MAT0206/MAP0216 - Análise Real - IME - 2007
Prof. Gláucio Terra

6^a Lista de Exercícios

Para entregar: exercícios 2, 7, 8, 9, 11.

1-) Exercícios dos capítulos 10 e 11 do Elonzinho.

2-) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\int_a^b |f| = 0$;
(ii) Se f é contínua em $c \in [a, b]$, então $f(c) = 0$;
(iii) $X \doteq \{x \in [a, b] \mid f(x) \neq 0\}$ tem interior vazio.

3-) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f não é identicamente nula, então $\int_a^b |f| > 0$.

4-) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então:

(i) $\underline{\int_a^b} f = \sup\{\int_a^b \phi \mid \phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ função escada $, \phi \leqslant f\}$;
(ii) $\overline{\int_a^b} f = \inf\{\int_a^b \phi \mid \phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ função escada $, \phi \geqslant f\}$.

Observação: Disto decorre que f é Riemann-integrável se, e somente se, $\sup\{\int_a^b \phi \mid \phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ função escada $, \phi \leqslant f\} = \inf\{\int_a^b \phi \mid \phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ função escada $, \phi \geqslant f\}$, i.e. poderíamos ter tomado esta última igualdade como definição de *função Riemann-integrável*. Uma função *Lebesgue-integrável* no intervalo $[a, b]$ pode ser definida de maneira análoga, tomando-se *funções simples* (a serem definidas no curso de "Análise I") no lugar de *funções escada*. Toda função *escada* é uma função *simples* (mas não vale a recíproca); disto decorre que, se f é Riemann-integrável, então f é Lebesgue-integrável, e as integrais de Riemann e de Lebesgue de f em $[a, b]$ coincidem.

5-) Todo conjunto de medida nula tem interior vazio.

6-) São equivalentes as seguintes afirmações, dado $X \subset \mathbb{R}$:

(i) X tem medida nula;
(ii) para todo $\epsilon > 0$, existe uma família $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de intervalos (não necessariamente abertos) tal que $X \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \epsilon$.

Noutras palavras, na definição de *conjunto de medida nula* poderíamos ter usado intervalos quaisquer, não necessariamente abertos.

7-) Dadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integráveis, seja $X \doteq \{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\}$. Se X tem medida nula, então $\int_a^b f = \int_a^b g$.

8-) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é lipschitziana (em particular, se f é de classe C^1) e $X \subset [a, b]$ tem medida nula, então $f(X)$ tem medida nula.

9-) Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e não-negativa. Se $\int_a^b g = 0$, então, para toda $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável, tem-se $\int_a^b (f \cdot g) = 0$.

10-) Se $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f : [a, b] \to [c, d]$ é integrável, então $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

11-) Se $f : [a, b] \to [c, d]$ é de classe C^1 com $\big(\forall x \in [a, b]\big)\, f'(x) \neq 0$, e $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ é integrável, então $g \circ f$ é integrável.