MC859/MO824 - Atividade 2

Eduardo Barros Innarelli
e170161@dac.unicamp.br

Guilherme de Oliveira Macedo
g208395@dac.unicamp.br

Rogério Guimarães Meirelles
r160245@dac.unicamp.br

1. Descrição do problema

O problema dos dois caixeiros viajantes (2TSP) pode ser descrito da seguinte forma: seja um grafo não-orientado $G(V, E)$, onde V é um conjunto de vértices e E é um conjunto de arestas. Em cada aresta $e \in E$ há um custo $c_e : E \to \mathbb{R}^+$. O objetivo deste problema consiste em encontrar dois ciclos hamiltonianos com custo total mínimo disjuntos nas arestas.

2. Formulação matemática

Traduzindo o problema enunciado na Seção 1 para a linguagem matemática, obtém-se o seguinte modelo matemático de programação inteira binária:

$$\text{minimizar} \sum_{k=1}^{2} \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e^k \tag{2.1}$$

sujeito a:

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e^k = 2, \qquad \forall\, i \in V,\ k \in \{1, 2\} \tag{2.2}$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e^k \leq |S| - 1, \qquad \forall\, S \subset V,\ k \in \{1, 2\} \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{2} x_e^k \leq 1, \qquad \forall\, e \in E \tag{2.4}$$

$$x_e^k \in \{0,1\}, \qquad \forall\, e \in E,\ k \in \{1,2\} \tag{2.5}$$

onde x_e^k é uma variável de decisão associada a presença ($x_e^k = 1$) ou não ($x_e^k = 0$) da aresta e no ciclo hamiltoniano k, $\delta(i)$ é o conjunto de arestas que incidem no vértice i, $S \subset V$ é um subconjunto próprio de vértices e $E(S)$ é o conjunto de arestas cujos dois vértices terminais estão em S.

A função objetivo (2.1) minimiza a soma dos custos de todas as arestas presentes em cada um dos ciclos hamiltonianos. As restrições (2.2) asseguram que cada vértice possua duas arestas incidentes para cada um dos ciclos hamiltonianos encontrados na resolução. As restrições (2.3) eliminam subciclos ilegais, isto é, para cada ciclo hamiltoniano k, todos os vértices devem ser visitados. As restrições (2.4) garantem que os ciclos hamiltonianos encontrados sejam disjuntos nas arestas. Finalmente, as restrições (2.5) são de binaridade das variáveis de decisão.

3. Experimentos computacionais

Todos os experimentos computacionais foram realizados num PC com processador Intel Core i5 2.3 GHz, 16 GB de memória RAM. O modelo matemático (2.1)-(2.5) foi implementado em Python 3.8.7 e resolvido com o Gurobi 9.0.3.

3.1. Instâncias de teste

O conjunto de testes consiste em 5 instâncias, variando o número de vértices $|V|$ em 20, 40, 60, 80 e 100. A localização dos vértices foi gerada aleatoriamente a partir de uma distribuição uniforme com intervalo $[0,1]$. O custo de uma aresta (c_e) é igual à distância Euclidiana de seus vértices terminais.

3.2. Resultados

A Tabela 1 resume os resultados obtidos para cada uma das instâncias. As colunas mostram em ordem o valor da função objetivo do 2TSP (Z_I), o tempo de execução do 2TSP (TempoI), duas vezes o valor da função objetivo do TSP (Z_R), o tempo de execução do TSP (TempoR) e o gap dado pela diferença entre Z_I e Z_R dividido por Z_I.

Tabela 1: Resultados computacionais #1.

$\|V\|$	Z_I	TempoI (s)	Z_R	TempoR (s)	Gap (%)
20	$9,60164$	$0,01449$	$7,69306$	$0,00431$	$19,88$
40	$12,79490$	$0,24451$	$10,66940$	$0,05701$	$16,61$
60	$15,43270$	$3,75895$	$12,41250$	$0,10473$	$19,57$
80	$16,45820$	$22,65870$	$13,56368$	$1,01626$	$17,59$
100	$18,39160$	$23,50934$	$15,25774$	$0,81353$	$17,04$

Como era esperado, o valor da função objetivo e o tempo gasto para resolução tanto do TSP quanto do 2TSP crescem a medida que o número de vértices aumenta. Observe que os valores do gap foram relativamente altos, em média $\approx 18\%$. Isso mostra que a estratégia de multiplicar por dois o valor da função objetivo do TSP não fornece bons limitantes inferiores para o 2TSP. O TSP levou em média $0,39916$ segundos para ser resolvido, enquanto que, para o 2TSP, o tempo foi em média $10,0372$ segundos. Note que o 2TSP é computacionalmente custoso quando comparado com o TSP (por exemplo, para a instância com $|V| = 100$ o tempo gasto para resolução do 2TSP foi 27 vezes maior do que o tempo de execução do TSP), o que indica que para instâncias maiores, obter a solução ótima do 2TSP torna-se inviável. Este fato nos motivou a propor um método heurístico de solução para o 2TSP descrito no Apêndice A.

A. Heurística Sequencial

Uma heurística bem simples consiste na resolução do 2TSP sequencialmente. No primeiro estágio da heurística, o TSP é resolvido e apenas um ciclo hamiltoniano é obtido. Já no segundo estágio, o TSP é novamente resolvido e um outro ciclo hamiltoniano é encontrado. Para que os dois ciclos hamiltonianos sejam disjuntos nas arestas, no segundo estágio, os custos associados as arestas pertencentes ao primeiro ciclo são iguais à ∞. O Algoritmo 1 mostra o pseudo-código desta heurística.

Algoritmo 1 Heurística sequencial para o 2TSP

- Passo 1: Resolva e o seguinte problema e obtenha o primeiro ciclo hamiltoniano:

$$\text{minimizar} \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e \tag{A.6}$$

sujeito a:

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2, \qquad \forall\, i \in V \tag{A.7}$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \qquad \forall\, S \subset V \tag{A.8}$$

$$x_e \in \{0, 1\}, \qquad \forall\, e \in E \tag{A.9}$$

onde x_e é uma variável de decisão associada a presença ($x_e = 1$) ou não ($x_e = 0$) da aresta e no ciclo hamiltoniano obtido, $\delta(i)$ é o conjunto de arestas que incidem no vértice i, $S \subset V$ é um subconjunto próprio de vértices e $E(S)$ é o conjunto de arestas cujos dois vértices terminais estão em S.

- Passo 2: Seja $\Omega = \{e \in E \mid x_e = 1\}$ o conjunto de arestas pertencentes ao ciclo hamiltoniano encontrado no passo anterior, faça $c_e = \infty$ para todo $e \in \Omega$.

- Passo 3: Resolva novamente o modelo matemático (A.6)-(A.9) e obtenha o segundo ciclo hamiltoniano.

A Tabela 2 mostra os resultados obtidos pela heurística para cada uma das instâncias. As colunas mostram em ordem o valor da função objetivo da heurística (Z_H), o tempo de execução da heurística (TempoH), o valor da função objetivo do 2TSP, o tempo de execução do 2TSP e o gap dado pela diferença entre Z_H e Z_I dividido por Z_H.

Tabela 2: Resultados computacionais #2.

$\lvert V \rvert$	Z_H	TempoH (s)	Z_I	TempoI (s)	Gap (%)
20	$9,65533$	$0,00546$	$9,60164$	$0,00431$	$0,56$
40	$12,90420$	$0,08403$	$12,79490$	$0,05701$	$0,85$
60	$15,53630$	$0,24039$	$15,43270$	$0,10473$	$0,67$
80	$16,65640$	$1,35052$	$16,45820$	$1,01626$	$1,19$
100	$18,49900$	$1,01055$	$18,39160$	$0,81353$	$0,58$

Veja que o tempo de execução da heurística é bem próximo do tempo de execução de multiplicar por dois o valor da função objetivo do TSP e muito menor do que o tempo de obter a solução ótima do 2TSP. Além disso, os valores do gap foram baixos ($0,77\%$ em média). Os resultados mostram claramente que a heurística sequencial é adequada para resolver o 2TSP dentro de um tempo computacional razoável. Entretanto, ainda há a necessidade de experimentar a heurística com instâncias ainda maiores (por exemplo, com $|V| = 500$) ou até mesmo compará-la com outras heurísticas existentes na literatura.