Conjuntos Finitos e Infinitos

Gláucio Terra

glaucio@ime.usp.br

Departamento de Matemática

IME - USP

Axiomas de Peano

Axiomas de Peano

(N1) $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva e o complementar da sua imagem contém apenas um elemento, denotado pelo símbolo “1”.

Axiomas de Peano

(N1) $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva e o complementar da sua imagem contém apenas um elemento, denotado pelo símbolo “1”.

(N2) Seja $S \subset \mathbb{N}$; então $S = \mathbb{N}$ se, e somente se:

1. $1 \in S$;
2. $n \in S \Rightarrow s(n) \in S$.

1o. Princípio da Indução

TEOREMA Seja $P : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Se (i) $P(1) = 1$ e (ii) $P(n) = 1 \Rightarrow P\big(s(n)\big) = 1$, então $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = 1$.

Princípio da Definição por Recorrência

Seja X um conjunto. Queremos definir uma função $f : \mathbb{N} \to X$. Suponha que seja dado o valor $f(1)$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, uma regra para se definir $f\big(s(n)\big)$ supondo-se definido $f(n)$. Então existe uma única $f : \mathbb{N} \to X$ nestas condições.

Soma de Números Naturais

Define-se indutivamente, $\forall n \in \mathbb{N}$:

Soma de Números Naturais

Define-se indutivamente, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $n + 1 \doteq s(n)$;

Soma de Números Naturais

Define-se indutivamente, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $n + 1 \doteq s(n)$;
- $n + s(m) \doteq s(m + n)$.

Produto de Números Naturais

Define-se indutivamente, $\forall n \in \mathbb{N}$:

Produto de Números Naturais

Define-se indutivamente, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $n \cdot 1 \doteq n$;

Produto de Números Naturais

Define-se indutivamente, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $n \cdot 1 \doteq n$;
- $n \cdot s(m) \doteq n \cdot m + n$.

Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

DEFINIÇÃO Sejam $n, m \in \mathbb{N}$.

$$m < n \quad \cdot \equiv \cdot \quad \exists p \in \mathbb{N} / n = m + p$$

$$m \leqslant n \quad \cdot \equiv \cdot \quad m = n \text{ ou } m < n$$

Teorema da Boa Ordenação

TEOREMA Seja $A \subset \mathbb{N}$ não-vazio. Então A possui um menor elemento.

2o. Princípio da Indução

TEOREMA Seja $P : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Suponha que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(k < n \wedge P(k) = 1) \Rightarrow P(n) = 1$. Então $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = 1$.

Princípio da Definição por Recorrência

Seja X um conjunto. Queremos definir uma função $f : \mathbb{N} \to X$. Suponha que seja dado o valor $f(1)$ e uma regra para se definir $f(n)$ supondo-se definidos os valores $f(m)$ para todo $m < n$. Então existe uma única $f : \mathbb{N} \to X$ nestas condições.

Conjuntos Finitos

DEFINIÇÃO Diz-se que um conjunto X é finito se $X = \emptyset$ ou se existir $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to X$. Neste caso, diz-se que X tem n elementos.

Conjuntos Finitos

TEOREMA Seja $A \subset I_n$. Suponha que existe $f : A \to I_n$ bijeção. Então $A = I_n$.

Conjuntos Finitos

TEOREMA Seja $A \subset I_n$. Suponha que existe $f : A \to I_n$ bijeção. Então $A = I_n$.

COROLÁRIO Seja A um conjunto. Se existem bijeções $f : A \to I_n$ e $f : A \to I_m$, então $m = n$.

Conjuntos Finitos

COROLÁRIO Sejam A e B conjuntos finitos, ambos com n elementos. Seja $f : A \longrightarrow B$. São equivalentes:

1. f é injetiva;
2. f é sobre;
3. f é bijetiva.

Conjuntos Finitos

COROLÁRIO Sejam A e B conjuntos finitos, ambos com n elementos. Seja $f : A \to B$. São equivalentes:

1. f é injetiva;
2. f é sobre;
3. f é bijetiva.

COROLÁRIO Seja A um conjunto. Se A é finito, não existe bijeção entre A e uma parte própria de A.

Conjuntos Finitos

TEOREMA Sejam X um conjunto finito com n elementos e $A \subset X$. Então A é finito e tem $m \leqslant n$ elementos.

Conjuntos Finitos

TEOREMA Sejam X um conjunto finito com n elementos e $A \subset X$. Então A é finito e tem $m \leqslant n$ elementos.

COROLÁRIO Seja $f : X \to Y$. Tem-se:

1. Se Y é finito e f é injetiva, então X é finito.
2. Se X é finito e f é sobre, então Y é finito.

Conjuntos Finitos

TEOREMA Sejam X um conjunto finito com n elementos e $A \subset X$. Então A é finito e tem $m \leqslant n$ elementos.

COROLÁRIO Seja $f : X \to Y$. Tem-se:

1. Se Y é finito e f é injetiva, então X é finito.
2. Se X é finito e f é sobre, então Y é finito.

COROLÁRIO $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, for *limitado*, i.e. se existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \in X) n \leqslant p$.

Conjuntos Finitos

TEOREMA Sejam X um conjunto finito com n elementos e $A \subset X$. Então A é finito e tem $m \leqslant n$ elementos.

COROLÁRIO Seja $f : X \to Y$. Tem-se:

1. Se Y é finito e f é injetiva, então X é finito.
2. Se X é finito e f é sobre, então Y é finito.

COROLÁRIO $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, for *limitado*, i.e. se existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \in X) n \leqslant p$.

COROLÁRIO $\mathbb{N}$ não é finito.

Conjuntos Enumeráveis e não-Enumeráveis

DEFINIÇÃO Um conjunto X se diz *infinito* se não for finito; X se diz *enumerável* se for finito ou se existir uma bijeção $\mathbb{N} \to X$.

Conjuntos Enumeráveis e não-Enumeráveis

TEOREMA Seja X um conjunto. São equivalentes:

1. X é infinito;
2. existe $f : \mathbb{N} \to X$ injetiva;
3. existe uma bijeção entre X e uma parte própria de X.

Conjuntos Enumeráveis e não-Enumeráveis

TEOREMA Seja $X \subset \mathbb{N}$. Então X é enumerável.

Conjuntos Enumeráveis e não-Enumeráveis

TEOREMA Seja $X \subset \mathbb{N}$. Então X é enumerável.

COROLÁRIO Seja $f : X \to Y$. Tem-se:

1. Se Y é enumerável e f injetiva, então X é enumerável.
2. Se X é enumerável e f é sobre, então Y é enumerável.

Conjuntos Enumeráveis e não-Enumeráveis

TEOREMA $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Conjuntos Enumeráveis e não-Enumeráveis

TEOREMA $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

COROLÁRIO O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Conjuntos Enumeráveis e não-Enumeráveis

TEOREMA $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

COROLÁRIO O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

COROLÁRIO Seja $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável de conjuntos enumeráveis. Então $\cup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ é enumerável.