GUÍA N°2 DE CÁLCULO I

Composición y Límites de funciones

I Composición de Funciones

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ está definida por $f(g(x))$

En otros palabras: Sean dos funciones f y g, donde f depende de g y g depende de la variable x

Al componer f con g, es decir fog, se obtiene que f depende de la variable x.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{f} \arrow[r, "Depende", "f(g)"'] \arrow[rr, dotted, bend right, "\begin{array}{c}Depende\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\end{array}"'] & \boldsymbol{g} \arrow[r, "Depende", "g(x)"'] & \boldsymbol{x} \end{tikzcd}$$

1. Determine $f(x)$ de las siguientes funciones:

a) $f(g) = 4g$, $g(x) = e^x$

b) $f(g) = g^{13}$, $g(x) = 8x^5 - 3x^3 - 15$

c) $f(g) = \log(g)$, $g(x) = 2x + 5$

2. El costo unitario en dólares de la fabricación de n motos para Cross country, se describe con la función $C(n) = 14320\ e^{-0{,}031 \cdot n} + 1120$, donde $n \in \{96, 97, \ldots, 120\}$

Además se sabe que hasta inicios del 2012, la cantidad de motos fabricadas ha dependido de año de funcionamiento de la empresa. Esta variación se puede analizar mediante el siguiente modelo matemático $n(t) = 2t + 96$, donde t son los años trascurridos a partir del 2000.

a) ¿Cuántas motos se fabricaron a inicios del 2001? ¿y cuál fue el costo unitario?

b) Determine $C(t)$

c) Interprete la función $C(t)$ indicando unidades de medida

d) Escriba dominio contextualizado $C(t)$

e) ¿Cuál fue el costo unitario de fabricación a inicios del 2007?

3. Un fundo en el Sur de Santiago produce frutos para exportar y establece un modelo que indica que la cantidad de kilógramos embalados por día depende de la cantidad n de personas que trabajan, según:

$$k(n)=30\cdot\sqrt[3]{n}+5n \text{, donde } n\in[1,343]$$

Además se sabe que el ingreso total en pesos que se percibe por la exportación de la fruta embalada está dado por:

$$I(k)=570k \text{, donde } k\in[35,1925]$$

a) ¿Cuántos kilos de fruta son embalados por 100 trabajadores? ¿Cuál sería el ingreso?
b) Determine $I(n)$
c) Interprete la función $I(n)$ **(siempre indicar unidad de medida)**
d) ¿Cuál es el ingreso si trabajan 150 personas?

4. El número de viviendas construidas N depende de la tasa de interés hipotecaria r de acuerdo con la función:

$$N(r)=\frac{50}{100+r^2}$$ Donde N está en millones de viviendas.

La tasa de interés actualmente está en 12% y se predice que disminuirá a 8% en los siguientes 2 años de acuerdo con la función:

$$r(t)=12-\frac{8t}{t+24}$$ Donde t es el tiempo medido en meses.

a) Exprese el número de viviendas en función del tiempo.
b) ¿Cuál es el número de viviendas en este instante?
c) ¿Cuál es el número de viviendas transcurrido 1 año y 6 meses? ¿y cuál será la tasa de interés?

5. La velocidad de reacción de un químico (grados Celsius por segundo) depende de la temperatura T (en grados Celsius) de acuerdo con la función $R = \dfrac{T^2 + 3\cdot\sqrt{T}}{100}$.

   Si T varía con el tiempo de acuerdo a $T = 0{,}5\,(t+1)$, donde t representa el tiempo en segundos.

   a) Exprese la velocidad de reacción en función del tiempo.
   b) ¿Cuál es la velocidad de reacción a los 5 segundos?

6. Un estudio ambiental de cierta comunidad suburbana sugiere que el nivel diario promedio de monóxido de carbono en el aire será $C(p) = 0{,}4p + 1$ partes por millón (ppm) cuando la población sea p miles. Se estima que en t años la población de la comunidad será $p(t) = 8 + 0{,}2t^2$ miles.

   a) Exprese el nivel de monóxido de carbono en el aire en función del tiempo.
   b) ¿Cuál será el nivel de monóxido de carbono en 2 años, a partir de hoy?
   c) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que el nivel de monóxido de carbono alcance las 6,2 partes por millón?

7. La cantidad de unidades y, que venderá un fabricante dependerá del precio unitario p del artículo (en dólares) y se modela con la siguiente función:

   $$y(p) = 300 - \frac{3}{2}p \text{ , donde } p \in [10{,}200]$$

   Además se sabe que el ingreso semanal en dólares está dado por la función:

   $$I(y) = \frac{1}{100}y^2 \text{ , donde } y \in [0{,}285]$$

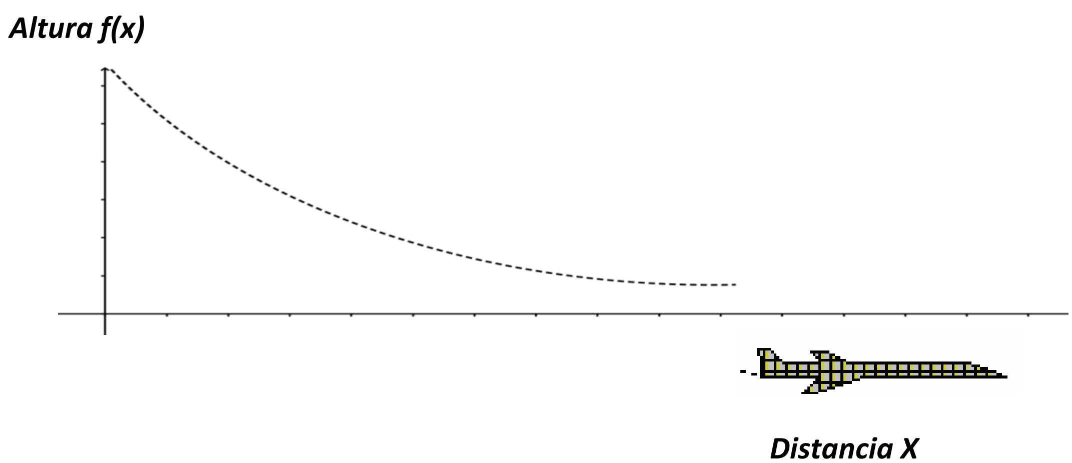
   a) Determine $I(p)$
   b) Interprete la función $I(p)$
   c) Si el precio unitario es de US10 y US 200 ¿Cuál será el ingreso semanal respectivo?

II Límites de funciones

Para tener una **<u>visión intuitiva del concepto de límite</u>** de una función revisemos los siguientes ejemplos.

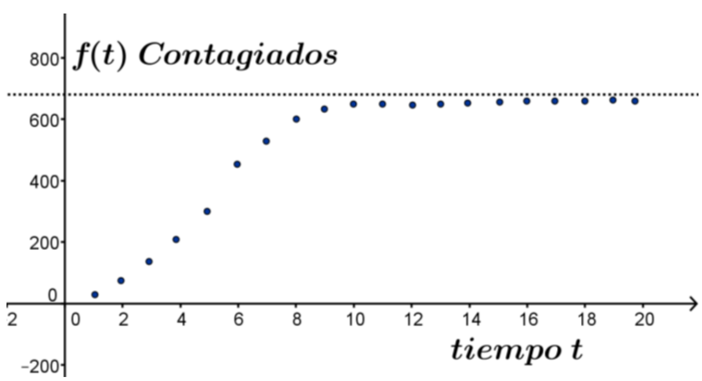
Un avión para aterrizar sobrevuela un pista (variable x longitud que recorre de la pista) mientras que su altura va disminuyendo (variable $f(x)$). A medida que la variable x aumenta $f(x)$ disminuye hasta hacerse cero. En este caso el límite de la altura $f(x)$, cuando la distancia x crece es cero, en otras palabra tenemos

$$\lim_{X\to\infty} f(x) = 0$$



Un segundo ejemplo. Una persona se contagia de una enfermedad y entra en contacto con varias personas que a su vez se contagian y estas contagian a aquellas con las que se cruzaron ¿Cuánta gente se contagiará de la enfermedad?

Un inicio apropiado para responder esta pregunta es recopilar los datos y graficarlos obteniendo lo siguiente.

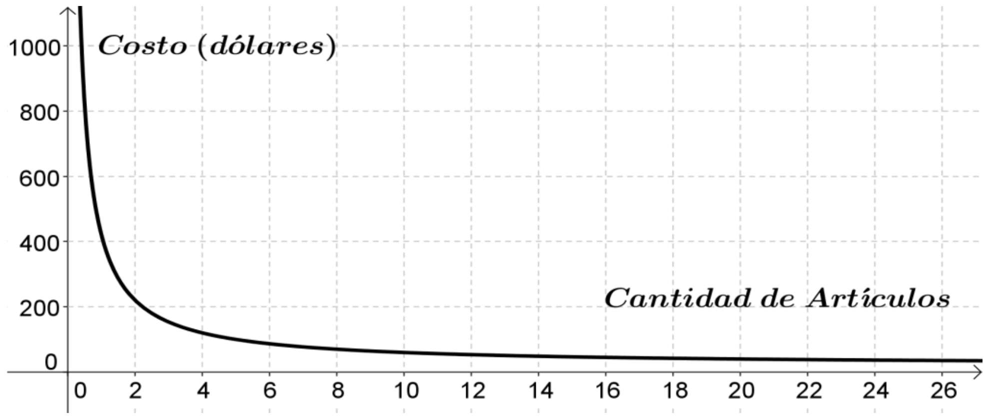


Vemos que aunque el número de contagios $f(t)$ puede continuar creciendo a medida que aumenta el tiempo (variable t) nunca sobrepasa el número 700. En este caso el límite de la cantidad de contagiados $f(t)$, cuando el tiempo x crece es 700, en otras palabra tenemos

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 700$$

II.1 Límite mediante a aproximaciones

8. Es costo en dólares de producción de x cantidad de artículos se modela mediante la siguiente función $C(x)=\dfrac{400}{x}+20$

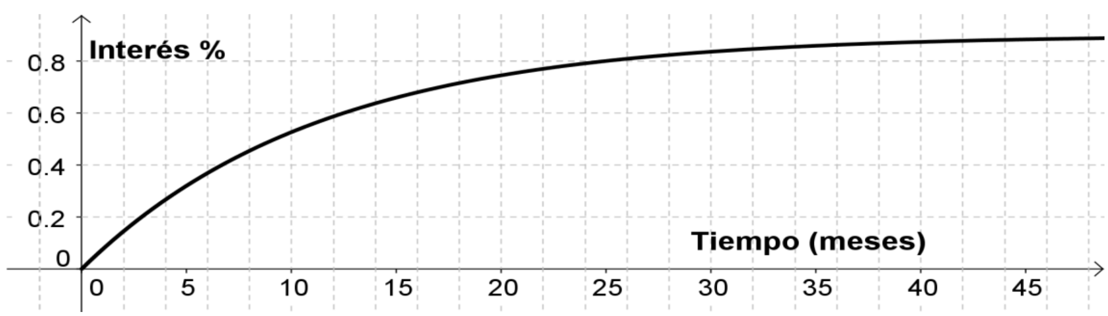


a) ¿Cuál es el costo de producción al fabricar 2, 20 y 200 artículos?

b) ¿Qué ocurre con el costo de producción a medida que la fabricación de artículos crece indefinidamente? Para responder puede completar la siguiente tabla.

x	1.000	10.000	1.000.000	10.000.000
$C(x)$				

9. El porcentaje de interés por cuentas por cobrar asociados al uso de tarjetas de créditos de un banco después de t meses de la obtención de la tarjeta está dado por la función $P(t)=0{,}9(1-3^{-0{,}08t})$



a) ¿Qué % de interés se espera al finalizar el primer año?

b) Determine $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$, para ello puede utilizar la siguiente tabla de valores

t	10	100	1.000	1.000.000
$p(t)$				

c) Interprete el valor del límite, obtenido en la pregunta anterior

II.1 Límites al Infinito Elementales.

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{C}{x^n} = 0$, Si $n > 0$ y C es un número real

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} C = C$, Si C es un número real

10. Es costo en dólares de producción de x cantidad de artículos se modela mediante la siguiente función $C(x) = \frac{400}{x} + 20$

a) Determine $\lim\limits_{x\to\infty} C(x)$ utilizando tabla e límites al infinito elementales

b) Interprete el valor del $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

11. Se modela la preparación de un deportista que correrá 100 metros planos con la función $f(x) = \frac{-3 - x^2}{10 + 0{,}2x^2} + 15$, donde $f(x)$ son los segundos que se demora en llegar a la meta después de x días de entrenamiento.

a) Si su entrenamiento dura 6 días ¿En cuánto tiempo se estima que llegue a la meta?

b) Determine $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (utilice límites al infinito elementales)

c) Interprete el valor del $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

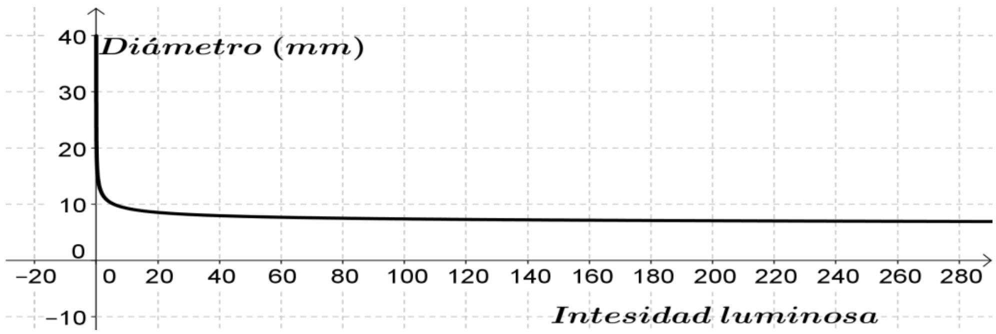
12. Una empresa consultora ha determinado que el número de mini-markets existentes en una ciudad se puede representar por la función $M(x) = \frac{12 - 45x + 120x^3}{1 + 25x^2 + 2x^3}$ donde x son los años transcurridos.

a) ¿Cuántos de estos negocios habrá, transcurridos 11 años?

b) ¿Cuántos de estos negocios habrá a largo plazo?

13. El diámetro de la pupila (en milímetros) puede obtenerse a partir de la función $f(x) = \frac{160+90x^{0,4}}{4+15x^{0,4}}$, donde x es la intensidad luminosa.

¿Qué ocurre con el diámetro de la pupila si la intensidad luminosa aumenta en forma indefinida?



14. En un colegio, el porcentaje de estudiantes que sufre mononucleosis[1], x días después del primer caso reportado, está dado por la función $P(x) = \frac{100x}{2x^2+32}$.

a) Determine $\lim_{x \to \infty} P(x)$

b) Interprete el valor del $\lim_{x \to \infty} P(x)$

15. La Federación de caza de cierto estado introduce 50 ciervos en una determinada región. Se cree que el número de ciervos crecerá siguiendo el modelo $f(x) = \frac{50+30x}{1+0,04x}$, donde x es el tiempo transcurrido en años

a) Calcule la cantidad de animales que habrá dentro de 10 años

b) ¿A cuántos animales se podrá llegar a medida que transcurre el tiempo indefinidamente?

[1] La mononucleosis también conocida como enfermedad del beso es causada por un virus perteneciente a la misma familia del virus del herpes. Aparece más frecuentemente en adolescentes y adultos jóvenes, y los síntomas que la caracterizan son fiebre, faringitis o dolor de garganta, inflamación de los linfonodos y fatiga

SIGUE PRACTICANDO:

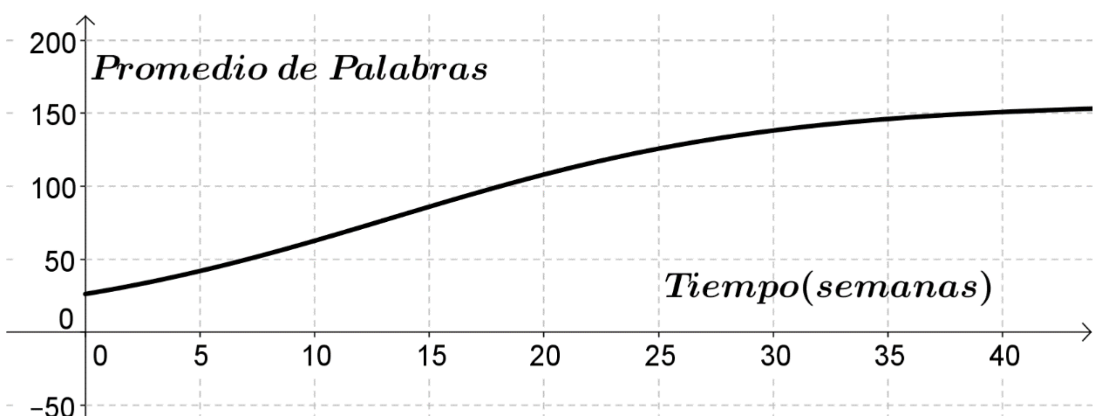
16. Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día, es una función que depende del número de trabajadores, que viene dada por $P = 8m + 5$. Además el ingreso total (en dólares) al vender las unidades producidas, está dada por la función $I = 60P$, determine:

   a) Determine el ingreso total en función del número de trabajadores
   b) ¿Cuál es el ingreso si trabajan en la producción 35 personas?

17. Se sabe que el precio de un artículo en miles de pesos a medida que transcurre el tiempo t (en meses) está dado por la función $P(t) = \frac{5t+10}{13+t}$

   a) ¿Cuál es el precio del artículo transcurrido 10 meses?
   b) Determine $\lim_{t\to\infty} P(t)$
   c) Interprete el valor del $\lim_{t\to\infty} P(t)$

18. En una academia de mecanográfica, el número promedio de palabras por minutos luego de t semanas prácticas, está dado por $N(t) = \frac{157}{1+5e^{-0,12t}}$



   a) Determine el número promedio de palabras por minuto que pueden escribir una persona luego de haber recibido lecciones durante 10 semanas
   b) Determine el número promedio de palabras por minuto que pueden escribirse cuando el estudiante practica indefinidamente