GUÍA N° 6 DE CÁLCULO I

Máximos y Mínimos. Problema de Optimización

Un problema de optimización consiste en buscar la mejor solución mediante la minimización o maximización de uno de sus aspectos. En otras palabras se trata de calcular o determinar el valor mínimo o máximo de una función de una variable.

Se debe tener presente que:

- Generalmente la función que se desea minimizar o maximizar debe ser expresada en función de las variables relacionadas en el problema.

- En ocasiones las restricciones del problema generan ecuaciones donde se involucran las variables del problema. Estas ecuaciones permiten obtener la función de una variable que se quiere minimizar o maximizar.

Te recomendamos seguir los siguientes pasos para resolver un problema de optimización:

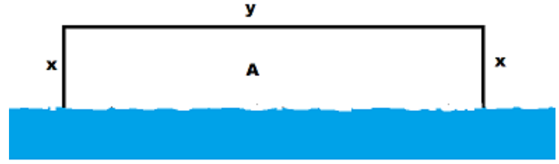
1º. Identificar los datos del problema
2º. Determinar la Función a Optimizar. Expresarla en función de una variable
3º. Determinar puntos críticos (derivando Función a Optimizar)
4º. **Verificar si los puntos críticos son un máximos o mínimos**
5º. Responder la pregunta

1. Un granjero tiene 2400 metros de cerca y desea rodear un campo rectangular que limita con un río recto. No necesita cercar a lo largo del río ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?

Ten en cuenta:

⇨ Contorno $P = y + 2x$

⇨ Área $A = x \cdot y$



2. Se requiere fabricar una lata cilíndrica para que contenga 1 litro de aceite (1000 cm^3). Encuentre las dimensiones que minimizarán el costo del metal para fabricar la lata.

Ten en cuenta:
Para minimizar el costo del metal, minimizaremos el área de la superficie del cilindro (tapa, fondo y lados), por lo que se debe considerar:

⇨ Área $A = 6{,}28r^2 + 6{,}28\,r\,h$

⇨ Volumen $V = 3{,}14\,r^2\,h.$

Donde r correspondel al radio del cilindro y h a la altura

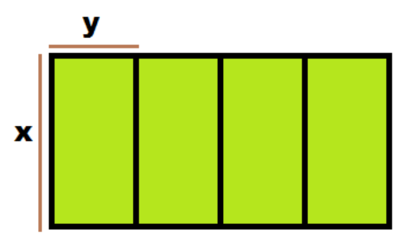
Nota: Las fórmulas originales son $\mathrm{A} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ y $\mathrm{V} = \pi r^2 h$, se reduce considerando $\pi = 3{,}14$

3. Un granjero que dispone de 750 metros de cerca desea cercar un área rectangular y luego dividirla en cuatro corrales iguales con un cercado paralelo a un lado del rectángulo.
Determine las dimensiones de cada corral optimizando la función área e interprete dichos resultados.

Ten en cuenta:

⇨ Perímetro del área rectangular $P = 5x + 8y$

⇨ Área de 1 corral $A = x \cdot y$

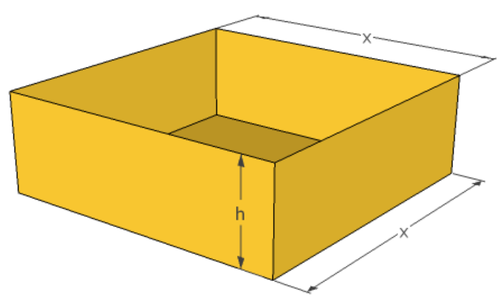


4. Se cuenta con 1200 cm^2 de material para hacer una caja de base cuadrada y la parte superior abierta.
Determine las dimensiones de la caja optimizando el volumen e interprete dichos resultados.

Ten en cuenta:

⇨ Área $A = 4 \cdot h \cdot x + x^2$

⇨ Volumen $V = x^2 \cdot h$.



5. Una ventana normada tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo. Si el perímetro es de 30 pies, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

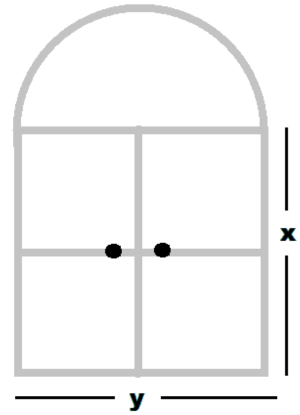
Ten en cuenta:

- ⇨ Área $A = xy + 0{,}3925y^2$
- ⇨ Perímetro $P = 2x + 2{,}57y$

Nota:

Las fórmulas originales son $A = \text{xy} + \frac{1}{8}\pi y^2$ y

$P = 2\text{x} + \text{y} + \frac{1}{2}\pi y$, se reduce considerando $\pi = 3{,}14$

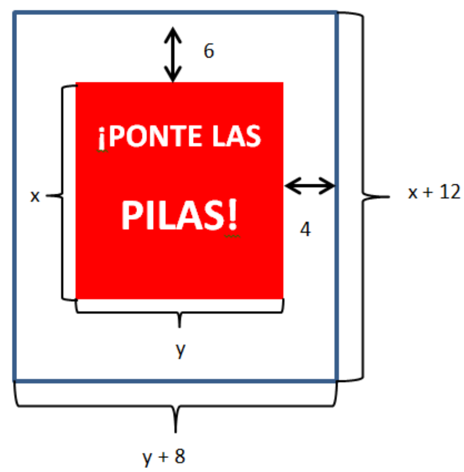


6. En un cartel rectangular los márgenes superior e inferior miden 6 cm cada uno y los laterales, 4 cm.

Si el área del cartel impresa se fija en 384 cm^2. Determine el ancho y largo del cartel optimizando la función *Área del cartel* e interprete dichos resultados

Ten en cuenta:

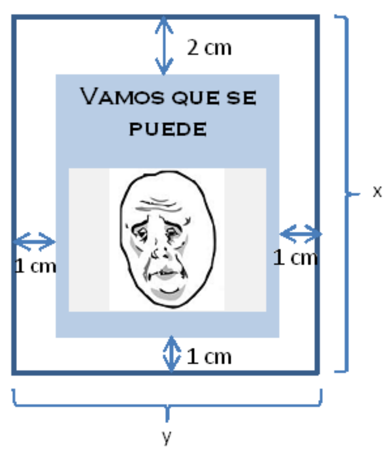
- ⇨ Área parte impresa
- ⇨ Área cartel



7. Un cartel rectangular debe medir 180 pulgadas cuadradas con márgenes de 1 pulgada abajo y a los lados y 2 pulgadas arriba ¿Qué dimensiones resultarán el área impresa máxima?

Ten en cuenta:

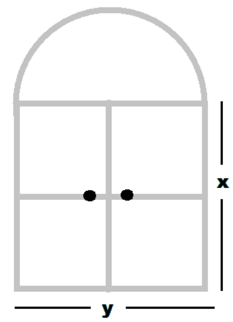
- ⇨ Área parte impresa
- ⇨ Área cartel



8. Una ventana presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana con área máxima, sí su perímetro es de 10 m.

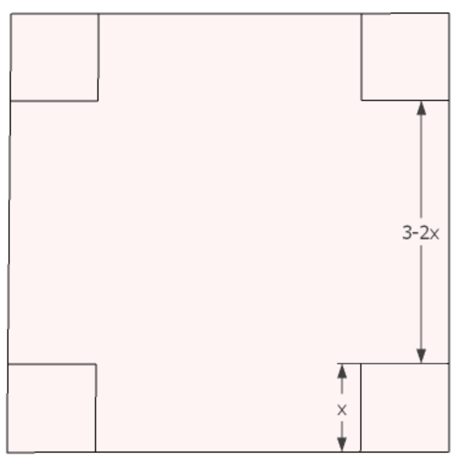
Ten en cuenta:

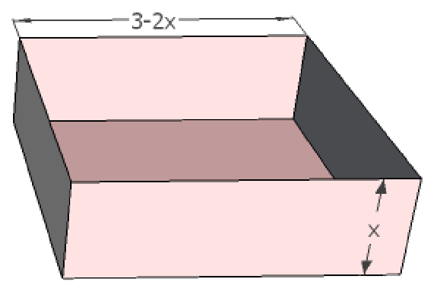
- ⇨ Área $A = xy + 0{,}3925y^2$
- ⇨ Perímetro $P = 2x + 2{,}57y$



SIGUE PRACTICANDO:

9. Se va a construir una caja con la parte superior abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón que tiene 3 pie de ancho, al recortar un cuadrado de cada una de las cuatro esquinas y doblar los lados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que puede tener una caja semejante.





Ten en cuenta:

Para maximizar el volumen de la caja se debe considerar

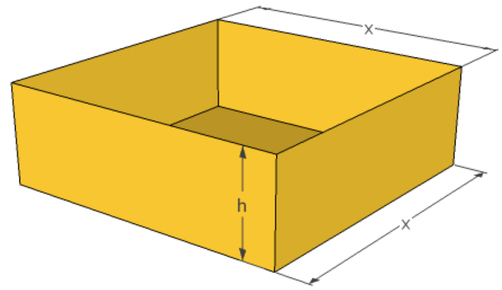
$V = ancho \cdot largo \cdot alto$

10. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32.000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

Ten en cuenta:

⇨ Área $A = 4 \cdot h \cdot x + x^2$

⇨ Volumen $V = x^2 \cdot h$.



11. Se desea construir un recipiente cilíndrico de conservas con tapa, que tenga una superficie total de 80 cm^2. Determine sus dimensiones de modo que tenga el mayor volumen posible

Ten en cuenta:

Para minimizar el costo del metal, minimizaremos el área de la superficie del cilindro (tapa, fondo y lados), por lo que se debe considerar:

⇨ Área $A = 6{,}28r^2 + 6{,}28\, r\, h$

⇨ Volumen $V = 3{,}14\, r^2\, h$.

Donde r correspondel al radio del cilindro y h a la altura