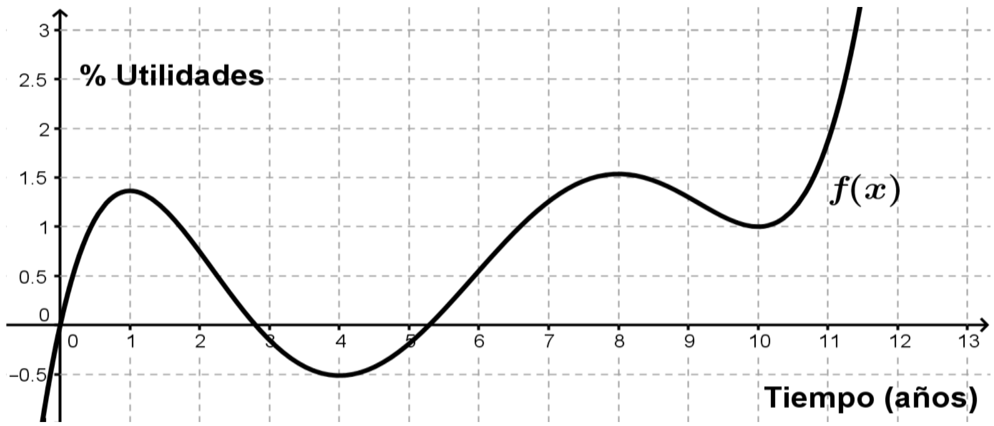
GUÍA DE N°5 DE CÁLCULO I

Aplicación de la derivada: Valores Máximos y Mínimos.

1. La función $f(x)$ muestra el % de las utilidades de una empresa los primeros 11 años de funcionamiento, $f(x) = \frac{1}{500}x^5 - \frac{23}{400}x^4 + 0{,}58x^3 - 2{,}36x^2 + 3{,}2x$, donde x son los años trascurridos desde su creación



a) Transcurridos el primer, cuarto, octavo y décimo año de funcionamiento se observaron los **valores** (utilidades) **críticos**, determínelos e indique las coordenadas en la gráfica, al igual que los % de utilidades al inicio y final del estudio.

b) Determine la función $f´(x)$ y calcular en los años donde se observan los valores críticos. ¿Qué puedes concluir?

c) Escriba los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las utilidades, indicando el comportamiento (signo) de la derivada en esos tramos. Par ello puedes completar el siguiente cuadro

Valor x	$x =$ ____	$x = 1$	$x =$ ____	$x = 4$	$x =$ ____	$x = 8$	$x =$ ____	$x = 10$	$x =$ ____
Valor $f´(x)$									
Signo									

d) Durante todos los años de análisis ¿dónde se observa el mayor y menor % de utilidad? (indique el valor).

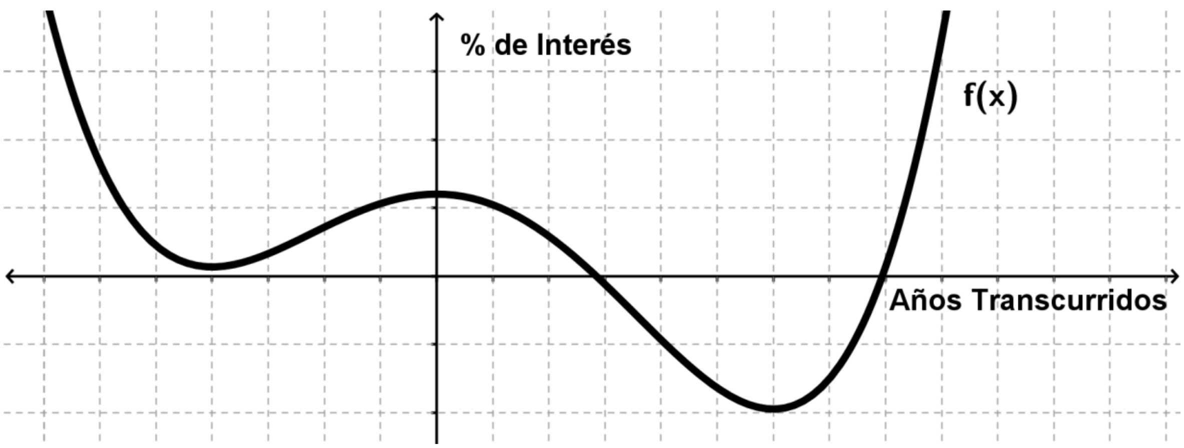
Los valores máximos o mínimos de una función son los valores más grandes o más pequeños que toma una función en un punto situado ya sea dentro de un intervalo o en el dominio de la función. Determinar estos valores responde a buscar respuesta a problemas de optimización.

Para encontrar los valores mínimos y máximos es necesario determinar los puntos crítico, que se definen a continuación:

Punto Crítico:

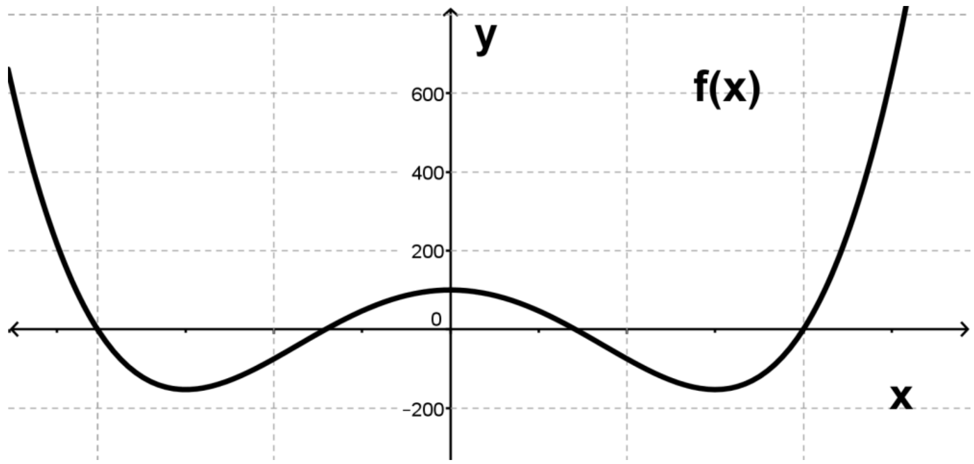
Dado un valor c que pertenece al dominio de la función f donde $f'(c)=0$ o no está definido se dirá que es un valor crítico, y $(c, f(c))$ será un punto crítico.

2. Andrea tiene un depósito a plazo desde inicios del año 2002 hasta inicios del año 2009. El % de interés que generó está dado por $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-3x^2+6$ donde x son los años transcurridos desde el 2005. Considerando el grafico de la función $f(x)$ y que $f(0)$ corresponde al % de interés al inicio del año 2005, responder las siguientes preguntas.



a) Determinar Dominio contextualizado
b) Encontrar los valores críticos utilizando la derivada de la función.
c) Marcar en la gráfica los puntos críticos y coordenadas final e inicial
d) Determine los intervalos donde la derivada es positiva y los intervalos donde es negativa.
e) Señale punto máximo y mínimo. Interprete valores

3. Dada la función $f(x) = 50x^4 - 225x^2 + 100 \quad x \in \ [-2\,,\ 2.5\,]$ y su gráfica, se pide:



a) Encontrar los valores críticos utilizando la derivada de la función.

b) Marcar en la gráfica los puntos críticos y valores extremos del intervalo.

c) Determinar coordenada del punto máximo y mínimo de la función

Máximo y Mínimo relativo:

<u>Criterio de la Primera derivada:</u> Para encontrar los valores máximos y mínimos relativos de una función continua f , se debe:

1. Encontrar los puntos críticos de la función f
2. Si $f\,'$ cambia de positiva a negativa alrededor del valor crítico, entonces f tiene un máximo relativo.
3. Si $f\,'$ cambia de negativo a positivo alrededor del valor crítico, entonces f tiene un mínimo relativo.
4. Si $f\,'$ no cambia de signo (es decir, $f\,'$ es positiva en ambos lados o es negativa en ambos lados), entonces f no tiene máximo ni mínimo relativo.

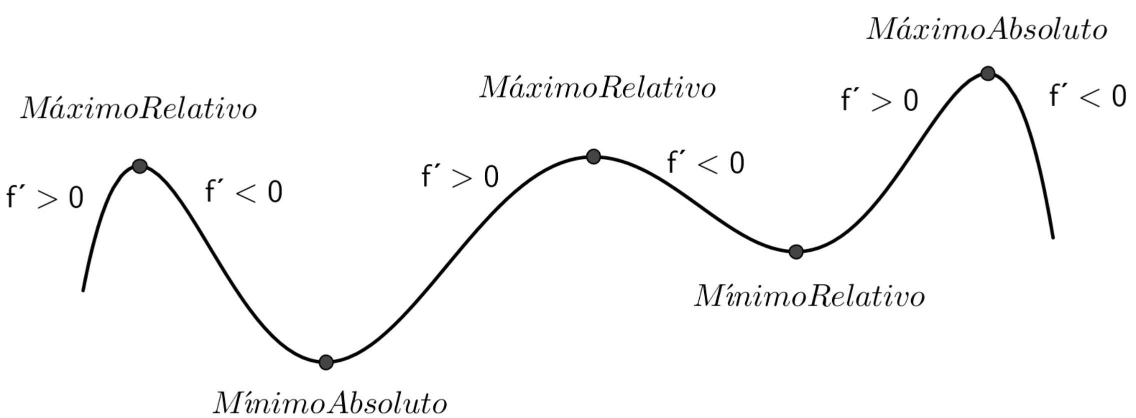
<u>En resumen:</u> Si c es un valor crítico, a y b dos valores cercanos a c con $a < c$ y $b > c$, si se analizan los signos de la derivada se tiene:

$f\,'(a)$	$f\,'(c)$	$f\,'(b)$	Conclusión
$+$	0	$-$	El valor c es un máximo relativo
$-$	0	$+$	El valor c es un mínimo relativo
$+$	0	$+$	El valor c no es mínimo ni máximo relativo
$-$	0	$-$	El valor c no es mínimo ni máximo relativo

Máximo y Mínimo absoluto:

Para encontrar los valores máximos y mínimos absolutos de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[c, g]$, se debe:

1. Encontrar los puntos críticos de la función f en el intervalo (c, g)
2. Encontrar los valores de f en los valores críticos
3. Encontrar los valores de f en los valores extremos de la función, es decir, determinar $f(c)$ y $f(g)$.
4. El más grande de los valores de los pasos 2 y 3 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.



Ayuda:

Te recomendamos seguir los siguientes pasos para determinar un máximo y mínimo absoluto:

1º. Determinar Dominio Contextualizado

2º. Encontrar Punto Críticos

3º. Determinar si los Puntos Críticos son máximos o mínimos relativos

4º. Determinar Máximo y Mínimo Absoluto

5º. Para identificar intervalos de crecimiento o decrecimiento, se recomienda esbozar el gráfico de la función considerando máximos y mínimos relativos, y coordenada final e inicial.

4. El rendimiento de un ciclista está dado por la rapidez que alcanza. Si entrena siete horas en forma continua su rendimiento será de $\mathrm{R(t)} = \mathrm{t}^3 - 12\mathrm{t}^2 + 36\mathrm{t}\ (\mathrm{km/h})$, donde t son las horas transcurridas desde que inicia la práctica.

   a) ¿Después de cuantas horas de entrenamiento se observa el máximo rendimiento del ciclista?
   b) ¿Durante que tramos de tiempo en rendimiento del ciclista disminuye?

5. Se desea colocar una casa en línea recta a x km de una planta industrial. Si la vivienda es construida a una distancia que fluctúa desde los 6 y 21 km las emisiones de partículas contaminantes que le afectan se pueden determinar con la función $C(x) = 2x^3 - 69x^2 + 720x - 1500$, ppm (partículas por millón).

   a) Si coloca la casa a 18 km, ¿Será la mejor ubicación? Si no determínela.
   b) Determine e intérprete intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

6. El costo total $\mathrm{C(x)} = 2\mathrm{x} + \frac{299.538}{\mathrm{x}}$ (en miles de pesos) de pedido y almacenaje dependerá de la cantidad x que se requiera, considerando como mínimo 50 artículos:

   a) ¿Qué tamaño de pedido minimiza el costo total?
   b) Indique e interprete intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

7. La virulencia[1] de cierta bacteria se comenzó a estudiar a comienzos del año 1997 obteniendo el siguiente modelo $V(x) = \frac{1}{40}x^4 - \frac{8}{30}x^3 + 0{,}35x^2 + 15$ (en porcentaje) donde x son los años transcurridos desde inicios del año 2000.

   a) Señale el dominio contextualizado de la función
   b) Determine los periodos en que la virulencia aumenta y disminuye
   c) ¿Dónde se observa la mínima virulencia? Indique su valor

[1] Es el grado de la capacidad de producir una enfermedad

8. En enero de 1985 se funda un club deportivo. La función $P(x)$ estima el total de personas inscritas trascurridos x años desde su fundación

$$P(x) = \frac{x^3}{12} - 4x^2 + 48x + 40 \text{ (Miles de socios)}$$

a) ¿Durante qué periodo disminuye la cantidad de socios?
b) ¿A partir de qué año se estima que la cantidad de socios siempre aumentará?
c) Determine e interprete $P(5)$ y $P'(5)$

9. Un fondo de inversión genera una rentabilidad[2] R que depende de la cantidad de dinero invertida la que debe ser mayor o igual a 500 euros.

$$R(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}25x + 2 \text{ , donde } x \text{ está en miles de euros}$$

a) ¿Si la rentabilidad disminuye entre que valores fluctúa la inversión?
b) ¿A partir de qué monto de inversión se estima que la rentabilidad siempre aumenta?
c) ¿Cuándo se observa la mínima rentabilidad?
d) Determine e interprete $R(4)$ y $R'(4)$

10. Un estudio arrojó que el rendimiento de un alumno antes de realizar un examen se comporta de acuerdo a la función $R(x) = 0{,}245x^4 - \frac{11}{3}x^3 + 14{,}5x^2 + 20$ (en %), donde x es la cantidad de horas que estudia con un máximo de 8 horas diarias.

a) ¿Cuántas horas conviene estudiar para obtener el mayor rendimiento?
b) Si el alumno no estudia ¿Cuál será su rendimiento?

[2] La rentabilidad es la ganancia que una persona recibe por poner sus ahorros en una institución financiera y se expresa a través de los intereses, que corresponden a un porcentaje del monto de dinero ahorrado.