MAC 105 – Fundamentos de Matemática para Computação

2ª Lista de Exercícios 1.0 – 7/3/2016 – Entrega 14/3/2016

Eduardo Hashimoto nUSP 6514136

Nas questões abaixo, justifique suas respostas, não fique só num *sim* ou *não*. Se for uma demonstração, diga antes que tipo de método usou (vai direto, vem direto, mistura de vai e vem, mágica,..); uma demonstração detalhada, que mostre claramente os métodos usados, é, neste ponto do curso, mais importante que duas demonstrações mais ou menos.

A lista para nota consiste só das questões marcadas com ✪. Ao lado do símbolo aparece um número que é o valor da questão. O peso da lista é a soma dos valores das questões.

Outras questões podem ser entregues para correção, ou comentadas em classe ou no fórum.

1. $\boxed{3}$ Considere os seguintes enunciados:

   (a) Se está chovendo então está ventando e sem sol. Em notação matemática $A \Rightarrow (B \wedge C)$.

   (ā) O reverso de (a), isto é, se está ventando e sem sol, então está chovendo. Em notação matemática $(B \wedge C) \Rightarrow A$.

   Para cada um dos enunciados abaixo, indique se é equivalente a (a), (ā), ou nenhum deles. Interprete as variações na linguagem coloquial de uma forma razoável ("chover" X "estar chovendo" tem uma relação óbvia, por exemplo).

   (b) Está ventando e sem sol só se está chovendo.

   A expressão "só se" indica que estar chovendo é condição necessária para estar ventando e sem sol. Assim, poderiamos reescrever da seguinte maneira: Se está ventando e sem sol então está chovendo, isto é, $(B \wedge C)$ só se A, que é o mesmo que $(B \wedge C) \Rightarrow A$.

   Logo a afirmação (b) é equivalente ao reverso de (a).

   (c) Chover é suficiente para ventar sem sol.

   Sim, o enunciado coloca em outras palavras que sempre que chove está ventando e sem sol, o que torna chover uma condição suficiente para que esteja ventando e sem sol. No mais, em uma implicação do tipo $A \wedge B$, A é condição suficiente para B.

   (d) Chover é necessário para ventar sem sol.

   Esse enunciado, no entanto, não é verdade. Como não sabemos poderiamos dizer que "Se está trovejando então está ventando e sem sol"e nada dizer sobre a chuva (e ainda assim estar ventando e sem sol). Assim, chover não é condição necessária para ventar sem sol. É suficiente, mas não necessária.

(e) Vento é condição necessária para chuva, assim como falta de sol.

O vento ou falta de sol isoladamente não são condições necessárias para a chuva. Em notação matemática teríamos dois enunciados, a saber: $A \Rightarrow B$ e também $A \Rightarrow C$, e cada um desses enunciados é diferente dos enunciados dados.

(f) Ou está ventando só se está chovendo ou não tem sol só se está chovendo.

O enunciado é complexo e, talvez, seja melhor estudá-la na notação matemática: $(B \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow A)$

Usando uma tabela verdade, temos:

A	B	C	$B \wedge C$	$B \Rightarrow A$	$C \Rightarrow A$	$(B \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow A)$	$A \Rightarrow (B \wedge C)$	$(B \wedge C) \Rightarrow A$
F	F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	V
V	V	F	F	V	V	V	F	V
V	F	V	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V	F
V	V	V	V	V	V	V	V	V

Como podemos observar na tabela-verdade, o enunciado $(B \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow A)$ é equivalente ao enunciado $(B \wedge C) \Rightarrow A$.

2. $\boxed{5}$ Seja R uma relação transitiva sobre um conjunto A. Considere agora a relação E sobre A dada por

aEb se e só se $a = b$ ou aRb e bRa.

(a) Mostre que E é uma relação de equivalência.

Para E ser uma relação de equivalência deve satisfazer as seguintes propriedades:

reflexiva, isto é aEa. Do enunciado podemos concluir que $a = a \Rightarrow aEa$. Assim a relação E é reflexiva.

simétrica, isto é se aEb então bEa. Do enunciado temos que $a = b \Rightarrow aEb$, mas $a = b \Leftrightarrow b = a$. Assim, $b = a \Rightarrow bEa$.

transitiva, isto é, se aEb, bEc então aEc. Analogamente ao exposto acima, temos que se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$. Do enunciado temos que $a = c \Rightarrow aEc$.

Assim, a relação E é uma relação de equivalencia.

(b) Suponha que A consiste de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, e R é a inclusão própria $\subset$. O que é E?

Reescrevendo o enunciado teríamos, aEb se e só se a = b ou $a \subset b$ e $b \subset a$, com a e b sendo elementos do conjunto A. Como a relação R é de inclusão própria o elemento a só pode estar contido em algo maior, e.g, $1, 2 \subset 1, 2, 3$, mas não menor ou igual, e.g., $1, 7 \subset 1, 7$. O mesmo acontece com o elemento b. Assim para satisfazer as duas condições simultaneamente, o elemento a deve ser igual ao elemento b. Assim, a relação E é uma relação de igualdade.

(c) Suponha que A consiste de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, e R é a inclusão $\subseteq$. O que é E?

Reescrevendo o enunciado teríamos, aEb se e só se a $=$ b ou $a \subseteq b$ e $b \subseteq a$, com a e b sendo elementos do conjunto A. Como a relação R é de inclusão própria o elemento a só pode estar contido em algo maior ou igual, e.g, $1, 2 \subseteq 1, 2, 3$, $1, 7 \subset 1, 7$. O mesmo acontece com o elemento b. Assim para satisfazer as duas condições simultaneamente, o elemento a deve ser igual ao elemento b. Assim, a relação E é uma relação de igualdade.