Лекция 2

0.8. Представление информации в ЭВМ

0.8.1 Системы счисления (СС)

Основной СС является – двоичная, а вспомогательными – 8 и 16-ричные СС.

Под **системой счисления** (СС) понимается способ представления любого числа посредством некоторого алфавита символов, называемых цифрами.

В зависимости от способа изображения чисел, СС делятся на:

– **позиционные** (2013, 10010, 5F), количественное значение каждой цифры зависит от ее места (позиции), которую она занимает в изображении числа.

– **непозиционные** (XX, XIV, CXXVI), для каждого числа используется специфическое сочетание символов.

Позиционные системы счисления характеризуются:

• **основанием** *m* системы счисления – количеством (n) различных символов, используемых для изображения чисел.

Значения этих символов лежат в пределах от 0 до m-1;

• **разрядом** – позицией, занимаемой отдельным символом в изображении числа.

Разряды нумеруются справа налево, начиная с 0;

• **весом** разряда – количественным значением одной единицы разряда. Численно вес разряда определяется через основание **m** системы счисления и номер **n** разряда: $\mathbf{m^n}$.

m – основание системы счисления;
m = 10 в десятичной СС (0, 1, 2 . . 9);
m = 2 в двоичной СС (0, 1);

$$m=10 \begin{cases} \begin{array}{ccccl} 3 & 2 & 1 & 0 & \text{номер разряда} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \text{десятичное число} \\ 10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 & \text{вес разряда} \end{array} \end{cases}$$

$$m=2 \begin{cases} \begin{array}{cccccl} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \text{номер разряда} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \text{двоичное число} \\ 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & \text{вес разряда} \end{array} \end{cases}$$

Максимальное целое число, которое может быть представлено в **n** разрядах –

$$\mathbf{N_{max} = m^n - 1}.$$

Минимальное значащее (не равное 0) число, которое можно записать в **s** разрядах дробной части –

$$\mathbf{N_{min} = m^{-s}}.$$

Тогда, имея в целой части числа **n**, а в дробной s разрядов, можно представить $\mathbf{m^{n+s}}$ чисел

от **0** до $\mathbf{m^{n+s} - 1}$.

Запись числа в СС с основанием m:

$$\mathbf{X_n\, m^n + X_{n-1}\, m^{n-1} + \ldots + X_1\, m^1 + X_0\, m^0 + X_{-1}\, m^{-1} + X_{-2}\, m^{-2} + X_{-s}\, m^{-s}}$$

Например,

$256{,}47_{10} = 2{\cdot}10^2 + 5{\cdot}10^1 + 6{\cdot}10^0 + 4{\cdot}10^{-1} + 7{\cdot}10^{-2}$

$101{,}11_2 = 1{\cdot}2^2 + 0{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0 + 1{\cdot}2^{-1} + 1{\cdot}2^{-2}$

Запись десятичного числа N (с основанием 10) в 2-й СС:

$$N_{10} = X_n{\cdot}2^n + X_{n-1}{\cdot}2^{n-1} + X_{n-2}{\cdot}2^{n-2} + \ldots + X_0{\cdot}2^0$$

Например,

10010 $\rightarrow$ $1{\cdot}2^4 + 0{\cdot}2^3 + 0{\cdot}2^2 + 1{\cdot}2^1 + 0{\cdot}2^0 = 16 + 2 = 18_{10}$

4 0

10110101 $\rightarrow$ $1{\cdot}2^7 + 0{\cdot}2^6 + 1{\cdot}2^5 + 1{\cdot}2^4 + 0{\cdot}2^3 + 1{\cdot}2^2 + 0{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0 =$

7 54 2 0 $128 + 0 + 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 181_{10}$

0.8.2 Формы представления чисел в ЭВМ

В ЭВМ применяются две формы представления двоичных чисел – естественная форма или форма с фиксированной запятой (точкой) и нормальная форма или форма с плавающей запятой (точкой).

Формы представления двоичных чисел

естественная форма | нормальная форма

С фиксированной запятой	С плавающей запятой
- 10302,20265	$-\ 0{,}\underline{1030220265}{\cdot}10^5$
+ 00821,35400	$+\ 0{,}\underline{821354}{\cdot}10^3$
+ 00000,00237	$+\ 0{,}\underline{237}{\cdot}10^{-2}$

мантисса порядок

При m=2, n=10 и s=6 диапазон чисел простирается

0,015<N<1024 (ф. з.) $10^{-19}<N<10^{19}$ (п. з.)

В естественной форме положение запятой, отделяющей целую часть числа от дробной части в разрядной сетке, постоянно для всех чисел.

Диапазон значащих чисел небольшой и при n-разрядной целой части и s-разрядной дробной части числа без учета знака составляет от $m^{-s} < N < m^n - m^{-s}$.

Если в результате операции получится число, выходящее за допустимый диапазон, происходит переполнение разрядной сетки, и дальнейшие вычисления теряют смысл.

В нормальной форме каждое число представляется как

$$N = \pm M \cdot m^{\pm n},$$

где M – мантисса числа (|M|<1), n – порядок (целое число),
m – основание системы счисления.

Последовательность нескольких байтов называют **полем данных**.
В ПК могут обрабатываться поля ***постоянной*** и ***переменной*** длины.

Поля постоянной длины могут быть следующих размеров (форматов):
слово (4 байта), **полуслово** (2 байта),
полуторное слово (6 байт), **двойное слово (8** байт),
расширенное слово (10 байт).

В полях **постоянной длины** числа с фиксированной запятой чаще всего имеют формат **слова и полуслова** и заполняют формат справа налево. Оставшиеся свободными старшие разряды формата заполняются нулями.

В крайнем левом разряде формата отображается знак числа, при этом знак «+» кодируется нулем (0), а знак «–» – единицей (1).

Например, запись числа – 195_{10} = – 11000011_2 с фиксированной запятой:

	Знак	Абсолютная величина числа ←				
№ разряда	31	30	29	. . .	1	0
число	1	0	0	0 … 0 0 1 1 0 0 0 0	1	1

Числа с **плавающей запятой** чаще всего имеют формат **двойного и расширенного слова**. Порядок заполняет соответствующую часть формата справа налево, а мантисса – слева направо. Оставшиеся свободными младшие разряды мантиссы формата заполняются нулями.

Например, запись числа – 195_{10} = – $0{,}11000011\cdot2^{1000}$ с плавающей запятой:

	Порядок ←				Мантисса →			
	Знак	Абсолютная величина			Знак	Абсолютная величина		
№ разряда	63	62	. . .	56	55	54	. . .	0
	0	0	0 0 1 0 0	0	1	1	1 0 0 0 0 1 1 0…	0

Поля переменной длины имеют размер от 0 до 256 байт и кратный 8.

При выполнении операций ввода-вывода и арифметических действий данные часто представляются в двоично-десятичной системе счисления – когда каждая цифра десятичного числа отображается 4-разрядным двоичным числом.

Двоично-десятичные числа представляются полями переменной длины в так называемых ***упакованном*** и ***распакованном*** форматах.

Пример, запись числа – 195_{10} в ***упакованном*** формате

0001	1001	0101	1101
1	9	5	Знак

Пример, запись числа – 195_{10} в ***распакованном*** формате

0011	0001	0011	1001	1101	0101
Зона		Зона		Знак	

8.3 Арифметические и логические основы работы ЭВМ

8.3.1 Арифметические основы

Сложение	Вычитание	Умножение
$0 + 0 = 0$	$0 - 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$1 - 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 - 1 = 0$	$0 \cdot 1 = 0$
$1 + 1 = 10$	$10 - 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 13 \\ +\ \underline{7} \\ 20_{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0\,1\,1\,0\,1 \\ +\ \underline{0\,0\,1\,1\,1} \\ 1\,0\,1\,0\,0_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 55{,}25 \\ +\ \underline{19{,}50} \\ 74{,}75_{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,.\,0\,1 \\ +\ \underline{0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,.\,1\,0} \\ 1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,.\,1\,1_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7{,}5 \\ *\ \underline{5} \\ 37{,}5 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 1\,1\,1\,.\,1 & \text{множимое} \\ \underline{1\,0\,1} & \text{множитель} \\ 1\,1\,1\,1 & \text{1-е частичное произведение} \\ +\quad 0\,0\,0\,0 & \text{2-е частичное произведение} \\ \underline{1\,1\,1\,1} & \text{3-е частичное произведение} \\ 1\,0\,0\,1\,0\,1.1_2 & \end{array}$$

С целью упрощения реализации арифметических операций применяют специальные коды:

- прямой
- обратный
- дополнительный

Прямой: знак « + » кодируется 0, знак « – » кодируется 1, старший разряд называется знаковым.

Например: $+5_{10} = \mathbf{0}\ 1\,0\,1_2$ $\qquad -5_{10} = \mathbf{1}\ 1\,0\,1_2$

Обратный: знаковый разряд кодируется как в прямом коде, для положительных чисел совпадает с прямым кодом, для отрицательных чисел значащие разряды инвертируются по отношению к прямому коду.

Например: $5_{10} = \mathbf{0}\ 1\,0\,1_2$ $\qquad -5_{10} = \mathbf{1}\ 0\,1\,0_2$

Дополнительный: знаковый разряд кодируется как в прямом коде, для положительных чисел совпадает с прямым кодом, для отрицательных чисел значащие разряды инвертируются по отношению к прямому и к младшему разряду добавляется 1.

Например: $+5_{10} = \mathbf{0}\ 1\,0\,1_2$ $\qquad -5_{10} = \mathbf{1}\ 0\,1\,0 + 1 = \mathbf{1}\,0\,1\,1_2$

$+3_{10} = \mathbf{0}\ 0\,1\,1_2$ $\qquad -3_{10} = \mathbf{1}\ 1\,0\,0 + 1 = \mathbf{1}\,1\,0\,1_2$

$+5 - 3 = +5 + (-3) = 2$

$+3 - 5 = +3 + (-5) = -2$

$$\begin{array}{rl} \mathbf{0}\ 1\,0\,1 & (+5) \\ +\ \underline{\mathbf{1}\ 1\,0\,1} & (-3) \\ \text{отбрасывается}\ 1\quad \mathbf{0}\ 0\,1\,0_2 & (+2) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \mathbf{0}\ 0\,1\,1 & (+3) \\ +\ \underline{\mathbf{1}\ 0\,1\,1} & (-5) \\ \mathbf{1}\ 1\,1\,0_2 & (-2)\ \text{доп. код} \end{array}$$

8.3.2 Логические основы

Для анализа и синтеза (создания) цифровых систем используется математический аппарат алгебры логики или булева алгебра.

Алгебра логики – это раздел математической логики, все элементы (функции и аргументы) которой могут принимать только два значения: 0 и 1, да и нет**.**

a, b, c . . . – высказывания или логические переменные.

Простейшие операции:

I. Операция **отрицания** (операция **НЕ**, **инверсия**)

$$y = \overline{a}$$

II. Логическое **умножение** (операция **И**, **конъюнкция**)

$$y = a \wedge b,$$

III. Логическое **сложение** (операция **ИЛИ**, **дизъюнкция**)

$$y = a \vee b.$$

Старшей является операция инверсии, более младшей – операция конъюнкции, самой младшей – дизъюнкция.

Законы алгебры логики:

– **сочетательный закон:**

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c,$$
$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,$$

– **переместительный закон:**

$$a \wedge b = b \wedge a,$$
$$a \vee b = b \vee a,$$

– **распределительный закон:**

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

– **закон двойной инверсии:** $\overline{\overline{a}} = a$;

– **закон двойственности (правила де Моргана):**

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b},$$
$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b};$$

Аксиомы:

$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$
$1 \vee 1 = 1$	$1 \wedge 1 = 1$
$0 \vee 0 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$
$0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1$	$0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$

Тождества:

$a \vee a = a$	$a \wedge a = a$
$a \vee \overline{a} = 1$	$\overline{a} \wedge a = 0$
$a \vee 1 = 1$	$a \wedge 1 = a$
$a \vee 0 = a$	$a \wedge 0 = 0$

ФАЛ – алгебраическое выражение, содержащее элементы алгебры логики a,b,c…,связанные между собой операциями, определенными в этой алгебре.

Например: $f(a, \overline{b}, c) = \overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{c \vee a} \vee a \vee c$;

Элементарной называется ФАЛ одного или двух аргументов, в логическом выражении которой содержится не более одной логической операции.
Например:

Для двух чисел А и В выполнить следующие операции:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a} \vee \mathbf{b} & \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} & \overline{\mathbf{a} \vee \mathbf{b}} & \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ \overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b} & \mathbf{a} \wedge \overline{\mathbf{b}} & \overline{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} & \mathbf{a} - \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{b} - \mathbf{a} \end{array}$$

Допустим $\mathbf{a} = 13_{10}$ и $\mathbf{b} = 21_{10}$

Представим их значения в двоичной системе счисления:

$$\mathbf{a} \quad 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 13 \to 1101_2 \to \mathbf{0}1101 \qquad \overline{\mathbf{a}} = 10010$$

$$\mathbf{b} \quad 1\cdot2^4 + 0\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 \to 10101_2 \qquad \overline{\mathbf{b}} = 01010$$

Операции

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \quad \begin{array}{r} \mathbf{0}1101 \\ \underline{10101} \\ 11101 \end{array} \qquad \overline{\mathbf{a}} \vee \mathbf{b} \quad \begin{array}{r} 10010 \\ \underline{10101} \\ 10111 \end{array}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad \begin{array}{r} 01101 \\ \underline{10101} \\ 00101 \end{array} \qquad \overline{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}} \quad \begin{array}{r} 10010 \\ \underline{01010} \\ 00010 \end{array}$$

$$\overline{\mathbf{a} \vee \mathbf{b}} = \overline{11101} = 00010$$

$$\overline{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} = \overline{00101} = 11010$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \begin{array}{r} \mathbf{0}1101 \\ \underline{10101} \\ 100010 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a & +13_{10} = \mathbf{0}\ 0\,1\,1\,0\,1_2 & -13_{10} = \mathbf{1}\ \ 1\,0\,0\,1\,0 + 1 = \mathbf{1}\ 1\,0\,0\,1\,1_2 \\ b & +21_{10} = \mathbf{0}\ 1\,0\,1\,0\,1_2 & -21_{10} = \mathbf{1}\ \ 0\,1\,0\,1\,0 + 1 = \mathbf{1}\ 0\,1\,0\,1\,1_2 \end{array}$$

знак знак знак

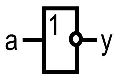
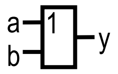
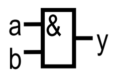
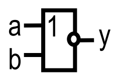
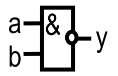
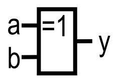
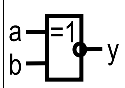
$$\mathbf{b} - \mathbf{a} \quad \begin{array}{rr} + & \mathbf{0}\ \ 1\,0\,1\,0\,1 \\ & \underline{\mathbf{1}\ \ 1\,0\,0\,1\,1} \\ 1 & \mathbf{0}\ \ 0\,1\,0\,0\,0_2 \end{array} \to +8 \text{ (десятичное число)}$$

отбрасывается

знак

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \quad \begin{array}{rl} + & \mathbf{0}\ \ 0\,1\,1\,0\,1 \\ & \underline{\mathbf{1}\ \ 0\,1\,0\,1\,1} \\ & \mathbf{1}\ \ 1\,1\,0\,0\,0_2 \text{ дополнительный код} \\ & \mathbf{1}\ \ 0\,0\,1\,1\,1_2 \text{ обратный код} \\ + & \underline{\qquad\qquad 1} \\ \text{прямой код} & \mathbf{1}\ \ 0\,1\,0\,0\,0_2 \to -8 \text{ (десятичное число)} \end{array}$$

Таблица условно графического обозначения логических элементов и операций

Операция	Логический элемент		Правило выполнения операции			Функция
	УГО	Название	a	b	y	
Отрицание (инверсия)		НЕ (инвертор)	0 1		1 0	$y = \overline{x}$
Дизъюнкция		ИЛИ	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 1	$y = a \vee b$
Конъюнкция		И	0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 0 1	$y = a \wedge b$
Стрелка Пирса		ИЛИ-НЕ	0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 0 0	$y = a \downarrow b = \overline{a \vee b}$
Штрих Шеффера		И-НЕ	0 0 1 1	0 1 0 1	1 1 1 0	$y = a \mid b = \overline{a \wedge b}$
Сумма по модулю 2		Исключающее ИЛИ	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 0	$y = a \oplus b = \overline{a} \wedge b \vee a \wedge \overline{b}$
Равнозначность		Равнозначность	0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 0 1	$y = a \infty b = \overline{a \oplus b} = \overline{a} \wedge \overline{b} \vee a \wedge b$

Примеры работы с другими системами счисления

Dec (10)	Bin (2)	Oct (8)	Hex (16)
0	0000	00	0
1	0001	01	1
2	0010	02	2
3	0011	03	3
4	0100	04	4
5	0101	05	5
6	0110	06	6
7	0111	07	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

$8 \rightarrow$	$1{\cdot}8^1 + 0{\cdot}8^0 = 8 + 0 = 10_8 = 8_{10}$	восьмеричная СС
$9 \rightarrow$	$1{\cdot}8^1 + 1{\cdot}8^0 = 8 + 1 = 11_8 = 9_{10}$	
$10 \rightarrow$	$1{\cdot}8^1 + 2{\cdot}8^0 = 8 + 2 = 12_8 = 10_{10}$	
$11 \rightarrow$	$1{\cdot}8^1 + 3{\cdot}8^0 = 8 + 3 = 13_8 = 11_{10}$	
………..	……….. ……	
$15 \rightarrow$	$1{\cdot}8^1 + 7{\cdot}8^0 = 8 + 7 = 15_{10}$	

$10 \rightarrow$	$10{\cdot}16^0 = A = 10_{10}$	шестнадцатеричная СС
$11 \rightarrow$	$11{\cdot}16^0 = B = 11_{10}$	
………..	……….. ……	
$15 \rightarrow$	$15{\cdot}16^0 = F = 15_{10}$	

Связь между системами счисления В – О – Н

$$\underbrace{01}_{1}\underbrace{1011}_{B}\underbrace{0110}_{6}{}_2 = 1B6_{16} \qquad 56C_H = \underbrace{101}_{5}\underbrace{0110}_{6}\underbrace{1100}_{C}{}_B$$

$$\underbrace{0}_{0}\underbrace{110}_{6}\underbrace{110}_{6}\underbrace{110}_{6}{}_2 = 666_8 \qquad 472_O = \overbrace{1}^{1}\overbrace{0011}^{3}\overbrace{1010}^{A}{}_B = \underbrace{100}_{4}\underbrace{111}_{7}\underbrace{010}_{2}{}_B = 13A_H$$

Операция ИЛИ

$0 \vee 0 = 0$
$1 \vee 0 = 1$
$0 \vee 1 = 1$
$1 \vee 1 = 1$

Операция И

$0 \wedge 0 = 0$
$1 \wedge 0 = 0$
$0 \wedge 1 = 0$
$1 \wedge 1 = 1$

Исключающее ИЛИ

$0 \oplus 0 = 0$
$1 \oplus 0 = 1$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$