SOLUCIONES GUÍA RESUMEN UNIDAD II

Ejercicio N°1

Paso Nº1: Identificar los datos del problema

Área de la superficie 471 cm2 ➔ $A = 471$ ➔ $471 = 6{,}28 \cdot r^2 + 6{,}28 \cdot r \cdot h$

Paso Nº2: Determinar Función a Optimizar. Expresarla en función de una variable

Función a optimizar es el volumen $V = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot h$

$$V(r,h) = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot h$$

Utilizando el dato del paso Nº1, despejamos una variable para luego reemplazarla en la función a optimizar, para que dependa de una sola variable:

$$471 = 6{,}28 \cdot r^2 + 6{,}28 \cdot r \cdot h$$
$$471 - 6{,}28 \cdot r^2 = 6{,}28 \cdot r \cdot h$$
$$\frac{471 - 6{,}28 \cdot r^2}{6{,}28 \cdot r} = h$$

Se reemplaza h en la funciòn a optimizar reduciendola a su màxima expresiòn:

$$V(r,h) = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot h$$
$$V(r) = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot \frac{471 - 6{,}28 \cdot r^2}{6{,}28 \cdot r}$$
$$V(r) = 0{,}5 \cdot r \cdot (471 - 6{,}28 \cdot r^2)$$
$$V(r) = 235{,}5r - 3{,}14r^3$$

Por lo tantao, la funciòn a optimizar expresada en dependeincia de una variable es:

$$V(r) = 235{,}5r - 3{,}14r^3$$

Paso Nº3: Determinar puntos críticos (derivando Función a Optimizar)

Derivar la función a optimizar y luego igualar a cero

$$V(r) = 235{,}5r - 3{,}14r^3$$
$$V'(r) = 235{,}5 - 9{,}42r^2$$
$$0 = 235{,}5 - 9{,}42r^2$$

$$r_1 = 5 \qquad r_2 = (-5)$$

Los puntos críticos son $r_1 = 5$ $\qquad r_2 = (-5)$

Paso Nº4: Verificar si los puntos críticos son un máximo o mínimo

Se descarta $r_2 = (-5)$ ya que el radio no puede ser negativo. Comprobar si el radio $r_1 = 5$ es un máximo o mínimo

		$f'(5)$	
Signo de $V'(r)$	$+$	0	-

Por lo tanto $r_1 = 5$ es un valor máximo

Paso Nº5: Responder la pregunta

Para determinar la altura utilizar

$$\frac{471 - 6{,}28 \cdot r^2}{6{,}28 \cdot r} = h$$

$$h = \frac{471 - 6{,}28 \cdot r^2}{6{,}28 \cdot r} = \frac{471 - 6{,}28 \cdot 5^2}{6{,}28 \cdot 5} = 10$$

Para que el cilindro tenga el mayor volumen el radio corresponde a 5 cm y la altura corresponde a 10 cm

Ejercicio N°2

a)

Variables	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{P(t)}$	$\boldsymbol{P'(t)}$
Significado	tiempo	población	Tasa de crecimiento de la población
Unidad de Medida	años	Millones de habitantes	- $millones\ de\ habitantes/por\ año$ -millones de habitantes por año

b) $2014 - 1800 = 214$

$P(214) = 836{,}87e^{0{,}0098 \cdot 214} = 6.814{,}914116$

Respuesta:

Para **inicios** 2014 se estima una población de **6.814.914.116 habitantes** (o 6.814,914116 millones de habitantes)

c) $P'(t) = 8{,}201326e^{0{,}0098t}$

b) $2015 - 1800 = 215$

$P'(215) = 8{,}201326e^{0{,}0098 \cdot 215} = 67{,}44383092$

Respuesta:

La **tasa de crecimiento** iniciando el año 2015 se estima en 67.443.831 **habitantes por año**. (o 67,44383092 millones de habitantes por año)

Ejercicio N°3

a) ***Paso Nº1***: Determinar Dominio Contextualizado

$[0,10]$

b) ***Paso Nº2:*** Encontrar Punto Críticos

$f'(x) = 3x^2 - 36x + 81 \rightarrow \quad 3x^2 - 36x + 81 = 0$

$x_1 = 9 \quad y \quad x_2 = 3$

Paso Nº3: Determinar si los Puntos Críticos son máximos o mínimos relativos

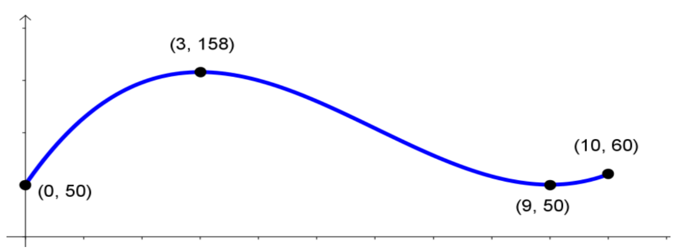
Alternativa Nº1: criterio de la primera derivada

		$f'(3)$		$f'(9)$	
Signo $f'(x)$	+	0	-	0	+

Por lo tanto x=3 es un máximo relativo y x=9 es un mínimo relativo

Alternativa Nº1: graficando

Valor inicial dominio	Punto crítico	Punto Crítico	Valor final domino
f(0)	f(3)	f(9)	f(10)
50	158	50	60



Por lo tanto x=3 es un máximo y x=9 es un mínimo

Respuesta pregunta

Intervalo de decrecimiento $]3,9[$ Intervalo de decrecimiento $]0,3[\ , \ ]9,10[$

c) ***Paso Nº4***: Determinar máximos o mínimos absolutos

f(0)	f(3)	f(9)	f(10)
50	158	50	60

Por lo tanto x=3 es un máximo absoluto y x=0 y x=9 es un mínimo absoluto

Respuesta:

Transcurridas 3 horas se observara la mayor cantidad de personas conectadas correpondente a 158 personas.

Iniciada la oferta y a la 9na hora se observa la menor cantidad de personas conectadas, correspondente a 50.

D) $f(6) = 104$

Transcurridas 6 horas hay 104 personas conectadas

$f'(6) = -27$

- Transcurridas 6 horas la cantidad de personas conectadas **disminuyen** en 27 **personas por hora**
- La tasa de **decrecimiento** de la cantidad de personas conectadas cuando trasncurren 6 horas corresponde a 27 **personas por hora**

Ejercicio N°4

a)

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{D(t)}$	$\boldsymbol{D'(t)}$	$\boldsymbol{D''(t)}$
Tiempo	Posición	Rapidez Instantánea	Aceleración Instantánea
Horas	km	- $km/hora$ - Kilómetros por hora	- $km/hora^2$ - Kilómetros por hora$^{\mathbf{2}}$

b) $D`(t) = -6t + 45t^2$

$D`(1{,}5) \approx 92$

Interpretación: La **rapidez instantánea** a las 1,5 horas es de 92 **km/h**

c) $D``(t) = -6 + 90t$

$D``(0{,}6) = 48$

Interpretación: La aceleración instantánea a las 0,6 horas es de 48 km/h^2

Ejercicio N°5

a)

Variables	**Significado**	**Unidad de Medida**
$\boldsymbol{x}$	Cantidad de tela	Toneladas
$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})$	Ingreso	Miles euros
$\boldsymbol{I}'(\boldsymbol{x})$	Ingreso marginal Tasa de crecimiento del ingreso Razón de cambio del ingreso	$Miles\ euros/tonelada$
$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$	costo	Miles euros
$\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{x})$	Costo marginal Tasa de crecimiento del costo Razón de cambio del costo	$Miles\ euros/tonelada$

b) $I'(x) = 0{,}003x^2 + 2x$ $\qquad C'(x) = 100 - 0{,}18x$

c) $C'(200) = 64$

Posibles interpretaciones

- Si la empresa importa 200 toneladas de tela, **el costo marginal** será de 64.000 **euros por tonelada** (o bien 64 miles euros/tonelada)

-Si la empresa importa 200 toneladas de tela, **la tasa de crecimiento** del costo será de 64.000 **euros por tonelada** (o bien 64 miles euros/tonelada)

$I'(200) = 520$

-Si la empresa importa 200 toneladas de tela, **el ingreso marginas** será 520.000 **euros por tonelada** (o bien 520 miles euros/tonelada)

-Si la empresa importa 200 toneladas de tela, **la tasa de crecimiento** del ingreso será 520.000 **euros por tonelada** (o bien 520 miles euros/tonelada)

Ejercicio N°6

a) $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2+7} + 39x^2$	b) $f'(x) = \dfrac{e^x(2x-3) - e^x(x^2-3x)}{e^{2x}}$
c) $f'(x) = e^x \cdot \log(x) + \dfrac{e^x}{x\ln(10)}$	d) $P'(t) = 22.500e^{15t}$

Ejercicio N°7

a)

t	$H(t)$	$H'(t)$
tiempo	personas	-Tasa de crecimiento de la cantidad de habitantes -Razón de cambio de la cantidad de habitantes
años	Millones de habitantes	-millones de habitantes por año -*millones de habitantes/por año*

b) $H(2) = 11{,}38461538$

Trascurrido 2 años (iniciando el años 2002) la cantidad de habitantes es de 11.384.615 personas

b) Derivada $H'(t) = \frac{4(t+24)-(4T+288)\cdot 1}{(t+24)^2}$

Valor $H'(2) = -0{,}2840236686$

Posibles interpretaciones:

- Transcurrido dos años la **razón de cambio** de la población es de -284.024 **habitantes por año** (o bien -0,2840236686 millones de habitantes por año)
- Trascurrido dos años la **tasa de decrecimiento** corresponde a 284.024 **habitantes por año** (o bien 0,2840236686 millones de habitantes por año)
- Transcurrido dos años la **población disminuye** en 284.024 **habitantes por año** (o bien 0,2840236686 millones de habitantes por año)

Ejercicio N°8

Paso Nº1: Identificar los datos del problema

Volumen de la caja 500.000 cm3➔ $V = 500.000$ ➔ $500.000 = x^2 \cdot h$

Paso Nº2: Determinar Función a Optimizar. Expresarla en función de una variable

Función a optimizar es el área $A = 4hx + x^2$

$$A(x, h) = 4hx + x^2$$

Utilizando el dato del paso Nº1, despejamos una variable para luego reemplazarla en la función a optimizar, para que dependa de una sola variable:

$$500.000 = x^2 \cdot h$$

$$\frac{500.000}{x^2} = h$$

Se reemplaza h en la funciòn a optimizar reduciendola a su màxima expresiòn:

$$A(x, h) = 4 \cdot h \cdot x + x^2$$

$$A(x) = 4 \cdot \frac{500.000}{x^2} \cdot x + x^2$$

$$A(x) = \frac{2.000.000}{x} + x^2$$

$$A(x) = 2.000.000 \cdot x^{-1} + x^2$$

Por lo tanao, la funciòn a optimizar expresada en dependeincia de una variable es:

$$A(x) = 2.000.000 \cdot x^{-1} + x^2$$

Paso Nº3: Determinar puntos críticos (derivando Función a Optimizar)

Derivar la función a optimizar y luego igualar a cero y resolver ecuación

$$A(x) = 2.000.000 \cdot x^{-1} + x^2$$

$$A'(x) = -2.000.000 \cdot x^{-2} + 2x$$

$$A`(x) = \frac{-2.000.000}{x^2} + 2x$$

$$0 = \frac{-2.000.000}{x^2} + 2x$$

$$x = 100$$

Los puntos solo hay un punto crítico $x = 100$

Paso Nº4: Verificar si los puntos críticos son un máximo o mínimo

		$A'(100)$	
Signo de $A'(r)$	-	0	+

Por lo tanto $x = 100$ es un valor mínimo

Paso Nº5: Responder la pregunta

Para determinar la altura utilizar

$$\frac{500.000}{x^2} = h$$
$$\frac{500.000}{100^2} = h$$
$$50 = h$$

Para minimizar la cantidad de material usada, la caja debe medir 100x100 cm de base y 50 cm de alto

Ejercicio N°9

Paso Nº1: Determinar Dominio Contextualizado

$[1,8]$

Paso Nº2: Encontrar Punto Críticos

$f'(x) = x^3 - 11x^2 + 28x \rightarrow \qquad x^3 - 11x^2 + 28x = 0$

$x(x^2 - 11x + 28) = 0 \rightarrow \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = 7$

Paso Nº3: Determinar si los Puntos Críticos son máximos o mínimos relativos

Se descarta x=0 porque está fuera del dominio contextualizado

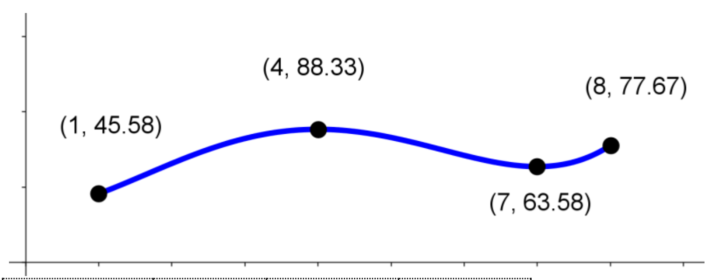
Alternativa Nº1: criterio de la primera derivada

		$f'(4)$		$f'(7)$	
Signo$f'(x)$	+	0	-	0	+

Por lo tanto x=4 es un máximo relativo y x=7 es un mínimo relativo

Alternativa Nº2: graficando

Valor inicial dominio	Punto crítico	Punto Crítico	Valor final domino
f(1)	f(4)	f(7)	f(8)



45,6	88,3	63,6	77,7

Por lo tanto x=4 es un máximo relativo y x=7 es un mínimo relativo

Paso Nº4: Determinar máximos o mínimos absolutos

Con la aternativa dos del paso 3, se determina los màximos y minimos asolutos

Por lo tanto x=4 es un máximo absoluto y x=7 es un mínimo absoluto

Respuesta: El mayor rendimiento lo obtendrá si estudia 4 horas diarias, y el menor rendimiento, si estudia 1 hora diaria.

Ejercicio N°10

a) $C'(x) = CM(x) = -2 + \frac{1}{50}x$ y $I'(x) = IM(x) = 0{,}002x + 1$

b) $CM(150) = 1{,}0$

Posibles interpretaciones

-Si la empresa produce 150 productos, **el costo marginal** será 1.000 **dólares por unidad** (o bien 1,0 miles dólares /unidad)

-Si la empresa produce 150 productos, **la tasa de crecimiento** del costo será 1.000 **dólares por unidad** (o bien 1,0 miles dólares /unidad)

$IM(150) = 1{,}3$

Posibles interpretaciones

-Si la empresa vende 150 productos, **el ingreso marginal** será 1.300 **dólares por unidad** (o bien 1,3 miles dólares /unidad)

-Si la empresa vende 150 productos, **la tasa de crecimiento** del ingreso será 1.300 **dólares por unidad** (o bien 1,3 miles dólares /unidad)

Ejercicio N°11

Función Derivada $S'(t) = \frac{1}{50}t$ Valor $S'(30) = 0{,}6$

Interpretación: La rapidez instantánea del ciclista a los 30 minutos corresponde a 0,6 **km/min.**

Función Derivada $S''(t) = \frac{1}{50} = 0{,}02$ Valor $S''(30) = 0{,}02$

Interpretación: La aceleración instantánea a los 30 minutos es de 0,02 **km/min²**.

Ejercicio N°12

Paso Nº1: Identificar los datos del problema

Perímetro del área rectangular 480 metros ➔ $\mathrm{P} = 480$ ➔ $480 = 4\mathrm{x} + 6\mathrm{y}$

Paso Nº2: Determinar Función a Optimizar. Expresarla en función de una variable

Función a optimizar es el área de 1 corral $\mathrm{A} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$

$$\mathrm{A}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$$

Utilizando el dato del paso Nº1, despejamos una variable para luego reemplazarla en la función a optimizar, para que dependa de una sola variable:

$$480 = 4\mathrm{x} + 6\mathrm{y}$$

$$\frac{480 - 4\mathrm{x}}{6} = \mathrm{y}$$

Se reemplaza h en la funciòn a optimizar reduciendola a su màxima expresiòn:

$$A(x,y) = x \cdot y$$

$$A(x) = x \cdot \frac{480 - 4x}{6}$$

$$A(x) = 80x - \frac{2}{3}x^2$$

Por lo tanao, la funciòn a optimizar expresada en dependeincia de una variable es:

$$A(x) = 80x - \frac{2}{3}x^2$$

Paso Nº3: Determinar puntos críticos (derivando Función a Optimizar)

Derivar la función a optimizar y luego igualar a cero y resolver ecuación

$$A(x) = 80x - \frac{2}{3}x^2$$

$$A'(x) = 80 - \frac{4}{3}x$$

$$0 = 80 - \frac{4}{3}x$$

$$60 = x$$

Los puntos solo hay un punto crítico $x = 60$

Paso Nº4: Verificar si los puntos críticos son un máximo o mínimo

		$A'(60)$	
Signo de $A'(r)$	+	0	-

Por lo tanto $x = 60$ es un valor máximo

Paso Nº5: Responder la pregunta

Para determinar el ancho de cada corral utilizar

$$\frac{480 - 4x}{6} = y$$

$$\frac{480 - 4 \cdot 60}{6} = y$$

$$40 = y$$

Se debe calcular el área $A = x \cdot y = 60 \cdot 40 = 2400$

El área más grande posible para cada uno de los tres corrales 2400 m2

Ejercicio N°13

a) ***Paso Nº1:*** Determinar Dominio Contextualizado

$[0,1.5]$

Paso Nº2: Encontrar Punto Críticos

$f'(x) = 192 - 192x$ ➔ $192 - 192x = 0$ ➔ $x = 1$

Paso Nº3: Determinar si los Puntos Críticos son máximos o mínimos relativos

Alternativa Nº1: criterio de la primera derivada

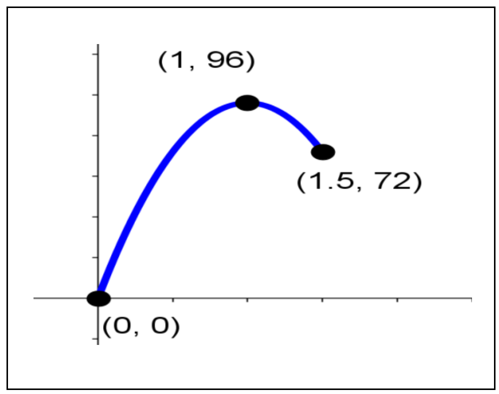
		$f'(1)$	
Signo$f'(x)$	+	0	-

Por lo tanto x=1 es un máximo relativo

Alternativa Nº2: graficando

Valor inicial dominio	Punto crítico	Valor final domino
f(0)	f(1)	f(1.5)
0	96	72

Por lo tanto x=1 es un máximo relativo



Responder: Intervalos de crecimiento $]0,1[$ Intervalos de decrecimiento $]1,1.5[$

Durante la primera hora que rinde el examen, el rendimiento de alumno aumenta.

Durante los últimos 30 minutos del examen, el rendimiento del alumno disminuye

b) ***Paso Nº4:*** Determinar máximos o mínimos absolutos

Con la aternativa dos del paso 3, se determina los màximos y minimos asolutos

Por lo tanto x=1 es un máximo absoluto y x=0 es un mínimo absoluto

Respuesta: Se observa el máximo rendimiento del alumno a la hora de comenzado el examen, correspondiente a un 96%

Ejercicio N°14

a)

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{I(x)}$	$\boldsymbol{I'(x)}$
Cantidad de pendrives	Ingreso	-Tasa de crecimiento del ingreso -Razón de cambio del ingreso
unidades	pesos	- Pesos por unidad - $pesos/unidad$

b) $I`(x) = 850 + 0{,}08x$

c) $I`(2000) = 1.010$

Interpretaciones:

- Si se venden 2.000 unidades, la **tasa de crecimiento** del ingreso será de **1.010 pesos por unidad**

Ejercicio N°15

a)

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{D(t)}$	$\boldsymbol{D'(t)}$	$\boldsymbol{D''(t)}$
Tiempo	Distancia vertical	Rapidez Instantánea	Velocidad Instantánea
segundos	metros	- $metros/segundo$ - metros por segundo	- $metros/segundo^2$ - metros por segundo^2

b) $\mathrm{D}(4) = 576$

La **distancia por encima del suelo** del proyectil después de **4 segundos** será de **576 metros**

c) $D'(t) = 216 - 36t$ $D'(4) = 72$

Respuesta: La **rapidez instantánea** a los 4 segundos de ser disparado el proyectil es de $72\ \boldsymbol{m/s}$

d) $D''(t) = -36$ $D'(4) = -36$

Respuesta: La **aceleración instantánea** a los 4 segundos de ser disparado el proyectil es de $-36\ \boldsymbol{m/s^2}$

Ejercicio N°16

Derivada $f'(t) = 30$

Valor $f'(10) = 30$

Interpretaciones:

- La **tasa de crecimiento** de las ventas de la empresa transcurridas 10 años corresponde a 30.000.000 **euros por año.** (o 30 millones de euros por año)