ATR 4 - Gabarito

1.1) $\lim_{x\to 5} 7x-3 = 7.5-3 = 32.$

1.2) $\lim_{x\to -2} x^2-7x-2 = (-2)^2-7.(-2)-2 = 4+14-2 = 16.$

1.3) $\lim_{x\to 1} 5x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x+1 = 5+4+3+2+1+1$
$= 16.$

Obs: Todos estes exercícios são feitos com base no Exemplo 2 da ATR2.

2.1) No exemplo a função é dada pela fórmula:

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+4x+3}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ com } x^2+4x+3 \neq 0.$$

Assim, o domínio de f não pode conter os números que são raízes de x^2+4x+3.
São eles:

$$x^2+4x+3=0$$

$$\Delta = 16-4.3 = 4 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Logo, $D_f = \mathbb{R} - \{-1, -3\}.$

O cálculo anterior nos indica que:

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

Logo, $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x+1)(x+3)}$.

A fatoração feita é:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \cancel{x^3}+1 & x+1 \\ \cline{3-3}
- & \cancel{x^3}+x^2 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
 & \cancel{-x^2}+1 & \\
- & \cancel{-x^2}-x & \\ \cline{2-2}
 & \cancel{x+1} & \\
- & \cancel{x+1} & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Assim $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{x^2-x+1}{x+3}$, $x\neq -1$.

2.2) Não podemos dizer que encontra-se uma FUNÇÃO igual à f, pois os domínios mudaram. O correto é afirmar que a simplificação da f nos leva à outra função que coincide com a f em todos os pontos exceto em $x=-1$, onde f não está definida e em $x=-3$ onde AMBAS não estão definidas.

2.3) A técnica envolve fatorar o quociente para identificar a outra função que coincide com a original em todo seu domínio, exceto no(s) ponto(s) que não está definida, p/ então calcular o limite pelo conceito de continuidade (ou seja, simplesmente calculando o valor da função num ponto).

2.4) Sejam f, g funções.

P1) Se $\lim_{x \to p} f(x)$ e $\lim_{x \to p} g(x)$ existem, então

$\lim_{x \to p} (f+g)(x)$ existe e é:

$$\lim_{x \to p} f(x) + \lim_{x \to p} g(x).$$

P2) Se $\lim_{x\to p} f(x)$ existe e $\lim_{x\to p} g(x)$ NÃO existe, então

$$\lim_{x\to p} (f+g)(x) \text{ não existe.}$$

P3) Se $\lim_{x\to p} f(x)$ e $\lim_{x\to p} g(x)$ existem, então

$\lim_{x\to p} (f\cdot g)(x)$ existe e é:

$$\left(\lim_{x\to p} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to p} g(x)\right).$$

P4) Se $\lim_{x\to p} f(x)$ existe e $\lim_{x\to p} g(x)$ existe com $\lim_{x\to p} g(x) \neq 0$, então

$\lim_{x\to p} (f/g)(x)$ existe e é:

$$\frac{\displaystyle\lim_{x\to p} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to p} g(x)}.$$

Exemplos: Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dados por: $f(x) = x$ e

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

P1) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1} g(x)$, logo

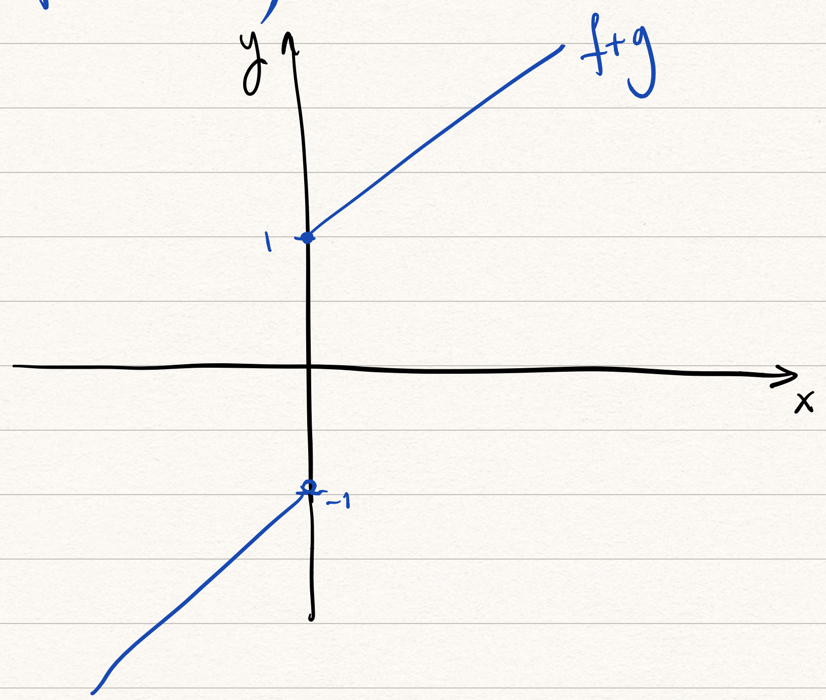
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} (f+g)(x) &= \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

P2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)$ não existe.

Agora, note que

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0. \end{cases}$$

Graficamente,



e $\lim_{x \to 0} (f+g)(x)$ não existe.

P3) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 2} g(x) = 1$

Como
$$(f\cdot g)(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2} (f\cdot g)(x) = 2 = \left(\lim_{x\to 2} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} g(x)\right).$$

P4) Aproveitando P3) note que
$$\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

e
$$\lim_{x\to 2} (f/g)(x) = 2 = \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)}.$$

4.1 e 4.2) a) $f(x) = \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1}$, $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2+2x+1 = 1+2+1 = 4$ //

fatoração

b) $f(x) = \frac{x^3-3x^2+5x-15}{x^2-9}$, $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+5}{x+3} = \frac{9+5}{3+3} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$ //

fatoração por $x-3$

c) $f(x) = \frac{x^3-x^2-21x+45}{x^2-6x+9}$

Note que $x^2-6x+9 = (x-3)^2$, logo $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$.

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x+5 = 3+5 = 8$ //.

fatoração

Exercício 5

5.1 1.1) Não copiarei aqui mas era esperado a reprodução das definições das pag. 82 e 83 de Guidorizzi (5ª edição) seção: Limites Laterais.

5.2 1.2)

a) Intuimos que $\lim_{x \to 2^+} \frac{2|x-2|}{x-2} = 2.$

Dado $\varepsilon > 0$, p/ qualquer $\delta > 0$, temos:

pois este número é positivo

se $0 < x-2 < \delta$, como $|x-2| = x-2$, então

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{2\cancel{|x-2|}}{\cancel{x-2}} - 2 \right| = 0 < \varepsilon. \blacksquare$$

b) Neste caso, mostremos que $\lim_{x \to 2^-} \frac{2|x-2|}{x-2} = -2.$

Procederemos de maneira análoga ao item anterior porém notando que agora p/ todo $\varepsilon > 0$ e p/ qualquer $\delta > 0$

pois $x-2 < 0$ agora

se $-\delta < x-2 < 0$, então $|x-2| = -(x-2) = -x+2$

e com isso

$$|f(x)-(-2)| = \left|\frac{2|x-2|}{x-2}+2\right|$$

$$= \left|\frac{\overbrace{2.-\cancel{(x-2)}}^{-2}}{\cancel{x-2}}+2\right| = 0 < \varepsilon. \blacksquare$$

Obs: Estes itens poderiam ser feitos de maneira mais prática também, da seguinte forma:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2|x-2|}{x-2} \overset{\text{pois } p/\ x<2,\ x-2<0}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{2.-\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 2.-1 = -2,$$

e

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2|x-2|}{x-2} \overset{\text{pois } x>2 \text{ e } x-2>0}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{2.\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 2.$$

c) P/ $x \to 1^+$, aproximamos de 1 por valores maiores do que ele logo $\sqrt{x}-1>0$ e

$$\frac{|\sqrt{x}-1|}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

p/ $x \neq 1$.

Segue que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|\sqrt{x}-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

d) De forma análoga ao c), fazendo $x \to 1^-$ note que nos aproximamos de 1 por valores menores do que ele e assim, $\sqrt{x}-1 < 0$.

Então,

$$\frac{|\sqrt{x}-1|}{x-1} = \frac{-(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \frac{-\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)} = -\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

p/ $x \neq 1$.

Portanto, $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{|\sqrt{x}-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} -\frac{1}{\sqrt{x}+1} = -\frac{1}{2}. \blacksquare$

5.3 1.3) A afirmação é falsa pois como visto acima

$$-2 = \lim_{x \to 2^-} \frac{2|x-2|}{x-2} \neq \lim_{x \to 2^+} \frac{2|x-2|}{x-2} = 2$$

Logo, $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2|x-2|}{x-2}$ não existe. P/ que a função definida fosse contínua, este limite deveria existir e ser $f(2) = 2$. ∎

5.4 1.4) Não é possível. Como em 1.3 deveríamos definir o seguinte (a fim de que g seja contínua)

$$\lim_{x \to 1} \frac{|\sqrt{x}-1|}{x-1} = g(1).$$

Mas o limite acima tbm não existe uma vez que

$$-\frac{1}{2} = \lim_{x \to 1^-} g(x) \neq \lim_{x \to 1^+} g(x) = \frac{1}{2}. \quad ∎$$

Um extra: continuidade da Função chão

Dado $p \in \mathbb{Z}$, temos:

i) Se $x \in (p-1, p)$, então $\lfloor x \rfloor = p-1$.

ii) Se $x \in (p, p+1)$, então $\lfloor x \rfloor = p$

Assim, $p-1 = \lim_{x \to p^-} \lfloor x \rfloor \neq \lim_{x \to p^+} \lfloor x \rfloor = p$.

e f não é contínua em p.

Agora, se $p \notin \mathbb{Z}$, então existe um inteiro q tq $p \in (q, q+1)$. Assim,

i) Se $x \in (q, p)$, então $\lfloor x \rfloor = q$;

ii) Se $x \in (p, q+1)$, então $\lfloor x \rfloor = q$

Logo,

$$q = \lim_{x \to p^-} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to p^+} \lfloor x \rfloor$$

e

$\lim_{x \to p} \lfloor x \rfloor$ existe e é $\lfloor p \rfloor = q$.

Representação gráfica do domínio: