Expressões e Funções Booleanas

Última revisão em 15 de abril de 2016

Representação de números em diferentes bases, representação binária de números, funções lógicas ou binárias, tabelas-verdade, expressões lógicas usando as operações E, OU e NÃO, expressões na forma SOP e POS e sua minimização, mapas de Karnaugh, algoritmo de Quine-McCluskey, circuitos lógicos, circuito somador, multiplexadores e demultiplexadores, codificadores e decodificadores são conceitos que já vimos construtivamente ou por meio de exemplos. Todos esses conceitos são importantes para entender a construção e funcionamento dos circuitos lógicos, que são os modelos implementados em circuitos digitais.

Para entender por que essas funções lógicas e, portanto, os circuitos lógicos funcionam da forma que funcionam, ou por que manipular as expressões lógicas da forma que manipulamos no processo de minimização de expressões resulta em funções equivalentes, é interessante olhar o modelo formal que dá sustentação às funções lógicas. Esse modelo formal é a Álgebra Booleana, cuja definição axiomática é reproduzida abaixo.

Definição axiomática de álgebra booleana: Dizemos que uma sêxtupla $\langle A, +, \cdot, \bar{}, 0, 1\rangle$ na qual A é um conjunto, $+$ e $\cdot$ são operações binárias sobre A, $\bar{}$ é uma operação unária em A e 0 e 1 são dois elementos distintos em A é uma **álgebra booleana** se os seguintes axiomas são satisfeitos:

A1. As operações $+$ e $\cdot$ são **comutativas**, ou seja, para todo x e y em A,

$$x + y = y + x \quad \text{e} \quad x \cdot y = y \cdot x$$

A2. Cada operação é **distributiva** sobre a outra, isto é, para todo x, y e z em A,

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \text{e} \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

A3. Os elementos 0 e 1 são os **elementos identidades**, ou seja, para todo $x \in A$,

$$x + 0 = x \quad \text{e} \quad x \cdot 1 = x$$

A4. Todo elemento $x \in A$ possui um **complemento**, ou seja, existe um elemento $\overline{x}$ tal que

$$x + \overline{x} = 1 \quad \text{e} \quad x \cdot \overline{x} = 0\,.$$

Propriedades de álgebras boolenas: além das propriedades listadas nos 4 axiomas de definição, algumas das principais propriedades (ou leis) da álgebra booleana estão listadas a seguir.

Unicidade do 0 e 1	os elementos 0 e 1 são únicos
Idempotência	$x + x = x$ $x\,x = x$
Identidade	$x + 1 = 1$ $x\,0 = 0$
Complemento de 0 e 1	$\overline{1} = 0$ $\overline{0} = 1$
Absorção	$x + x\,y = x$ $x\,(x + y) = x$
Unicidade de $\overline{x}$	o inverso de qualquer elemento é único
Involução	$\overline{\overline{x}} = x$
Associatividade	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$
Teorema de DeMorgan	$\overline{(x + y)} = \overline{x}\,\overline{y}$ $\overline{x\,y} = \overline{x} + \overline{y}$

No restante deste documento iremos apresentar definições, conceitos e resultados relativos a expressões e funções booleanas. Neste texto, o termo **função booleana** é mais geral do que função lógica (funções do tipo $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$); no entanto, muitos textos utilizam o termo função booleana como sinônimo de função lógica (eles são sinônimos se considerarmos que a álgebra booleana em questão é a álgebra $\langle\{0,1\}, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$).

1 Expressões Booleanas

Variáveis e literais: Dada uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$, uma **variável booleana** é uma variável que toma valores em A.

O **complemento** de uma variável booleana x, denotado $\overline{x}$, é uma variável booleana tal que $\overline{x} = \overline{a}$ sempre que $x = a$ para qualquer $a \in A$.

Um **literal** é uma variável booleana x ou o seu complemento $\overline{x}$.

Expressões booleanas: Dada uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$, expressões booleanas em n váriáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são definidas pelas seguintes regras:

- os elementos em A são expressões booleanas;
- as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são expressões booleanas;
- se x e y são expressões booleanas então também são as expressões $(x)+(y)$, $(x)\cdot(y)$ e $\overline{(x)}$;
- uma expressão é booleana se e somente se pode ser obtida aplicando-se as três regras um número finito de vezes.

Observe que uma expressão booleana em n váriáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ não necessariamente precisa conter todas as n variáveis. Parênteses podem ser removidos da expressão desde que não introduzam ambiguidades. Por exemplo, a expressão $(x_1)+(x_2)$ pode ser escrita $x_1 + x_2$.

Se uma expressão pode ser derivada a partir de outra aplicando-se um número finito de vezes as regras (leis/propriedades) da álgebra booleana, então elas são ditas **equivalentes**. O valor de expressões equivalentes, para cada atribuição de valores às variáveis booleanas, é o mesmo.

Cada expressão booleana define uma função; expressões que definem uma mesma função são equivalentes.

2 Funções booleanas

Dada uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$, uma expressão booleana em n variáveis x_1, x_2, …, x_n define uma **função booleana** $f : A^n \to A$. O valor da função f para um elemento $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$ é calculado substituindo-se cada ocorrência de x_i na expressão por a_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, e calculando-se o valor da expressão.

Note, porém, que nem todas as funções do tipo $f : A^n \to A$ podem ser definidas por uma expressão booleana; **funções booleanas** são aquelas que podem ser definidas por uma expressão booleana.

Seja $A(n)$ o conjunto de todas as funções booleanas em A com n variáveis e seja $\leq$ uma relação definida em $A(n)$ da seguinte forma:

$$f \preceq g \Longleftrightarrow f(\mathbf{a}) \leq g(\mathbf{a}),\ \forall \mathbf{a} \in A^n\,. \tag{1}$$

Seja $(f \cdot g)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a})$, $(f+g)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a})$, e $\overline{f}(\mathbf{a}) = \overline{f(\mathbf{a})}$, $\forall \mathbf{a} \in A^n$. Fazendo $\mathbf{0}(\mathbf{a}) = 0$ e $\mathbf{1}(\mathbf{a}) = 1$ para todo $\mathbf{a} \in A^n$, o conjunto $(A(n), +, \cdot, ^-, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ também é uma álgebra booleana.

Exemplo: Seja $B = \{0, 1\}$. A função $f : B^2 \to B$, definida pela expressão $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ pode ser representada pela tabela-verdade a seguir, à esquerda. Note que ela é igual a tabela-verdade da expressão $x_1 + \overline{x}_1 x_2$, à direita. Logo, as expressões $x_1 + x_2$ e $x_1 + \overline{x}_1 x_2$ são equivalentes (ou seja, definem uma mesma função).

x_1	x_2	$x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1\, x_2$	$x_1 + \overline{x}_1\, x_2$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

Há $2^{(2^2)} = 16$ funções de 2 variáveis para $\langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ (ver abaixo). Como veremos mais adiante, todas elas são booleanas, no sentido de que para cada uma delas há uma expressão que a define. No contexto de circuitos lógicos, esse fato corresponde à garantia de que qualquer função lógica pode ser calculada usando-se dispositivos que implementam as operações E, OU e NÃO.

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Exercício 1: Supondo n e A finitos, quantas funções da forma $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ existem? E da forma $f : A^n \to A$ (não necessariamente booleanas) ?

Exercício 2: Dada a álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ com $A = \{0, 1, a, \overline{a}\}$, construa a tabela-verdade da função correspondente à expressão $\overline{a}x + a\overline{y}$.

3 Formas Canônicas

Vimos que uma mesma função pode ser expressa por diversas expressões. Formas canônicas são interessantes uma vez que, se existirem, garantem que qualquer elemento de interesse (no caso uma função booleana) pode ser expresso unicamente nessa forma.

Teorema de expansão de Boole: Seja $f : A^n \to A$ uma função booleana. Então, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x}_1 \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) + x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n)\,. \qquad (2)$$

Dem.: veja, por exemplo, página 408 de R. Garnier and J. Taylor, *Discrete Mathematics for New Technology*, Adam Hilger, 1992. □

Colorário (dual do teorema anterior): Seja $f : A^n \to A$ uma função booleana. Então, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [\overline{x}_1 + f(1, x_2, \ldots, x_n)] \cdot [x_1 + f(0, x_2, \ldots, x_n)] \,. \tag{3}$$

Exemplo: Seja $A = \{0, 1, a, \overline{a}\}$. A função f definida pela tabela a seguir é uma função booleana?

x	$f(x)$
0	a
1	1
a	$\overline{a}$
$\overline{a}$	1

De acordo com o teorema de expansão de Boole, sabemos que se f é uma função booleana podemos escrever $f(x) = \overline{x}f(0) + xf(1) = \overline{x}a + x\,1 = \overline{x}a + x$. Em particular, para $x = a$ teríamos então $f(a) = \overline{a}\,a + a = 0\,a + a = a$. Porém, na definição de f temos $f(a) = \overline{a}$. Logo, f não é uma função booleana. □

Exercício 3: Deduza uma expressão booleana correspondente à função definida pela tabela-verdade do exercício 2 (a partir da tabela-verdade e não da expressão dada!).

Exercício 4: Seja $A = \{0, 1, a, \overline{a}\}$. Liste todas as funções booleanas em A de uma variável.

3.1 Soma de produtos

Produto: Um produto é uma expressão booleana que é ou uma literal, ou uma conjunção[1] de duas ou mais literais, duas das quais nunca envolvem a mesma variável. Em outras palavras, um produto é uma conjunção em que uma variável aparece no máximo uma vez (na forma barrada ou não barrada). Produtos podem ser expressos como $p = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i$, $\sigma_i \in \{x_i, \overline{x}_i, '\,'\}$, com $'\,'$ denotando o caractere vazio. Por exemplo, para $n = 4$, x_1x_3 e $x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$ são exemplos de produtos. As expressões $x_1\,x_2\,\overline{x}_1$ e $x_1\,x_1$ não são produtos.

Mintermos: Mintermo (ou **produto canônico**) em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma expressão booleana formada pelo produto de cada uma das n variáveis ou dos respectivos

[1] Conjunção é outro nome para a operação $\cdot$ (E).

complementos (mas não ambas). Ou seja, consiste do produto de n literais, cada um correspondendo a uma variável (se x_i está presente no produto, então $\overline{x}_i$ não está, e vice-versa).

Exemplo: Supondo 3 variáveis x_1, x_2 e x_3, então $x_1\overline{x}_2x_3$ e $x_1x_2x_3$ são exemplos de mintermos.

Soma de produtos: Dizemos que uma expressão está na forma **soma de produtos** (SOP) se ela é um produto ou se é uma disjunção de dois ou mais produtos e se nenhum par de produtos p e p' é tal que $p \preceq p'$ (a relação $\preceq$ é a definida pela equivalência 1).

As expressões xy, $x+yz$ e $xyw+\overline{x}z+yz$ estão na forma SOP, enquanto que $x(y+z)$ e $xy+yzx$ não estão.

Soma canônica de produtos (SOP canônica): Dizemos que uma expressão está na forma **soma canônica de produtos** (SOP canônica) se ela é um mintermo ou se é uma disjunção de dois ou mais mintermos distintos.

3.2 Soma canônica de produtos ou SOP canônica

Considere uma função booleana f de 3 variáveis. Ao se aplicar o teorema de expansão de Boole obtemos a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \overline{x}\, f(0,y,z) + x\, f(1,y,z) \\
&= \overline{x}\, [\overline{y}\, f(0,0,z) + y\, f(0,1,z)] + x\, [\overline{y}\, f(1,0,z) + y\, f(1,1,z)] \\
&= \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\, f(0,0,0) + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\, f(0,0,1) + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\, f(0,1,0) + \overline{x}_1x_2x_3\, f(0,1,1) + \\
&\quad\; x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\, f(1,0,0) + x_1\overline{x}_2x_3\, f(1,0,1) + x_1x_2\overline{x}_3\, f(1,1,0) + x_1x_2x_3\, f(1,1,1)
\end{aligned}
$$

Este processo pode ser generalizado para um número de variáveis n qualquer. A seguir mostramos que qualquer função booleana pode ser expressa como soma (disjunção) de mintermos (SOP canônica). Antes, porém, algumas notações são convenientes.

Notação: Denote x por x^1 e $\overline{x}$ por x^0. Assim, qualquer mintermo pode ser expresso por $m_{e_1,e_2,\ldots,e_n} = x_1^{e_1}\, x_2^{e_2}\, \ldots\, x_n^{e_n}$, com $e_i \in \{0,1\}$. Por exemplo, se considerarmos $n=3$, então $m_{001} = x_1^0\, x_2^0\, x_3^1 = \overline{x}_1\, \overline{x}_2\, x_3$.

Como o conjunto de todas as sequências de n bits corresponde à representação binária dos números entre 0 e 2^n-1, o mintermo pode ser caracterizado por um índice decimal. A tabela 1 apresenta todos os mintermos em três variáveis e a notação com índice decimal associada a cada um deles.

$e_1\, e_2\, e_3$	mintermo	notação
0 0 0	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	m_0
0 0 1	$\overline{x}_1\overline{x}_2 x_3$	m_1
0 1 0	$\overline{x}_1 x_2\overline{x}_3$	m_2
0 1 1	$\overline{x}_1 x_2 x_3$	m_3
1 0 0	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	m_4
1 0 1	$x_1\overline{x}_2 x_3$	m_5
1 1 0	$x_1 x_2\overline{x}_3$	m_6
1 1 1	$x_1 x_2 x_3$	m_7

Tabela 1: Tabela de mintermos em 3 variáveis.

Teorema: Há 2^n mintermos em n variáveis e não há dois mintermos equivalentes.

PROVA: Como um mintermo consiste de n literais, cada um podendo ser uma variável x ou o seu complemento $\overline{x}$, há no total 2^n possíveis formas de se combinar as literais.

Para mostrar que não há dois mintermos equivalentes, seja $m_{e_1,e_2,\ldots,e_n} = x_1^{e_1}\, x_2^{e_2}\, \ldots\, x_n^{e_n}$ um mintermo e considere

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se } e_i = 1, \\ 0, & \text{se } e_i = 0. \end{cases}$$

Então, $m_{e_1,e_2,\ldots,e_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, pois pela forma como $x_i^{e_i}, i = 1, \ldots, n$ foram definidas, todos os literais no mintermo m tem valor 1. Isto mostra que há uma atribuição de valores às variáveis x_1, x_2, $\ldots$, x_n que torna 1 o valor de m.

Qualquer outro mintermo m' tem pelo menos um literal x^{e_j} que é complemento do correspondente literal em m. Portanto, substituindo os valores acima das n variáveis em m', haverá pelo menos um elemento zero no produto (devido à literal x^{e_j}). Isto quer dizer que m' vale zero para esses valores de x_1, x_2, $\ldots$, x_n em particular. Portanto, para quaisquer dois mintermos, há sempre uma atribuição de valores às variáveis x_1, x_2, $\ldots$, x_n que torna um deles 1 e o outro 0. $\square$

Teorema: Qualquer função booleana que não seja identicamente 0 (nulo) pode ser expressa unicamente na forma **soma canônica de produtos** (soma de mintermos ou SOP canônica). Mais precisamente, se f é uma função booleana em n variáveis então sua forma SOP canônica é dada por

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(e_1,e_2,\ldots,e_n)\in\{0,1\}^n} f(e_1, e_2, \ldots, e_n)\, x_1^{e_1}\, x_2^{e_2}\, \ldots\, x_n^{e_n}$$

Dem.: Esta igualdade decorre do teorema de expansão de Boole, e a unicidade de representação está relacionada ao fato de mintermos serem distintos dois a dois. Uma demonstração completa pode ser encontrada em R. Garnier and J. Taylor, *Discrete Mathematics for New Technology*, Adam Hilger, 1992, página 408. $\square$

Teorema: Uma função $f : A^n \to A$ é booleana se e somente se ela pode ser expressa na forma soma canônica de produtos, ou seja, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(e_1,e_2,\ldots,e_n)\in\{0,1\}^n} f(e_1, e_2, \ldots, e_n)\, x_1^{e_1}\, x_2^{e_2}\, \ldots\, x_n^{e_n} \tag{4}$$

Dem.: Se f é uma função booleana, então ela pode ser expressa na forma soma canônica de produtos conforme teorema anterior. Por outro lado, suponha que f pode ser expressa na forma da equação 4. Claramente, a expressão é uma expressão booleana e portanto f é uma função booleana. □

Observe que, para uma dada função booleana, a representação na forma soma canônica de produtos é única, a menos da ordem dos mintermos. Essa unicidade pode ser mostrada de forma similar a demonstração de que não há mintermos equivalentes, vista anteriormente. Por outro lado, podem existir duas funções distintas cujas respectivas formas soma canônica de produtos é idêntica? A resposta é não, pois uma expressão define uma única função.

Exemplos:

a) Expressar a função $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ na forma SOP canônica.

De acordo com o teorema acima, f pode ser escrito como

$$f(x_1, x_2) = f(0,0)\overline{x}_1\,\overline{x}_2 + f(0,1)\overline{x}_1\,x_2 + f(1,0)x_1\,\overline{x}_2 + f(1,1)x_1\,x_2$$

Se calculamos o valor de f para todos os elementos $\mathbf{e} \in \{0,1\}^2$ temos $f(0,0) = 0$ e $f(0,1) = f(1,0) = f(1,1) = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 0 \cdot \overline{x}_1\,\overline{x}_2 + 1 \cdot \overline{x}_1\,x_2 + 1 \cdot x_1\,\overline{x}_2 + 1 \cdot x_1\,x_2 \\ &= \overline{x}_1\,x_2 + x_1\,\overline{x}_2 + x_1\,x_2 \end{aligned}$$

b) Expressar $f(x, y, z, w) = (xz + y)(zw + \overline{w})$ na forma SOP. Neste caso, basta aplicarmos a distributiva para eliminar os parênteses.

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= (xz + y)(zw + \overline{w}) \\ &= (xz + y)zw + (xz + y)\overline{w} \quad (\mathit{distributiva}) \\ &= xzw + yzw + xz\overline{w} + y\overline{w} \quad (\mathit{distributiva}) \end{aligned}$$

c) Expressar $f(x, y, z) = [(x + \overline{y}) + z](x + \overline{\overline{y}})\overline{x}$ na forma SOP. Idem anterior.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= [(x + \overline{y}) + z](x + \overline{\overline{y}})\overline{x} \\ &= [(x + \overline{y}) + z](x + y)\overline{x} \\ &= [(x + \overline{y}) + z](x\overline{x} + y\overline{x}) \\ &= [(x + \overline{y}) + z]y\overline{x} \\ &= xy\overline{x} + \overline{y}y\overline{x} + zy\overline{x} \\ &= 0 + 0 + zy\overline{x} \\ &= \overline{x}yz \end{aligned}$$

d) Escrever $f(x,y,z,w) = (xz+y)(zw+\overline{w})$ na forma SOP canônica. Aqui poderíamos utilizar uma abordagem similar ao do exemplo (a). É possível, no entanto, utilizarmos manipulações algébricas (eliminar os parênteses e em seguida "introduzir", em cada produto, as variáveis que não aparecem).

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= (xz+y)zw + (xz+y)\overline{w} \\
&= xzw + yzw + xz\overline{w} + y\overline{w} \\
&= xzw(y+\overline{y}) + (x+\overline{x})yzw + x(y+\overline{y})z\overline{w} + (x+\overline{x})y(z+\overline{z})\overline{w} \\
&= xyzw + x\overline{y}zw + xyzw + \overline{x}yzw + xyz\overline{w} + x\overline{y}z\overline{w} + xy(z+\overline{z})\overline{w} + \overline{x}y(z+\overline{z})\overline{w} \\
&= xyzw + x\overline{y}zw + \overline{x}yzw + xyz\overline{w} + x\overline{y}z\overline{w} + xyz\overline{w} + xy\overline{z}\overline{w} + \overline{x}yz\overline{w} + \overline{x}y\overline{z}\,\overline{w} \\
&= xyzw + xyz\overline{w} + xy\overline{z}\,\overline{w} + x\overline{y}zw + x\overline{y}z\overline{w} + \overline{x}yzw + \overline{x}yz\overline{w} + \overline{x}y\overline{z}\,\overline{w}
\end{aligned}$$

Observações: Em vez de **produto**, alguns autores utilizam também os nomes **termo produto**, **produto fundamental**, **conjunção fundamental** ou **produto normal**.

Em vez de **soma de produtos**, utilizam-se também os nomes **soma de produtos normais** e **forma normal disjuntiva**.

Em vez de **soma canônica de produtos** (SOP canônica), utilizam-se também os nomes **soma padrão de produtos**, **forma normal disjuntiva completa** ou **forma mintermo**. Note, porém, que alguns autores usam o nome **forma normal disjuntiva** em vez de **forma normal disjuntiva completa**.

Nós usaremos **soma de produtos** e **soma canônica de produtos** (ou **soma de mintermos**).

3.3 Produto de somas

Todos os conceitos definidos com respeito a expressões do tipo produto podem também ser definidos com respeito a expressões do tipo soma.

Uma **soma** define-se de forma análoga ao produto: soma é ou um literal ou a disjunção de dois ou mais literais, duas das quais nunca envolvem a mesma variável. Dizemos que uma expressão booleana está na forma **produto de somas** (POS) se ela é uma soma ou é uma conjunção de duas ou mais somas.

Maxtermo (ou **soma canônica**) em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tem definição similar ao mintermo: em vez de produto, consiste de soma de n literais, cada um correspondendo a uma variável. As expressões $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$ e $\overline{x}_1 + x_2 + x_3$ são exemplos de maxtermos em três variáveis. A tabela 2 lista todos os maxtermos de 3 variáveis.

Teorema: Há 2^n maxtermos e não há dois maxtermos equivalentes.
A demonstração é similar ao caso dos mintermos.

$e_1e_2e_3$	maxtermo	notação
0 0 0	$x_1 + x_2 + x_3$	M_0
0 0 1	$x_1 + x_2 + \overline{x}_3$	M_1
0 1 0	$x_1 + \overline{x}_2 + x_3$	M_2
0 1 1	$x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$	M_3
1 0 0	$\overline{x}_1 + x_2 + x_3$	M_4
1 0 1	$\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3$	M_5
1 1 0	$\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3$	M_6
1 1 1	$\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$	M_7

Tabela 2: Tabela de maxtermos com 3 variáveis.

Produto canônico de somas (POS canônica): Dizemos que uma expressão booleana está na forma **produto canônico de somas** (POS canônica) se ela é um maxtermo ou é uma conjunção de dois ou mais maxtermos distintos.

Teorema: Qualquer função booleana que não seja identicamente 1 pode ser expressa unicamente na forma **produto canônico de somas** (produto de maxtermos ou POS canônica).

A demonstração desse teorema é dual ao do teorema sobre a expressão de funções booleanas como soma canônica de produtos. Em particular, deve-se considerar o teorema de expansão de Boole dual, visto anteriormente.

Exemplo: Escrever $x + z + \overline{y}\,\overline{w}$ na forma POS canônica.

$$\begin{aligned}
f(x, y, z, w) &= x + z + \overline{y}\,\overline{w} \\
&= x + (z + \overline{y}\,\overline{w}) \\
&= x + (z + \overline{y})(z + \overline{w}) \\
&= (x + z + \overline{y})(x + z + \overline{w}) \\
&= (x + \overline{y} + z + w\overline{w})(x + y\overline{y} + z + \overline{w}) \\
&= (x + \overline{y} + z + w)(x + \overline{y} + z + \overline{w})(x + y + z + \overline{w})(x + \overline{y} + z + \overline{w}) \\
&= (x + \overline{y} + z + w)(x + \overline{y} + z + \overline{w})(x + y + z + \overline{w})
\end{aligned}$$

3.4 Soma de mintermos vista como supremo de átomos*

Considerando a relação de ordem parcial associada a uma álgebra booleana, definida por:

$$\forall x, y \in A, \quad x \leq y \ \text{ se e somente se } \ x + y = y \tag{5}$$

vimos que qualquer elemento na álgebra booleana pode ser expresso de forma única como supremo de átomos. Os átomos são, por sua vez, o conjunto dos "menores" elementos (não nulos).

Por exemplo, se consideramos o conjunto das partes de $\{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ com a relação de ordem parcial $\subseteq$ temos o diagrama de Hasse da figura 1. Os átomos são os conjuntos unitários $\{a\}$, $\{b\}$, e $\{c\}$. Note que todos os demais elementos, exceto o conjunto vazio, pode ser expresso como a união (soma, supremo) de átomos.

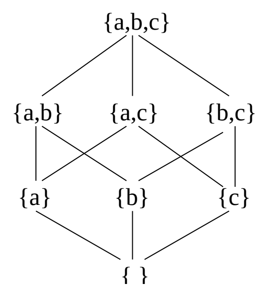

Figura 1: Diagrama de Hasse de $(\{a, b, c\}, \subseteq)$.

O conjunto das funções booleanas $B(n)$ de n variáveis, conforme discutido na página 3, também é uma álgebra booleana. Considerando-se a relação $\preceq$ definida pela equação 1, pode-se verificar que $(B(n), \preceq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

A função constante zero $\mathbf{0}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \in B(n)$ é o menor elemento de $(B(n), \preceq)$ enquanto a função constante um $\mathbf{1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \in B(n)$ é o maior elemento de $(B(n), \preceq)$.

Relembre que a união $(+)$ de duas funções $f, g \in B(n)$ é dado por

$$(f + g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

a interseção $(\cdot)$ por

$$(f \cdot g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

e o complemento por

$$\overline{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Os átomos de $(B(n), \preceq)$ são justamente os mintermos. Assim, toda função booleana $f : B^n \to B$ pode ser escrita como uma disjunção (soma) de mintermos distintos. Mais ainda, tal representação é única a menos da ordem dos mintermos. Portanto, esta é outra forma de se provar o teorema da soma canônica de produtos.

Exercício 5: Quais são os átomos do poset das funções booleanas sobre $A = \{0, \overline{a}, a, 1\}$ de uma variável?