MAT0206/MAP0216 - Análise Real - IME - 2007
Prof. Gláucio Terra

5^a Lista de Exercícios

PARA ENTREGAR: exercícios 2, 4, 12, 13, 21 e 22.

OBS.: Regras para ganhar a nota extra referente aos exercícios marcados com "BÔNUS": (1) a resolução deve redigida de forma clara e sem erros, e não há notas intermediárias; (2) a nota máxima a ser dada como bônus é 1,0 ponto na média do semestre; (3) os exercícios devem ser entregues no prazo para entrega da lista.

1-) Exercícios dos capítulos 8 e 9 do Elonzinho.

2-) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se, para cada $x \in I$ (exceto, possivelmente, na extremidade superior de I, caso a mesma esteja em I), existir $f'_+(x)$ e for > 0, então f é estritamente crescente.

3-) Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in X \cap X'$. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são seqüências em X tais que $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, x_n < a < y_n$, $x_n \to a$ e $y_n \to a$, então $\dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \to f'(a)$.

4-) Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Dado $a \in I$, são equivalentes:

(a) f' é contínua em a;

(b) $\forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências em I tais que $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, x_n \neq y_n$, $x_n \to a$ e $y_n \to a$, tem-se $\dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \to f'(a)$.

5-) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Um número real $c \in I$ diz-se um *ponto crítico* de f se $f'(c) = 0$. Se $c \in I$ for um ponto crítico de f, diz-se que o mesmo é *não-degenerado* se f é duas vezes derivável em c e $f''(c) \neq 0$. Mostre que:

(a) Se f é de classe C^1, o conjunto dos pontos críticos de f é fechado em I (vide definição na lista 4 caso não se recorde);

(b) Os pontos de máximos e mínimos locais de f são críticos. Um ponto crítico não-degenerado deve ser de máximo local ou de mínimo local.

(c) Se $c \in I$ é um ponto crítico não-degenerado de f, então existe $\delta > 0$ tal que f não tem outros pontos críticos no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. Ou seja, todo ponto crítico não-degenerado é um ponto crítico isolado.

(d) Se todos os pontos críticos de f são não-degenerados, então o conjunto dos pontos críticos de f é enumerável, e em qualquer intervalo $[a, b] \subset I$ há apenas um número finito de tais pontos.

6-) Se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é derivável e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$, então, para cada $c > 0$, $\lim_{x\to+\infty}[f(x+c)-f(x)] = c \cdot L$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = L$.

7-) Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável. Se f'' é limitada e existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, mostre que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. BÔNUS: VALE 0,25 PONTOS NA MÉDIA DO SEMESTRE.

8-) (Teorema de Cauchy) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis em (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$.

9-) (1a. Regra de L'Hôpital) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$, $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que existem e são nulos os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$. Suponha que g' não se anule em $I \setminus \{a\}$ e que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, onde $L \in \mathbb{R}$ ou $L = \pm\infty$. Então g não se anula em $I \setminus \{a\}$ e $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
Sugestão: Use a questão anterior.

10-) (2a. Regra de L'Hôpital) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $a \in I$, $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que $\lim_{x\to a}|f(x)| = +\infty$ e $\lim_{x\to a}|g(x)| = +\infty$. Suponha que g' não se anule em $I \setminus \{a\}$ e que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, onde $L \in \mathbb{R}$ ou $L = \pm\infty$. Então $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
Sugestão: Use a questão **8-)**.

11-) Dado $c > 0$, uma função derivável $f : I \to \mathbb{R}$ no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Lipschitz $\big(\forall\, x, y \in I\big)\, |f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|$ se, e somente se, $\big(\forall\, x \in I\big)\, |f'(x)| \leqslant c$.

12-) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$ (limitado ou não). Dado $c \in [0, 1)$, suponha que $\big(\forall\, x \in I\big)\, |f'(x)| \leqslant c$, e que $f(I) \subset I$. Mostre que f tem um único ponto fixo a em I (i.e. existe um único $a \in I$ tal que $f(a) = a$) e que, para todo $x_1 \in I$, a seqüência definida indutivamente por $\big(\forall\, n \in \mathbb{N}\big)\, x_{n+1} = f(x_n)$ é tal que $x_n \to a$.
Sugestão: Use a questão anterior e a questão 10 lista 2.

13-) Sejam $p \in \mathbb{N}$ e $c \in [0, 1)$. Dada $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$, suponha que $f(I) \subset I$ e que $g \doteq f^p \doteq f \circ f \circ \overset{p \text{ fatores}}{\cdots} \circ f$ satisfaça $\big(\forall\, x \in I\big)\, |g'(x)| \leqslant c$. Prove que f tem um único ponto fixo $a \in I$ e que, para todo $x \in I$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = a$.

Exemplo: A função cosseno ainda será definida formalmente no curso. Neste exemplo, assume-se que a mesma já tenha sido definida num curso de Cálculo. A função $f \doteq \cos : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ não cumpre a condição $\big(\forall\, x \in [-\pi, \pi]\big)\, |f'(x)| \leqslant c < 1$, mas $f^2 = f \circ f$ cumpre.

14-) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, com derivada limitada, prove que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = x + c \cdot f(x)$ é um *difeomorfismo* (i.e. uma bijeção derivável com inversa derivável).

15-) Sejam $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $c \in [0, 1)$ e $f : [a - \delta, a + \delta] \to \mathbb{R}$ derivável, com $\big(\forall\, x\big)\, |f'(x)| \leqslant c$. Se $|f(a) - a| \leqslant (1 - c)\delta$, então f tem um único ponto fixo em $[a - \delta, a + \delta]$.

16-) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Se $\lim_{x\to a^+} f'(x) = +\infty$, então $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$.

17-) (a) Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são de classe C^n no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então $f \cdot g$ é de classe C^n.

(b) Sejam $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos, $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ de classe C^n tais que $f(I) \subset J$. Então $g \circ f$ é de classe C^n.

(c) (d) Se $f : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^n no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e f' não se anula em I, então a inversa $g : J \doteq f(I) \to \mathbb{R}$ de f é de classe C^n.

18-) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável em $a \in \overset{\circ}{I}$. Mostre que:

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}\,.$$

19-) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável em $a \in \overset{\circ}{I}$. Mostre que:

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}\,.$$

20-) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Se f se anula, juntamente com todas as suas derivadas, num ponto $a \in \mathbb{R}$, então, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escrever $f(x) = (x-a)^k\,\phi(x)$, onde ϕ é de classe C^∞.

21-) Sejam f e g analíticas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Se existe $a \in I$ tal que f e g coincidem, juntamente com todas as suas derivadas, no ponto a, então $\big(\forall\, x \in I\big)\; f(x) = g(x)$. Mostre que isto seria falso se supuséssemos apenas f e g de classe C^∞.

22-) Dadas f e g analíticas no intervalo aberto I, seja $X \subset I$ um conjunto que possui um ponto de acumulação em I. Se $\big(\forall\, x \in X\big)\; f(x) = g(x)$, então f coincide com g em I. Em particular, se f se anula em X, então f se anula em I.

23-) Seja $I = (a-\delta, a+\delta)$. Dada $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, suponha que exista uma seqüência $(a_n)_{n \geqslant 0}$ de números reais tal que $\big(\forall\, x \in I\big)\; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Prove que $\sum a_n (x-a)^n$ é a série de Taylor de f centrada em a, i.e. $\big(\forall\, n\big)\; a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.