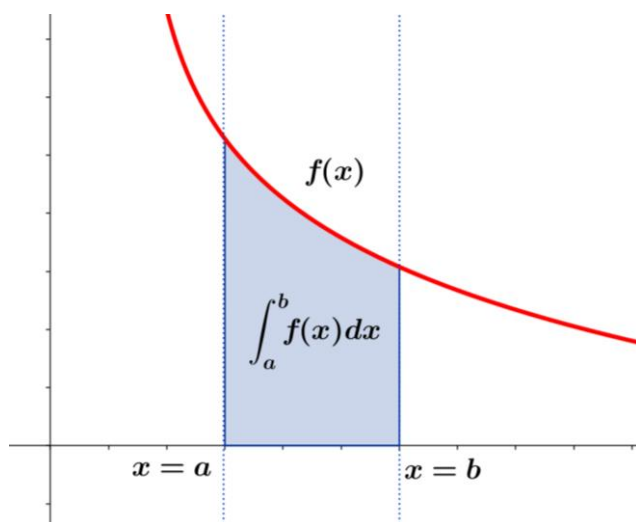


## GUÍA N° 9 DE CÁLCULO I

## Ejercicios de Aplicación: Integrales Definidas

## I Concepto de integral definida.

Dada una función  $f(x)$  y un intervalo  $[a, b]$ , la Integral definida corresponde al área limitada entre la gráfica de  $f(x)$ , el Eje  $X$ , y las rectas verticales de  $x = a$  y  $x = b$  tal como lo muestra el siguiente dibujo.



La integral definida se representa por  $\int_a^b f(x) dx$

$\int$ : Signo de integración

$f(x)$ : función a integrar

$a$ : Límite inferior de integración

$b$ : límite superior de integración

$dx$ : Diferencial de  $x$ , e indica cuál es la variable de la función que se integra

1. Calcule las siguientes integrales definidas.

a)  $\int_{-1}^2 x^4 dx$

b)  $\int_1^5 2x dx$

c)  $\int_{-1}^0 (x^2 - 2x + 3) dx$

**II Valor Promedio**

Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$ , entonces el Valor promedio de una función entre los valores  $a$  y  $b$  es:

$$VP(f(x)) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

2. Se estima que para este año, el precio del litro de bencina (Gasolina 97) se comportará de acuerdo a la función  $P = 14m + 796$ , donde  $P$  es el precio en pesos transcurrido  $m$  meses del año.
  - a) Determine dominio Contextualizado
  - b) ¿Cuál es el precio de la bencina a finales de enero y diciembre?
  - c) ¿Cuál será el precio promedio de la bencina entre finales marzo y finales diciembre de este año?
3. Durante varias semanas, la autopista central registró la rapidez del tráfico que fluye por la salida a avenida Kennedy. Los datos indican que entre la 13:00 y las 18:00 horas. de un día laboral, la rapidez del tráfico en la salida es aproximadamente  $S(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 2$  kilómetros por hora, donde  $t$  son las horas transcurridas después del mediodía. Calcular la rapidez promedio del tráfico entre la 13:00 y las 18:00 horas.
4. Los registros indican que transcurridos  $x$  meses del año, el precio del pollo en los supermercados de estadounidenses era  $P(x) = 0,09x^2 - 0,2x + 19$  dólares por kilogramo. ¿Cuál fue el precio promedio del pollo entre finales del primer mes hasta finales de marzo?
5. Suponga que la temperatura en grados Celsius del filamento de una ampolleta de bajo consumo depende de los minutos transcurridos ( $t$ ) desde su encendido, según la función  $T(t) = 15 + t + 0,06t^2$ . Calcular la temperatura promedio entre los 5 y los 8 minutos de encendido.

### III Excedente de consumidores y productores

**Excedente de los consumidores:** Es la diferencia entre lo que el consumidor está dispuesto a pagar por la compra del producto y lo que realmente paga. Si se compran  $x_0$  unidades de un artículo a un precio unitario  $y_0$  y  $D(x)$  es la función de demanda el Excedente de los consumidores se calcula:

$$EC = \int_0^{x_0} D(x)dx - x_0 \cdot y_0, \text{ donde } y_0 = D(x_0)$$

$\int_0^{x_0} D(x)dx$ : Corresponde a la cantidad total que los consumidores están dispuestos a pagar por comprar  $x_0$  productos

$x_0 \cdot y_0$ : Corresponde a la cantidad total que los consumidores efectivamente pagan al comprar  $x_0$  productos

**Excedente de los productores:** Es el beneficio adicional que los productores obtienen por la venta de sus productos, ya que son capaces de venderlos a un precio mayor del que están dispuestos a cobrar. Si se venden  $x_0$  unidades de un artículo a un precio unitario  $y_0$  y  $O(x)$  es la función de oferta el Excedente de los productores se calcula:

$$EP = x_0 \cdot y_0 - \int_0^{x_0} O(x)dx, \text{ donde } y_0 = O(x_0)$$

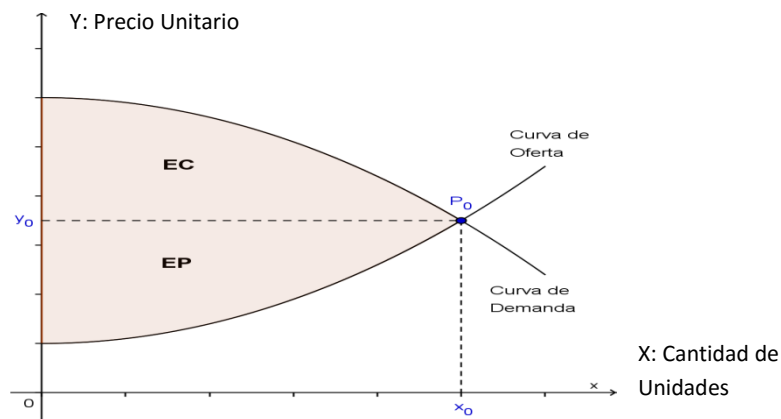
$\int_0^{x_0} O(x)dx$ : Corresponde a la cantidad mínima que los productores están dispuestos a obtener por vender  $x_0$  productos

$x_0 \cdot y_0$ : Corresponde a la cantidad total que los productores efectivamente reciben por vender  $x_0$  productos

**Observación:**

**El punto de equilibrio**

$P_0 = (x_0, y_0)$  es donde se iguala la curva de Demanda y la curva de Oferta.



- 
6. La función demanda para un artículo está dada por  $D(x) = -0,01x^2 + 0,4x + 252$  miles de pesos por artículo.
- ¿Cuánto está dispuesto a pagar el consumidor por la compra de 100 unidades? Y ¿Cuánto efectivamente paga?
  - Determine el excedente de los consumidores cuando el nivel de venta es 100 unidades.
7. La función oferta para  $x$  ternos está dado por  $O(x) = 0,3x^2$  euros por unidad.
- ¿Cuánto es lo mínimo que está dispuesto a obtener el productor al vender 15 unidades? Y ¿Cuánto efectivamente obtiene al venderlos?
  - Determine el excedente del productor cuando el nivel de venta es 15 artículos.
8. La función demanda para  $x$  televisores LED es  $D(x) = 4.500 - 0,8x - 0,06x^2$  dólares por unidad.
- Determine el valor unitario al comprar 210 televisores LED
  - Hallar el excedente de los consumidores cuando el nivel de venta es de 210 unidades.
9. La función de oferta para cuadernos universitarios es  $O(x) = 0,21x^2 + 1,4x + 780$  pesos por unidad
- Determine el valor unitario al vender 20 cuadernos
  - Hallar el excedente de los productores cuando el nivel de venta es de 20 unidades.
10. Un fabricante de neumáticos estima que los mayoristas demandarán  $x$  miles de neumáticos radiales cuando el precio sea  $D(x) = -10x^2 + 9000$  pesos por neumático, y el mismo número de neumáticos se ofertarán cuando el precio sea  $O(x) = 20x^2 + 100x + 5000$  pesos por neumático. Determine el punto de equilibrio y calcule el excedente de los consumidores y del productor en dicho punto.
11. Suponga que la demanda y la oferta de un producto en dólares está dada por las funciones  $D(x) = 1.000 - 20x$  y  $O(x) = x^2 + 10x$ , respectivamente, donde  $x$  corresponde a la cantidad de artículos. Determine el excedente del consumidor y del productor en el punto de equilibrio.

**SIGUE PRACTICANDO:**

12. Registros indican que a partir del año 2010 el precio en pesos del kilogramo de carne molida en los supermercados TUTOS fue de  $P(x) = 0,12x^2 - 0,06x + 1.450$  transcurridos  $x$  meses ¿Cuál fue el precio promedio de la carne molida durante los 3 primeros meses del año?
13. La cantidad de bacterias presentes en cierto cultivo después de  $t$  minutos de un experimento era  $Q(t) = 2.000e^{0,05t}$ . ¿Cuál fue la cantidad media (promedio) de bacterias presentes durante los 5 primeros minutos del experimento?
14. La temperatura en el aeropuerto local de una ciudad, indica que  $t$  horas después de medianoche, fue de  $f(t) = -0,6t^2 + 5t + 0,2$  grados Celsius. ¿Cuál fue la temperatura promedio en el aeropuerto entre las 3:00 a.m. y las 8:00 a.m.?
15. La función demanda de los consumidores de cierto artículo es  $D(x) = 200 - 3x^2$  dólares por unidad. Hallar el excedente de los consumidores si se venden 3 artículos.
16. La función de oferta de agendas 2014, está dada por  $O(x) = 3x^2 + 1,2x + 12.000$  pesos por unidad. Hallar el excedente de los productores cuando el nivel de venta es de 10 unidades.
17. Registros indican que en el mes  $x$  del año 2013, el precio de la carne molida está dado por  $P(x) = 1,5x^2 - 0,02x + 3500$  pesos por kilogramo. ¿Cuál fue el precio promedio de la carne molida durante los 4 primeros meses del año?
18. La función de demanda para clavos de media pulgada, está dada por  $D(x) = 6000 - 0,2x - 0,01x^2$  pesos por unidad. Hallar el excedente de los consumidores cuando el nivel de venta es de 100 unidades.