**MAT0206/MAP0216 - Análise Real - IME - 2007**
**Prof. Gláucio Terra**
**P1 - 07/05/2007**

Nome:________________________________________ Nota:
No. USP:____________________RG:____________________
Assinatura:________________________________________

**ESCOLHA 5 QUESTÕES. CADA QUESTÃO VALE 2 PONTOS. BOA PROVA!!**

**1-)** Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *denso* em $\mathbb{R}$ se todo intervalo aberto de $\mathbb{R}$ contém algum ponto de $X$. Um número real diz-se *algébrico* se for raiz de algum polinômio não identicamente nulo e com coeficientes inteiros, e diz-se *transcendente* se não for algébrico. Mostre que: (a) o conjunto dos números algébricos é enumerável e denso em $\mathbb{R}$; (b) o conjunto dos números transcendentes é não-enumerável e denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração: (a) Denote por $P_n(\mathbb{Z})$ o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros de grau menor ou igual a $n$. Então $P_n(\mathbb{Z})$ é enumerável; com efeito, a aplicação $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^{n+1} \in P_n(\mathbb{Z})$ é uma bijeção de $\mathbb{Z}^{n+1}$ sobre $P_n(\mathbb{Z})$, e $\mathbb{Z}^{n+1}$ é enumerável (por ser $\mathbb{Z}$ enumerável e por ser enumerável o produto cartesiano finito conjuntos enumeráveis, conforme demonstrado em aula). Assim, o conjunto $P(\mathbb{Z})$ formado por todos os polinômios com coeficientes inteiros é enumerável, pois $P(\mathbb{Z}) = \cup_{n \in \mathbb{N}} P_n(\mathbb{Z})$, ou seja, é a reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis. Associe, a cada polinômio $p \in P(\mathbb{Z})$, o conjunto $R_p \subset \mathbb{R}$ formado por todas as raízes reais de $p$; então $R_p$ é um conjunto finito (em particular, enumerável), pois todo polinômio tem um número finito de raízes. Ora, o conjunto dos números algébricos é a reunião da família $(R_p)_{p \in P(\mathbb{Z})}$, portanto é enumerável, por ser a reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis. Além disso, tal conjunto é denso em $\mathbb{R}$, pois contém o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais, que já demonstramos ser denso em $\mathbb{R}$.

(b) Todo intervalo aberto não-vazio contém algum número transcendente; caso contrário, um tal intervalo conteria apenas números algébricos, portanto seria enumerável (e já demonstramos que todo intervalo não-degenerado é não-enumerável).

□

**2-)** Prove o *critério de Abel*: se $\sum a_n$ é convergente e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência decrescente de termos positivos, então $\sum a_n b_n$ é convergente.

Demonstração: A seqüência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente e limitada inferiormente (pois, por hipótese, $b_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Assim, tomando-se $c \doteq \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, tem-se $b_n \to c$. Portanto, $n \in \mathbb{N} \mapsto (b_n - c)$ é uma seqüência decrescente, de termos positivos, e converge para zero. Como a seqüência das reduzidas da série $\sum a_n$ é limitada (uma vez que a referida série é convergente, por hipótese), segue-se do critério de Dirichlet (demonstrado em aula) que a série $\sum (b_n - c) a_n$ é convergente. Ora, sendo $\sum c\, a_n$ convergente (pois $\sum a_n$ o é), segue-se que $\sum a_n b_n = \sum (b_n - c) a_n + \sum c\, a_n$ é convergente. □

**3-)** Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *discreto* se todos os seus pontos forem isolados. Demonstre que:
(a) Todo conjunto discreto é enumerável.
(b) Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto e discreto, então $X$ é finito.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Seja $X$ um conjunto discreto. Tome $E \subset X$ um subconjunto enumerável denso em $X$ (existe, pois, conforme demonstrado em aula, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ possui um subconjunto enumerável denso). Afirmo que $E = X$; com efeito, dado $a \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \cap X = \{a\}$, portanto $a \in E$ (caso contrário $E$ não seria denso em $X$), donde $X \subset E$.

(b) Para cada $x \in X$, tome $\delta_x > 0$ tal que, pondo $A_x \doteq (x - \delta_x, x + \delta_x)$, tem-se $A_x \cap X = \{x\}$. Assim, $(A_x)_{x \in X}$ é uma cobertura aberta do compacto $X$, da qual se pode extrair (por Borel-Lebesgue) uma subcobertura finita $(A_{x_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Ora, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $A_{x_i} \cap X = \{x_i\}$, portanto $X = (\cup_{1 \leqslant i \leqslant n} A_{x_i}) \cap X = \cup_{1 \leqslant i \leqslant n}(A_{x_i} \cap X) = \cup_{1 \leqslant i \leqslant n}\{x_i\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ é finito. $\square$

**4-)** Uma função $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ diz-se uma *função escada* se existirem $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tais que $\phi|_{]a_{i-1},a_i[}$ é constante ($= c_i$), para $1 \leqslant i \leqslant n$. Prove que, se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, para todo $\epsilon > 0$ existe $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ escada tal que $\big(\forall\, x \in [a,b]\big)\ 0 \leqslant f(x) - \phi(x) < \epsilon$.

DEMONSTRAÇÃO: A função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua no compacto $[a,b]$, portanto é uniformemente contínua (conforme já demonstrado em aula). Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, dados $x, y \in [a,b]$ com $|x-y| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Tome $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tais que $|a_i - a_{i-1}| < \delta$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, e $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por: (i) $\big(\forall\, i \in \{1, \dots, n\}\big)\ \phi|_{[a_{i-1},a_i[} = cte. = f(c_i)$, onde $c_i \in [a_{i-1}, a_i]$ é um ponto de mínimo de $f$ em $[a_{i-1}, a_i]$ (que existe, pelo teorema de Weierstrass) e (ii) $\phi(b) = f(b)$. Então $\phi$ é uma função escada e, dado $x \in [a,b]$, tem-se: (i) ou existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in [a_{i-1}, a_i[$, portanto $\phi(x) = f(c_i) \leqslant f(x)$ e $f(x) - \phi(x) = |f(x) - \phi(x)| = |f(x) - f(c_i)| < \epsilon$, pois $|x - c_i| < |a_i - a_{i-1}| < \delta$; (ii) ou $x = b$, portanto $\phi(x) = f(x)$. $\square$

**5-)** Sejam $K, F \subset \mathbb{R}$ não-vazios, $K$ compacto e $F$ fechado. Mostre que existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $\big(\forall\, x \in K, \forall\, y \in F\big)\ |x_0 - y_0| \leqslant |x - y|$. Dê um exemplo de dois conjuntos fechados e disjuntos $F, G$ tais que $\inf\{|x-y| \mid x \in F, y \in G\} = 0$.

DEMONSTRAÇÃO:

(a) O conjunto $\{|x-y| : x \in K \text{ e } y \in F\} \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente (por zero), portanto existe $d \doteq \inf\{|x-y| : x \in K \text{ e } y \in F\} \geqslant 0$. Verifiquemos que este ínfimo é um mínimo, i.e. existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $|x_0 - y_0| = d$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pela definição de ínfimo segue-se que $d + 1/n$ não é cota inferior do referido conjunto, portanto existem $x_n \in K$ e $y_n \in F$ tais que $d \leqslant |x_n - y_n| < d + 1/n$. Como $1/n \to 0$, segue-se do teorema do confronto que as seqüências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são tais que $|x_n - y_n| \to d$. Além disso, por ser $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência no compacto $K$, podemos supor, passando a uma sua subseqüência, se necessário, que a mesma converge para $x_0 \in K$ (i.e. se a referida seqüência não fosse convergente, poderíamos substituí-la por uma sua subseqüência convergente, com limite em $K$, cuja existência é assegurada pela propriedade de Bolzano-Weierstrass). Segue-se da definição de seqüência convergente que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| \leqslant 1$ para $n \geqslant n_0$; assim, pela desigualdade triangular, segue-se $\big(\forall\, n \geqslant n_0\big)\ |y_n - x_0| \leqslant |y_n - x_n| + |x_n - x_0| \leqslant 1/n + 1 < 2$. Conseqüentemente, $(y_n)_{n \geqslant n_0}$ é uma seqüência no conjunto $F \cap [x_0 - 2, x_0 + 2]$, que é compacto (é fechado, por ser a intersecção de dois fechados, e limitado, por estar contido no conjunto limitado $[x_0 - 2, x_0 + 2]$). Por Bolzano-Weierstrass, tal seqüência possui uma subseqüência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para $y_0 \in F$. Ora, $x_{n_k} \to x_0$ e $y_{n_k} \to y_0$ implica $|x_{n_k} - y_{n_k}| \to |x_0 - y_0|$; como também $|x_{n_k} - y_{n_k}| \to d$, segue-se que $d = |x_0 - y_0|$, por unicidade do limite.

(b) Tome $F \doteq \mathbb{N}$ e $G \doteq \{n + 1/n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Então $F$ e $G$ são fechados, disjuntos, e $\inf\{|x-y| \mid x \in F, y \in G\} = 0$, pois $(n + 1/n) - n = 1/n \to 0$. $\square$

**6-)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, então $f$ tem um ponto de mínimo $x_0$ (i.e. existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = \min f(\mathbb{R})$).

Demonstração: Seja $a \in \mathbb{R}$. Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, existe $M > 0$ tal que $f(x) > f(a)$ se $x \in (M, +\infty)$ ou $x \in (-\infty, -M)$. Podemos tomar $M > |a|$. Pelo teorema de Weierstrass, $f|_{[-M,M]}$ tem um ponto de mínimo $x_0 \in [-M, M]$. Então $x_0$ é ponto de mínimo de $f$, pois, $\big(\forall\, x \in [-M, M]\big)\, f(x) \geqslant f(x_0)$ e $\big(\forall\, x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)\big)\, f(x) > f(a) \geqslant f(x_0)$ (a última desigualdade deve-se ao fato de que $M > |a|$, portanto $a \in [-M, M]$). $\square$

**7-)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $g : X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\big(\forall\, x \in X\big)\, |f(x) - g(x)| < \epsilon$. Então $f$ é contínua.

Demonstração: Sejam $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $g : X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\big(\forall\, x \in X\big)\, |f(x) - g(x)| < \epsilon/3$. Sendo $g$ contínua em $x_0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ tal que $|x - x_0| < \delta$, tem-se $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon/3$. Assim, aplicando-se a desigualdade triangular, conclui-se que para todo $x \in X$ tal que $|x - x_0| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$. $\square$