

## FÍSICA

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que podrá responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Se responde más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas.**

### PREGUNTA 1. Responda indicando y justificando la opción correcta:

- 1.1.** Un satélite gira alrededor de un planeta en una trayectoria elíptica. ¿Cuál de las siguientes magnitudes permanece constante?: A) El momento angular. B) El momento lineal. C) La energía potencial.
- 1.2.** Una partícula se mueve en un círculo de radio  $r$  perpendicularmente a un campo magnético,  $\vec{B}$ . Si duplicamos el valor de  $B$ , el valor de  $r$ : A) Se duplica. B) Se reduce a la mitad. C) No varía.

### PREGUNTA 2. Responda indicando y justificando la opción correcta:

- 2.1.** Para obtener una imagen virtual y derecha con una lente delgada convergente, de distancia focal  $f$ , el objeto debe estar a una distancia de la lente: A) Menor que  $f$ . B) Mayor que  $f$  y menor que  $2f$ . C) Mayor que  $2f$ .
- 2.2.** Se induce corriente en una espira conductora si: A) Es atravesada por un flujo magnético constante. B) Gira en el seno de un campo magnético uniforme. C) En ambos casos.

### PREGUNTA 3. Responda indicando y justificando la opción correcta:

- 3.1.** El silbato de una locomotora emite un sonido de 435 Hz de frecuencia. Si la locomotora se mueve acercándose a un observador en reposo, la frecuencia percibida por el observador es: A) 435 Hz. B) Mayor que 435 Hz. C) Menor que 435 Hz.
- 3.2.** Una muestra de una sustancia radiactiva contenía hace 10 años el doble de núcleos que en el instante actual; por lo tanto, el número de núcleos que había hace 30 años respecto al momento actual era: A) Seis veces mayor. B) Tres veces mayor. C) Ocho veces mayor.

### PREGUNTA 4. Desarrolle esta práctica:

En una experiencia para calcular el trabajo de extracción de un metal observamos que los fotoelectrones expulsados de su superficie por una luz de  $4 \times 10^{-7}$  m de longitud de onda en el vacío son frenados por una diferencia de potencial de 0,80 V. Y si la longitud de onda es de  $3 \times 10^{-7}$  m el potencial de frenado es 1,84 V. a) Represente gráficamente la frecuencia frente al potencial de frenado. b) Determine el trabajo de extracción a partir de la gráfica.

DATOS:  $c = 3 \times 10^8$  m·s<sup>-1</sup>;  $h = 6,63 \times 10^{-34}$  J·s;  $|q_e| = 1,6 \times 10^{-19}$  C.

### PREGUNTA 5. Resuelva este problema:

La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico de 4100 km de radio es 7,2 m·s<sup>-2</sup>. Calcule: a) La masa del planeta. b) La energía mínima necesaria que hay que comunicar a un minisatélite de 3 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y situarlo a 1000 km de altura sobre la misma, en una órbita circular alrededor del planeta. DATO:  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>·kg<sup>-2</sup>.

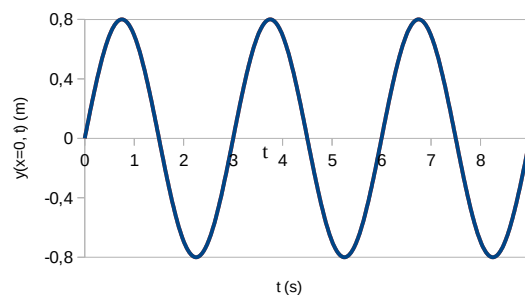
### PREGUNTA 6. Resuelva este problema:

Dos cargas puntuales de  $-6 \mu\text{C}$  cada una están fijas en los puntos de coordenadas  $(-5, 0)$  y  $(5, 0)$ . Las coordenadas están expresadas en metros. Calcule: a) El vector campo electrostático en el punto  $(15, 0)$ . b) La velocidad con la que llega al punto  $(10, 0)$  una partícula de masa 20 g y carga  $8 \mu\text{C}$  que se abandona libremente en el punto  $(15, 0)$ . DATO:  $K = 9 \times 10^9$  N·m<sup>2</sup>·C<sup>-2</sup>.

### PREGUNTA 7. Resuelva este problema:

Una onda armónica transversal de longitud de onda  $\lambda = 60$  cm se propaga en el sentido positivo del eje  $X$ . En la gráfica se muestra la elongación ( $y$ ) del punto de coordenada  $x = 0$  en función del tiempo.

Determine: a) La expresión matemática que describe esta onda, indicando el desfase inicial, la frecuencia y la amplitud de la onda. b) La velocidad de propagación de la onda.



### PREGUNTA 8. Resuelva este problema:

Un buceador enciende una linterna dentro del agua y la enfoca hacia la superficie formando un ángulo de 30° con la normal. a) ¿Con qué ángulo emergerá la luz del agua? b) ¿Cuál es el ángulo de incidencia a partir del cual la luz no saldrá del agua? DATOS:  $n(\text{agua}) = 4/3$ ;  $n(\text{aire}) = 1$ .

## Soluciones

1.1. Un satélite gira alrededor de un planeta en una trayectoria elíptica. ¿Cuál de las siguientes magnitudes permanece constante?:

- A) El momento angular.
- B) El momento lineal.
- C) La energía potencial.

(A.B.A.U. extr. 20)

**Solución:** A

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas centrales, en las que la fuerza gravitatoria que ejerce el planeta sobre un satélite tiene la misma dirección (y sentido contrario) que el vector de posición del satélite colocando el origen de coordenadas en el planeta.

El momento angular,  $\vec{L}_O$ , de una partícula de masa  $m$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

Para estudiar su variación, se deriva con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

El primer sumando da el vector  $\vec{0}$  (cero) porque la velocidad,  $\vec{v}$ , y el

$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$  momento lineal,  $m \cdot \vec{v}$ , son paralelos.

$$|\vec{v} \times m \cdot \vec{v}| = |\vec{v}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 0 = 0$$

El segundo sumando también da el vector  $\vec{0}$  porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición,  $\vec{r}$ , con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos de sentido contrario.

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin 180^\circ = 0$$

La derivada es cero.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular,  $\vec{L}_O$ , respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.

Las otras opciones:

B. Falsa. El momento lineal,  $\vec{p}$ , de un objeto de masa  $m$  que se mueve a una velocidad  $\vec{v}$ , vale:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

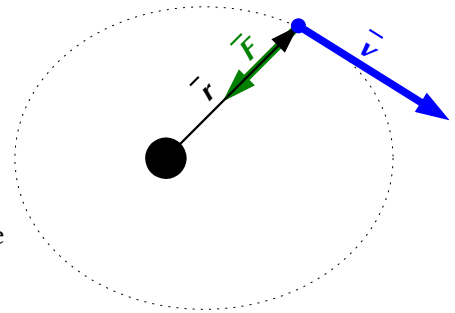
Como el momento angular es constante, al variar la distancia,  $r$ , del satélite al planeta, también variará su velocidad  $\vec{v}$ . Además, la dirección cambia la medida que el satélite se desplaza alrededor del planeta.

C. Falsa.

La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Siendo  $M$  la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del planeta),  $m$  es la masa del objeto que gira a su alrededor (el satélite),  $r$  la distancia entre ambos cuerpos y  $G$  la constante de la gravitación universal.



En una órbita elíptica, con el planeta situado en uno de los focos, la distancia del satélite al planeta no es constante. Por lo tanto, la energía potencial tampoco es constante.

- 1.2. Una partícula se mueve en un círculo de radio  $r$  perpendicularmente a un campo magnético,  $\vec{B}$ . Si duplicamos el valor de  $\vec{B}$ , el valor de  $r$ :
- A) Se duplica.
  - B) Se reduce a la mitad.
  - C) No varía.

(A.B.A.U. extr. 20)

**Solución:** B

La fuerza magnética,  $\vec{F}_B$ , sobre una carga,  $q$ , que se desplaza en el interior de un campo magnético,  $\vec{B}$ , con una velocidad,  $\vec{v}$ , viene dada por la ley de Lorentz:

$$\vec{F}_B = q (\vec{v} \times \vec{B})$$

Esta fuerza es perpendicular en todos los puntos a la dirección de avance de la partícula, por lo que describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, ya que la aceleración solo tiene componente normal  $a_N$ :

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

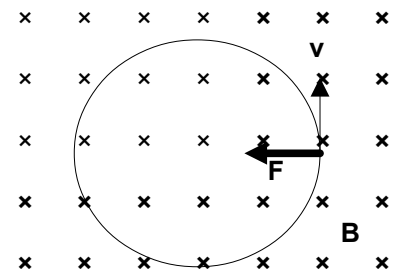
Si solo actúa la fuerza magnética:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_B$$

Aplicando la 2.ª ley de Newton:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$F_B = m \cdot a = m \cdot a_N = m \frac{v^2}{R}$$



Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética:

$$|q| \cdot B \cdot v \cdot \sin \varphi = m \frac{v^2}{R}$$

Como las partículas entran perpendicularmente al campo,  $\sin \varphi = 1$ .  
Despejando el radio,  $R$ :

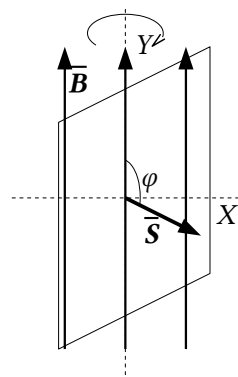
$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

Como el valor de la velocidad es constante, lo mismo que la carga y la masa de la partícula, el radio de la trayectoria es inversamente proporcional a la intensidad del campo magnético. Si el campo magnético se hace el doble, el radio de la trayectoria se reduce a la mitad.

- 2.1. Para obtener una imagen virtual y derecha con una lente delgada convergente, de distancia focal  $f$ , el objeto debe estar a una distancia de la lente:
- A) Menor que  $f$ .
  - B) Mayor que  $f$  y menor que  $2f$ .
  - C) Mayor que  $2f$ .

(A.B.A.U. extr. 20)

- 2.2. Se induce corriente en una espira conductora si:
- A) Es atravesada por un flujo magnético constante.
  - B) Gira en el seno de un campo magnético uniforme.
  - C) En ambos casos.

**Solución: B**

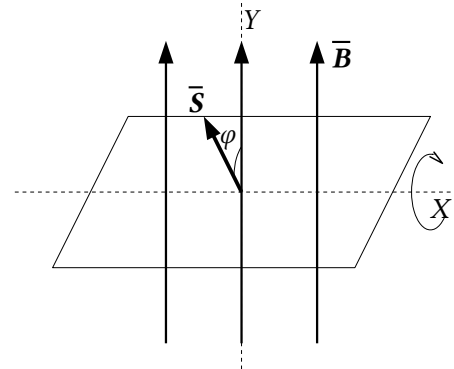
La ley de Faraday-Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respecto al tiempo.

$$\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt}$$

X El flujo magnético es el producto escalar del vector  $\vec{B}$ , campo magnético, por el vector  $\vec{S}$ , perpendicular a la superficie delimitada por la espira.

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \varphi$$

Cuando la espira gira alrededor de un eje paralelo al campo magnético, el flujo magnético no varía, puesto que es nulo todo el tiempo: las líneas del campo magnético no atraviesan la superficie de la espira ni cuando la espira está en reposo ni cuando gira alrededor del eje, pues son siempre paralelas al plano de la espira. El ángulo  $\varphi$  vale siempre  $\pi/2$  rad y el  $\cos \pi/2 = 0$ . Pero cuando la espira gira alrededor de un eje perpendicular al campo, las líneas de campo atraviesan la superficie plana delimitada por la espira, variando el flujo magnético desde 0 hasta un máximo lo volviendo a hacerse nulo cuando leve girada media vuelta. Si no gira, el flujo no varía y no se induce corriente alguna.



3.1. El silbato de una locomotora emite un sonido de 435 Hz de frecuencia. Si la locomotora se mueve acercándose a un observador en reposo, la frecuencia percibida por el observador es:

- A) 435 Hz.
- B) Mayor que 435 Hz.
- C) Menor que 435 Hz.

(A.B.A.U. extr. 20)

**Solución: B**

La ecuación del efecto Doppler es:

$$f(\text{obs}) = f(\text{em}) \frac{v(\text{son}) \pm v(\text{obs})}{v(\text{son}) \pm v(\text{em})}$$

En la que

$f(\text{obs})$  es la frecuencia que percibe el observador.

$f(\text{em})$  es la frecuencia emitida por la fuente.

$v(\text{son})$  es la velocidad del sonido.

$v(\text{obs})$  es la velocidad del observador.

$v(\text{em})$  es la velocidad del emisor de la frecuencia.

Para un observador en reposo y una fuente dirigiéndose hacia él la ecuación anterior queda:

$$f(\text{obs}) = f(\text{em}) \frac{v(\text{son})}{v(\text{son}) - v(\text{em})}$$

La frecuencia percibida por el observador es mayor que la emitida.

Esto se puede comprobar escuchando el silbato de un tren que pasa cerca de nosotros. Cuando pasa a nuestro lado el sonido se torna más grave. Es más agudo cuando se está acercando y se hace más grave cuando se aleja.

3.2. Una muestra de una sustancia radiactiva contenía hace 10 años el doble de núcleos que en el instante actual; por lo tanto, el número de núcleos que había hace 30 años respecto al momento actual era:

- A) Seis veces mayor.

- B) Tres veces mayor.  
C) Ocho veces mayor.

(A.B.A.U. extr. 20)

**Solución:** C

El período de semidesintegración de una sustancia radiactiva es el tiempo que transcurre hasta que solo queda la mitad de la muestra original. Es un valor constante. Del enunciado de la cuestión se deduce que el período de semidesintegración de la sustancia radiactiva es de 10 años, ya que entonces había el doble de núcleos que ahora.

De hace treinta años hasta ahora transcurrieron 3 períodos, por lo que la cantidad que había entonces era  $2^3 = 8$  veces mayor que ahora.

4. En una experiencia para calcular el trabajo de extracción de un metal observamos que los fotoelectrones expulsados de su superficie por una luz de  $4 \times 10^{-7}$  m de longitud de onda en el vacío son frenados por una diferencia de potencial de 0,80 V. Y si la longitud de onda es de  $3 \times 10^{-7}$  m el potencial de frenado es 1,84 V.

a) Represente gráficamente la frecuencia frente al potencial de frenado.

b) Determine el trabajo de extracción a partir de la gráfica.

DATOS:  $c = 3 \times 10^8$  m·s<sup>-1</sup>;  $h = 6,63 \times 10^{-34}$  J·s;  $|q_e| = 1,6 \times 10^{-19}$  C.

(A.B.A.U. extr. 20)

**Rta.:** b)  $W_e = 2,3$  eV

**Solución:**

La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación,  $E_f$  representa la energía del fotón incidente,  $W_e$  el trabajo de extracción del metal y  $E_c$  la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.

La energía que lleva un fotón de frecuencia  $f$  es:

$$E_f = h \cdot f$$

En esta ecuación,  $h$  es la constante de Planck.

El potencial de frenado es la diferencia de potencial que detiene el paso de electrones, siendo una medida de su energía cinética máxima:

$$E_c = q \cdot V$$

Ordenamos la ecuación de Einstein para que se ajuste a la gráfica de la frecuencia frente al potencial de frenado.

$$h \cdot f = W_e + q \cdot V$$

$$f = (q/h) \cdot V + W_e/h$$

Esta es la ecuación de una recta:

$$y = m \cdot x + b$$

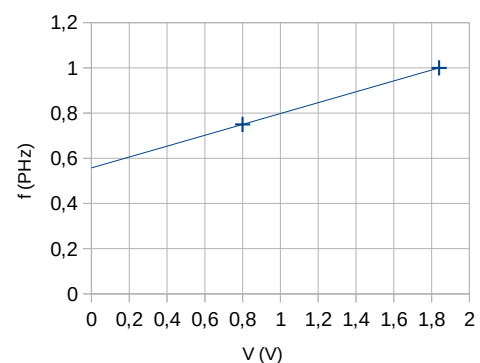
En ella,  $f$  es la variable dependiente ( $y$ ),  $V$  es la variable independiente ( $x$ ),  $(q/h)$  sería la pendiente  $m$  y  $(W_e/h)$  la ordenada  $b$  en el origen.

El trabajo de extracción puede calcularse de la ordenada en el origen:

$$b = 0,55 \cdot 10^{15} = W_e/h$$

$$W_e = 0,55 \cdot 10^{15} \cdot h = 0,55 \cdot 10^{15} [\text{s}^{-1}] \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] = 3,7 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$W_e = 3,7 \cdot 10^{-19} [\text{J}] / 1,6 \cdot 10^{-19} [\text{J/eV}] = 2,3 \text{ eV}$$



5. La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico de 4100 km de radio es  $7,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .  
 Calcula:  
 a) La masa del planeta.  
 b) La energía mínima necesaria que hay que comunicar a un minisatélite de 3 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y situarlo a 1000 km de altura sobre la misma, en una órbita circular alrededor del planeta.  
 DATO:  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ . (A.B.A.U. extr. 20)  
**Rta.:** a)  $M = 1,8 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ; b)  $\Delta E = 5,30 \cdot 10^7 \text{ J}$ .

### Datos

Radio del planeta  
 Aceleración de la gravedad en la superficie del planeta  
 Masa del satélite  
 Altura de la órbita  
 Constante de la gravitación universal

### Incógnitas

Masa del planeta  
 Energía que hay que comunicarle desde la superficie del planeta

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal  
 (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)  
 2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$   $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$   $a_N = \frac{v^2}{r}$

Peso de un objeto de masa  $m$  en la superficie de un planeta cuya aceleración de la gravedad es  $g_0$   $P = m \cdot g_0$

Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$   $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)  $E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$

Energía mecánica  $E = E_c + E_p$

### Cifras significativas: 3

$R = 4100 \text{ km} = 4,10 \cdot 10^6 \text{ m}$   
 $g_0 = 7,20 \text{ m/s}^2$   
 $m = 3,00 \text{ kg}$   
 $h = 1000 \text{ km} = 1,00 \cdot 10^6 \text{ m}$   
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$M$

$\Delta E$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$P = m \cdot g_0$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E = E_c + E_p$$

### Solución:

a) En la superficie del planeta, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$m g_0 = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Se despeja la masa del planeta:

$$M = \frac{g_0 \cdot R^2}{G} = \frac{7,20 [\text{m/s}^2] \cdot (4,10 \cdot 10^6 [\text{m}])^2}{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N}\cdot\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}]} = 1,81 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

b) La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

La expresión de la energía potencial es:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Se suponen que el satélite está en reposo en la superficie del planeta, por lo que solo tiene energía potencial. Se calcula esta energía potencial:

$$E_p(\text{suelo}) = -G \frac{M \cdot m}{R} = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N}\cdot\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot \frac{1,81 \cdot 10^{24} [\text{kg}] \cdot 3,00 [\text{kg}]}{4,10 \cdot 10^6 [\text{m}]} = -8,86 \cdot 10^7 \text{ J}$$

Se calcula el radio de la órbita circular sumando la altura de 1000 km al radio del planeta:

$$r = R + h = 4,10 \cdot 10^6 [\text{m}] + 1,00 \cdot 10^6 [\text{m}] = 5,10 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Se calcula la energía potencial en la órbita:

$$E_p(\text{órbita}) = -G \frac{M \cdot m}{r} = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot \frac{1,81 \cdot 10^{24} [\text{kg}] \cdot 3,00 [\text{kg}]}{5,10 \cdot 10^6 [\text{m}]} = -7,12 \cdot 10^7 \text{ J}$$

Para calcular la energía cinética en la órbita se necesita calcular la velocidad orbital.

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\begin{aligned} |\Sigma \vec{F}| &= m \cdot |\vec{a}| \\ F_G &= m \cdot a_N \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Se sustituyen los valores:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 1,81 \cdot 10^{24} [\text{kg}]}{5,10 \cdot 10^6 [\text{m}]}} = 4,87 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 4,87 \text{ km/s}$$

Se calcula la energía cinética en órbita:

$$E_c(\text{órbita}) = m \cdot v^2 / 2 = [3,00 [\text{kg}] \cdot (4,87 \cdot 10^3 [\text{m/s}])^2] / 2 = 3,56 \cdot 10^7 \text{ J}$$

La energía mecánica es la suma de sus energías cinética y potencial:

$$E(\text{órbita}) = E_c(\text{órbita}) + E_p(\text{órbita}) = 3,56 \cdot 10^7 [\text{J}] + (-7,12 \cdot 10^7 [\text{J}]) = -3,56 \cdot 10^7 \text{ J}$$

*Análisis: La energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética*

La energía que hay que comunicarle al satélite en la superficie del planeta es la diferencia entre la que tendrá en órbita y la que tiene en el suelo:

$$\Delta E = E(\text{órbita}) - E(\text{suelo}) = -3,56 \cdot 10^7 [\text{J}] - (-8,86 \cdot 10^7 [\text{J}]) = 5,30 \cdot 10^7 \text{ J}$$

6. Dos cargas puntuales de  $-6 \mu\text{C}$  cada una están fijas en los puntos de coordenadas  $(-5, 0)$  y  $(5, 0)$ . Las coordenadas están expresadas en metros. Calcula:
- El vector campo electrostático en el punto  $(15, 0)$ .
  - La velocidad con la que llega al punto  $(10, 0)$  una partícula de masa  $20 \text{ g}$  y carga  $8 \mu\text{C}$  que se abandona libremente en el punto  $(15, 0)$ .
- Dato:  $K = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ . (A.B.A.U. extr. 20)
- Rta.:** a)  $\vec{E}_C = -675 \hat{i} \text{ N/C}$ ; b)  $\vec{v}_D = -2,24 \hat{i} \text{ m/s}$ .

### Datos

Valor de las cargas fijas

Posiciones de las cargas fijas: A B

Posición del punto C

Carga que se desplaza

Masa de la carga que se desplaza hasta el origen

Velocidad inicial en el punto C

Posición del punto D por lo que pasa la carga que se desplaza

Constante de Coulomb

### Incógnitas

Vector campo eléctrico en el punto C

Velocidad que tendrá la carga de  $8 \mu\text{C}$  al pasar por el punto D

### Otros símbolos

Distancia

### Ecuaciones

Ley de Coulomb: fuerza entre dos cargas puntuales,  $Q$  y  $q$ , separadas una distancia,  $r$

Principio de superposición

Potencial eléctrico en un punto a una distancia,  $r$ , de una carga puntual,  $Q$

Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas

Energía potencial eléctrica de una carga en un punto A

Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$

Principio de la conservación de la energía entre dos puntos A y B

### Cifras significativas: 3

$$Q = -6,00 \mu\text{C} = -6,00 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$\vec{r}_A = (-5,00, 0) \text{ m}$$

$$\vec{r}_B = (5,00, 0) \text{ m}$$

$$\vec{r}_C = (15,0, 0) \text{ m}$$

$$q = 8,00 \mu\text{C} = 8,00 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$m = 20,0 \text{ g} = 0,0200 \text{ kg}$$

$$v_C = 0$$

$$\vec{r}_D = (10,0, 0) \text{ m}$$

$$K = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

$$\vec{E}_C$$

$$v_D$$

$$r$$

$$\vec{F} = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{Ai}$$

$$V = K \frac{Q}{r}$$

$$V = \sum V_i$$

$$E_{pA} = q \cdot V_A$$

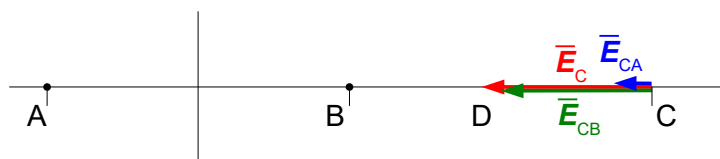
$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$(E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$$

### Solución:

a) Se hace un dibujo en el que se sitúan los puntos A $(-5, 0)$ , B $(5, 0)$ , y C $(15, 0)$ .

Se dibujan los vectores del campo en el punto C, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de atracción porque las cargas son negativas.



La medida del vector campo creado por la carga situada en el punto B es cuatro veces mayor que el creado por la carga situada en el punto A, que está al doble de distancia.

Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante,  $\vec{E}_C$ .

El principio de superposición dice que la intensidad de campo electrostático en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.

Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales,  $Q$  y  $q$ , separadas por una distancia,  $r$ , viene dada por la ley de Coulomb, en la que  $K$  es la constante de Coulomb y  $\vec{u}_r$  el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia,  $r$ , de una carga puntual,  $Q$ , es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = \frac{K \frac{Q \cdot \cancel{q}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{q}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

La distancia entre los puntos A y C vale:  $r_{AC} = |(15,0, 0) \text{ [m]} - (-5,00, 0) \text{ [m]}| = 20,0 \text{ m}$ .

El vector unitario del punto C, tomando como origen el punto A, es  $\vec{i}$ , el vector unitario del eje X.

Se calcula el campo en el punto C, debido a la carga de  $-6 \mu\text{C}$  situada en el punto A:

$$\vec{E}_{CA} = 9,00 \cdot 10^9 \text{ [N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{-6,00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(20,0 \text{ [m]})^2} \vec{i} = -135 \vec{i} \text{ N/C}$$

La distancia entre los puntos B y C vale:  $r_{BC} = |(15,0, 0) \text{ [m]} - (5,00, 0) \text{ [m]}| = 10,0 \text{ m}$ .

El vector unitario del punto C, tomando como origen el punto B, es  $\vec{i}$ , el vector unitario del eje X.

Se calcula el campo en el punto C, debido a la carga de  $-6 \mu\text{C}$  situada en B:

$$\vec{E}_{CB} = 9,00 \cdot 10^9 \text{ [N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{-6,00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(10,0 \text{ [m]})^2} \vec{i} = -540 \vec{i} \text{ N/C}$$

Por el principio de superposición, el vector intensidad de campo eléctrico resultante en el punto C es la suma vectorial de los vectores intensidad de campo de cada carga:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{CA} + \vec{E}_{CB} = -135 \vec{i} \text{ [N/C]} + (-540 \vec{i} \text{ [N/C]}) = -675 \vec{i} \text{ N/C}$$

*Análisis: Coincide con el dibujo. El campo resultante del cálculo está dirigido en el sentido negativo del eje X.*

b) Como la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D \\ \frac{1}{2} m v_C^2 + q \cdot V_C = \frac{1}{2} m v_D^2 + q \cdot V_D$$

Hay que calcular los potenciales eléctricos en los puntos C y D.

El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.

Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.

La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia,  $r$ , de una carga puntual,  $Q$ , es:

$$V = K \frac{Q}{r}$$

$K$  es la constante de Coulomb.

Se calcula el potencial eléctrico en el punto C, debido a la carga de  $-6 \mu\text{C}$  situada en el punto A:

$$V_{CA} = 9,00 \cdot 10^9 \text{ [N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{-6,00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(20,0 \text{ [m]})} = -2,70 \cdot 10^3 \text{ V}$$

Se calcula el potencial eléctrico en el punto C, debido a la carga de  $-6 \mu\text{C}$  situada en el punto B:

$$V_{CB} = 9,00 \cdot 10^9 \text{ [N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{-6,00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(10,0 \text{ [m]})} = -5,40 \cdot 10^3 \text{ V}$$

El potencial eléctrico en el punto C es la suma:

$$V_C = V_{CA} + V_{CB} = -2,70 \cdot 10^3 \text{ [V]} + (-5,40 \cdot 10^3 \text{ [V]}) = -8,10 \cdot 10^3 \text{ V}$$

La distancia entre los puntos A y D vale:  $r_{AD} = |(10,0, 0) \text{ [m]} - (-5,00, 0) \text{ [m]}| = 15,0 \text{ m}$

Se calcula el potencial eléctrico en el punto D, debido a la carga de  $-6 \mu\text{C}$  situada en A:

$$V_{DA} = 9,00 \cdot 10^9 \text{ [N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{-6,00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(15,0 \text{ [m]})} = -3,60 \cdot 10^3 \text{ V}$$

La distancia entre los puntos B y D vale:  $r_{BD} = |(10,0, 0) \text{ [m]} - (5,00, 0) \text{ [m]}| = 5,0 \text{ m}$

Se calcula el potencial eléctrico en el punto D, debido a la carga de  $-6 \mu\text{C}$  situada en B:

$$V_{DB} = 9,00 \cdot 10^9 \text{ [N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{-6,00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(5,0 \text{ [m]})} = -1,1 \cdot 10^4 \text{ V}$$

El potencial eléctrico en el punto D es la suma:

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} = -3,60 \cdot 10^3 \text{ [V]} + (-1,1 \cdot 10^4 \text{ [V]}) = -1,5 \cdot 10^4 \text{ V}$$

Se aplica el principio de conservación de la energía:

$$0 + 8,00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]} \cdot (-8,10 \cdot 10^3 \text{ [V]}) = (20,0 \cdot 10^{-3} \text{ [kg]} \cdot v_D^2 / 2) + 8,00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]} \cdot (-1,5 \cdot 10^4 \text{ [V]})$$

El valor de la velocidad se obtiene despejando:

$$v_D = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]} (1,5 \cdot 10^4 - 8,10 \cdot 10^3) \text{ [V]}}{20,0 \cdot 10^{-3} \text{ [kg]}}} = 2,2 \text{ m/s}$$

Como la velocidad es un vector, hay que determinar la dirección y el sentido.

Se puede deducir que la aceleración tiene la dirección del eje X en sentido negativo, porque la carga es positiva y la aceleración seguirá la dirección y el sentido del campo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración.

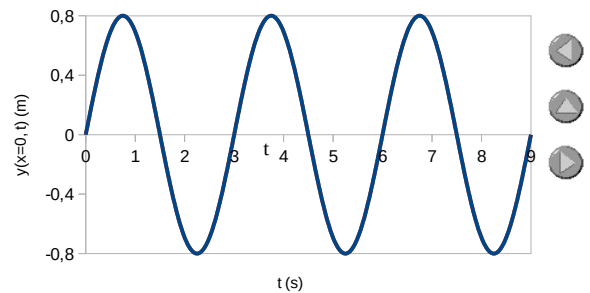
$$\vec{v}_D = -2,2 \vec{i} \text{ m/s}$$

7. Una onda armónica transversal de longitud de onda  $\lambda = 60 \text{ cm}$  se propaga en el sentido positivo del eje X. En la gráfica se muestra la elongación (y) del punto de coordenada  $x = 0$  en función del tiempo. Determina:

- La expresión matemática que describe esta onda, indicando el desfase inicial, la frecuencia y la amplitud de la onda.
- La velocidad de propagación de la onda.

(A.B.A.U. extr. 20)

**Rta.:** a)  $y(x, t) = 0,80 \sin(2,1 t - 10 x) \text{ [m]}$ ;  $\varphi_0 = 0$ ;  $f = 0,33 \text{ s}^{-1}$ ;  $A = 0,80 \text{ m}$ ; b)  $v_p = 0,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



### Datos

Longitud de onda

Gráfica

### Incógnitas

Ecuación de la onda (amplitud, frecuencia angular y número de onda)

Velocidad de propagación

### Otros símbolos

Posición del punto (distancia al foco)

Período

### Ecuaciones

Ecuación de una onda armónica unidimensional

Número de onda

Relación entre la frecuencia y el período

Frecuencia angular

Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación

Velocidad de propagación

### Cifras significativas: 2

$$\lambda = 60 \text{ cm} = 0,60 \text{ m}$$

$$A, \omega, k$$

$$v_p$$

$$x$$

$$T$$

$$y = La \cdot \sin(\omega \cdot t \pm k \cdot x + \varphi_0)$$

$$k = 2 \pi / \lambda$$

$$f = 1 / T$$

$$\omega = 2 \pi \cdot f$$

$$v_p = \lambda \cdot f$$

$$v_p = \Delta x / \Delta t$$

### Solución:

- La ecuación de una onda armónica es:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

Podemos observar en la gráfica:

El tiempo de una oscilación completa es  $T = 3,0 \text{ s}$

La elongación máxima vale  $A = 0,80 \text{ m}$

Cuando el tiempo es cero la elongación del punto  $x = 0$  vale  $y = 0$ .

$$0 = \sin \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \text{ o } \varphi_0 = \pi$$

Para  $t = T / 4 = 0,75 \text{ s}$ , la elongación del punto  $x = 0$  vale  $y = 0,80 \text{ m} = A > 0$ .

$$y = A \cdot \sin((2 \cdot \pi / T) \cdot (T/4) + \varphi_0) = A \cdot \sin(\pi/2 + \varphi_0) = A \Rightarrow \sin(\pi/2 + \varphi_0) = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 0$$

El desfase inicial vale 0.

$$\Rightarrow \text{período: } T = 3,0 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \text{amplitud: } A = 0,80 \text{ m}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3,14 \text{ [rad]}}{0,60 \text{ [m]}} = 10 \text{ rad/m}$$

Se calcula la frecuencia a partir del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,0 \text{ s}} = 0,33 \text{ s}^{-1}$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,33 \text{ [s}^{-1}] = 2,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0,80 \cdot \sin(2,1 \cdot t - 10 \cdot x) \text{ [m]}$$

b) Se calcula la velocidad de propagación a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0,60 \text{ [m]} \cdot 0,33 \text{ [s}^{-1}] = 0,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

8. Un buceador enciende una linterna dentro del agua y la enfoca hacia la superficie formando un ángulo de  $30^\circ$  con la normal.

a) ¿Con qué ángulo emergerá la luz del agua?

b) ¿Cuál es el ángulo de incidencia a partir del cual la luz no saldrá del agua?

DATOS:  $n(\text{agua}) = 4/3$ ;  $n(\text{aire}) = 1$ .

(A.B.A.U. extr. 20)

Rta.: a)  $\theta_r = 41,8^\circ$ ; b)  $\lambda = 48,6^\circ$ .

#### Datos

Índice de refracción del aire

Índice de refracción del agua

Ángulo de incidente en el agua

#### Incógnitas

Ángulo de refracción

Ángulo límite

#### Ecuaciones

Ley de Snell de la refracción

#### Cifras significativas: 3

$$n = 1,00$$

$$n_a = 4 / 3 = 1,33$$

$$\theta_i = 30,0^\circ$$

$$\theta_r$$

$$\lambda$$

$$n_i \cdot \sin \theta_i = n_r \cdot \sin \theta_r$$

#### Solución:

a) Aplicando la ley de Snell de la refracción:

$$n_i \cdot \sin \theta_i = n_r \cdot \sin \theta_r$$

$$1,33 \cdot \sin 30,0 = 1,00 \cdot \sin \theta_r$$

$$\sin \theta_r = 1,33 \cdot \sin 30,0 = 1,33 \cdot 0,500 = 0,667$$

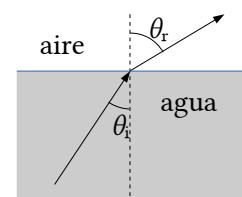
$$\theta_r = \arcsen 0,667 = 41,8^\circ$$

b) Ángulo límite  $\lambda$  es el ángulo de incidente que produce un ángulo de refracción de  $90^\circ$

$$1,33 \cdot \sin \lambda = 1,00 \cdot \sin 90,0^\circ$$

$$\sin \lambda = 1,00 / 1,33 = 0,75$$

$$\lambda = \arcsen 0,75 = 48,6^\circ$$



Cuestiones y problemas de las [Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad](#) (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.

[Respuestas](#) y composición de [Alfonso J. Barbadillo Marán](#).

Algunos cálculos se hicieron con una [hoja de cálculo](#) de [LibreOffice](#) u [OpenOffice](#) del mismo autor.

Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión [CLC09](#) de Charles Lalanne-Cassou. La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de [traducindote](#), de Óscar Hermida López. Se procuró seguir las [recomendaciones](#) del Centro Español de Metrología (CEM). Se consultó el chat de Bing y se usaron algunas respuestas en las cuestiones.

Actualizado: 30/07/23