

GUÍA N° 4 DE CÁLCULO I

La Derivada como razón de cambio

1. Hasta el año 2000, la estimación de la deuda de EEUU, expresada en millones de dólares está dada por la función $f(t) = -0,11t^4 + 3,59t^3 - 28,91t^2 + 271,85t + 930,2$ donde t son los años transcurridos a partir de inicios de 1980.

a) Complete la siguiente tabla

Variables	t	$f(t)$	$f'(t)$
Significado			
Unidad de Medida			

- b) Escriba el dominio contextualizado de la función
- c) ¿Cuál es la deuda de EEUU al iniciar el año 1990?
- d) Interprete y calcule $\frac{df}{dt}$ transcurridos 10 años.

2. Se espera que desde hoy hasta los próximos 12 años (t), la población de cierta comunidad esté dada por la función $p(t) = e^{0,75t} + 280$ (miles de habitantes).

a) Complete la siguiente tabla

Variables	t	$p(t)$	$p'(t)$
Significado			
Unidad de Medida			

- b) Escriba el dominio contextualizado de la función
- c) ¿Cuántos habitantes se estima para 5 años más?
- d) Interprete y calcule $\frac{dp}{dt}$ dentro de 9 años.

3. En un estudio realizado determinó que el impuesto predial¹ en un determinado país estaba dado por la función: $I(x) = (x^2 + 50) \cdot e^x$ en miles de pesos, donde x son los años transcurridos desde inicios del 2005.

a) Complete la siguiente tabla

Variables	x	$I(x)$	$I'(x)$
Significado			
Unidad de Medida			

- b) ¿Cuál es la razón de cambio del impuesto predial, con respecto al tiempo, a inicios del año 2011?
4. Una empresa determinó que t meses después de aumentar los valores de sus productos las ventas de la compañía se pueden calcular con la función $V(t) = 12,5e^{0,8t}$ en miles de pesos. ¿A qué razón cambiarán las ventas, con respecto al tiempo, transcurridos 5 meses?

Nota N°1

La **rapidez instantánea** corresponde a la razón de cambio instantánea de la posición con respecto al tiempo

La **aceleración instantánea** corresponde a la razón de cambio instantánea de la rapidez con respecto al tiempo

¹ Es el impuesto cuya recaudación, administración y fiscalización corresponde a la municipalidad donde se ubica el predio

5. Un grupo de estudiantes participa de una cicletada que inicia en el centro de Santiago hacia el sur del país. La función $s(t) = 0,02t^2 + 5$ entrega la posición de un ciclista (en kilómetros) después de t minutos de su partida.

a) Complete la siguiente tabla (**ver nota 1, página 2**)

Variables	t	$s(t)$	$s'(t)$	$s''(t)$
Significado				
Unidad de Medida				

b) Determine e interprete los siguientes valores $s(30)$, $s'(30)$ y $s''(30)$

6. Un automóvil se mueve a lo largo de una carretera en línea recta durante 5 horas, de modo que la posición en kilómetros está dada por la función $d(x) = x^3 e^{x-5}$ trascurridas x horas. Determine la rapidez instantánea que lleva a las 3 horas y su aceleración instantánea a las 4 horas.

7. Un carro se mueve durante 3 minutos a lo largo de un riel horizontal, de tal manera, que su posición en el instante t desde el punto de partida, está especificado por la función $f(t) = t^3 - t^2 + 18t + 45$. La distancia se mide en cm y el tiempo t en minutos.

a) Complete la siguiente tabla

Variables	t	$f(t)$	$f'(t)$	$f''(t)$
Significado				
Unidad de Medida				

- b) Escriba el dominio contextualizado de la función
 c) ¿El carro en qué posición inicia su recorrido?
 d) Determine e Interprete f' y f'' a los 2 minutos

8. Si un tanque cilíndrico contiene 100.000 galones² de agua que se pueden drenar por el fondo del depósito en 1 hora, la ley de Torricelli da el volumen V del agua

que queda después de t minutos como $V(t) = 100.000 \left(1 - \frac{t}{60}\right)^2 \quad 0 \leq t \leq 60$

a) Complete la siguiente tabla

Variables	t	$V(t)$	$V'(t)$
Significado			
Unidad de Medida			

b) Determine la función $V'(t)$

c) Determine e interprete $V'(30)$

9. La concentración de un medicamento t horas después de haber sido inyectado en el brazo de un paciente está dado por la función $c(t) = \frac{0,15t}{t^2 + 0,81}$ (en ml) . Calcule

e interprete $\frac{dc}{dt}$ cuando $t = 2$

10. Se estima que la población de una colonia de bacterias está dada por la siguiente función $P(t) = \frac{24t + 10}{t^2 + 1}$ (en miles) después de t horas. Calcule e interprete $\frac{dP}{dt}$ cuando $t = 1,5$

Nota N°2

El **Ingreso Marginal** es la razón de cambio de la función ingreso respecto a la cantidad de unidades. Corresponde al cambio en el ingreso total cuando la cantidad vendida aumenta en una unidad.

El **Costo Marginal** es la razón de cambio de la función costo respecto a la cantidad de productos. Corresponde a la variación que sufre el costo debido a la fabricación de una unidad más.

² El galón es una unidad de medida equivalente a 4,5461 litros aproximadamente

11. Una empresa calcula que al vender x kilos de fertilizante, su ingreso en pesos está dado por la función $I(x) = 18000x - 2x^2$ donde $x \in [1, 100]$. Suponiendo que el costo total en pesos de fabricación de x kilos es $c(x) = 1000x + x^2$.

a) Complete la siguiente tablas (**ver nota 2, página 4**)

Variables	Significado	Unidad de Medida
x		
$I(x)$		
$I'(x)$		
$C(x)$		
$C'(x)$		

- b) Determine la función ingreso marginal
 c) Calcule e interprete $I(30)$ y $I'(30)$
 d) Determine la función costo marginal
 e) Calcule e interprete $C(30)$ y $C'(30)$

12. Si una empresa produce desde 10 hasta 1000 productos diarios, el ingreso y costo en dólares de la producción de x unidades estaría dado por las funciones $I(x) = 50x + 2200$ y $C(x) = 300 - 0,01x$ respectivamente

a) Complete la siguiente tabla

Variables	Significado	Unidad de Medida
x		
$I(x)$		
$I'(x) = IM$		
$C(x)$		
$C'(x) = CM$		

- b) Calcule e interprete $IM(700)$ y $CM(700)$

13. Un fabricante de pinturas para autos advierte que los ingresos y costos (en euros) por vender y producir x litros de pintura están dados por las funciones $I(x) = 100x - 0,01x^2$ y $C(x) = 2.000 + 40x$ respectivamente
- Determine la función ingreso marginal y costo marginal
 - Calcule e interprete $CM(24)$ y $IM(59)$
14. En ciertas circunstancias, un rumor se esparce según la ecuación $p(t) = \frac{1}{1+10e^{-0,5t}}$ donde $p(t) \cdot 100$ es el porcentaje de la población que lo conoce en el tiempo t (horas). Determine e interprete $p'(t)$ a las 5 horas.
15. Suponiendo que el porcentaje de alcohol³ presente en la sangre t horas después de consumido está dado por $C(t) = 0,2t \cdot e^{\frac{-t}{2}}$. Calcule e interprete $\frac{dC}{dt}$ después de 1, 2 y 3 horas.
16. En un colegio, el porcentaje de estudiantes que sufre mononucleosis⁴ después de t días del primer caso reportado, está dado por la función $p(t) = \frac{50 \cdot t}{t^2 + 16}$. Calcule e interprete $\frac{dp}{dt}$ después de 3 y 7 días.

Nota N°3

La **corriente** es la razón de cambio de la cantidad de carga con respecto al tiempo, en otras palabras es la rapidez con que la carga fluye por una superficie, se mide en unidades de carga por unidades de tiempo, a menudo en coulombs por segundo (amperes).

³ El tiempo que demora el alcohol en llegar al torrente sanguíneo depende de varios factores, entre ellos la cantidad de comida ingerida previamente

⁴ La mononucleosis también conocida como enfermedad del beso es causada por un virus perteneciente a la misma familia del virus del herpes. Aparece más frecuentemente en adolescentes y adultos jóvenes, y los síntomas que la caracterizan son fiebre, faringitis o dolor de garganta, inflamación de los linfonodos y fatiga

17. Si la cantidad de carga que pasa por un punto de un alambre hasta un tiempo t se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$ (t en segundos y Q en coulombs). Determine la corriente (ver Nota 3, página 6) a los 0,5 segundos.

SIGUE PRACTICANDO:

18. Un banco implementa un nuevo sistema de cajero automático en el cual se determinó que el número de personas que utiliza este nuevo sistema, viene dado por la función $P(x) = 6x^2 + 5x + 800$, donde x representa las semanas transcurridas después de la implementación. Interprete y calcule $\frac{dP}{dx}$ transcurridas 10 semanas de su implementación.
19. En un criadero de conejos después de x días la cantidad de conejos crece a cierta razón. Se sabe que la función de población de conejos del criadero está dada por la función $P(x) = 10x^2 + 1250e^{0,04x} + 400$. ¿A qué razón cambiará la población de conejos, con respecto al tiempo, dentro de 15 días?
20. Si una empresa produce desde 5 hasta 100 productos diarios el costo total de producción en dólares de x unidades es $c(x) = 50x + 22000$ y el precio de ventas es de $i(x) = 1800 + 100x$ dólares
- a) Determine la función ingreso marginal y costo marginal
- b) Calcule e interprete $c'(50)$ y $i'(60)$
21. Un carrito experimental conectado a un PC, se mueve a lo largo de un riel de tal manera que su posición en el instante t del punto de partida está dada por la función $d(t) = 3t^3 + 18t^2 + 55t$ la distancia se mide en cm y el tiempo en minutos. Interprete y calcule de $d'(2)$ y $d''(1,5)$.