Gravitación

MÉTODO, APROXIMACIÓNS E RECOMENDACIÓNS

● MÉTODO

1. En xeral:
   a) Debúxanse as forzas que actúan sobre o sistema.
   b) Calcúlase cada forza ou vector intensidade de campo.
   c) Calcúlase a resultante polo principio de superposición.
   d) Aplícase a 2ª lei de Newton (lei Fundamental da Dinámica)
   e) Calcúlanse as enerxías potenciais nos puntos de orixe 1 e destino 2.
   f) Calcúlase o traballo das forzas do campo.
   g) O traballo da forza exterior será, se non hai variación de enerxía cinética:

2. Nos problemas de satélites:

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{r}}$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite.
En módulos:

$$F_{\mathrm{G}}=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_{N}. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_{\mathrm{N}}=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_{\mathrm{G}}=m\cdot a_{\mathrm{N}}$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_{G}, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Dela podemos obter a ecuación do raio da órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

Tamén se pode obter a ecuación do período:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M}}$$

E tamén a terceira lei de Kepler. Para dous planetas, 1 e 2, divídense as expresións correspondentes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2} \cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2} \cdot r_2^3} = \frac{\cancel{G \cdot M} \cdot T_1^2}{\cancel{G \cdot M} \cdot T_2^2}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, *G*, ou da masa do astro, *M*, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

3. Cálculo do vector intensidade de campo gravitacional nun punto creado por unha soa masa.
A intensidade do campo gravitacional $\overline{\boldsymbol{g}}$ nun punto no que se atopa unha masa, *m*, é a forza sobre a unidade de masa situada nese punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$$

A ecuación da intensidade do campo gravitacional obtense ao substituír $\overline{\boldsymbol{F}}_G$ pola expresión da lei de da gravitación universal de Newton, que da a forza entre dúas masas, *M* e *m*, puntuais ou esféricas, separadas por unha distancia, *r*, sendo *G* a constante da gravitación, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une as dúas masas:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

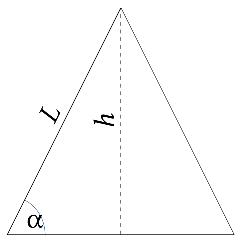
A ecuación da intensidade do campo gravitacional queda:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = \frac{-G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{m}} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$$

a) Determínase a distancia *r* entre a masa *M* (situada no punto 1) que crea o campo e o punto 2, onde se pide calcular o vector intensidade de campo gravitacional.

(a.1) Se os datos son as coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dos puntos, a distancia, r_{12}, entre eles é:

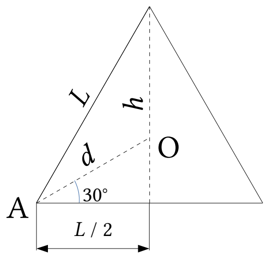
$$r_{12} = |\vec{r}_{12}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



(a.2) No caso de puntos nun triángulo, a altura, h, calcúlase:

$$h = L \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

(a.3) E se o triángulo é equilátero, a distancia, d, desde o punto medio, O, a un vértice, A, pódese calcular como:



$$d=\frac{L/2}{\cos 30°}$$

b) Determínase o vector unitario a partir do vector de posición do punto 2 respecto ao punto 1 onde se atopa a masa M que crea o campo.

(b.1) Se os datos son as coordenadas dos puntos, o vector de posición r_{12} é:

$$\vec{r}_{12}=\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=(x_2-x_1)\vec{\mathbf{i}}+(y_2-y_1)\vec{\mathbf{j}}$$

O vector unitario será:

$$\vec{u}_r=\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}$$

(b.2) En caso de coñecer o ángulo α que forma o vector $\bar{r}_{12}$ co eixe X horizontal, o vector unitario calcúlase coa expresión:

$$\bar{u}_r = \cos\alpha\,\bar{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\alpha\,\bar{\mathbf{j}}$$

c) Calcúlase o vector intensidade de campo coa ecuación:

$$\vec{g}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

Sen esquecer escribir as unidades (N/kg) no resultado.

d) Calcúlase o módulo do vector intensidade de campo $|\vec{g}|=\sqrt{g_x^2+g_y^2}$, sen esquecer escribir as unidades (N/kg) no resultado.

4. Cálculo do vector intensidade de campo gravitacional nun punto creado por varias masas:
A intensidade de campo gravitacional nun punto debido a varias masas puntuais é a suma vectorial das intensidades de campo gravitacional creadas por cada masa coma se as outras non estivesen.
   a) Debúxanse os vectores intensidade de campo gravitacional producidos no punto por cada unha das masas, e debúxase tamén o vector forza ou campo resultante, que é a suma vectorial deles (principio de superposición).
   b) Calcúlanse cada un dos vectores intensidade de campo creados polas masas do mesmo xeito que se indicou no apartado anterior, aínda que ás veces non é necesario repetir cálculos porque se poden deducir os resultados a partir do primeiro, á vista da simetría da situación.
   c) Calcúlase o vector intensidade de campo gravitacional resultante no punto como a suma vectorial das forzas ou intensidades de campo gravitacional producidas por cada masa, aplicando o principio de superposición.
   d) Analízase o resultado comparándoo co esbozo debuxado.
   e) Calcúlase o módulo do vector intensidade de campo resultante sen esquecer escribir as unidades.

5. Cálculo do vector forza gravitacional sobre unha masa m nun punto creado por varias masas:
A forza gravitacional $\bar{F}_G$ entre dúas masas, M e m, puntuais ou esféricas, separadas unha distancia r, réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Realízase de forma análoga á do campo gravitacional, usando a expresión da forza en vez da intensidade de campo, e tendo en conta que as unidades son newtons (N).

6. Cálculo do traballo necesario para desprazar unha masa m entre dous puntos A e B.
Supoñendo que a masa parte do repouso desde o punto A e que chega a punto B con velocidade nula, o traballo da forza resultante é nulo, e o traballo da forza exterior será igual e de signo contrario ao traballo das forzas do campo:

$$W_{(ext)} = - W_{A \to B}$$

O traballo que fan as forzas do campo conservativo é igual ao valor da masa m que se despraza pola diferenza de potencial entre os puntos de partida A e chegada B:

$$W_{A \to B} = - (E_{p\,B} - E_{p\,A}) = E_{p\,A} - E_{p\,B}$$

A enerxía potencial dun obxecto de masa m que está a unha distancia r dun astro é o traballo que fai a forza gravitacional cando o obxecto trasládase desde a súa posición ata o infinito

$$E_p = W_{r \to \infty} = \int_r^\infty \vec{F}_G \, d\vec{r} = \int_r^\infty -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r \, d\vec{r} = \int_r^\infty -G \frac{M \cdot m}{r^2} \, d r = \left[G \frac{M \cdot m}{r} \right]_r^\infty = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

a) Para o punto de partida calcúlanse as distancias entre o punto no que hai que calcular a enerxía potencial e os puntos nos que se atopan as masas, se non se calcularon antes.
b) Calcúlase a enerxía potencial no punto producido por cada masa M, coa ecuación:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

c) Súmanse as enerxías potenciais producidos por cada masa nese punto.
d) Repítese o proceso para o punto de chegada.

e) Calcúlase o traballo das forzas do campo.

$$W_{A \to B} = - (E_{p\,B} - E_{p\,A}) = E_{p\,A} - E_{p\,B}$$

f) Explícase que o traballo das forzas exteriores é igual e de signo contrario.

7. Cálculo da velocidade de escape desde o chan.

A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia «infinita» do centro del astro.

A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no «infinito».

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No «infinito» a enerxía potencial é nula, por definición: $E_{p\,\infty} = 0$.

Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no «infinito» sería nula: $E_{c\,\infty} = 0$.

A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no «infinito» sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa m situado na superficie dun astro de masa M e radio R é:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, a súa enerxía cinética considérase desprezable[1].

A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G \frac{M \cdot m}{R} \right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

A velocidade de escape v_e comunicaríalle a enerxía ΔE necesaria para situalo no «infinito».

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

1 Aínda que se atopa en repouso nun sistema de referencia local, o certo é que posúe unha velocidade debido á rotación do astro. Por exemplo, un obxecto en repouso no ecuador da Terra móvese cunha velocidade de uns 460 m/s.

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\, G \frac{M}{R}}$$

8. Cálculo da velocidade de escape desde a órbita.

A enerxía cinética dun obxecto de masa m, que se move con velocidade v, é directamente proporcional ao cadrado da súa velocidade.

$$E_c = ½\, m \cdot v^2$$

A enerxía potencial gravitacional dun satélite de masa m, que xira arredor dun astro de masa M, nunha órbita de radio r, é inversamente proporcional ao raio da órbita.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Onde G é a constante da gravitación universal.

A enerxía mecánica de un corpo de masa m, que se atopa en órbita de raio r arredor dun astro de masa M, é a suma das súas enerxías cinética e potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right)$$

A velocidade dun satélite que xira a unha distancia r arredor dun astro de masa M é:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Substituíndo v^2, a expresión da enerxía cinética queda:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

A expresión da enerxía mecánica queda:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

A velocidade de escape, v_e, comunicaríalle a enerxía necesaria:

$$\Delta E = ½\, m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}\right) = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despexando a velocidade de escape dun satélite en órbita, queda:

$$v_{e\,o} = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

● APROXIMACIÓNS

1. Os astros considéranse como corpos esféricos homoxéneos. Así, pódense considerar o campo e a forza gravitacional no seu exterior coma se toda a masa do astro estivese concentrada no seu centro.

2. Só se ten en conta a influencia gravitacional do astro máis próximo respecto ao satélite.

3. Nas transferencias de órbitas, lanzamentos, caídas, suponse que a única forza que actúa é a forza gravitacional, que é conservativa. Por tanto a enerxía mecánica consérvase.

● RECOMENDACIÓNS

1. Farase unha lista cos datos, pasándoos ao Sistema Internacional se non o estivesen.

2. Farase outra lista coas incógnitas.

3. Debuxarase un esbozo da situación, procurando que as distancias do esbozo sexan coherentes con ela. Deberase incluír cada unha das forzas ou das intensidades de campo, e a súa resultante.

4. Farase unha lista das ecuacións que conteñan as incógnitas e algún dos datos, mencionando á lei ou principio ao que se refiren.

5. En caso de ter algunha referencia, ao terminar de facer os cálculos farase unha análise do resultado para ver se é o esperado. En particular, comprobar que os vectores campo gravitacional teñen a dirección e o sentido acorde co esbozo.

6. En moitos problemas as cifras significativas dos datos son incoherentes. Resolverase o problema supoñendo que os datos que aparecen con unha ou dúas cifras significativas teñen a mesma precisión que o resto dos datos (polo xeral tres cifras significativas), e ao final farase un comentario sobre as cifras significativas do resultado.