal que $p''(c) = 0$.

1.6.4 Questão 4

Propriedade 129. Se $f : A \rightarrow R$ é derivável em $a \in \text{int}(A)$ então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Demonstração. Como f é derivável em $a \in \text{int}A$ podemos escrever $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$ onde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, podemos tomar $f(a-h) = f(a) - f'(a)h + r(-h)$, subtraindo as duas expressões e dividindo por $2h$, tem-se

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a) + \underbrace{\frac{r(h) - r(-h)}{2h}}_{\rightarrow 0}$$

tomando o limite segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Exemplo 37. O limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ pode existir porém a função pode não ser derivável em a , considere por exemplo $f : R \rightarrow R$ dada por $f(x) = |x|$, no ponto $a = 0$ ela não é derivável porém

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |h|}{2h} = 0.$$

O limite pode existir porém a função mesmo não ser contínua no ponto, como a função definida como $f(x) = 0$ se $x \leq 0$, $f(x) = 1$ se $x > 0$. Ela não é contínua em 0, porém o limite citado existe, pois tomando o limite pela direita

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} = 0$$

e pela esquerda

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1}{2h} = 0.$$

1.6.5 Questão 5

Propriedade 130 (Caracterização de Carathéodory). f é derivável em $a \Leftrightarrow$ existe $g : A \rightarrow R$ contínua em a tal que $f(x) = f(a) + g(x)(x - a) \forall x \in A$.

Demonstração. \Leftarrow). Suponha que existe $g : A \rightarrow R$ contínua em a tal que $f(x) = f(a) + g(x)(x - a)$, daí para $x \neq a$ tem-se

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(x)$$

como existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ por g ser contínua em a , então existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = g(a)$, logo f é derivável.

\Rightarrow). Supondo que f seja derivável, então podemos escrever $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$, se $h \neq 0$, definimos $g(a + h) = f'(a) + \frac{r(h)}{h}$, se $h = 0$ definimos $g(a) = f'(a)$, então vale que

$$f(a + h) = f(a) + g(a + h).h$$

se $h \neq 0$ e se $h = 0$ também, além disso g é contínua em a , pois de $g(a + h) = f'(a) + \frac{r(h)}{h}$, tomando $\lim_{h \rightarrow 0}$, tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(a + h) = f'(a) = g(a).$$

Questão 8

Veremos um lema que ajudará na próximo resultado.

Lema 1. Sejam (a_n) e (b_n) sequências limitada tais que $a_n + b_n = 1 \forall n \in N$, (z_n) e (t_n) com o mesmo limite a , então $\lim a_n.z_n + b_n.t_n = a$.

Demonstração. Escrevemos

$$\begin{aligned} a_n.z_n + b_n.t_n &= a_n.z_n - a.a_n + a.\underbrace{a_n}_{=1-b_n} + b_n.t_n = a_n(z_n - a) + a(1 - b_n) + b_n.t_n = \\ &= a_n(z_n - a) + a - a.b_n + b_n.t_n = a_n(z_n - a) + a + b_n(t_n - a) \end{aligned}$$

daí

$$\lim a_n(z_n - a) + a + b_n(t_n - a) = a = \lim a_n.z_n + b_n.t_n$$

pois a_n e b_n são limitadas e $z_n - a, t_n - a$ tendem a zero.

Propriedade 131. Seja $f : A \rightarrow R$ derivável em a . Se $x_n < a < y_n \forall n$ e $\lim x_n = \lim y_n = a$ então $\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)$.

Demonstração. Começamos com uma manipulação algébrica

$$\begin{aligned} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} &= \frac{f(y_n) - f(a) - f(x_n) + f(a)}{y_n - x_n} = \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} - \frac{f(x_n) - f(a)}{y_n - x_n} = \\ &= \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \left(\frac{-x_n + a}{y_n - x_n} \right) \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right) = \\ &= \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \left(\frac{y_n - x_n - y_n + a}{y_n - x_n} \right) \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right) = \\ &= \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \left(1 - \frac{y_n - a}{y_n - x_n} \right) \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right) = \\ &= \underbrace{\left(\frac{y_n - a}{y_n - x_n} \right)}_{=t_n} \left(\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \right) + \left(1 - \frac{y_n - a}{y_n - x_n} \right) \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right) = \\ &= t_n \underbrace{\left(\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \right)}_{\rightarrow f'(a)} + (1 - t_n) \underbrace{\left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)}_{\rightarrow f'(a)} \end{aligned}$$

observamos que (t_n) é limitada pois $x_n < a \Rightarrow y_n - a < y_n - x_n \Rightarrow \frac{y_n - a}{y_n - x_n} < 1$, pois $y_n > x_n$ daí podemos dividir por $y_n - x_n$ sem alterar a desigualdade. Da mesma maneira vale $0 < y_n - a$ e daí $0 < \frac{y_n - a}{y_n - x_n} < 1$, logo (t_n) é limitada, o mesmo vale para $1 - t_n$, logo aplicamos o lema anterior que nos garante que

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lim t_n \underbrace{\left(\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \right)}_{\rightarrow f'(a)} + (1 - t_n) \underbrace{\left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)}_{\rightarrow f'(a)} = f'(a).$$

Questão 9

Questão 10

Exemplo 38. Seja $f : R \rightarrow R$ dada por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, tomamos $x_n = \frac{1}{n\pi}$ e $y_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, daí vale $\lim x_n = \lim y_n = 0$

$$f(x_n) = \frac{1}{(n\pi)^2} \operatorname{sen}(n\pi) = 0$$

$$f(y_n) = \frac{1}{(n\pi + \frac{\pi}{2})^2} \text{sen}(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{(-1)^n}{(n\pi + \frac{\pi}{2})^2}$$

pois $\text{sen}(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \underbrace{\text{sen}(n\pi)}_{=0} \cos(\frac{\pi}{2}) + \text{sen}(\frac{\pi}{2}) \cos(n\pi) = (-1)^n$, daí

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{f(y_n)}{y_n - x_n}$$

$$y_n - x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n\pi} = \frac{n\pi - n\pi - \frac{\pi}{2}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})(n\pi)} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})(n\pi)}$$

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})^2} \cdot 2n(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi + \frac{\pi}{2})} \cdot 2n = \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi + \frac{\pi}{2n})} \cdot 2$$

que não converge, pois para n par temos $\frac{-1}{(\pi + \frac{\pi}{2n})} \cdot 2 \rightarrow \frac{-1}{\pi} \cdot 2$ e para n ímpar tem-se $\frac{1}{(\pi + \frac{\pi}{2n})} \cdot 2 \rightarrow \frac{1}{\pi} \cdot 2$ duas subsequências convergindo para valores distintos, logo a sequência não converge.

Tal função é derivável no 0, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \text{sen}(\frac{1}{x}) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen}(\frac{1}{x}) = 0$$

em outros pontos distintos de 0 a função também é derivável por ser produto de funções deriváveis.

Portanto tal função é derivável no ponto $x = 0$ porém o limite $\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$ não converge quando $\lim x_n = \lim y_n = 0$. A função derivada de f satisfaz

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \text{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

que não é contínua em $x = 0$, daí a função f é derivável em toda a reta porém possui derivada descontínua.

Questão 13

Propriedade 132. Se $f : I \rightarrow R$ satisfaz $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^\alpha$ com $\alpha > 1, c > 0, x, y \in R$ arbitrários então f é constante.

Demonstração. De $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^\alpha$ tomamos $x = a \in R$ fixo porém arbitrário

$$0 \leq \left| \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \right| \leq c|y - a|^{\alpha-1}$$

com $\alpha - 1 > 0$, aplicamos o limite de ambos os lados e pelo teorema do sanduíche segue que $f'(a) = 0$, logo f é constante.

Questão 15

Propriedade 133. Se f é derivável em I e f' é contínua em a então $\forall x_n \neq y_n$ com $\lim x_n = \lim y_n = a$ então

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

Demonstração. Pelo *TVM*, para cada y_n, x_n existe z_n entre eles tal que

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(z_n)$$

daí $\lim z_n = a$ por sanduíche e $\lim f'(z_n) = f'(a)$ por continuidade, logo

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lim f'(z_n) = f'(a).$$