MAT0206/MAP0216 - Análise Real - IME - 2007
Prof. Gláucio Terra

6^a Lista de Exercícios - Resolução dos Exercícios

2-) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\int_a^b |f| = 0$;
(ii) Se f é contínua em $c \in [a, b]$, então $f(c) = 0$;
(iii) $X \doteq \{x \in [a, b] \mid f(x) \neq 0\}$ tem interior vazio.

Demonstração:

(i)⇒(ii) Suponha que f seja contínua em $c \in [a, b]$. Então $|f| : x \mapsto |f(x)|$ é contínua em c; se $|f(c)| \neq 0$, por continuidade existem $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$ tal que $|f|$ é maior ou igual a ϵ no intervalo não-degenerado $[\alpha, \beta] \doteq [a, b] \cap [c - \delta, c + \delta]$, donde $\int_a^b |f| \geqslant \int_\alpha^\beta |f| \geqslant (\beta - \alpha)\epsilon > 0$.

(ii)⇒(iii) Seja $D \subset [a, b]$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Por (ii), tem-se $X \subset D$; como f é integrável, segue-se do teorema de Lebesgue que D tem medida nula, logo X tem medida nula, portanto tem interior vazio.

(iii)⇒(i) Seja $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Segue-se de (iii) que, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $c \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $f(c) = 0$ (caso contrário o interior de X seria não-vazio, pois conteria o intervalo aberto $]t_{i-1}, t_i[$), o que implica que $m_i \doteq \inf |f|([t_{i-1}, t_i]) = 0$, donde $s(f, P) = 0$. Como P foi tomada arbitrariamente, segue-se que $\int_a^b |f| = \underline{\int_a^b} |f| = \sup\{s(f, P) \mid P \subset [a, b] \text{ partição}\} = 0$.

$\square$

7-) Dadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integráveis, seja $X \doteq \{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\}$. Se X tem medida nula, então $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Demonstração: A hipótese implica que $f - g$ é integrável e o conjunto dos pontos nos quais $f - g$ não se anula tem medida nula, portanto tem interior vazio. Então segue-se da questão 2 que $\int_a^b |f - g| = 0$, donde $\int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g) = 0$. $\square$

8-) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é lipschitziana (em particular, se f é de classe C^1) e $X \subset [a, b]$ tem medida nula, então $f(X)$ tem medida nula.

Demonstração:

Por um lema já demonstrado em aula (e que também é um exercício desta lista), $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe uma família enumerável $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos limitados (não necessariamente abertos) tal que $X \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e $\sum_{n=1}^\infty |I_n| < \epsilon$.

Seja $c > 0$ uma constante de Lipschitz para f, e suponha que $X \subset [a, b]$ tem medida nula. Provemos que $f(X)$ tem medida nula. Com efeito, seja $\epsilon > 0$. Existe uma família enumerável $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos limitados tais que $X \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon/c$. Como c é uma constante de Lipschitz para f, para cada $n \in \mathbb{N}$ a imagem do intervalo I_n por f é um intervalo com comprimento menor ou igual a $c|I_n|$; então $\{f(I_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura de $f(X)$ por intervalos limitados tal que (pelo critério de comparação) $\sum_{i=1}^{\infty} |f(I_n)| \leqslant c \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon$.

□

9-) Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e não-negativa. Se $\int_a^b g = 0$, então, para toda $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável, tem-se $\int_a^b (f \cdot g) = 0$.

Demonstração: Pela questão 2, o conjunto dos pontos de $[a, b]$ onde g não se anula tem interior vazio; então o conjunto dos pontos de $[a, b]$ nos quais fg não se anula também tem interior vazio, donde (novamente pela questão 2) $\int_a^b |fg| = 0$, portanto $\int_a^b (fg) = 0$. □

11-) Se $f : [a, b] \to [c, d]$ é de classe C^1 com $\big(\forall\, x \in [a, b]\big)\; f'(x) \neq 0$, e $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ é integrável, então $g \circ f$ é integrável.

Demonstração:

A hipótese sobre f implica que $\operatorname{Im} f \subset [c, d]$ é um intervalo compacto, $f : [a, b] \to \operatorname{Im} f$ é inversível e $f^{-1} : \operatorname{Im} f \to [a, b]$ é de classe C^1. Denote por $D_{g\circ f}$ e D_g, respectivamente, os conjuntos dos pontos de descontinuidade de $g \circ f$ e g. Afirmo que $f(D_{g\circ f}) \subset D_g$. Com efeito, se $x \in [a, b]$ e g é contínua em $f(x)$, então $g \circ f$ é contínua em x; portanto, se $g \circ f$ é descontínua em x, segue-se que g é descontínua em $f(x)$. Como g é integrável, segue-se do teorema de Lebesgue que $D_g \subset [c, d]$ tem medida nula; então $f(D_{g\circ f}) \subset D_g$ também tem medida nula. Como f^{-1} é de classe C^1 no intervalo compacto $\operatorname{Im} f$, é lipschitziana no referido intervalo, portanto segue-se da questão 8 que $f^{-1}\big(f(D_{g\circ f})\big) = D_{g\circ f}$ tem medida nula. Aplicando-se novamente o teorema de Lebesgue, conclui-se que $g \circ f$ é Riemann-integrável.

□