Ondas

Método y recomendaciones

◊ PROBLEMAS

● Ecuación de onda

1. Una onda cuya amplitud es 0,3 m recorre 300 m en 20 s. Calcula:
   a) La máxima velocidad de un punto que vibra con la onda si la frecuencia es 2 Hz.
   b) La longitud de onda.
   c) Construye la ecuación de onda, teniendo en cuenta que su avance es en el sentido negativo del eje *X*.

(P.A.U. jun. 16)

Rta.: a) v_m = 3,77 m/s; b) λ = 7,50 m; c) $y(x, t)$ = 0,300 · sen(12,6 · t + 0,838 · x) [m]

Datos	**Cifras significativas: 3**
Amplitud	A = 0,0300 m
Distancia recorrida por la onda en 20 s	Δx = 300 m
Tiempo que tarda en recorrer 300 m	Δt = 20,0 s
Frecuencia	f = 2,00 Hz = 2,00 s^{-1}
Velocidad de propagación	v_p = 20,0 m/s
Incógnitas	
Máxima velocidad de un punto que vibra con la onda	v_m
Longitud de onda	λ
Ecuación de la onda (frecuencia angular y número de onda)	ω, k
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Frecuencia angular	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$
Velocidad de propagación	$v_p = \Delta x / \Delta t$

Solución:

b) Se calcula la velocidad de propagación a partir de la distancia recorrida y el tiempo empleado;

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{300\ [\text{m}]}{20{,}0\ [\text{s}]} = 15{,}0\ \text{m/s}$$

Se calcula la longitud de onda a partir de la velocidad de propagación de la onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{15{,}0\ [\text{m/s}]}{2{,}00\ [\text{s}^{-1}]} = 7{,}50\ \text{m}$$

c) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido negativo del eje *X*:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}00\ [\text{s}^{-1}] = 4{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 12{,}6\ \text{rad·s}^{-1}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{7{,}50\ [\text{m}]} = 0{,}838\ \text{rad/m}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}300 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot t + 0{,}838 \cdot x) \text{ [m]}$$

a) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v=\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t}=\frac{\mathrm{d}\{0{,}300 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot t+0{,}838 \cdot x)\}}{\mathrm{d} t}=0{,}300 \cdot 12{,}6 \cos(12{,}6 \cdot t+0{,}838 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

$$v = 3{,}77 \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

La velocidad es máxima cuando $\cos(\varphi) = 1$

$$v_m = 3{,}77 \text{ m/s}$$

2. Una onda armónica transversal se propaga en la dirección del eje X y viene dada por la siguiente expresión (en unidades del sistema internacional): $y(x,t) = 0{,}45 \cos(2\ x - 3\ t)$. Determinar:
   a) La velocidad de propagación.
   b) La velocidad y aceleración máximas de vibración de las partículas.
   c) La diferencia de fase entre dos estados de vibración de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 2 s.

(P.A.U. jun. 15)

Rta.: a) $v_p = 1{,}50$ m/s; b) $|v_m| = 1{,}35$ m/s; $|a_m| = 4{,}05$ m/s²; c) $\Delta\varphi = 6{,}0$ rad

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 0{,}450 \cdot \cos(2{,}00 \cdot x - 3{,}00 \cdot t)$ [m]
Intervalo de tiempo transcurrido	$\Delta t = 2{,}00$ s
Incógnitas	
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad máxima de vibración	v_m
Aceleración máxima de vibración	a_m
Diferencia de fase entre dos estados separados por Δt= 2 s	$\Delta\varphi$
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Frecuencia	f
Longitud de onda	λ
Número de onda	k
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 0{,}450 \cdot \cos(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: $\omega = 3{,}00$ rad/s
Número de onda: $k = 2{,}00$ rad/m
Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega=2\pi\cdot f \Rightarrow f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{3{,}00 \text{ [rad·s}^{-1}]}{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}}=0{,}477 \text{ s}^{-1}=0{,}477 \text{ Hz}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}}{2{,}00 \text{ [rad·m}^{-1}]}=3{,}14 \text{ m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 3{,}14\ [\mathrm{m}] \cdot 0{,}477\ [\mathrm{s}^{-1}] = 1{,}50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}450 \cdot \cos(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = 0{,}450 \cdot (-3{,}00) \cdot (-\mathrm{sen}(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x))\ [\mathrm{m/s}]$$

$$v = 1{,}35 \cdot \mathrm{sen}(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)\ [\mathrm{m/s}]$$

La velocidad es máxima cuando $\mathrm{sen}(\varphi) = 1$

$$v_m = 1{,}35\ \mathrm{m/s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{1{,}35 \cdot \mathrm{sen}(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = 1{,}35 \cdot (-3{,}00) \cdot \cos(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)\ [\mathrm{m/s^2}]$$

$$a = -4{,}05 \cdot \cos(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)\ [\mathrm{m/s^2}]$$

La aceleración es máxima cuando $\cos(\varphi) = -1$

$$a_m = 4{,}05\ \mathrm{m/s^2}$$

c) En un punto x, la diferencia de fase entre dos instantes t_1 y t_2 es:

$$\Delta\varphi = [-3{,}00 \cdot t_2 + 2{,}00 \cdot x] - [-3{,}00 \cdot t_1 + 2{,}00 \cdot x)] = -3{,}00 \cdot (t_2 - t_1) = -3{,}00 \cdot \Delta t = -3{,}00 \cdot 2{,}00 = 6{,}00\ \mathrm{rad}$$

Análisis: Como los instantes que están en fase o cuya diferencia de fase es múltiplo de 2 π *se encuentran a una distancia temporal que es múltiplo del período, un intervalo de tiempo de* 2,00 s, *que es algo inferior al período, corresponde a una diferencia de fase algo inferior a* 2 π = 6,3 rad. *El resultado de* 6,0 rad *es aceptable.*

3. Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje x con velocidad $v = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. La amplitud de la onda es $A = 0{,}10$ m y su frecuencia es $f = 50$ Hz.
   a) Escribe la ecuación de la onda.
   b) Calcula la elongación y la aceleración del punto situado en $x = 2$ m en el instante $t = 0{,}1$ s.
   c) ¿Cuál es la distancia mínima entre dos puntos situados en oposición de fase?

(P.A.U. sep. 11)

Rta.: a) $y = 0{,}100 \cdot \mathrm{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b) $y(2, 0{,}1) = 0$; $a(2, 0{,}1) = 0$; c) $\Delta x = 0{,}200$ m
a′) $y = 0{,}100 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b′) $y(2, 0{,}1) = 0{,}100$ m; $a(2, 0{,}1) = -9{,}87 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s^2}$

Datos		***Cifras significativas: 3***
Amplitud		$A = 0{,}100$ m
Frecuencia		$f = 50{,}0\ \mathrm{Hz} = 50{,}0\ \mathrm{s^{-1}}$
Velocidad de propagación		$v_p = 20{,}0$ m/s
Para el cálculo de la elongación y aceleración:	Posición	$x = 2{,}00$ m
	Tiempo	$t = 0{,}100$ s
Incógnitas		
Ecuación de la onda		ω, k
Elongación del punto situado en $x = 2$ m en el instante $t = 0{,}1$ s.		$y(2, 0{,}1)$
Aceleración del punto situado en $x = 2$ m en el instante $t = 0{,}1$ s.		$a(2, 0{,}1)$
Distancia mínima entre dos puntos situados en oposición de fase		Δx
Otros símbolos		
Posición del punto (distancia al foco)		x
Período		T
Longitud de onda		λ
Ecuaciones		
Ecuación de una onda armónica unidimensional		$y = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda		$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia		$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación		$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido positivo del eje X:

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50{,}0\ [\mathrm{s^{-1}}] = 100 \cdot \pi\ [\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}] = 314\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$$

Se calcula la longitud de onda a partir de la velocidad de propagación de la onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{20{,}0\ [\mathrm{m/s}]}{50{,}0\ [\mathrm{s^{-1}}]} = 0{,}400\ \mathrm{m}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\mathrm{rad}]}{0{,}400\ [\mathrm{m}]} = 5{,}00 \cdot \pi\ [\mathrm{rad/m}] = 15{,}7\ \mathrm{rad/m}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x,\,t) = 0{,}100 \cdot \operatorname{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\mathrm{m}] = 0{,}100 \cdot \operatorname{sen}(314 \cdot t - 15{,}7 \cdot x)\ [\mathrm{m}]$$

b) Para $x = 2{,}00$ m y $t = 0{,}100$ s, la elongación es:

$$y(2,\,0{,}1) = 0{,}100 \cdot \operatorname{sen}(100 \cdot \pi \cdot 0{,}100 - 5{,}00 \cdot \pi \cdot 2{,}00) = 0{,}100 \cdot \operatorname{sen}(0) = 0\ \mathrm{m}$$

La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}100 \cdot \operatorname{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\}}{\mathrm{d}\,t} = 0{,}100 \cdot 100 \cdot 3{,}14 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\mathrm{m/s}]$$

$$v = 31{,}4 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\mathrm{m/s}]$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{31{,}4 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\}}{\mathrm{d}\,t} = -31{,}4 \cdot 100 \cdot 3{,}14 \cdot \operatorname{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\mathrm{m/s^2}]$$

$$a = -9{,}87{\cdot}10^3\ \operatorname{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\mathrm{m/s^2}]$$

Para $x = 2{,}00$ m y $t = 0{,}100$ s, la aceleración es:

$$a(2,\,0{,}1) = -9{,}87{\cdot}10^3\ \operatorname{sen}(100 \cdot \pi \cdot 0{,}100 - 5{,}00 \cdot \pi \cdot 2{,}00) = -9{,}87{\cdot}10^3 \cdot \operatorname{sen}(0) = 0\ \mathrm{m/s^2}$$

(Si la ecuación de onda se escribe en función del coseno, en vez del seno, las respuestas serían:
$y(2,\,0{,}1) = 0{,}100$ m y $a(2,\,0{,}1) = -9{,}87{\cdot}10^3$ m/s²)
Análisis: La aceleración es proporcional y de sentido contrario a la elongación. Si la elongación es nula también lo es la aceleración.

c) En un instante t, la diferencia de fase entre dos puntos situados en x_1 y x_2 es:

$$\Delta\varphi = [(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x_2)] - [(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x_1)] = 5{,}00 \cdot \pi\,(x_1 - x_2) = 5{,}00 \cdot \pi \cdot \Delta x$$

Como están en oposición de fase, la diferencia de fase es π [rad]

$$5{,}00\ [\mathrm{rad/m}] \cdot \pi \cdot \Delta x = \pi\ [\mathrm{rad}]$$

$$\Delta x = 1\ [\mathrm{rad}]\ /\ (5{,}00\ [\mathrm{rad/m}]) = 0{,}200\ \mathrm{m}$$

Análisis: La longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos que están en fase. La distancia mínima entre dos puntos que están en oposición es fase es: $\Delta x = \lambda / 2 = 0{,}200$ m, que coincide con lo calculado.

4. Una onda armónica se propaga en dirección x con velocidad $v = 10$ m/s, amplitud $A = 3$ cm y frecuencia $f = 50\ \mathrm{s^{-1}}$. Calcula:
   a) La ecuación de la onda.
   b) La velocidad y aceleración máxima de un punto de la trayectoria.
   c) Para un tiempo fijo t, ¿qué puntos de la onda están en fase con el punto $x = 10$ m?

(*P.A.U. sep. 10*)

Rta.: a) $y = 0{,}0300 \operatorname{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b) $v_m = 9{,}42$ m/s; $a_m = 2{,}96 \cdot 10^3$ m/s²
c) $x' = 10{,}0 + 0{,}200 \cdot n$ [s], (n = 0, 1, 2 ...)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidad de propagación	$v_p = 10{,}0$ m/s
Amplitud	$A = 3{,}00$ cm $= 0{,}0300$ m
Frecuencia	$f = 50{,}0\ \text{s}^{-1}$
Posición del punto	$x_2 = 10{,}0$ m
Incógnitas	
Ecuación da onda	ω, k
Velocidad máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Puntos de la onda que están en fase con el punto en x = 10 m	x'
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Número de onda	k
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido positivo del eje X:

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 100 \cdot \pi\ [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] = 314\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir de la velocidad de propagación de la onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{10{,}0\ [\text{m/s}]}{50{,}0\ [\text{s}^{-1}]} = 0{,}200\ \text{m}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{0{,}200\ [\text{m}]} = 10{,}0 \cdot \pi\ [\text{rad/m}] = 31{,}4\ \text{rad/m}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}0300 \cdot \operatorname{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}030\ 0 \operatorname{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = 0{,}030\ 0 \cdot 100 \cdot 3{,}14 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = 9{,}42 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

La velocidad es máxima cuando $\cos(\varphi) = 1$

$$v_m = 9{,}42\ \text{m/s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{9{,}42 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -9{,}42 \cdot 100 \cdot 3{,}14 \cdot \operatorname{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

$$a = -2{,}96 \cdot 10^3 \cdot \operatorname{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

La aceleración es máxima cuando $\operatorname{sen}(\varphi) = -1$

$$a_m = 2{,}96·10^3\ m/s^2$$

c) En un instante t, la diferencia de fase entre dos puntos situados en x_1 y x_2 es:

$$\Delta\varphi = (100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x_2) - (100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x_1) = 10 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2)$$

Dos puntos se encuentran en fase cuando la diferencia de fase es múltiplo de 2 π:

$$\Delta\varphi = 2\ \pi \cdot n \text{ (siendo } n = 0, 1, 2\dots)$$

Si se encuentran en fase se cumple:

$$10 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2) = 2\ \pi \cdot n$$

$$x_1 - x_2 = 0{,}200 \cdot n\ [m]$$

Se sustituye el valor del punto $x_2 = 10{,}0$ m y se despeja x_1

$$x_1 = 20{,}0 \cdot n + x_2 = 10{,}0 + 0{,}200 \cdot n\ [m]$$

Como la elección de cuál es el punto 1 y cuál el punto 2 es arbitraria, es más general la expresión:

$$x' = 10{,}0 \pm 0{,}200 \cdot n\ [m]$$

Análisis: Los puntos que están en fase se encuentran a una distancia que es múltiplo de la longitud de onda, $\Delta x = n \cdot \lambda = 0{,}200 \cdot n$ [m]

5. La ecuación de una onda es $y(t, x) = 0{,}2$ sen π $(100\ t - 0{,}1\ x)$. Calcula:
   a) La frecuencia, el número de ondas k, la velocidad de propagación y la longitud de onda.
   b) Para un tiempo fijo t, ¿qué puntos de la onda están en fase con el punto que se encuentra en $x = 10$ m?
   c) Para una posición fija x, ¿para qué tiempos el estado de vibración de ese punto está en fase con la vibración para $t = 1$ s?

(P.A.U. jun. 10)

Rta.: a) $f = 50{,}0$ Hz; $k = 0{,}314$ rad/m; $v = 1{,}00·10^3$ m/s; $\lambda = 20{,}0$ m ; b) $x = 10{,}0 + 20{,}0 \cdot n$ [m]
c) $t = 1{,}00 + 0{,}0200 \cdot n$ [s], ($n = 0, 1, 2\dots$)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 0{,}200 \cdot \text{sen}\ \pi(100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x)$ [m]
Posición del punto	$x_2 = 10{,}0$ m
Tiempo de referencia	$t_1 = 1{,}00$ s
Incógnitas	
Frecuencia	f
Número de ondas	k
Velocidad de propagación	v_p
Longitud de onda	λ
Puntos de la onda que están en fase con el punto que se encuentra en $x = 10$ m	x'
Tiempos en los que la vibración está en fase con la vibración para $t = 1$ s	t'
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Número de onda	k
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre la frecuencia y el período	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 0{,}200 \cdot \text{sen}\ \pi(100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x) = 0{,}200 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 0{,}100 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 100 \cdot \pi$ [rad/s] = 314 rad/s
Número de onda: $k = 0{,}100 \cdot \pi$ [rad/m] = 0,314 rad/m
Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100 \cdot \pi\ [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]}{2\pi\ [\text{rad}]} = 50{,}0\ \text{s}^{-1} = 50{,}0\ \text{Hz}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ [\text{rad}]}{0{,}100 \cdot \pi\ [\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}]} = 20{,}0\ \text{m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 20{,}0\ [\text{m}] \cdot 50{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}00 \cdot 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) En un instante t, la diferencia de fase entre dos puntos situados en x_1 y x_2 es:

$$\Delta\varphi = [\pi\ (100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x_2)] - [\pi\ (100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x_1)] = 0{,}100 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2)$$

Dos puntos se encuentran en fase cuando la diferencia de fase es múltiplo de 2 π:

$$\Delta\varphi = 2\ \pi \cdot n \text{ (siendo } n = 0, 1, 2\ldots)$$

Si se encuentran en fase se cumple:

$$0{,}100 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2) = 2\ \pi \cdot n$$

Se sustituye el valor del punto x_2 = 10,0 m y se despeja x_1

$$x_1 = 20{,}0 \cdot n + x_2 = 10{,}0 + 20{,}0 \cdot n\ [\text{m}]$$

Como la elección de cuál es el punto 1 y cuál el punto 2 es arbitraria, es más general la expresión:

$$x' = 10{,}0 \pm 20{,}0 \cdot n\ [\text{m}]$$

Análisis: Los puntos que están en fase se encuentran a una distancia que es múltiplo de la longitud de onda, $\Delta x = n \cdot \lambda = 20{,}0 \cdot n$ [m]

c) En un punto x, la diferencia de fase entre dos instantes t_1 y t_2 es

$$\Delta\varphi = [\pi\ (100 \cdot t_2 - 0{,}100 \cdot x)] - [\pi\ (100 \cdot t_1 - 0{,}100 \cdot x)] = 100\ \pi\ (t_2 - t_1)$$

Si se encuentran en fase se cumple:

$$100 \cdot \pi\ (t_2 - t_1) = 2\ \pi \cdot n$$

Se sustituye el valor del instante t_1 = 1,00 s y se despeja t_2.

$$t_2 = 0{,}0200 \cdot n + t_1 = 1{,}00 \pm 0{,}0200 \cdot n\ [\text{s}]$$

Como la elección de cuál es el instante 1 y cuál el instante 2 es arbitraria, es más general la expresión:

$$t' = 1{,}00 \pm 0{,}0200 \cdot n\ [\text{s}]$$

Análisis: El período puede calcularse a partir de la frecuencia: $T = 1 / f = 1 / (50{,}0\ \text{s}^{-1}) = 0{,}0200$ s. *Los instantes en que están en fase son múltiplos del período.* $\Delta t = n \cdot T = 0{,}0200 \cdot n$ [s]

6. La ecuación de una onda es $y(x, t) = 2 \cos 4\pi\ (5\ t - x)$ (S.I.). Calcula:
   a) La velocidad de propagación.
   b) La diferencia de fase entre dos puntos separados 25 cm.
   c) En la propagación de una onda ¿qué se transporta materia o energía? Justifícalo con un ejemplo.

   (P.A.U. jun. 09)

   Rta.: a) v_p = 5,00 m/s; b) $\Delta\varphi = \pi$ rad

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 2{,}00 \cdot \cos 4\ \pi\ (5{,}00 \cdot t - x)$ [m]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Distancia entre los puntos	Δx = 25,0 cm = 0,250 m
Incógnitas	
Velocidad de propagación	v_p
Diferencia de fase entre dos puntos separados 25 cm	$\Delta\varphi$
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Frecuencia	f
Longitud de onda	λ
Número de onda	k
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 2{,}00 \cdot \cos 4\pi\,(5{,}00 \cdot t - x) = 2{,}00 \cdot \cos(20{,}0 \cdot \pi \cdot t - 4{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 20{,}0 \cdot \pi$ [rad/s] = 62,8 rad/s
Número de onda: $k = 4{,}00 \cdot \pi$ [rad/m] = 12,6 rad/m
Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20{,}0 \cdot \pi\ [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]}{2\pi\ [\text{rad}]} = 10{,}0\ \text{s}^{-1} = 10{,}0\ \text{Hz}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ [\text{rad}]}{4{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}]} = 0{,}500\ \text{m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}500\ [\text{m}] \cdot 10{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 5{,}00\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) En un instante t, la diferencia de fase entre dos puntos situados en x_1 y x_2 es:

$$\Delta\varphi = [4\pi\,(5{,}00 \cdot t - x_2)] - [4\pi\,(5{,}00 \cdot t - x_1)] = 4\pi\,(x_1 - x_2) = 4\pi\,\Delta x = 4\pi \cdot 0{,}250 = \pi\ \text{rad}$$

Análisis: La distancia entre los puntos es 0,250 m *que es la mitad de la longitud de onda. Como los puntos que están en fase o cuya diferencia de fase es múltiplo de* 2π *se encuentran a una distancia que es múltiplo de la longitud de onda, una distancia de media longitud de onda corresponde a una diferencia de fase de la mitad de* 2π*, o sea,* π rad

c) Una onda es un mecanismo de transporte de energía sin desplazamiento neto de materia. En una onda longitudinal de una cuerda vibrante, las partículas del medio vuelven a su posición inicial mientras la perturbación que provoca la elevación y depresión se desplaza a lo largo de la cuerda.

7. Una onda armónica transversal se propaga en la dirección del eje X: $y(x, t) = 0{,}5\ \text{sen}\,(4\,x - 6\,t)$ (S.I.). Calcula:
   a) La longitud de onda, la frecuencia con la que vibran las partículas del medio y la velocidad de propagación de la onda.
   b) La velocidad de un punto situado en x = 1 m en el instante t = 2 s
   c) Los valores máximos de la velocidad y la aceleración.

(P.A.U. sep. 08)

Rta.: a) λ = 1,57 m; f = 0,955 Hz; v_p = 1,50 m/s; b) v_1 = 0,437 m/s; c) v_m = 3,00 m/s; a_m = 18,0 m/s²

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 0{,}500 \cdot \text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)$ [m]
Incógnitas	
Longitud de onda	λ
Frecuencia	f
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad de un punto situado en x = 1 m en el instante t = 2 s	v_1
Velocidad máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Amplitud	A
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\ \pi\ /\ \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 0{,}500 \cdot \text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 6{,}00\ \text{rad·s}^{-1}$
Número de onda: $k = 4{,}00\ \text{rad·m}^{-1}$
Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{4{,}00\ [\text{rad·m}^{-1}]} = 1{,}57\ \text{m}$$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6{,}00\ [\text{rad·s}^{-1}]}{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]} = 0{,}955\ \text{s}^{-1} = 0{,}955\ \text{Hz}$$

La frecuencia con la que vibran las partículas del medio es la misma que la de la onda.
Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 1{,}57\ [\text{m}] \cdot 0{,}955\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}50\ \text{m·s}^{-1}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{0{,}500 \cdot \text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\}}{\text{d}t} = 0{,}500 \cdot (-6{,}00) \cdot \cos(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = -3{,}00 \cdot \cos(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

Sustituyendo los valores de x = 1,00 m y t = 2,00 s

$$v_1 = -3{,}00 \cdot \cos(-6{,}00 \cdot 2{,}00 + 4{,}00 \cdot 1{,}00) = 0{,}437\ \text{m/s}$$

c) La velocidad es máxima cuando $\cos(\varphi) = -1$

$$v_m = 3{,}00\ \text{m/s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\text{d}v}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{-3{,}00 \cdot \cos(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\}}{\text{d}t} = -3{,}00 \cdot (-6{,}00) \cdot [-\text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)]\ [\text{m/s}^2]$$

$$a = -18{,}0\ \text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

La aceleración es máxima cuando sen(φ) = −1

$$a_m = 18{,}0 \text{ m/s}^2$$

8. La ecuación de una onda sonora que se propaga en la dirección del eje X es:
$y = 4 \text{ sen } 2\pi\ (330\ t - x)$ (S.I.). Halla:
a) La velocidad de propagación.
b) La velocidad máxima de vibración de un punto del medio en el que se transmite la onda.
c) Define la energía de una onda armónica.

(P.A.U. sep. 07)

Rta.: a) $v_p = 330 \text{ m·s}^{-1}$; b) $v_m = 8{,}29·10^3$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 4{,}00 \cdot \text{sen}[2\ \pi(330 \cdot t - x)]$ [m]
Incógnitas	
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad máxima de vibración de un punto del medio	v_m
Otros símbolos	
Amplitud	A
Frecuencia	f
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 4{,}00 \cdot \text{sen}[2\ \pi(330 \cdot t - x)] = 4{,}00 \cdot \text{sen}(660 \cdot \pi \cdot t - 2{,}00 \cdot \pi \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: $\omega = 660 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 2{,}07·10^3 \text{ rad·s}^{-1}$
Número de onda: $k = 2{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad·m}^{-1}] = 6{,}28 \text{ rad·m}^{-1}$
Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi\ [\text{rad}]}{2{,}00\cdot\pi\ [\text{rad·m}^{-1}]}=1{,}00 \text{ m}$$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega=2\pi\cdot f \Rightarrow f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{660\cdot\pi\ [\text{rad·s}^{-1}]}{2\pi\ [\text{rad}]}=330 \text{ s}^{-1}=330 \text{ Hz}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 1{,}00 \text{ [m]} \cdot 330\ [\text{s}^{-1}] = 330 \text{ m·s}^{-1}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v=\frac{\text{d}y}{\text{d}t}=\frac{\text{d}\{4{,}00\cdot\text{sen}[2\pi(330\cdot t-x)]\}}{\text{d}t}=4{,}00\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 330\cdot\cos[2\pi(330\cdot t-x)] \text{ [m/s]}$$

$$v = 8{,}29·10^3 \cdot \cos[2\ \pi(330 \cdot t - x)] \text{ [m/s]}$$

La velocidad es máxima cuando cos(φ) = −1

$$v_m = 8{,}29·10^3 \text{ m/s}$$

c) La energía que transmite una onda armónica produce un movimiento armónico simple de las partículas del medio. La energía de un M.A.S. es

$$E = (E_c + E_p) = ½\ m · v^2 + ½\ k · x^2 = ½\ m · v^2_m = ½\ k · A^2$$

La velocidad máxima de un movimiento armónico simple es:

$$v_m = \omega · A = 2\ \pi · f · A$$

La energía que transporta una onda es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia.

$$E = ½\ m · v^2_m = 2\ \pi^2 · m · f^2 · A^2$$

9. La ecuación de una onda transversal es $y(t, x) = 0{,}05 \cos(5\ t - 2\ x)$ (magnitudes en el S.I.). Calcula:
   a) Los valores de t para los que un punto situado en $x = 10$ m tiene velocidad máxima.
   b) ¿Qué tiempo ha de transcurrir para que la onda recorra una distancia igual a 3 λ?
   c) ¿Esta onda es estacionaria?

(P.A.U. jun. 07)

Rta.: a) $t_1 = 4{,}3 + 0{,}63\ n$ [s], (n = 0, 1, 2...); b) $t_2 = 3{,}8$ s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 0{,}0500 · \cos(5{,}00 · t - 2{,}00 · x)$ [m]
Posición del punto (distancia al foco)	$x = 10{,}0$ m
Incógnitas	
Tiempos para los que un punto en $x = 10$ m tiene velocidad máxima	t_1
Tiempo para que la onda recorra una distancia igual a 3 λ	t_2
Otros símbolos	
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A · \cos(\omega · t \pm k · x)$
Número de onda	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\ \pi · f$
Relación entre la frecuencia y el período	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda · f$

Solución:

a) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}050\ 0 \cos(5{,}00 · t + 2{,}00 · x)\}}{\mathrm{d}t} = -0{,}050\ 0\ 5{,}00 · \operatorname{sen}(5{,}00 · t + 2{,}00 · x)\ [\mathrm{m/s}]$$

$$v = -0{,}250 · \operatorname{sen}(5{,}00 · t - 2{,}00 · x) \text{ [m/s]}$$

La velocidad es máxima cuando $\operatorname{sen}(\varphi) = -1$

$$v_m = 0{,}250 \text{ m/s}$$

Este valor del seno corresponde a un ángulo de $\varphi = \pi/2$ o $3\ \pi/2$ [rad] en la primera circunferencia, y, en general

$$\varphi = n · \pi + \pi / 2 \text{ [rad]}$$

Siendo n un número natural (n = 0, 1, 2...)
Igualando y sustituyendo $x = 10{,}0$ m

$$(5{,}00\ t - 2{,}00 · 10{,}0) = n · \pi + \pi / 2$$

$$t_1 = 4{,}00 + 0{,}100 · \pi + 0{,}200 · n · \pi = 4{,}31 + 0{,}628 · n \text{ [s]}$$

Análisis: La primera vez que la velocidad es máxima para x = 10 m *es* (n = 0) *para* t = 4,31 s. *El período puede calcularse a partir de la frecuencia en el apartado b:* $T = 1 / f = 1 / (0{,}796\ \text{s}^{-1}) = 1{,}26$ s. *El tiempo volverá a ser máximo cada vez que pase por el punto de equilibrio, o sea, cada medio período:* 0,628 s.

b) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y(t, x) = 0{,}0500 \cdot \cos(5{,}00 \cdot t - 2{,}00 \cdot x)$$

Frecuencia angular: ω = 5,00 rad/s
Número de onda: k = 2,00 rad/m
Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5{,}00\ [\text{rad·s}^{-1}]}{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]} = 0{,}796\ \text{s}^{-1} = 0{,}796\ \text{Hz}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{2{,}00\ [\text{rad·m}^{-1}]} = 3{,}14\ \text{m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 3{,}14\ [\text{m}] \cdot 0{,}796\ [\text{s}^{-1}] = 2{,}50\ \text{m·s}^{-1}$$

Se calcula el tiempo que tarda en recorrer una distancia igual a $\Delta x = 3 \cdot \lambda = 3 \cdot 3{,}14$ [m] = 9,42 m a partir de la velocidad de propagación constante de la onda

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow t_2 = \frac{\Delta x}{v_p} = \frac{9{,}42\ [\text{m}]}{2{,}50\ [\text{m/s}]} = 3{,}77\ \text{s}$$

Análisis: Se puede definir el período como el tiempo que tarda una onda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda. Por tanto, el tiempo necesario para que la onda recorra una distancia igual a $3 \cdot \lambda$*, será el triple del período:* $t_2 = 3 \cdot T = 3 \cdot 1{,}26$ [s] = 3,77 s.

c) Las ondas estacionarias no se propagan y no hay una transmisión neta de energía.
En las ondas estacionarias existen unos puntos, llamados nodos, que no oscilan. Su elongación es nula en todo instante.
La onda del enunciado no es una onda estacionaria, ya que la ecuación de la onda no coincide con la de las ondas estacionarias y no existe ningún punto de la onda que sea un nodo, que tenga una elongación nula en cualquier instante.

10. Una onda se transmite a lo largo de una cuerda. El punto situado en x = 0 oscila según la ecuación $y = 0{,}1 \cos(10\ \pi\ t)$ y otro punto situado en x = 0,03 m oscila según la ecuación $y = 0{,}1 \cos(10\ \pi\ t - \pi / 4)$. Calcula:
    a) La constante de propagación, la velocidad de propagación y la longitud de onda.
    b) La velocidad de oscilación de un punto cualquiera de la cuerda.

(P.A.U. jun. 06)

Rta.: a) k = 26,2 rad/m; v_p = 1,20 m/s; λ = 0,240 m; b) $v -3{,}14 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)$ [m/s]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de oscilación en el origen x = 0	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t)$ [m]
Ecuación de oscilación en x = 0,03 m	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4{,}00)$ [m]
Incógnitas	
Número de onda (¿constante de propagación?)	k
Velocidad de propagación	v_p
Longitud de onda	λ
Velocidad de la partícula en un punto cualquiera de la cuerda.	v

Otros símbolos

Posición del punto (distancia al foco)	x
Amplitud	A
Frecuencia	f
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos (\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2 \pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2 \pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se calcula la amplitud y la frecuencia angular comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación de vibración en el origen:

Ecuación general de una onda armónica:	$y = A \cdot \cos (\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Ecuación de la onda armónica en el origen ($x = 0$):	$y = 0{,}100 \cdot \cos (10{,}0 \cdot \pi \cdot t)$ [m]
Amplitud:	$A = 0{,}100$ m
Frecuencia angular:	$\omega = 10{,}0 \cdot \pi$ [rad/s] = 31,4 rad/s

Se calcula el número de onda comparando la ecuación de la onda armónica unidimensional, en la que se han sustituido la amplitud y la frecuencia angular, con la ecuación de vibración en el punto $x = 0{,}0300$ m:

Ecuación de la onda armónica:	$y = 0{,}100 \cdot \cos (10{,}0 \cdot \pi \cdot t \pm k \cdot x)$ [m]
Ecuación de la onda armónica en el punto $x = 0{,}0300$ m:	$y = 0{,}100 \cdot \cos (10{,}0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4{,}00)$ [m]

$$k \cdot x = \frac{\pi}{4{,}00} \Rightarrow k = \frac{\pi}{4{,}00 \cdot x} = \frac{3{,}14\ [\text{rad}]}{4{,}00 \cdot 0{,}0300\ [\text{m}]} = 26{,}2\ \text{rad/m}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{26{,}2\ [\text{rad/m}]} = 0{,}240\ \text{m}$$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10{,}0 \cdot \pi}{2\pi} = 5{,}00\ \text{s}^{-1} = 5{,}00\ \text{Hz}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}240\ [\text{m}] \cdot 5{,}00\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}20\ \text{m/s}$$

b) La ecuación de movimiento queda:

$$y = 0{,}100 \cdot \cos (31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\text{m}]$$

La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -0{,}100 \cdot 31{,}4 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = -3{,}14 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

11. Una onda periódica viene dada por la ecuación $y(t, x) = 10$ sen $2\pi(50\ t - 0{,}2\ x)$ en unidades del S.I. Calcula:
    a) Frecuencia, velocidad de fase y longitud de onda.
    b) La velocidad máxima de una partícula del medio y los valores del tiempo t para los que esa velocidad es máxima (en un punto que dista 50 cm del origen)

(P.A.U. sep. 05)

Rta.: a) f = 50,0 Hz; λ = 5,00 m; v_p = 250 m/s; b) v_m = 3,14 km/s; t =0,00200 + 0,0100 · n [s], (n = 0, 1…)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda (S.I.)	$y = 10{,}0$ sen$[2\pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]$ [m]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Posición del punto (distancia al foco)	x = 50,0 cm = 0,500 m
Incógnitas	
Frecuencia	f
Velocidad de fase	v_p
Longitud de onda	λ
Tiempo para los que $y(t, x)$ es máxima en la posición x = 50 cm	t
Otros símbolos	
Período	T
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 10{,}0 \cdot \text{sen}[2\ \pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)] = 4{,}00 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 0{,}400 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 100 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 314\ \text{rad·s}^{-1}$

Número de onda: $k = 0{,}400 \cdot \pi\ [\text{rad·m}^{-1}] = 1{,}26\ \text{rad·m}^{-1}$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}]}{2\pi\ [\text{rad}]} = 50{,}0\ \text{s}^{-1} = 50{,}0\ \text{Hz}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ [\text{rad}]}{0{,}400 \cdot \pi\ [\text{rad·m}^{-1}]} = 5{,}00\ \text{m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 5{,}00\ [\text{m}] \cdot 50{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 250\ \text{m·s}^{-1}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{10{,}0 \cdot \text{sen}[2\pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]\}}{\text{d}t} = 10{,}0 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50{,}0 \cdot \cos[2\pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]\ [\text{m/s}]$$

$$v = 3{,}14 \cdot 10^3 \cdot \cos[2\ \pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]\ [\text{m/s}]$$

La velocidad es máxima cuando $\cos(\varphi) = -1$

$$v_m = 3{,}14 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

Este valor del coseno corresponde a un ángulo de $\varphi = 0$ o π [rad] en la primera circunferencia, y, en general

$$\varphi = n \cdot \pi\ [\text{rad}]$$

Siendo n un número natural (n = 0, 1, 2....)

Igualando y sustituyendo x = 0,500 m

$$2\ \pi\ (50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot 0{,}500) = n \cdot \pi$$

$$t = 0{,}00200 + 0{,}0100 \cdot n\ [\text{s}],\ (n = 0, 1, 2...)$$

Análisis: La primera vez que la velocidad es máxima para x = 0,500 m *es* (n = 0) *es* t_1 = 0,00200 s. *Como el período es* T = 1 / 50,0 [s⁻¹] = 0,0200 s, *volverá a ser máxima cada vez que pase por el origen, o sea, cada medio período, o sea cada* 0,0100 s.

12. Una onda plana se propaga en la dirección X positiva con velocidad v = 340 m/s, amplitud A = 5 cm y frecuencia f = 100 Hz (fase inicial φ_0 = 0)
a) Escribe la ecuación de la onda.
b) Calcula la distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es 2 π/3.
(P.A.U. jun. 05)

Rta.: a) $y = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x)$ [m]; b) Δx = 1,13 m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Amplitud	A = 5,00 cm = 0,0500 m
Frecuencia	f = 100 Hz = 100 s⁻¹
Velocidad de propagación de la onda por el medio	v_p = 340 m/s
Incógnitas	
Ecuación de onda	ω, k
Distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase es 2 π/3	Δx
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido positivo del eje X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 100\ [\text{s}^{-1}] = 200 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 628\ \text{rad·s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir de la velocidad de propagación de la onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{340\ [\text{m/s}]}{100\ [\text{s}^{-1}]} = 3{,}40\ \text{m}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{3{,}40\ [\text{m}]} = 1{,}85\ \text{rad/m}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x)\ [\text{m}]$$

b) En un instante t, la diferencia de fase entre dos puntos situados en x_1 y x_2 es:

$$\Delta\varphi = (628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x_2) - (628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x_1) = 1{,}85 \cdot \Delta x$$

Si la diferencia de fase es 2 π/3 = 2,09 rad

$$1{,}85\ [\text{rad/m}] \cdot \Delta x = 2{,}09\ \text{rad}$$

$$\Delta x = \frac{2{,}09\ [\text{rad}]}{1{,}85\ [\text{rad/m}]} = 1{,}13\ \text{m}$$

Análisis: Si la diferencia de fase hubiese sido de 2 π rad*, la distancia entre los puntos habría sido una longitud de onda* λ*. A una diferencia de fase de* 2 π/3 rad *le corresponde una distancia de* λ / 3 = 3,40 [m] / 3 = 1,13 m.

13. La función de onda que describe la propagación de un sonido es $y(x) = 6·10^{-2} \cos(628\ t - 1{,}90\ x)$ (magnitudes en el sistema internacional). Calcula:
a) La frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

b) La velocidad y la aceleración máximas de un punto cualquier del medio en el que se propaga la onda.

(P.A.U. sep. 04)

Rta.: a) f = 100 Hz; λ = 3,31 m; v_p = 331 m/s; b) v_m = 37,7 m/s; a_m = 2,37·10⁴ m/s²

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x)$ [m]
Incógnitas	
Frecuencia	f
Longitud de onda	λ
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Amplitud	A
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: $\omega = 628 \text{ rad·s}^{-1}$

Número de onda: $k = 1{,}90 \text{ rad·m}^{-1}$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{628 \text{ [rad·s}^{-1}]}{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}} = 100 \text{ s}^{-1} = 100 \text{ Hz}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}}{1{,}90 \text{ [rad·m}^{-1}]} = 3{,}31 \text{ m}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 3{,}31 \text{ [m]} \cdot 100 \text{ [s}^{-1}] = 331 \text{ m·s}^{-1}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot 628 \cdot \operatorname{sen}(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

$$v = -37{,}7 \cdot \operatorname{sen}(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

La velocidad es máxima cuando sen(φ) = −1

$$v_m = 37{,}7 \text{ m/s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{-37{,}7 \cdot \operatorname{sen}(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -37{,}7 \cdot 628 \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s}^2]$$

$$a = -2{,}37 \cdot 10^4 \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s}^2]$$

La aceleración es máxima cuando cos(φ) = −1

$$a_m = 2{,}37\cdot 10^4\ \text{m/s}^2$$

14. Por una cuerda tensa se propaga una onda transversal con amplitud 5 cm, frecuencia 50 Hz y velocidad de propagación 20 m/s. Calcula:
    a) La ecuación de onda $y(x, t)$
    b) Los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 1$ m

(P.A.U. jun. 04)

Rta.: a) $y = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b) $t = 0{,}0550 + 0{,}0100 \cdot n$ [s], ($n = 0, 1, 2$…)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Amplitud	$A = 5{,}00$ cm $= 0{,}0500$ m
Frecuencia	$f = 50{,}0$ Hz $= 50{,}0$ s^{-1}
Velocidad de propagación	$v_p = 20{,}0$ m/s
Posición para calcular los valores del tiempo en los que y es máxima	$x = 1{,}00$ m
Incógnitas	
Ecuación de la onda (frecuencia angular y número de onda)	ω, k
Tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 1$ m	t
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Longitud de onda	λ
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido positivo del eje X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 100 \cdot \pi\ [\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}] = 314\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Se calcula la longitud de onda a partir de la velocidad de propagación de la onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{20{,}0\ [\text{m/s}]}{50{,}0\ [\text{s}^{-1}]} = 0{,}400\ \text{m}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{0{,}400\ [\text{m}]} = 5{,}00\cdot\pi\ [\text{rad/m}] = 15{,}7\ \text{rad/m}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}] = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(314 \cdot t - 15{,}7 \cdot x)\ [\text{m}]$$

b) y es máxima cuando $\text{sen}(\varphi) = 1$, lo que corresponde a un ángulo de $\varphi = \pi/2$ [rad] en la primera circunferencia. Si suponemos que se refiere a una y máxima en valor absoluto, $\varphi = \pm \pi / 2$ [rad], y, en general

$$\varphi = \pi/2 + n \cdot \pi\ [\text{rad}]$$

Siendo n un número natural ($n = 0, 1, 2$…)
Igualando y sustituyendo $x = 1{,}00$ m

$$100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi = \pi / 2 + n \cdot \pi$$

$$t = 0{,}0550 + 0{,}0100 \cdot n\ [\text{s}]$$

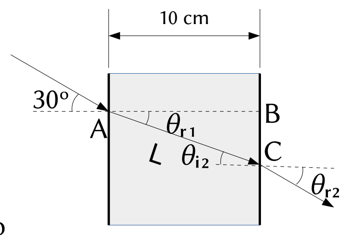
Análisis: La primera vez que la elongación es máxima para x = 1,00 m es (n = 0) cuando t_1 = 0,0550 s. Como el período es $T = 1 / f = 1 / (50{,}0\ \text{s}^{-1}) = 0{,}0200$ s, volverá a ser máxima cada 0,0200 s, y máxima en valor absoluto cada medio ciclo, o sea cada 0,0100 s

● Dioptrio plano

1. Un rayo de luz de frecuencia $5 \cdot 10^{14}$ Hz incide con un ángulo de incidencia de 30° sobre una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de espesor 10 cm. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio es 1,50 y el del aire 1,00:
   a) Enuncia las leyes de la refracción y dibuja la marcha de los rayos en el aire y en el interior de la lámina de vidrio.
   b) Calcula la longitud de onda de la luz en el aire y en el vidrio, y la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina.
   c) Halla el ángulo que forma el rayo de luz con la normal cuando emerge de nuevo al aire.
   Dato: $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s *(P.A.U. sep. 14)*
   Rta.: b) λ(aire) = 600 nm; λ(vidrio) = 400 nm; L = 10,6 cm; c) θ_{r2} = 30°

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia del rayo de luz	$f = 5{,}00 \cdot 10^{14}$ Hz
Ángulo de incidencia	$\theta_{i1} = 30{,}0°$
Espesor de la lámina de vidrio	e = 10,0 cm = 0,100 m
Índice de refracción del vidrio	$n_v = 1{,}50$
Índice de refracción del aire	$n_a = 1{,}00$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s
Incógnitas	
Longitud de onda de luz en el aire y en el vidrio	λ_a, λ_v
Longitud recorrida por el rayo de luz en el interior de la lámina	L
Ángulo de desviación del rayo al salir de la lámina	θ_{r2}
Ecuaciones	
Índice de refracción de un medio $_i$ en el que la luz se desplaza a la velocidad v_i	$n_i = \dfrac{c}{v_i}$
Relación entre la velocidad v, la longitud de onda λ y la frecuencia f	$v = \lambda \cdot f$
Ley de Snell de la refracción	$n_i \cdot \text{sen}\ \theta_i = n_r \cdot \text{sen}\ \theta_r$

Solución:



a) Las leyes de Snell de la refracción son:
1.ª El rayo incidente, el rayo refractado y la normal están en el mismo plano.
2.ª La relación matemática entre los índices de refracción n_i y n_r de los medios incidente y refractado y los ángulos de incidencia y refracción θ_i y θ_r, es:

$$n_i \cdot \text{sen}\ \theta_i = n_r \cdot \text{sen}\ \theta_r$$

En la figura se representa la trayectoria de la luz. El rayo incidente en el punto A con un ángulo de incidencia θ_{i1} = 30° pasa del aire al vidrio dando un rayo refractado que forma el primer ángulo de refracción θ_{r1} y el segundo ángulo de incidencia θ_{i2} entre el vidrio y el aire. Finalmente, sale de la lámina de vidrio por el punto B con el segundo ángulo de refracción θ_{r2}.

b) La velocidad de la luz en el aire es:

$$v_a = \frac{c}{n_a} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{1{,}00} = 3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el aire es:

$$\lambda_a = \frac{v_a}{f} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{5{,}00 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}} = 6{,}00 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 600\ \text{nm}$$

La velocidad de la luz en el vidrio es:

$$v_v=\frac{c}{n_v}=\frac{3{,}00\cdot 10^8\ \text{m/s}}{1{,}50}=2{,}00\cdot 10^8\ \text{m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el vidrio es:

$$\lambda_v=\frac{v_v}{f}=\frac{2{,}00\cdot 10^8\ \text{m/s}}{5{,}00\cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}}=4{,}00\cdot 10^{-7}\ \text{m}=400\ \text{nm}$$

Como el espesor de la lámina es de 10 cm, la longitud recorrida por el rayo es la hipotenusa L del triángulo ABC.
El primer ángulo de refracción θ_{r1} se puede calcular aplicando la ley de Snell

$$1{,}00 \cdot \text{sen } 30° = 1{,}50 \cdot \text{sen } \theta_{r1}$$

$$\text{sen}\,\theta_{r1}=\frac{1{,}00\cdot\text{sen}\,30°}{1{,}50}=0{,}333$$

$$\theta_{r1} = \text{arcsen } 0{,}333 = 19{,}5°$$

Por tanto, la hipotenusa L vale

$$L=\frac{e}{\cos\theta_{r1}}=\frac{10{,}0\ [\text{cm}]}{\cos 19{,}5°}=10{,}6\ \text{cm}$$

c) Como la lámina de vidrio es de caras paralelas, el segundo ángulo de incidencia a_{i2} es igual al primer ángulo de refracción:

$$\theta_{i2} = \theta_{r1} = 19{,}5°$$

Para calcular el ángulo con el que sale de la lámina, se vuelve a aplicar la ley de Snell entre el vidrio (que ahora es el medio incidente) y el aire (que es el medio refractado):

$$1{,}50 \cdot \text{sen } 19{,}5° = 1{,}00 \cdot \text{sen } \theta_{r2}$$

$$\text{sen}\,\theta_{r2}=\frac{1{,}50\cdot\text{sen}\,19{,}5°}{1{,}00}=0{,}500$$

$$\theta_{r2} = \text{arcsen } 0{,}500 = 30{,}0°$$

Análisis: Este resultado es correcto porque el rayo sale paralelo al rayo incidente original.

2. Un rayo de luz pasa del agua (índice de refracción n = 4/3) al aire (n = 1). Calcula:
   a) El ángulo de incidencia si los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí.
   b) El ángulo límite.
   c) ¿Hay ángulo límite si la luz incide del aire al agua?

   (P.A.U. jun. 13)

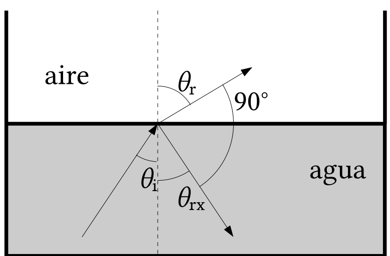
   Rta.: a) θ_i = 36,9°; b) λ = 48,6°

Datos	***Cifras significativas: 3***
Índice de refracción del aire	n = 1,00
Índice de refracción del agua	n_a = 4 / 3 = 1,33
Ángulo entre el rayo refractado y el reflejado	θ_i = 90,0°
Incógnitas	
Ángulo de incidencia	θ_i
Ángulo límite	λ
Ecuaciones	
Ley de Snell de la refracción	$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:

a) Aplicando la ley de Snell de la refracción:

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \theta_i = 1{,}00 \cdot \text{sen } \theta_r$$



A la vista del dibujo debe cumplirse que

$$\theta_r + 90° + \theta_{rx} = 180°$$

Como el ángulo de reflexión θ_{rx} es igual al ángulo de incidencia θ_i, la ecuación anterior se convierte en:

$$\theta_i + \theta_r = 90°$$

Es decir, que el ángulo de incidencia θ_i y el de refracción θ_r son complementarios.
El seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario. Entonces la primera ecuación queda:

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r = \cos \theta_i$$

$$\tan \theta_i = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}75$$

$$\theta_i = \arctan 0{,}75 = 36{,}9°$$

b) Ángulo límite λ es el ángulo de incidencia tal que el de refracción vale 90°

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \lambda = 1{,}00 \cdot \text{sen } 90{,}0°$$

$$\text{sen } \lambda = 1{,}00 / 1{,}33 = 0{,}75$$

$$\lambda = \arcsen 0{,}75 = 48{,}6°$$

c) No. Cuando la luz pasa del aire al agua, el ángulo de refracción es menor que el de incidencia. Para conseguir un ángulo de refracción de 90° el ángulo de incidencia tendría que ser mayor que 90° y no estaría en el aire.
También puede deducirse de la ley de Snell.

$$1{,}00 \cdot \text{sen } \lambda_1 = 1{,}33 \cdot \text{sen } 90°$$

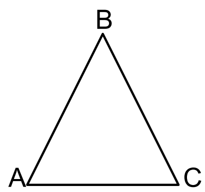
$$\text{sen } \lambda_1 = 1{,}33 / 1{,}00 > 1$$

Es imposible. El seno de un ángulo no puede ser mayor que uno.

3. Sobre un prisma equilátero de ángulo 60° (ver figura), incide un rayo luminoso monocromático que forma un ángulo de 50° con la normal a la cara AB. Sabiendo que en el interior del prisma el rayo es paralelo a la base AC:
   a) Calcula el índice de refracción del prisma.
   b) Determina el ángulo de desviación del rayo al salir del prisma, dibujando la trayectoria que sigue el rayo.
   c) Explica si la frecuencia y la longitud de onda correspondientes al rayo luminoso son distintas, o no, dentro y fuera del prisma.

   Dato: n(aire) = 1 *(P.A.U. sep. 11)*

   Rta.: a) n_p = 1,5; b) θ_{r2} = 50°



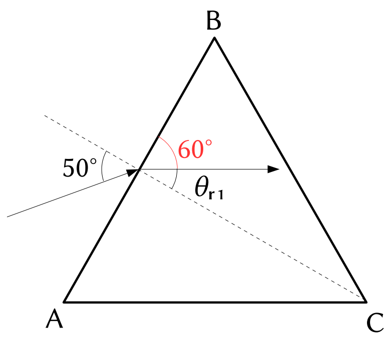
Datos	***Cifras significativas: 2***
Ángulos del triángulo equilátero	$\theta = 60°$
Ángulo de incidencia	$\theta_i = 50°$
Índice de refracción del aire	$n_a = 1{,}0$
Incógnitas	
Índice de refracción del prisma	n_p
Ángulo de desviación del rayo al salir del prisma	θ_{r2}
Ecuaciones	
Ley de Snell de la refracción	$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:

a) En la ley de Snell de la refracción

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

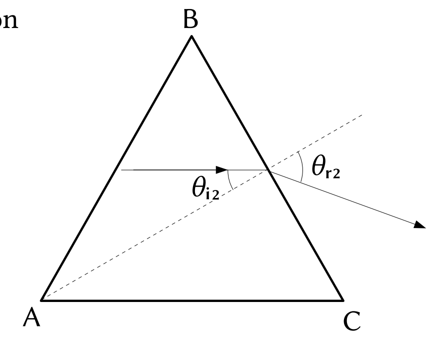
n_i y n_r representan los índices de refracción de los medios incidente y refractado



θ_i y θ_r representan los ángulos de incidencia y refracción que forma cada rayo con la normal a la superficie de separación entre los dos medios.
El primer ángulo de refracción θ_{r1}, que forma el rayo de luz refractado paralelo a la base del prisma, vale 30°, ya que es el complementario al de 60° del triángulo equilátero.

$$n_p = n_r = \frac{n_i \cdot \operatorname{sen} \theta_{i1}}{\operatorname{sen} \theta_{r1}} = \frac{1{,}0 \cdot \operatorname{sen} 50°}{\operatorname{sen} 30°} = 1{,}5$$

b) Cuando el rayo sale del prisma, el ángulo de incidencia θ_{i2} del rayo con la normal al lado BC vale 30°. Volviendo a aplicar la ley de Snell



$$\operatorname{sen} \theta_{r2} = \frac{n_i \cdot \operatorname{sen} \theta_{i2}}{n_r} = \frac{1{,}5 \cdot \operatorname{sen} 30°}{1{,}0} = 0{,}77$$

$$\theta_{r2} = \operatorname{arcsen} 0{,}77 = 50°$$

c) La frecuencia f de una onda electromagnética es una característica de la misma y no varía con el medio.
La longitud de onda λ está relacionada con ella por

$$c = \lambda \cdot f$$

La velocidad de la luz en un medio transparente es siempre menor que en el vacío. El índice de refracción del medio es el cociente entre ambas velocidades.

$$n = \frac{c}{v}$$

La velocidad de la luz en el aire es prácticamente igual a la del vacío, mientras que en el prisma es 1,5 veces menor. Como la frecuencia es la misma, la longitud de onda (que es inversamente proporcional a la frecuencia) en el prisma es 1,5 veces menor que en el aire.

Actualizado: 04/08/23

◊ CUESTIONES

● Características y ecuación de las ondas

1. La intensidad en un punto de una onda esférica que se propaga en un medio homogéneo e isótropo:
   A) Es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor.
   B) Es inversamente proporcional a la distancia al foco emisor.
   C) No varía con la distancia al foco emisor.

(P.A.U. sep. 16)

Solución: A

La intensidad de una onda es la energía en la unidad de tiempo por unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

$$I = \frac{E}{S \cdot t}$$

Si la onda es esférica, la superficie es: $S = 4\,\pi\,r^2$, en la que r es la distancia al foco.

$$I = \frac{E}{4\,\pi\,r^2 \cdot t}$$

2. Cuando un movimiento ondulatorio se refleja, su velocidad de propagación:
   A) Aumenta.

B) Depende de la superficie de reflexión.
C) No varía.

(P.A.U. sep. 15)

Solución: C

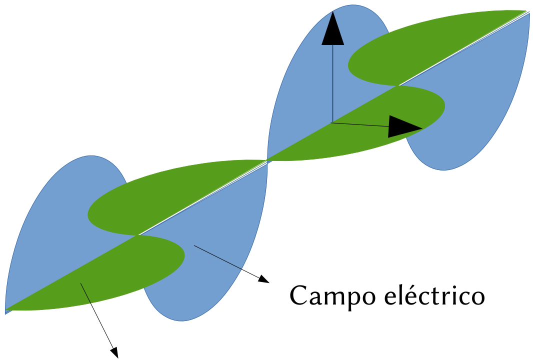
La velocidad de propagación de una onda depende de algunas características del medio (temperatura y masa molar en los gases, densidad lineal en las cuerdas...). Cuando una onda se refleja, se mantiene en el medio del que procedía después de rebotar. Por tanto, como el medio no varía, la velocidad de propagación se mantiene.

3. En una onda de luz:
A) Los campos eléctrico $\overline{\boldsymbol{E}}$ y magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ vibran en planos paralelos.
B) Los campos $\overline{\boldsymbol{E}}$ y $\overline{\boldsymbol{B}}$ vibran en planos perpendiculares entre sí.
C) La dirección de propagación es la de vibración del campo eléctrico.
(Dibuja la onda de luz).

(P.A.U. jun. 14)

Solución: B

Una onda electromagnética es una combinación de un campo eléctrico y un campo magnético oscilante que se propagan en direcciones perpendiculares entre sí.

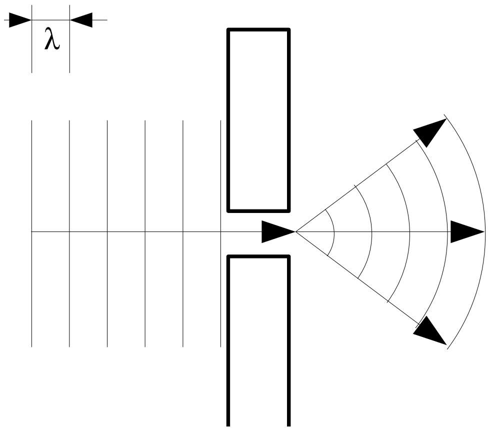


4. Si una onda atraviesa una abertura de tamaño comparable a su longitud de onda:
A) Se refracta.
B) Se polariza.
C) Se difracta.
(Dibuja la marcha de los rayos)

(P.A.U. jun. 14, sep. 09)

Solución: C

Se produce difracción cuando una onda «se abre» cuando atraviesa una abertura de tamaño comparable a su longitud de onda. Es un fenómeno característico de las ondas.
Puede representarse tal como en la figura para una onda plana.



5. La ecuación de una onda transversal de amplitud 4 cm y frecuencia 20 Hz que se propaga en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 20 m·s⁻¹ es:
A) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos \pi (40 \cdot t + 2 \cdot x)$ [m]
B) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos \pi (40 \cdot t - 2 \cdot x)$ [m]
C) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos 2 \pi (40 \cdot t + 2 \cdot x)$ [m]

(P.A.U. sep. 13)

Solución: A

La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse como:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

En la que
y es la elongación del punto que oscila (separación de la posición de equilibrio)

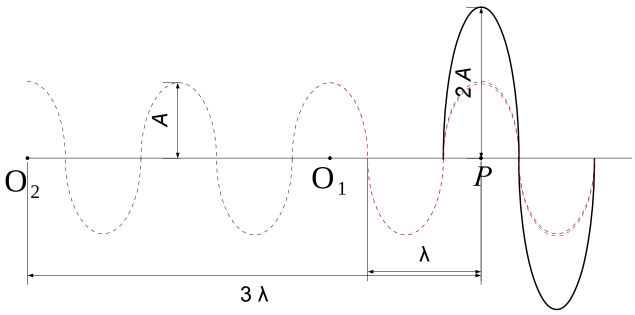
A es la amplitud (elongación máxima)
ω es la frecuencia angular que está relacionada con la frecuencia f por $\omega = 2\ \pi \cdot f$.
t es el tiempo
k es el número de onda, la cantidad de ondas que entran en una longitud de 2 π metros. Está relacionada con la longitud de onda λ por $k = 2\ \pi / \lambda$
x es la distancia del punto al foco emisor.
El signo ± entre $\omega \cdot t$ y $k \cdot x$ es negativo si la onda se propaga en sentido positivo del eje X, y positivo si lo hace en sentido contrario.
Como dice que se propaga en sentido negativo del eje X podemos descartar la opción B.
La frecuencia angular ω de la ecuación de la opción A es $\omega_1 = \pi \cdot 40$ [rad/s], que corresponde a una frecuencia de 20 Hz.

$$f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40\pi\ [\text{rad/s}]}{2\pi\ [\text{rad}]} = 20\ \text{s}^{-1}$$

6. Dos focos O_1 y O_2 emiten ondas en fase de la misma amplitud (A), frecuencia (f) y longitud de onda (λ) que se propagan a la misma velocidad, interfiriendo en un punto P que está a una distancia λ m de O_1 y 3 λ m de O_2. La amplitud resultante en P será:
A) Nula.
B) A.
C) 2 A.

(P.A.U. jun. 13)

Solución: C



Se representan dos ondas que se propagan de izquierda a derecha desde dos puntos O_1 y O_2 de forma que el punto P se encuentre a una distancia λ de O_1 y a una distancia 3 λ de O_2.
Como la diferencia de caminos es un número entero de longitudes de onda los máximos coinciden y se amplifican y la interferencia es constructiva.
Como la frecuencia, la fase y amplitud son la misma, la onda resultante será:

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x_1) + A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x_2)$$

$$y = 2\,A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t - k\frac{(x_1 + x_2)}{2}\right)\cos\left(k\frac{(x_1 - x_2)}{2}\right)$$

Como $x_1 - x_2 = 2\ \lambda$ y $k = 2\ \pi / \lambda$, queda una onda de la misma frecuencia, en fase con las iniciales y cuya amplitud es el doble:

$$y = 2\ A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - 4\ \pi) \cdot \cos\ (2\ \pi) = 2\ A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

7. La ecuación de una onda es $y = 0{,}02 \cdot \text{sen}\ (50 \cdot t - 3 \cdot x)$; esto significa que:
A) $\omega = 50\ \text{rad·s}^{-1}$ y $\lambda = 3$ m.
B) La velocidad de propagación $u = 16{,}67\ \text{m·s}^{-1}$ y la frecuencia $f = 7{,}96\ \text{s}^{-1}$.
C) $t = 50$ s y el número de onda $k = 3\ \text{m}^{-1}$.

(P.A.U. jun. 12)

Solución: B

La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse como:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

En la que

y es la elongación del punto que oscila (separación de la posición de equilibrio)
A es la amplitud (elongación máxima)
ω es la frecuencia angular que está relacionada con la frecuencia f por $\omega = 2 \pi \cdot f$.
t es el tiempo
k es el número de onda, la cantidad de ondas que entran en una longitud de 2 π metros. Está relacionada con la longitud de onda λ por $k = 2 \pi / \lambda$
x es la distancia del punto al foco emisor.
El signo ± entre $\omega \cdot t$ y $k \cdot x$ es negativo si la onda se propaga en sentido positivo del eje X, y positivo si lo hace en sentido contrario.
La velocidad u de propagación de una onda es $u = \lambda \cdot f$
Comparando la ecuación general con la del problema obtenemos:
$A = 0{,}02$ m
$\omega = 50$ rad/s
$k = 3$ rad/m

Para elegir la opción correcta se calculan algunos de los parámetros de la ecuación (usando 2 cifras significativas)

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi\ [\text{rad}]}{3{,}0\ [\text{rad/m}]}=2{,}1\ \text{m}$$

Eso permite descartar la opción A.

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{50\ [\text{rad/s}]}{2\pi\ [\text{rad}]}=8{,}0\ \text{s}^{-1}=8{,}0\ \text{Hz}$$

$$u = \lambda \cdot f = 2{,}1\ [\text{m}] \cdot 8{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 17\ \text{m/s}$$

Coincide con la opción B (si se redondean los valores que aparecen en dicha opción a las cifras significativas que hay que usar)
La opción C no es correcta porque la frecuencia es la inversa del período:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{8{,}0\ [\text{s}^{-1}]}=0{,}13\ \text{s}$$

8. Razona cuál de las siguientes afirmaciones referidas a la energía de un movimiento ondulatorio es correcta:
A) Es proporcional a la distancia al foco emisor de ondas.
B) Es inversamente proporcional a la frecuencia de la onda.
C) Es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.

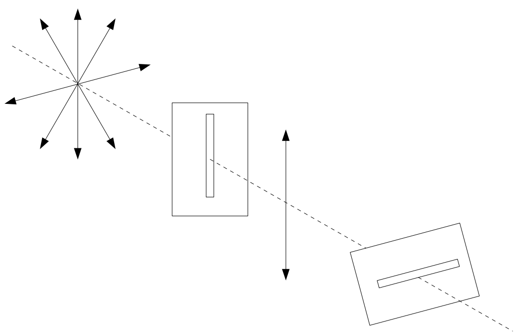
(P.A.U. sep. 11)

Solución: C. Véase una cuestión parecida en la prueba de setiembre de 2009

9. Una onda de luz es polarizada por un polarizador A y atraviesa un segundo polarizador B colocado después de A. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respecto a la luz después de B?
A) No hay luz si A y B son paralelos entre sí.
B) No hay luz si A y B son perpendiculares entre sí.
C) Hay luz independientemente de la orientación relativa de A y B.

(P.A.U. jun. 11)

Solución: B



El fenómeno de polarización solo ocurre en las ondas transversales.
La luz es un conjunto de oscilaciones de campo eléctrico y campo magnético que vibran en planos perpendiculares que se cortan en la línea de avance la rayo de luz. La luz del Sol o de una lámpara eléctrica vibra en una multitud de planos.

El primero polarizador solo permite pasar la luz que vibra en un determinado plano. Si el segundo polarizador está colocado en dirección perpendicular al primero, la luz que llega a él no tiene componentes en la dirección de esta segunda polarización por lo que no pasará ninguna luz.

10. Una onda armónica estacionaria se caracteriza por:
    A) Tener frecuencia variable.
    B) Transportar energía.
    C) Formar nodos y vientres.

(P.A.U. jun. 10)

Solución: C

Una onda estacionaria es generada por interferencia de dos ondas de iguales características pero con distinto sentido de desplazamiento. En ella existen puntos que no vibran y se llamen nodos. Un ejemplo sería la onda estacionaria anclada a la cuerda de un instrumento musical como una guitarra o violín. Los extremos de la cuerda están fijos (son los nodos) y la amplitud de la vibración es máxima en el punto central. En esta onda la longitud de la cuerda sería la mitad de la longitud de onda y la situación correspondería al modo fundamental de vibración.

11. La luz visible abarca un rango de frecuencias que van desde (aproximadamente) $4{,}3·10^{14}$ Hz (rojo) hasta $7{,}5·10^{14}$ Hz (ultravioleta). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
    A) La luz roja tiene menor longitud de onda que la ultravioleta.
    B) La ultravioleta es la más energética del espectro visible.
    C) Ambas aumentan la longitud de onda en un medio con mayor índice de refracción que aire.

(P.A.U. jun. 10)

Solución: B

Hago la salvedad de que, estrictamente, la luz ultravioleta no es visible, pero limita con la violeta, que sí lo es, en esa frecuencia.
En la teoría clásica, la energía de una onda es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y de la frecuencia. Como la frecuencia de la luz ultravioleta es mayor que de la luz roja, tendrá mayor energía.
(En la teoría cuántica, la luz se puede considerar como un haz de partículas llamadas fotones. La energía E que lleva un fotón de frecuencia f es:

$$E = h \cdot f$$

Siendo h la constante de Planck, que tiene un valor muy pequeño: $h = 6{,}63·10^{-34}$ J·s
En cuyo caso, cuanto mayor sea la frecuencia, mayor será la energía del fotón)

Las otras opciones:
A. Falsa. La longitud de onda λ está relacionada con la velocidad de propagación v y la frecuencia f por:

$$v = \lambda \cdot f$$

En un medio homogéneo, la longitud de onda y la frecuencia son inversamente proporcionales. Como

$$f_u = 7{,}5·10^{14} > 4{,}3·10^{14} = f_v \Rightarrow \lambda_u < \lambda_v$$

C. Falsa. El índice de refracción de un medio respecto al vacío n_m es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío c y la velocidad de la luz en medio v_m.

$$n_m = c \;/\; v_m$$

Si el índice de refracción del medio es mayor que el del aire, la velocidad de la luz en ese medio tiene que ser menor, por ser inversamente proporcionales.

$$n_m > n_a \Rightarrow v_m < v_a$$

Como la frecuencia de la luz es característica (no varía al cambiar de medio) y está relacionada con la velocidad de propagación de la luz en medio por:

$$v_m = \lambda_m \cdot f$$

Como son directamente proporcionales, al ser menor a velocidad, también tiene que ser menor a longitud de onda.

12. Cuando una onda armónica plana se propaga en el espacio, su energía es proporcional:
    A) A $1/f$ (f es la frecuencia)
    B) Al cuadrado de la amplitud A^2.
    C) (*Set. 09)* A $1/r$ (r es la distancia al foco emisor).
    C) *(jun. 22)* Inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor.

(P.A.U. sep. 09)

Solución: B

La energía que transporta una onda material armónica unidimensional es la suma de la cinética y de potencial:

$$E = (E_c + E_p) = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2 = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ k \cdot A^2$$

La ecuación de la onda armónica unidimensional es: $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Derivando con respecto al tiempo: $v = \text{d}\ y / \text{d}\ t = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Es máxima cuando $-\text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x) = 1$, $v_m = A \cdot \omega$
Sustituyendo en la ecuación de la energía: $E = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ m \cdot A^2 \cdot \omega^2$
Como la pulsación ω o frecuencia angular es proporcional a la frecuencia f: $\omega = 2\ \pi \cdot f$

$$E = ½\ m \cdot A^2 \cdot \omega^2 = ½\ m \cdot A^2\ (2\ \pi \cdot f)^2 = 2\ \pi^2\ m \cdot A^2 \cdot f^2$$

La energía que transporta una onda es proporcional a los cuadrados de la frecuencia y de la amplitud.

13. Una onda luminosa:
    A) No se puede polarizar.
    B) Su velocidad de propagación es inversamente proporcional al índice de refracción del medio.
    C) Puede no ser electromagnética.

(P.A.U. jun. 09)

Solución: B

Se define índice de refracción n de un medio con respecto al vacío como el cociente entre la velocidad c de la luz en el vacío y la velocidad v de la luz en dicho medio.

$$n = \frac{c}{v}$$

Como la velocidad de la luz en el vacío es una constante universal, la velocidad de propagación de la luz en un medio es inversamente proporcional a su índice de refracción.

Las otras opciones:
A. Falsa. La luz es una onda electromagnética transversal que vibra en muchos planos. Cuando atraviesa un medio polarizador, solo lo atraviesa la luz que vibra en un determinado plano.
C. Falsa. Maxwell demostró que la luz es una perturbación eléctrica armónica que genera una campo magnético armónico perpendicular al eléctrico y perpendiculares ambos a la dirección de propagación.

14. Si la ecuación de propagación de un movimiento ondulatorio es $y(x, t) = 2 \cdot \text{sen}(8\ \pi \cdot t - 4\ \pi \cdot x)$ (S.I.); su velocidad de propagación es:
    A) 2 m/s
    B) 32 m/s
    C) 0,5 m/s

(P.A.U. jun. 08)

Solución: A

Se obtienen la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 2 \cdot \text{sen}(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: $\omega = 8 \cdot \pi$ [rad·s⁻¹]
Número de onda: $k = 4 \cdot \pi$ [rad·m⁻¹]
Se calculan la longitud de onda y la frecuencia para determinar la velocidad de propagación.
Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\,[\text{rad}]}{4 \cdot \pi\,[\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}]} = 0{,}5 \text{ m}$$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8 \cdot \pi\,[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]}{2\pi\,[\text{rad}]} = 4 \text{ s}^{-1}$$

Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}5\,[\text{m}] \cdot 4\,[\text{s}^{-1}] = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

15. Si un haz de luz láser incide sobre un objeto de pequeño tamaño (del orden de su longitud de onda),
 A) Detrás del objeto hay siempre oscuridad.
 B) Hay zonas de luz detrás del objeto.
 C) Se refleja hacia el medio de incidencia.

(P.A.U. sep. 07)

Solución: B

Se llama difracción al fenómeno por el cual una onda «rodea» obstáculos de tamaño similar a su longitud de onda. Se producen interferencias constructivas y destructivas detrás del obstáculo, por lo que existirán zonas «iluminadas» y zonas oscuras.

16. Una onda electromagnética que se encuentra con un obstáculo de tamaño semejante a su longitud de onda:
 A) Forma en una pantalla, colocada detrás del obstáculo, zonas claras y oscuras.
 B) Se polariza y su campo eléctrico oscila siempre en el mismo plano.
 C) Se refleja en el obstáculo.

(P.A.U. jun. 07)

Solución: A

Difracción es el fenómeno que se produce cuando una onda mecánica o electromagnética «rodea» un obstáculo de dimensiones parecidas a la longitud de onda. Es un fenómeno característico de las ondas. Esto producirá un patrón de interferencias que, en el caso de la luz, dará lugar a una sucesión de zonas claras y oscuras en una pantalla.

17. En la polarización lineal de la luz:
 A) Se modifica la frecuencia de la onda.
 B) El campo eléctrico oscila siempre en un mismo plano.
 C) No se transporta energía.

(P.A.U. sep. 06)

Solución: B

La luz emitida por un foco (una bombilla, el Sol, ...) es una onda electromagnética transversal que vibra en muchos planos. Cuando atraviesa un medio polarizador, solo lo atraviesa la luz que vibra en un determinado plano.

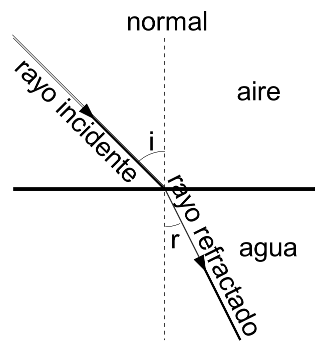
Las otras opciones:
A. Falsa. La frecuencia de una onda electromagnética es una característica de la misma y no depende del medio que atraviesa.
B. Las ondas, excepto las estacionarias, transmiten energía sin trasporte neto de materia.

18. Cuando la luz atraviesa la zona de separación de dos medios, experimenta:
    A) Difracción.
    B) Refracción.
    C) Polarización.

(P.A.U. jun. 06)

Solución: B

La refracción es el cambio de dirección que experimenta una onda cuando pasa de un medio a otro en el que se transmite a distinta velocidad.
Una medida de la densidad óptica de un medio es su índice de refracción n, el cociente entre la velocidad c de la luz en el vacío y la velocidad v de la luz en el medio.



$$n = \frac{c}{v}$$

El índice de refracción n es siempre mayor que la unidad, porque la velocidad de la luz en el vacío es el límite de cualquier velocidad, según la teoría de la relatividad restringida.
Cuando un rayo de luz pasa de un medio óptico menos «denso» (aire) a otro más «denso» (agua), el rayo se desvía acercándose a la normal.
Leyes de la refracción:
1ª. El rayo incidente, el rayo refractado y la normal a la superficie de separación están en el mismo plano.
2ª. Los senos de los ángulos i (el que forma el rayo incidente con la normal a la superficie de separación) y r (el que forma el rayo refractado con esa misma normal) son directamente proporcionales a las velocidades de la luz en cada medio, e inversamente proporcionales a sus índices de refracción.

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_i}{v_r} = \frac{n_r}{n_i}$$

19. El sonido de una guitarra se propaga como:
    A) Una onda mecánica transversal.
    B) Una onda electromagnética.
    C) Una onda mecánica longitudinal.

(P.A.U. sep. 05)

Solución: C

El sonido es una onda mecánica, ya que necesita un medio, (aire, agua, una pared) para propagarse. Es una onda longitudinal porque las partículas del medio vibran en la misma dirección en la que se propaga el sonido.

20. En una onda estacionaria generada por interferencia de dos ondas, se cumple:
    A) La amplitud es constante.
    B) La onda transporta energía.
    C) La frecuencia es la misma que la de las ondas que interfieren.

(P.A.U. jun. 05)

Solución: C

Una onda estacionaria generada por interferencia de dos ondas de iguales características pero con distinto sentido de desplazamiento.
La ecuación de la onda incidente, suponiendo que viaja hacia la derecha, es

$$y_1 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

La onda incidente al reflejarse en el extremo fijo, sufre un cambio de fase de π rad y la onda reflejada que viaja hacia la derecha tiene por ecuación:

$$y_2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x + \pi) = -A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Cuando las ondas interfieren, la onda resultante tiene por ecuación

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x) - A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Usando

$$\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Queda

$$y = 2\,A \cdot \cos\,(\omega \cdot t) \cdot \text{sen}\,(k \cdot x)$$

Es la ecuación de una onda que tiene una frecuencia angular ω igual.

$$y = A_x \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Las otras opciones:
A. La amplitud depende del punto x: $A_x = 2 \cdot A\,\text{sen}(k \cdot x)$
B. Una onda estacionaria no transporta energía.

21. Tres colores de la luz visible, el azul, el amarillo y el rojo, coinciden en que:
 A) Poseen la misma energía.
 B) Poseen la misma longitud de onda.
 C) Se propagan en el vacío con la misma velocidad.

(P.A.U. jun. 04)

Solución: C

Los colores de la luz visible son ondas electromagnéticas que, por definición, se propagan en el vacío con la velocidad c de 300 000 km/s.

Las otras opciones:
A y B: Falsas. Se distinguen entre ellos en su frecuencia f y en su longitud de onda $\lambda = c / f$. La energía de una onda depende del cuadrado de la frecuencia y del cuadrado de la amplitud, por lo que la energía que transporta no tiene por qué ser la misma.

● Dioptrio plano

1. Un rayo de luz láser se propaga en un medio acuoso (índice de refracción n = 1,33) e incide en la superficie de separación con el aire (n = 1). El ángulo límite es:
 A) 36,9°
 B) 41,2°
 C) 48,8°

(P.A.U. jun. 15)

Solución: C

La ley de Snell de la refracción puede expresarse

$$n_i \text{ sen } \theta_i = n_r \text{ sen } \theta_r$$

n_i y n_r representan los índices de refracción de los medios incidente y refractado.
θ_i y θ_r son los ángulos de incidencia y refracción que forma cada rayo con la normal a la superficie de separación entre los dos medios.
Ángulo límite λ es el ángulo de incidencia tal que el de refracción vale 90°. Aplicando la ley de Snell

$$1{,}33 \text{ sen } \lambda = 1{,}00 \text{ sen } 90{,}0°$$

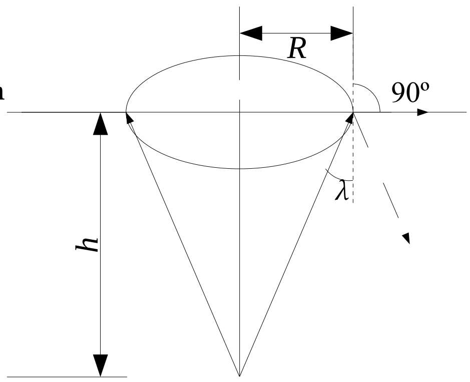
$$\text{sen } \lambda = 1{,}00 / 1{,}33 = 0{,}75$$

$$\lambda = \text{arcsen } 0{,}75 = 48{,}6°$$

2. En el fondo de una piscina hay un foco de luz. Observando la superficie del agua se vería luz:
   A) En toda la piscina.
   B) Solo en el punto encima del foco.
   C) En un círculo de radio R alrededor del punto encima del foco.

(P.A.U. sep. 10)

Solución: C



La superficie circular iluminada se debe a que los rayos que vienen desde el agua e inciden en la superficie de separación con un ángulo superior al ángulo límite no salen al exterior, porque sufren reflexión total.
El ángulo límite es el ángulo de incidencia que produce un rayo refractado que sale con un ángulo de refracción de 90°.
Por la 2.ª ley de Snell

$$n(\text{agua}) \cdot \text{sen } \theta_i = n(\text{aire}) \cdot \text{sen } \theta_r$$

$$n(\text{agua}) \cdot \text{sen } \lambda = 1 \cdot \text{sen } 90°$$

$$\lambda = \text{arcsen } (1/n(\text{agua}))$$

Del triángulo rectángulo del dibujo se deduce que:

$$R = h \cdot \tan \lambda$$

3. Cuando un rayo de luz monocromática pasa desde el aire al agua se produce un cambio:
   A) En la frecuencia.
   B) En la longitud de onda.
   C) En la energía.
   Dato: $n(\text{agua}) = 4/3$

(P.A.U. sep. 10)

Solución: B?

El índice de refracción n_i de un medio es el cociente entre la velocidad de la luz c en el vacío y la velocidad de la luz v_i en ese medio

$$n_i = \frac{c}{v_i}$$

Del valor $n(\text{agua}) = 4/3$, se deduce que la velocidad de la luz en el agua es

$$v(\text{agua}) = \frac{c}{4/3} = \frac{3}{4} c < c$$

La frecuencia de una onda armónica es característica e independiente del medio por el que se propaga. Es el número de oscilaciones (en el caso de la luz como onda electromagnética) del campo eléctrico o magnético en la unidad de tiempo y corresponde al número de ondas que pasan por un punto en la unidad de tiempo.
Al pasar de un medio (aire) a otro (agua) en el que la velocidad de propagación es menor, la frecuencia f se mantiene pero la longitud de onda, λ disminuye proporcionalmente, por la relación entre la velocidad de propagación v y la longitud de onda λ,

$$v = \lambda \cdot f$$

La energía de una luz monocromática es proporcional a la frecuencia (h es la constante de Planck), según la ecuación de Planck,

$$E_{\mathrm{f}} = h \cdot f$$

No variaría al cambiar de medio si este no absorbiera la luz. El agua va absorbiendo la energía de la luz, por lo que se produciría una pérdida de la energía, que a lo largo de una cierta distancia haría que la luz dejara de propagarse por el agua.

4. Un rayo de luz incide desde el aire (n = 1) sobre una lámina de vidrio de índice de refracción n = 1,5. El ángulo límite para la reflexión total de este rayo es:
A) 41,8°
B) 90°
C) No existe.

(P.A.U. sep. 08)

Solución: C

Para que exista ángulo límite, la luz debe pasar de un medio más denso ópticamente (con mayor índice de refracción) a uno menos denso.
Por la ley de Snell

$$n_1 \cdot \text{sen } \theta_1 = n_2 \cdot \text{sen } \theta_2$$

El ángulo límite es el ángulo de incidencia para el que el ángulo de refracción vale 90°.

$$n_1 \cdot \text{sen } \lambda_1 = n_2 \cdot \text{sen } 90° = n_2$$

Si $n_2 > n_1$ entonces:

$$\text{sen } \lambda_1 = n_2 / n_1 > 1$$

Es imposible. El seno de un ángulo no puede ser mayor que uno.

5. Cuando un rayo de luz incide en un medio de menor índice de refracción, el rayo refractado:
A) Varía su frecuencia.
B) Se acerca a la normal.
C) Puede no existir rayo refractado.

(P.A.U. sep. 07)

Solución: C

Cuando la luz pasa de un medio más denso ópticamente (con mayor índice de refracción) a otro menos denso (por ejemplo del agua al aire) el rayo refractado se aleja de la normal. Por la segunda ley de Snell de la refracción:

$$n_{\mathrm{i}} \cdot \text{sen } \theta_{\mathrm{i}} = n_{\mathrm{r}} \cdot \text{sen } \theta_{\mathrm{r}}$$

Si $n_{\mathrm{i}} > n_{\mathrm{r}}$, entonces sen θ_{r} > sen θ_{i}, y $\theta_{\mathrm{r}} > \theta_{\mathrm{i}}$
Pero existe un valor de θ_{i}, llamado ángulo límite λ, para el que el rayo refractado forma un ángulo de 90° con la normal. Para un rayo incidente con un ángulo mayor que el ángulo límite, no aparece rayo refractado. Se produce una reflexión total.

6. Cuando la luz incide en la superficie de separación de dos medios con un ángulo igual al ángulo límite eso significa que:
A) El ángulo de incidencia y el de refracción son complementarios.
B) No se observa rayo refractado.
C) El ángulo de incidencia es mayor que el de refracción.

(P.A.U. sep. 05)

Solución: B

Cuando un rayo pasa del medio más denso al menos denso e incide en la superficie de separación con un ángulo superior al ángulo límite, el rayo no sale refractado sino que sufre reflexión total. Si el ángulo de incidencia es igual al ángulo límite, el rayo refractado sale con un ángulo de 90° y no se observa.

7. Si el índice de refracción del diamante es 2,52 y el del vidrio 1,27.
A) La luz se propaga con mayor velocidad en el diamante.
B) El ángulo límite entre el diamante y el aire es menor que entre el vidrio y el aire.
C) Cuando la luz pasa de diamante al vidrio el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo de refracción.

(P.A.U. jun. 05)

Solución: B

El ángulo límite λ es el ángulo de incidencia para el que el ángulo de refracción vale 90°.
Aplicando la 2.ª ley de Snell de la refracción:

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

El índice de refracción del aire n_a es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío c y la velocidad de la luz en el aire v_a. Como son prácticamente iguales

$$n_a = c \;/\; v_a = 1$$

El ángulo límite entre el diamante y el aire es λ_d:

$$n_d \cdot \text{sen } \lambda_d = n_a \cdot \text{sen } 90° = 1$$

$$\lambda_d = \text{arcsen } (1 \;/\; n_d) = \text{arcsen } (1 \;/\; 2{,}52) = 23°$$

Análogamente para el vidrio:

$$\lambda_v = \text{arcsen } (1 \;/\; 1{,}27) = 52°$$

Las otras opciones:
A. Se pueden calcular las velocidades de la luz en el diamante y en el vidrio a partir de la definición de índice de refracción,

$$n = c \;/\; v$$

$$v_d = c \;/\; n_d = 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \;/\; 2{,}52 = 1{,}2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$v_v = c \;/\; n_v = 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \;/\; 1{,}27 = 2{,}4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

C. Cuando la luz pasa de un medio más denso ópticamente (diamante) a otro menos denso (vidrio) el rayo refractado se aleja de la normal (el ángulo de incidencia es menor que el ángulo de refracción)

8. El ángulo límite en la refracción agua/aire es de 48,61°. Si se posee otro medio en el que la velocidad de la luz sea v(medio) = 0,878 v(agua), el nuevo ángulo límite (medio/aire) será:
A) Mayor.
B) Menor.
C) No se modifica.

(P.A.U. jun. 04)

Solución: B

El ángulo límite es el ángulo de incidencia para el que el ángulo de refracción vale 90°
Aplicando la 2.ª ley de Snell de la refracción:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}=\frac{v_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{r}}}$$

Para el ángulo límite λ(agua):

$$\frac{\operatorname{sen} \lambda(\text{agua})}{\operatorname{sen} 90°}=\frac{v(\text{agua})}{v(\text{aire})}$$

$$\operatorname{sen} \lambda(\text{agua})=\frac{v(\text{agua})}{v(\text{aire})}$$

Con los datos:

$$v(\text{agua}) = v(\text{aire}) \cdot \operatorname{sen} \lambda(\text{agua}) = 0{,}75\ v(\text{aire})$$

Para un nuevo medio en el que $v(\text{medio}) = 0{,}878\ v(\text{agua})$,

$$v(\text{medio}) < v(\text{agua})$$

$$\operatorname{sen} \lambda(\text{medio})=\frac{v(\text{medio})}{v(\text{aire})} < \operatorname{sen} \lambda(\text{agua})=\frac{v(\text{agua})}{v(\text{aire})}$$

$$\lambda(\text{medio}) < \lambda(\text{agua})$$

Con los datos:

$$\operatorname{sen} \lambda(\text{medio})=\frac{v(\text{medio})}{v(\text{aire})}=\frac{0{,}878 \cdot v(\text{agua})}{v(\text{aire})}=\frac{0{,}878 \cdot 0{,}75 \cdot v(\text{aire})}{v(\text{aire})}=0{,}66$$

$$\lambda(\text{medio}) = 41° < 48{,}61°$$

Actualizado: 04/08/23

Cuestiones y problemas de las Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.

Sumario

ONDAS

Índice de pruebas P.A.U.