Gravitación

Método, aproximaciones y recomendaciones

● Satélites

1. El Sentinel-1 es un satélite artificial de órbita circular polar de la Agencia Espacial Europea dentro del Programa Copérnico destinado a la monitorización terrestre y de los océanos. Está situado a 693 km sobre la superficie terrestre. Si su masa es de 200 kg:
   a) Las velocidades lineal y angular del satélite en la órbita.
   b) El período de la órbita del satélite. ¿Cuántas vueltas da a la Tierra cada día?
   c) La masa de la Tierra.
   d) El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.
   e) Las energías cinética, potencial y mecánica del satélite.
   f) La energía mínima adicional que habría que comunicarle para mandarlo a una distancia muy grande de la Tierra y la velocidad de escape a la atracción terrestre a esa altura.
   g) ¿Qué velocidad hubo que proporcionarle en el lanzamiento para ponerlo en órbita?
   h) La velocidad de escape desde el suelo.
   i) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.
   j) La fuerza con que la Tierra atrae al satélite.

   Datos: $R = 6{,}37·10^6$ m; $g_0 = 9{,}81$ m/s² *Problema con datos de A.B.A.U. extr. 23*

   Rta.: a) $v = 7{,}51$ km/s; $\omega = 1{,}06·10^{-3}$ rad/s; b) $T = 1$ h 39 min, $f = 14{,}6$ día⁻¹; c) Faltan datos;
   d) $|\overline{\boldsymbol{L}}_O| = 1{,}06·10^{13}$ kg·m²/s; e) $E_c = 5{,}64·10^9$ J; $E_p = -1{,}13·10^{10}$ J; $E = -5{,}64·10^9$ J;
   f) $\Delta E = -E = 5{,}64·10^9$ J; $v_{eo} = 7{,}51$ km/s; f) $v_s = 8{,}3$ km/s; g) $g_h/g_0 = 0{,}824$; h) $v_{es} = 11{,}2$ km/s;
   i) $g = 0{,}81\ g_0$; j) $F = 1{,}6·10^3$ N

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	$m = 200$ kg
Altura de la órbita	$h = 693$ km $= 6{,}93·10^5$ m
Radio de la Tierra	$R = 6{,}37·10^6$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}81$ m/s²
Incógnitas	
Valor de las velocidades lineal y angular del satélite	v, ω
Período y frecuencia orbital del satélite	T, f
Módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.	$\lvert\overline{\boldsymbol{L}}_O\rvert$
Energía cinética, potencial y mecánica del satélite en órbita	E_c, E_p, E
Energía para mandarlo a una distancia muy grande de la Tierra	E_∞
Velocidad de escape desde esa altura	v_e
Velocidad desde la superficie para ponerlo en órbita	v_s
Cociente entre los valores de g en el satélite y en la superficie de la Tierra.	g_h/g_0
Fuerza con que la Tierra atrae al satélite	F
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G = G\dfrac{M \cdot m}{r^2}$
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \dfrac{2\pi \cdot r}{T}$
Velocidad angular en un movimiento circular uniforme de período T	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G\dfrac{M \cdot m}{r}$

Ecuaciones

Energía mecánica	$E = E_c + E_p$
Intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia r del centro	$g=\frac{F_G}{m}=G\frac{M}{r^2}$
Momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_O$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ a una distancia $\overline{\boldsymbol{r}}$ de un punto O que se toma como origen	$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$

Solución:

a) El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular de radio

$$r = R + h = 6{,}37·10^6\ [\text{m}] + 6{,}93·10^5\ [\text{m}] = 7{,}06·10^6\ \text{m}$$

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\,g_0=G\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se calcula la velocidad orbital sustituyendo en la ecuación $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{7{,}06\cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}}=7{,}51\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=7{,}51\ \mathrm{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado está de acuerdo con esta suposición.*

La velocidad angular podría calcularse conociendo el período:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

b) El período se calcula con la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T=\frac{2\pi \cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 7{,}06\cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{7{,}51\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]}=5{,}91\cdot 10^3\ \mathrm{s}=1{,}64\ \mathrm{h}$$

Ahora ya se puede calcular la velocidad angular:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\cdot 3{,}14\ [\mathrm{rad}]}{5{,}91\cdot 10^3[\mathrm{s}]}=1{,}06\cdot 10^{-3}\ \mathrm{rad/s}$$

La frecuencia es la inversa el período:

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{1{,}64\ [\mathrm{h}]}\ \frac{24{,}0\ [\mathrm{h}]}{1\ [\mathrm{día}]}=14{,}6\ \mathrm{día}^{-1}$$

Análisis: Los períodos de los satélites terrestres en órbita baja son del orden de hora y media, parecido al resultado.

c) No se puede calcular la masa de la Tierra si no se tiene como dato el valor de la constante de la gravitación universal.
En ese caso se usaría la expresión «$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$» que se obtuvo antes:

$$M=\frac{g_0 \cdot R^2}{G}=\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]}=5{,}96\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

d) El momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O}$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O} = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra es:

$$|\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \mathrm{sen}\ \alpha = 7{,}06\cdot 10^6\ [\mathrm{m}] \cdot 200\ [\mathrm{kg}] \cdot 7{,}51\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}] \cdot \mathrm{sen}\ 90° = 1{,}06\cdot 10^{13}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

e) La energía potencial en la órbita vale:

$$E_\mathrm{p}=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r}=-\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2\cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{7{,}06\cdot 10^6[\mathrm{m}]}=-1{,}13\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

La energía cinética vale:

$$E_\mathrm{c} = m \cdot v^2 /2 = [200\ [\mathrm{kg}]\ (7{,}51\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2] / 2 = 5{,}64\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = 5{,}64\cdot 10^9\ [\mathrm{J}] + (-\ 1{,}13\cdot 10^{10}\ [\mathrm{J}]) = -5{,}64\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo $G \cdot M / r$ por v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}m\cdot v^2-m\cdot v^2=-\frac{1}{2}m\cdot v^2=-E_c$$

f) La energía mínima adicional que habría que comunicarle para mandarlo a una distancia muy grande de la Tierra sería la diferencia entre la energía a una distancia muy grande y la que tiene en la órbita:

$$\Delta E = E_\infty - E$$

Al ser la energía mínima, se toma que el objeto llega al infinito con velocidad nula. Como el origen de energía potencial gravitatoria está en el infinito, la energía potencial gravitatoria de un objeto en el infinito es nula.

$$E_\infty = 0$$

$$\Delta E = -E = 5{,}64\cdot 10^9 \text{ J}$$

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

Si la dirección de escape es perpendicular a la dirección de movimiento del satélite, solo hay que tener en cuenta su energía potencial, ya que la componente de su velocidad en el sentido de escape es nula.

$$\Delta E = ½\ m\cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1 = -E_{p1}$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2=0-\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)=G\frac{M\cdot m}{r}$$

Despejando, la velocidad de escape de un satélite, en dirección perpendicular a la órbita, queda:

$$v_{e\,o\uparrow}=\sqrt{2G\frac{M}{r}}$$

Si la dirección de escape es paralela a la dirección de movimiento del satélite, hay que tener en cuenta su energía cinética.
La energía cinética de un objeto de masa m, que se mueve con velocidad v, es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.

$$E_c = ½\ m\cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de un satélite de masa m, que gira alrededor de un astro de masa M, en una órbita de radio r, es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Donde G es la constante de la gravitación universal.
La energía mecánica de un cuerpo de masa m, que se encuentra en órbita de radio r alrededor de un astro de masa M, es la suma de sus energías cinética y potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Sustituyendo v^2, la expresión de la energía cinética queda:

$$E_c=\frac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

La expresión de la energía mecánica queda:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Si el sentido de escape es el mismo que el de avance del satélite, la energía necesaria sería:

$$\Delta E = ½\ m\cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2=0-\left(-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}\right)=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Despejando la velocidad de escape en el sentido de avance de un satélite en órbita, queda:

$$v_{e\ o\rightarrow}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Si el sentido de escape fuese el opuesto al de avance del satélite, lo que sería un desperdicio de energía, habría que comunicarle una velocidad doble de la que tenía en órbita, para hacerle alcanzar el mismo valor de la velocidad pero en sentido contrario, más esta velocidad adicional:

$$v_{e\ o\leftarrow}=\sqrt{\frac{3}{2}G\frac{M}{r}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, lo lógico es tomar la velocidad de escape en la dirección de avance de un satélite:

$$v_{e\ o}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

$$v_e=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ [m/s^2]\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ [m])^2}{7{,}06\cdot 10^6\ [m]}}=7{,}51\cdot 10^4\ m/s=7{,}51\ km/s$$

Análisis: La velocidad de escape en la superficie de la Tierra es de 11,2 km/s. *El resultado está de acuerdo con este dato teniendo en cuenta que al estar el satélite lejos de la superficie, su velocidad de escape será menor.*

g) La velocidad que hubo que proporcionarle en el lanzamiento para ponerlo en órbita, se puede calcular suponiendo que, una vez comunicada esa velocidad, la energía se conserva hasta la órbita.
Teniendo en cuenta que la energía potencial en la superficie de la Tierra vale:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}\quad=-\frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{R}=g_0\cdot R\cdot m=-9{,}81\ [m/s^2]\cdot 6{,}37\cdot 10^6\ [m]\cdot 200\ [kg]=-1{,}25\cdot 10^{10}\ J$$

La energía cinética del satélite cuando tiene la velocidad necesaria valdrá:

$$E_{cs} = E - E_{ps} = -5{,}64\cdot 10^9\ [J] - (-1{,}25\cdot 10^{10}\ [J]) = 6{,}9\cdot 10^9\ J$$

Análisis: Se pierde una cifra significativa al restar.
Su velocidad será:

$$v_s=\sqrt{\frac{2\,E_{cs}}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}9\cdot 10^9\ [J]}{200\ [kg]}}=8{,}3\cdot 10^3\ m/s=8{,}3\ km/s$$

Análisis: La velocidad tiene que ser menor que la velocidad de escape desde el suelo, que es de 11,2 km/s. *El resultado está de acuerdo con esta suposición.*

h) La velocidad de escape desde el suelo.
La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.

La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

La energía potencial de un cuerpo de masa m situado en la superficie de un astro de masa M y radio R es:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula.
La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

La velocidad de escape v_e le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = G\frac{M \cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$$

(La velocidad de un punto del suelo, en el ecuador, respecto al centro de la Tierra sería:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{24\ [\mathrm{h}]} \frac{1\ [\mathrm{h}]}{3600\ [\mathrm{s}]} = 463\ \mathrm{m/s}$$

En un punto situado a una latitud λ, el radio (distancia al eje de la Tierra) sería $r = R \cos \lambda$, y la velocidad, $v = 463 \cos \lambda$.
Si se lanzase en dirección paralela al suelo, la velocidad de escape dependería del sentido lanzamiento. Habría que restarle, hacia el este, o sumarle, hacia el oeste, la velocidad de rotación del punto de lanzamiento).
Suponiendo que se lanza verticalmente, y sustituyendo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{2\,g_0 \cdot R^2}{R}} = \sqrt{2\,g_0 \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]} = 1{,}12 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s} = 11{,}2\ \mathrm{km/s}$$

i) La intensidad del campo gravitatorio en un punto que dista r del centro de la Tierra es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m} / r^2}{\cancel{m}} = G\frac{M}{r^2}$$

La gravedad a una altura h vale: $$g_h = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

En la superficie de la Tierra vale: $$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

Dividiendo la primera entre la segunda queda:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{\cancel{G \cdot M} / (R+h)^2}{\cancel{G \cdot M} / R^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{(6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{(7{,}06 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2} = 0{,}814$$

Análisis: El valor de la aceleración de la gravedad disminuye con la altura. El resultado está de acuerdo con esto.

j) La fuerza con que la Tierra atrae al satélite vale:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} \cdot m = g_0 \cdot 0{,}824 \cdot m = 9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 0{,}84 \cdot 200\ [\mathrm{kg}] = 1{,}60 \cdot 10^3\ \mathrm{N}$$

También puede calcularse sin tener en cuenta el apartado anterior.

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = \frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2 \cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{(7{,}06 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2} = 1{,}60 \cdot 10^3\ \mathrm{N}$$

Las respuestas y su cálculo pueden verse con la hoja de cálculo Satélites (es). Escribiendo los datos en las celdas de color blanco y borde azul, y haciendo clic y eligiendo las magnitudes y unidades en las celdas de color salmón:

Enunciado	**Datos:**			
Un satélite de masa		m =	200	kg
gira alrededor de un astro de masa		M =		kg
y radio		R =	$6{,}37 \cdot 10^6$	m
en el que la gravedad en el suelo es		g_0 =	9,81	m/s²
La órbita es circular de	altura	h =	693	km
Calcula:				
a) El período de la órbita del satélite y su velocidad				
b) El peso del satélite en la órbita				
c) Las energías cinética, potencial y mecánica del satélite.				

Pueden verse los siguientes resultados, eligiendo en las celdas de color salmón las opciones «km/s» para la velocidad de la órbita, «Período» y «s» para sus unidades, «Energía en la órbita», «Velocidad» en el suelo para «ponerlo en órbita» y «Momento angular» en la órbita.

Respuestas					Cifras significativas:	3	
		Radio		Velocidad		Período	
a) y b) Órbita		$7{,}06 \cdot 10^6$	m	**7,51**	km/s	**$5{,}90 \cdot 10^3$**	s
		cinética		potencial		mecánica	J
e)	Energía en la órbita	**$5{,}64 \cdot 10^9$** J		**$-1{,}13 \cdot 10^{10}$** J		**$-5{,}64 \cdot 10^9$** J	
c)	Tierra				M =	**$5{,}96 \cdot 10^{24}$** kg	
g)	Velocidad	en el suelo para		ponerlo en órbita		**8,28** km/s	
d)		Momento angular		en la órbita		**$1{,}06 \cdot 10^{13}$** kg·m²/s	

Otros resultados pueden verse en esta pestaña, modificando la elección en las celdas de color salmón.

b) Frecuencia. Cambiar «Período» por «Frecuencia» y elegir la unidad «día⁻¹»

		clic ↓	Velocidad	clic ↓	Frecuencia	
Órbita					14,6	día⁻¹

c) Aparece el resultado de la masa de la Tierra, porque la hoja contiene el dato de la constante G.

h) La velocidad de escape desde el suelo. Cambiar «ponerlo en órbita» por «mandarlo al infinito».

Velocidad	en el suelo para	mandarlo al infinito	**$1{,}12 \cdot 10^4$** m/s

i) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra. Cambiar «Momento angular» por «Gravedad relativa».

	Gravedad relativa	en la órbita	**0,813** g_0

j) La fuerza con que la Tierra atrae al satélite. Cambiar «Gravedad relativa» por «Fuerza gravitatoria».

	Fuerza gravitatoria	en la órbita	**1,60·10³** N

Los cálculos pueden verse en las pestañas «Periodo», «Peso» y «Energia».

a) Las velocidades lineal y angular del satélite en la órbita. Pestaña «Periodo»

Velocidad del satélite	$v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$	$v = \sqrt{\dfrac{3{,}99 \cdot 10^{14}}{7{,}06 \cdot 10^{6}}}$	$= 7{,}52 \cdot 10^3$ m/s
Velocidad angular del satélite	$\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T}$	$\omega = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{5{,}91 \cdot 10^3}$	$= 0{,}00106$ rad/s

b) El período de la órbita del satélite. ¿Cuántas vueltas da a la Tierra cada día? Pestaña «Periodo»

Período del satélite	$T = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$	$T = \dfrac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}06 \cdot 10^6}{7{,}52 \cdot 10^3}$	$= 5{,}90 \cdot 10^3$ s
Frecuencia del satélite	$f = \dfrac{1}{T}$	$f = \dfrac{86\,400 \text{ s} \cdot \text{día}^{-1}}{5{,}91 \cdot 10^3 \text{ s}}$	$=$ 14,6 día^{-1}

d) El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. Pestaña «Energia»

Momento angular	$L_o = r \cdot m \cdot v$	$L_o = 7{,}06 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 7{,}51 \cdot 10^3$	$= 1{,}06 \cdot 10^{13}$ kg·m²/s

f) La energía mínima adicional que habría que comunicarle para mandarlo a una distancia muy grande de la Tierra y la velocidad de escape a la atracción terrestre a esa altura. Pestaña «Energia».
No presenta el resultado de la energía mínima, pero es la diferencia entre la energía en el infinito, 0, y la energía mecánica en la órbita.

Velocidad de escape en la órbita	$v_e = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$	$v_e = \sqrt{\dfrac{3{,}98 \cdot 10^{14}}{7{,}06 \cdot 10^{6}}}$	$= 7{,}51 \cdot 10^3$ m/s

h) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra. En la pestaña «Enunciado» debe aparecer como última opción «Gravedad relativa».

	Gravedad relativa	en la órbita	0,813 g_0

En la pestaña «Peso» puede verse:

Gravedad en la altura	$g = \dfrac{G \cdot M}{r^2}$	$g = \dfrac{3{,}99 \cdot 10^{14}}{(7{,}06 \cdot 10^6)^2}$	$=$ 7,98 m/s²
Gravedad relativa	$\dfrac{g}{g_0}$	$= \dfrac{8{,}00}{9{,}81}$	$=$ 0,813

2. La luz del Sol tarda $5 \cdot 10^2$ s en llegar a la Tierra y $2{,}6 \cdot 10^3$ s en llegar a Júpiter. Calcula:
   a) El período de Júpiter girando alrededor del Sol.
   b) La velocidad orbital de Júpiter.
   c) La masa del Sol.
   Datos: T (Tierra) alrededor del Sol: $3{,}15 \cdot 10^7$ s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². (Se suponen las órbitas circulares) *(P.A.U. Sep. 12)*
   Rta.: a) $T = 3{,}74 \cdot 10^8$ s; $v = 1{,}31 \cdot 10^4$ m/s; b) $M = 2{,}01 \cdot 10^{30}$ kg

Datos	***Cifras significativas: 3***
Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra	$t_1 = 5{,}00 \cdot 10^2$ s = 500 s
Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a Júpiter	$t_2 = 2{,}60 \cdot 10^3$ s
Período orbital de la Tierra alrededor del Sol	$T_1 = 3{,}15 \cdot 10^7$ s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3{,}00·10^8$ m/s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Período orbital de Júpiter	T_2
Velocidad orbital de Júpiter	v
Masa del Sol	M
Otros símbolos	
Masa de Júpiter o la Tierra	m
Distancia de un planeta al Sol	r
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{F} = m \cdot \overline{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$

Solución:

Se calculan las distancias de la Tierra al Sol y de Júpiter al Sol, teniendo en cuenta la velocidad de la luz.

Tierra: $r_1 = c \cdot t_1 = 3{,}00·10^8$ [m/s] · $5{,}00·10^2$ [s] = $1{,}50·10^{11}$ m

Júpiter: $r_2 = c \cdot t_2 = 3{,}00·10^8$ [m/s] · $2{,}60·10^3$ [s] = $7{,}80·10^{11}$ m

Se resuelve primero el último apartado.

c) La masa del Sol puede calcularse de la expresión de la velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M.

La fuerza gravitatoria, $\overline{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{F} = \overline{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{F} = m \cdot \overline{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad de la Tierra alrededor del Sol se calcula a partir de su período orbital:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}50\cdot 10^{11}\,[\mathrm{m}]}{3{,}15\cdot 10^{7}\,[\mathrm{s}]}=2{,}99\cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s}$$

Se despeja la masa del Sol de la velocidad orbital de la Tierra como satélite:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}\Rightarrow M=\frac{v^2\cdot r}{G}=\frac{(2{,}99\cdot 10^{4}\,[\mathrm{m/s}])^2\cdot 1{,}50\cdot 10^{11}\,[\mathrm{m}]}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]}=2{,}01\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

b) Se emplea la ecuación anterior para calcular la velocidad de Júpiter:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 2{,}01\cdot 10^{30}\,[\mathrm{kg}]}{7{,}80\cdot 10^{11}\,[\mathrm{m}]}}=1{,}31\cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s}=13{,}1\ \mathrm{km/s}$$

a) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}\Rightarrow T_2=\frac{2\pi\cdot r_2}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 7{,}80\cdot 10^{11}\,[\mathrm{m}]}{1{,}31\cdot 10^{4}\,[\mathrm{m/s}]}=3{,}74\cdot 10^{8}\ \mathrm{s}$$

Análisis: La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los radiovectores que unen al Sol con los planetas. A mayor distancia al Sol, mayor período. Este método, daría: $T_2=T_1\sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}}=3{,}15\cdot 10^{7}\,[\mathrm{s}]\cdot\sqrt{\frac{(7{,}8\cdot 10^{11}\,[\mathrm{m}])^3}{(1{,}5\cdot 10^{11}\,[\mathrm{m}])^3}}=3{,}74\cdot 10^{8}\ \mathrm{s}$.

Las respuestas y su cálculo pueden verse con la hoja de cálculo Satélites (es). Escribiendo los datos en las celdas de color blanco y borde azul, y haciendo clic y eligiendo las magnitudes y unidades en las celdas de color salmón:
Se calcula primero la masa del Sol escribiendo los datos de la Tierra.
Introducción de datos. (Pestaña: «Enunciado»)

Un satélite de masa		m =		kg
gira alrededor de un astro de masa		M =		kg
y radio		R =		
en el que la gravedad en el suelo es		g_0 =		m/s²
La órbita es circular de	radio	r =	5,00E+02	s luz
El satélite gira con un	período	T =	3,15E+07	s

El resultado se encuentra debajo, en la región de «**Respuestas**».

Respuestas	Cifras significativas:	3	
Sol	M =	**2,01·10³⁰**	kg

Cálculo de la masa del Sol. (Pestaña: «Periodo»)

Masa del astro	$M=\frac{4\cdot\pi^2\cdot r^3}{G\cdot T^2}$	$M=\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot(1{,}50\cdot 10^{11})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(3{,}15\cdot 10^{7})^2}$	=	**$2{,}01\cdot 10^{30}$** kg

Se escriben ahora la masa del Sol y los datos de Júpiter:

Introducción de datos. (Pestaña: «Enunciado»)

Un satélite de masa		m =		kg
gira alrededor de un astro de masa		M =	2,01E+30	kg
y radio		R =		
				m/s²
La órbita es circular de	radio	r =	2,60E+03	s luz
El satélite gira con una				

Respuestas	clic ↓			Cifras significativas:	
		clic ↓	Velocidad	Período	
Órbita			**13,1**	**km/s**	**11,8** años

Cálculo del período y de la velocidad. (Pestaña: «Periodo»)

Radio de la órbita		$r = 2{,}60\cdot10^{3}\cdot 3{,}00\cdot10^{8}$	$= 7{,}79\cdot10^{11}$ m
		$G\cdot M = 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 2{,}01\cdot10^{30}$	$= 1{,}34\cdot10^{20}$ m³/s²
Velocidad del satélite	$v=\sqrt{\dfrac{G\cdot M}{r}}$	$v=\sqrt{\dfrac{1{,}34\cdot10^{20}}{7{,}79\cdot10^{11}}}$	$=$ **$1{,}31\cdot10^{4}$** m/s
Período del satélite	$T=\dfrac{2\cdot\pi\cdot r}{v}$	$T=\dfrac{2\cdot3{,}14\cdot7{,}79\cdot10^{11}}{1{,}31\cdot10^{4}}$	$=$ **$3{,}73\cdot10^{8}$** s

3. Un satélite GPS describe órbitas circulares alrededor de la Tierra, dando dos vueltas a la Tierra cada 24 h. Calcula:
   a) La altura de su órbita sobre la superficie terrestre.
   b) La energía mecánica.
   c) El tiempo que tardaría en dar una vuelta a la Tierra si lo hacemos orbitar a una altura doble.
   Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37\cdot10^{6}$ m; masa del satélite = 150 kg.

   (A.B.A.U. extr. 17)

   Rta.: a) $h = 2{,}03\cdot10^{7}$ m; b) $E = -1{,}12\cdot10^{9}$ J; c) $T_c = 28$ h.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia de la órbita	$f = 2$ vueltas/24 h
Radio de la Tierra	$R = 6{,}37\cdot10^{6}$ m
Masa del satélite	$m = 150$ kg
Masa de la Tierra	$M = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Altura de la órbita	h
Energía mecánica	E
El período, si la altura fuera el doble	T_c
Otros símbolos	
Radio de la órbita original	r
Valor de la velocidad del satélite en la órbita original	v
Nuevo radio de la órbita	r_c
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\dfrac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$

Ecuaciones

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2\cdot r^3 = G\cdot M\cdot T^2$$

a) Se despeja el radio de la órbita, r, y se sustituyen valores:

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\,\pi^2}}$$

La frecuencia es la inversa del período. El período orbital se calcula a partir de la frecuencia:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{24\text{ h}}{2}=12\text{ h}=4{,}32\cdot 10^4\text{ s}$$

Se calcula el radio de la órbita:

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}](4{,}32\cdot 10^4\,[\text{s}])^2}{4\cdot 3{,}14^2}}=2{,}66\cdot 10^7\text{ m}$$

Se calcula la altura restando el radio de la Tierra al radio de la órbita:

$$h = r - R = 2{,}66\cdot 10^7 - 6{,}37\cdot 10^6 = 2{,}02\cdot 10^7\text{ m}$$

Análisis: Aunque no se puede prever un valor, la altura obtenida es positiva.

b) Se calcula la energía potencial:

$$E_\text{p}=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}]\cdot 150\,[\text{kg}]}{2{,}66\cdot 10^7\,[\text{m}]}=-2{,}25\cdot 10^9\text{ J}$$

Se calcula la energía cinética sustituyendo v^2 por $G\,M\,/\,r$:

$$E_\text{c}=\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}=1{,}12\cdot 10^9\text{ J}$$

La energía cinética es la mitad y de signo contrario que la energía potencial.
La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial, y vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

$$E = E_\text{c} + E_\text{p} = 1{,}12\cdot 10^9\,[\text{J}] - 2{,}25\cdot 10^9\,[\text{J}] = -1{,}12\cdot 10^9\text{ J}$$

c) Si la altura fuera el doble, el nuevo radio de la órbita valdría:

$$r_c = R + 2\,h = 6{,}37\cdot 10^6 + 2\cdot 2{,}0\cdot 10^7 = 4{,}7\cdot 10^7\text{ m}$$

La velocidad del satélite valdría:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}]}{4{,}7\cdot 10^7\,[\text{m}]}}=2{,}9\cdot 10^3\text{ m/s}=2{,}9\text{ km/s}$$

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 4{,}7\cdot 10^7\,[\text{m}]}{2{,}9\cdot 10^3\,[\text{m/s}]}=1{,}0\cdot 10^5\text{ s}=28\text{ h}$$

Análisis: El período de un satélite aumenta con la altura. El valor obtenido es mayor que el de la altura inicial.

Las respuestas y su cálculo pueden verse con la hoja de cálculo Satélites (es). Escribiendo los datos en las celdas de color blanco y borde azul, y haciendo clic y eligiendo las magnitudes y unidades en las celdas de color salmón:

Enunciado	**Datos:**	G =	$6{,}67\cdot 10^{-11}$	N·m²/kg²
Un satélite de masa		m =	150	kg

gira alrededor de un astro de masa		M =	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	kg
y radio		R =	$6{,}37 \cdot 10^{6}$	m
El satélite gira con una	frecuencia	f =	2	día⁻¹

Calcula:

a) El radio/la altura de la órbita.

b) El peso del satélite en la órbita.

c) Las energías cinética, potencial y mecánica del satélite.

Pueden verse los siguientes resultados:

Respuestas				Cifras significativas:	3
	Altura		Velocidad	clic ↓	
Órbita	$2{,}03 \cdot 10^{7}$	m			
	cinética		potencial	mecánica	J
Energía en la órbita	$1{,}12 \cdot 10^{9}$ J		$-2{,}25 \cdot 10^{9}$ J	$-1{,}12 \cdot 10^{9}$ J	

Para el apartado c) hay que borrar la opción «frecuencia», su valor y unidades y elegir encima de ella la opción «altura», escribir en la celda blanca de borde azul «=2*2,03E7» (sin las comillas pero con el signo =, o calcularlo a mano y escribir el resultado en cualquiera de las formas: 4,06E7 o $4{,}06 \cdot 10^{7}$) y elegir la unidad «m».

La órbita es circular de	altura	h =	40 600 000	m

En «**Respuestas**», elegir «Período» debajo de «Cifras significativas:» y elegir «h» como unidad.

Respuestas				Cifras significativas:	3
	Altura		Velocidad	clic ↓	Período
Órbita	$4{,}06 \cdot 10^{7}$	m			28,1 h

● Campo gravitatorio

1. La masa del planeta Marte es 0,107 veces la masa de la Tierra y su radio es 0,533 veces el radio de la Tierra. Calcula:
   a) El tiempo que tarda un objeto en llegar a la superficie de Marte si se deja caer desde una altura de 50 m.
   b) La velocidad de escape de ese objeto desde la superficie del planeta.
   Datos: g = 9,81 m·s⁻²; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m. *(A.B.A.U. ord. 21)*
   Rta.: a) t = 5,21 s; b) $v_e = 5{,}01 \cdot 10^{3}$ m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de Marte	$M_M = 0{,}107\ M_T$
Radio de Marte	$R_M = 0{,}533\ R_T$
Altura desde la que se deja caer	h = 50,0 m
Aceleración de la gravedad en la Tierra	g_0 = 9,81 m/s²
Radio de la Tierra	$R_T = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m
Incógnitas	
Tiempo que tarda en caer a la superficie de Marte desde una altura de 50 m.	t
Velocidad de escape en Marte	v_e
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M_T

Otros símbolos

Constante de la gravitación universal	G

Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal, en módulos. (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G = G\frac{M\,m}{r^2}$
Peso de un objeto de masa m en la superficie de un planeta cuya aceleración de la gravedad es g_0	$P = m \cdot g_0$
Ecuación de la caída libre (movimiento uniformemente acelerado)	$h = v_0 \cdot t + ½\, g \cdot t^2$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Hay que calcular el valor de la gravedad en la superficie de Marte.
El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m \cdot g_T = G\frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Análogamente, el peso de un objeto cerca de la superficie de Marte es la fuerza con la que a Marte lo atrae:

$$m \cdot g_M = G\frac{M_M \cdot m}{R_M^2}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, queda:

$$\frac{\cancel{m} \cdot g_M}{\cancel{m} \cdot g_T} = \frac{\cancel{G}\frac{M_M \cdot \cancel{m}}{R_M^2}}{\cancel{G}\frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T^2}}$$

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{M_M / M_T}{(R_M / R_T)^2} = \frac{0{,}107}{0{,}533^2} = 0{,}375$$

Despejando:

$$g_M = 3{,}69 \text{ m/s}^2$$

Análisis: El resultado es razonable, ya que sabemos que la gravedad en la superficie de Marte es unas 3 *veces menor que en la superficie de la Tierra.*

Se calcula el tiempo de la ecuación de la caída libre, sin velocidad inicial:

$$h = ½\, g \cdot t^2 \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50{,}0}{3{,}69}} = 5{,}21 \text{ s}$$

b)
La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

La energía potencial de un cuerpo de masa m situado en la superficie de un astro de masa M y radio R es:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula. La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

La velocidad de escape v_e le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = G\frac{M \cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0 = G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Hay que calcular también el radio de Marte:

$$R_M = 0{,}533\ R_T = 0{,}533 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] = 3{,}40 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

Se calcula la velocidad de escape sustituyendo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,g_0 \cdot R_M^2}{R_M}} = \sqrt{2\,g_0 \cdot R_M} = \sqrt{2 \cdot 3{,}69\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (3{,}40 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2} = 5{,}01 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 5{,}01\ \mathrm{km/s}$$

Cuestiones y problemas de las Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo de LibreOffice u OpenOffice del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM).
Se consultó el chat de Bing y se usaron algunas respuestas en las cuestiones.

Actualizado: 23/08/23

Sumario