Campo electrostático

[Método y recomendaciones]

◊ PROBLEMAS

● Cargas puntuales

1. Tres cargas de −2, 1 y 1 µC están situadas en los vértices de un triángulo equilátero y distan 1 m del centro del mismo.
   a) Calcula el trabajo necesario para llevar otra carga de 1 µC desde el infinito al centro del triángulo.
   b) ¿Qué fuerza sufrirá la carga una vez que esté situada en el centro del triángulo?
   c) Razona si en algún punto de los lados del triángulo puede existir un campo electrostático nulo.
   Dato: $K = 9·10^9$ N·m²·C⁻². *(P.A.U. jun. 16)*
   Rta.: a) $W = 0$; b) $\overline{\boldsymbol{F}} = 0{,}0270$ N, hacia la carga negativa.

Datos	**Cifras significativas: 3**
Valor de la carga situada en el punto A	$Q_A = -2{,}00$ µC $= -2{,}00·10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	$Q_B = 1{,}00$ µC $= 1{,}00·10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto C	$Q_C = 1{,}00$ µC $= 1{,}00·10^{-6}$ C
Distancia de las cargas al centro del triángulo	$r = 1{,}00$ m
Valor de la carga que se traslada	$q = 1{,}00$ µC $= 1{,}00·10^{-6}$ C
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00·10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Trabajo para llevar 1 µC del infinito al centro del triángulo	$W_{\infty\to O}$
Fuerza sobre la carga situada en el centro del triángulo	$\overline{\boldsymbol{F}}_O$
Ecuaciones	
Ley de Coulomb: fuerza entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas una distancia, r	$\vec{\boldsymbol{F}} = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{F}}_A = \sum \vec{\boldsymbol{F}}_{A\,i}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$V = K \frac{Q}{r}$
Potencial eléctrico de varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo de la fuerza eléctrica al mover una carga del punto A al punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$

Solución:

El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V = \frac{E_p}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = q \cdot V_A - q \cdot V_B = q\,(V_A - V_B)$$

El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.

La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
a) Se calcula el potencial eléctrico en el centro O del triángulo creado por la carga de −2 μC situada en el punto A, a 1 m de distancia:

$$V_{\mathrm{OA}}=9{,}00\cdot10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{-2{,}00\cdot10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])}=-1{,}80\cdot10^{4}\ \mathrm{V}$$

Los potenciales eléctricos en el centro O del triángulo, debidos a las cargas de 1 μC situadas en los puntos B y C son iguales porque tanto las cargas como las distancias al centro son iguales:

$$V_{\mathrm{OB}}=V_{\mathrm{OC}}=9{,}00\cdot10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])}=9{,}00\cdot10^{3}\ \mathrm{V}$$

El potencial eléctrico de un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales de cada carga.

$$V_{\mathrm{O}} = V_{\mathrm{OA}} + V_{\mathrm{OB}} + V_{\mathrm{OC}} = -1{,}80\cdot10^{4}\ [\mathrm{V}] + 9{,}00\cdot10^{3}\ [\mathrm{V}] + 9{,}00\cdot10^{3}\ [\mathrm{V}] = 0$$

El potencial eléctrico en el infinito es cero, porque se toma como origen. El trabajo que realiza la fuerza del campo cuando se traslada una carga de 1 μC desde el infinito hasta el centro, O, del triángulo es:

$$W_{\infty\to\mathrm{O}} = q\,(V_{\infty} - V_{\mathrm{O}}) = 1{,}00\cdot10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot(0-0)\ [\mathrm{V}] = 0$$

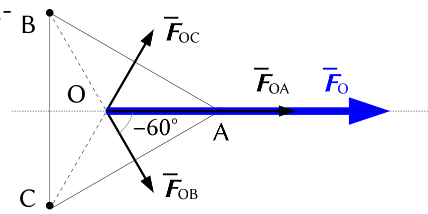
Suponiendo que llega con la misma velocidad con la que sale, el trabajo de la fuerza resultante, igual a la variación de energía cinética, será nulo:

$$W(\text{resultante}) = W(\text{campo}) + W(\text{exterior}) = \Delta E_{\mathrm{c}} = 0$$

El trabajo que hay que hacer es el opuesto al de la fuerza del campo.

$$W(\text{exterior}) = 0 - W(\text{campo}) = 0$$

b) Se hace un esquema en el que se dibuja el triángulo, se sitúan los puntos A, B y C, y se dibujan los vectores fuerza eléctrica ejercida sobre la carga que está en el centro O, un vector por cada carga, teniendo en cuenta el sentido.



Las fuerza ejercidas por las cargas situadas en los puntos B y C son de repulsión, porque las cargas son del mismo signo, pero la fuerza producida por la carga situada en el punto A es de atracción y vale el doble que una de las otras.
Como los vectores fuerza de las cargas situadas en los puntos B y C son del mismo valor, sus componentes verticales se anulan y la resultante está dirigida hacia el vértice A.
Se dibuja el vector suma que es el vector fuerza resultante, $\vec{F}_{\mathrm{O}}$.
Se calculan las fuerzas entre las cargas situadas en los vértices y la carga situada en el centro, usando la ley de Coulomb.

$$\vec{F}=K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$$

El vector unitario del punto O, tomando como origen el punto A, es $-\bar{\mathbf{i}}$, el vector unitario del eje X en sentido negativo.
La fuerza eléctrica sobre la carga de 1 μC situada en el centro, O, del triángulo, producida por la carga de -2 μC situada en el punto A, es:

$$\vec{F}_{\mathrm{OA}}=9{,}00\cdot10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{-2{,}00\cdot10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot1{,}00\cdot10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])^2}(-\vec{\mathbf{i}})=0{,}0180\,\vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{N}$$

Cuando se conoce el ángulo α que forma un vector con el eje X, el vector unitario se calcula con la expresión: $\bar{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{r}} = \cos\alpha\,\bar{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\alpha\,\bar{\mathbf{j}}$. El vector unitario del punto O, tomando como origen el punto B, es:

$$\vec{u}_{\mathrm{OB}}=\cos(-60°)\,\vec{\mathbf{i}}+\operatorname{sen}(-60°)\,\vec{\mathbf{j}}=-0{,}500\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}866\,\vec{\mathbf{j}}$$

La fuerza eléctrica sobre la carga de 1 µC situada en el centro O del triángulo, producida por la carga de 1 µC situada en el punto B es:

$$\vec{F}_{OB}=9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\,[\mathrm{C}]\cdot 1{,}00\cdot 10^{-6}\,[\mathrm{C}]}{(1{,}00\,[\mathrm{m}])^2}(-0{,}500\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}866\,\vec{\mathbf{j}})=(4{,}50\cdot 10^{-3}\,\vec{\mathbf{i}}-7{,}79\cdot 10^{-3}\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N}$$

La fuerza eléctrica sobre la carga de 1 µC situada en el centro, O, del triángulo, producida por la carga de 1 µC situada en el punto C, es simétrica a la ejercida por la carga que se encuentra en el punto B. Ña componente horizontal es la misma, pero la componente vertical tiene sentido opuesto:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{OC} = 4{,}50\cdot 10^{-3}\ \bar{\mathbf{i}} + 7{,}79\cdot 10^{-3}\ \bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N}$$

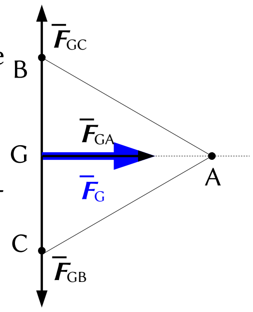
Por el principio de superposición, la fuerza eléctrica resultante sobre la carga de 1 µC situada en el centro, O, del triángulo, es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por cada carga:

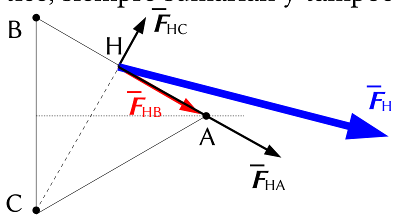
$$\overline{\boldsymbol{F}}_{O} = \overline{\boldsymbol{F}}_{OA} + \overline{\boldsymbol{F}}_{OB} + \overline{\boldsymbol{F}}_{OC} = (18{,}0\cdot 10^{-3}\ \bar{\mathbf{i}}) + (4{,}5\cdot 10^{-3}\ \bar{\mathbf{i}} - 7{,}8\cdot 10^{-3}\ \bar{\mathbf{j}}) + (4{,}5\cdot 10^{-3}\ \bar{\mathbf{i}} + 7{,}8\cdot 10^{-3}\ \bar{\mathbf{j}}) = 0{,}0270\ \bar{\mathbf{i}}\ \mathrm{N}$$

Análisis: Coincide con el dibujo. La fuerza resultante del cálculo va en el sentido positivo del eje X.

Un resultado independiente de cómo se hayan elegido los vértices es: la fuerza es de 0,0270 N, hacia el punto donde se encuentra la carga negativa.

c) No.
En ningún punto de los lados del triángulo puede existir un campo eléctrico nulo.
En el centro, G, del lado BC, se anulan las fuerzas de las cargas situadas en los vértices B y C, porque son iguales pero de sentidos opuestos, pero la fuerza debida a la carga de -2 µC situada en el punto A queda sin contrarrestar.
Cualquier otro punto de ese lado estaría más cerca de una de las cargas B o C y, en ese caso, la componente vertical de uno de ellos sería mayor que la otra y no se anularían.
En los otros lados, las fuerzas debidas a la carga situada en el punto A y la del otro vértice, siempre sumarían y tampoco se anularían.





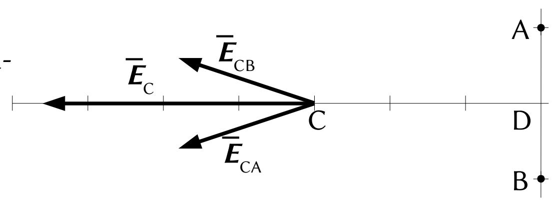
El dibujo representa la fuerza en el punto H, el centro del lado BA.
Las fuerzas de las cargas situadas en los puntos B y A sobre una carga situada en el punto H siempre sumarían y nunca podrían contrarrestarse. Esto sería válido aunque el punto H no fuese el punto medio.
Se obtendría un resultado similar en cualquier punto del lado CA.

2. Dos cargas puntuales iguales de +2 µC se encuentran en los puntos (0, 1) m y (0, −1) m. Calcula:
   a) El campo y el potencial eléctrico en el punto (−3, 0) m.
   b) Calcula el trabajo necesario para trasladar una carga de +3 µC desde el infinito al citado punto.
   Si en el punto (−3, 0) m se abandona una carga de −2 µC y masa 1 g:
   c) Calcula su velocidad en el origen de coordenadas.
   Dato: $K = 9\cdot 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$. *(P.A.U. sep. 14)*
   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}} = -3{,}42\cdot 10^3\ \bar{\mathbf{i}}$ N/C; $V = 1{,}14\cdot 10^4$ V; b) W(ext.) = -W(campo) = 0,0342 J; c) $\bar{\boldsymbol{v}} = 9{,}92\ \bar{\mathbf{i}}$ m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valores de las cargas fijas	$Q = 2{,}00\ \mu C = 2{,}00\cdot 10^{-6}$ C
Posiciones de las cargas fijas: A	$\bar{\boldsymbol{r}}_A = (0,\ 1{,}00)$ m
B	$\bar{\boldsymbol{r}}_B = (0,\ -1{,}00)$ m
Posición del punto C	$\bar{\boldsymbol{r}}_C = (-3{,}00,\ 0)$ m
Valor de la carga que se traslada desde el infinito	$q_1 = 3{,}00\ \mu C = 3{,}00\cdot 10^{-6}$ C
Carga que se desplaza hasta el origen	$q_2 = -2{,}00\ \mu C = -2{,}00\cdot 10^{-6}$ C
Masa de la carga que se desplaza hasta el origen	$m = 1{,}00\ \mathrm{g} = 1{,}00\cdot 10^{-3}$ kg
Velocidad inicial en el punto C (se supone)	$v_C = 0$
Posición del punto D por el que pasa la carga que se desplaza	$\bar{\boldsymbol{r}}_D = (0,\ 0)$ m
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00\cdot 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$
Incógnitas	
Campo eléctrico en el punto C	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$

Incógnitas	
Potencial eléctrico en el punto C	V_C
Trabajo necesario para trasladar 3 µC del infinito al punto C	$W_{\infty \to C}$
Velocidad que tendrá la carga de −2 µC al pasar por el punto D	v_D
Otros símbolos	
Distancia	r
Ecuaciones	
Campo eléctrico en un punto a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*	$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{A\,i}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*	$V = K \frac{Q}{r}$
Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo de la fuerza eléctrica al mover una carga del punto A al punto B	$W_{A \to B} = q\,(V_A - V_B)$
Energía potencial eléctrica de una carga, *q*, situada en un punto A	$E_{pA} = q \cdot V_A$
Energía cinética de una masa, *m*, que se mueve con una velocidad, *v*	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Principio de la conservación de la energía entre dos puntos A y B	$(E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$

Solución:



a) Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A(0, 1), B(0, -1) y C(-3, 0). Se dibujan los vectores del campo en el punto C, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Como sus valores son iguales, porque las cargas y las distancias son las mismas, los vectores serán de la misma medida.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\vec{E}_C$.
Las componentes verticales de los campos creados por las cargas se anulan y la resultante irá en el sentido negativo del eje *X*. El valor de la resultante será la suma de las componentes horizontales de cada campo, y, como son dos, el vector campo resultante medirá el doble de la componente horizontal de uno de ellos.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, *Q* y *q*, separadas por una distancia, *r*, viene dada por la ley de Coulomb, en la que *K* es la constante de Coulomb y $\vec{u}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = \frac{K \frac{Q \cdot \cancel{q}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{q}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Se calcula la distancia del punto A al punto C:

$$r_{AC} = \sqrt{(3{,}00\ [\mathrm{m}])^2 + (1{,}00\ [\mathrm{m}])^2} = 3{,}16\ \mathrm{m}$$

Se calcula el vector unitario del punto C, tomando como origen el punto A:

$$\vec{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \frac{(-3{,}00\ \vec{\mathbf{i}} - 1{,}00\ \vec{\mathbf{j}})\ [\mathrm{m}]}{3{,}16\ [\mathrm{m}]} = -0{,}949\ \vec{\mathbf{i}} - 0{,}316\ \vec{\mathbf{j}}$$

Se calcula el campo en el punto C, creado por la carga de +2 µC situada en el punto A:

$$\vec{E}_{CA}=9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(3{,}16\ [\mathrm{m}])^2}(-0{,}949\ \vec{\mathbf{i}}-0{,}343\ \vec{\mathbf{j}})=(-1{,}71\cdot 10^3\ \vec{\mathbf{i}}-5{,}69\cdot 10^2\ \vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

El campo eléctrico en el punto C, creado por la carga de +2 μC situada en el punto B, es simétrico al del punto A. Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente vertical es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{CB} = (-1{,}71\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}69\cdot 10^2\ \overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto C es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{CA} + \overline{\boldsymbol{E}}_{CB} = (-1{,}71\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}} - 5{,}69\cdot 10^2\ \overline{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] + (-1{,}71\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}69\cdot 10^2\ \overline{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] = -3{,}42\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: Coincide con el dibujo. El campo resultante del cálculo va en sentido negativo del eje X.

El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
Los potenciales eléctricos en el punto C, debidos a las cargas en los puntos A y B, son iguales, porque tanto las cargas como las distancias son iguales. El potencial eléctrico en el punto C, que es la suma, vale el doble que el potencial de una carga.

$$V_C=V_{CA}+V_{CB}=2\cdot V_{CA}=2\cdot 9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(3{,}16\ [\mathrm{m}])}=1{,}14\cdot 10^4\ \mathrm{V}$$

El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V=\frac{E_p}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = q\cdot V_A - q\cdot V_B = q\,(V_A - V_B)$$

b) Se calcula el trabajo que hace la fuerza del campo eléctrico cuando se mueve una carga de 3 μC desde el infinito hasta el punto. El potencial eléctrico en el infinito es cero, porque se toma como origen.

$$W_{\infty\to C} = q_1\cdot (V_\infty - V_C) = 3{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot (0 - 1{,}14\cdot 10^4)\ [\mathrm{V}] = -0{,}0342\ \mathrm{J}$$

Suponiendo que llega con la misma velocidad con la que sale, el trabajo de la fuerza resultante, igual a la variación de energía cinética, será nulo:

$$W(\text{resultante}) = W(\text{campo}) + W(\text{exterior}) = \Delta E_c = 0$$

El trabajo que hay que hacer es el opuesto al de la fuerza del campo.

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 0{,}0342\ \mathrm{J}$$

c) Como la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$
$$½\ m\ v^2_C + q \cdot V_C = ½\ m\ v^2_D + q \cdot V_D$$

El potencial eléctrico en el punto D se calcula de manera análoga al del punto C, teniendo en cuenta que la distancia del punto A al punto D es: $r_{AD} = |0 - 1{,}00\ [\text{m}]| = 1{,}00$ m.

$$V_D = 2 \cdot V_{DA} = 2 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{2{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}00\ [\text{m}])} = 2 \cdot 1{,}80 \cdot 10^4\ \text{V} = 3{,}60 \cdot 10^4\ \text{V}$$

Se escribe la ecuación de conservación de la energía:

$$-2{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}] \cdot (1{,}14 \cdot 10^4\ [\text{V}]) = (1{,}00 \cdot 10^{-3}\ [\text{kg}] \cdot v^2_D) / 2 + (-2{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]) \cdot (3{,}60 \cdot 10^4\ [\text{V}])$$

Se calcula la velocidad despejando:

$$v_D = \sqrt{\frac{2 \cdot (-2{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]) \cdot (1{,}14 \cdot 10^4 - 3{,}60 \cdot 10^4)[\text{V}]}{1{,}00 \cdot 10^{-3}\ [\text{kg}]}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}0492\ [\text{J}]}{1{,}00 \cdot 10^{-3}\ [\text{kg}]}} = 9{,}92\ \text{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, hay que determinar la dirección y el sentido.
Se puede deducir que la aceleración tiene la dirección del eje X en sentido positivo, ya que las cargas negativas sufren una fuerza de sentido opuesto al campo. Aunque el valor del campo resultante en el origen es cero, en el punto C tiene la dirección del eje X en sentido negativo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración. Por lo tanto, la dirección de la velocidad es la del eje X en sentido positivo:

$$\overline{\boldsymbol{v}}_D = 9{,}92\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{m/s}$$

3. Tres cargas eléctricas puntuales de 10^{-6} C se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Calcula:
   a) La intensidad del campo y el potencial eléctrico en el vértice libre.
   b) Módulo, dirección y sentido de la fuerza del campo electrostático sobre una carga de $-2 \cdot 10^{-6}$ C situada en dicho vértice.
   c) El trabajo realizado por la fuerza del campo para trasladar dicha caga desde el vértice al centro del cuadrado. Interpreta el signo del resultado.

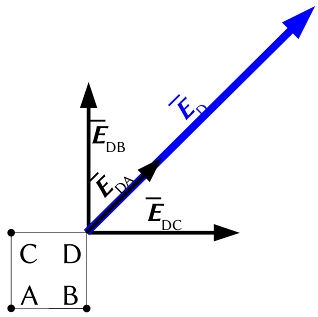
   Dato: $K = 9 \cdot 10^9\ \text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$. *(P.A.U. sep. 13)*

   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}} = 1{,}72 \cdot 10^4$ N/C, diagonal hacia fuera; $V = 2{,}44 \cdot 10^4$ V; b) $|\overline{\boldsymbol{F}}| = 0{,}0344$ N, diagonal hacia el centro; c) $W_E = 0{,}0276$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Lado del cuadrado	$l = 1{,}00$ m
Valor de las cargas situadas en los vértices	$Q_A = Q_B = Q_C = 1{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el cuarto vértice	$Q_D = -2{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00 \cdot 10^9\ \text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$
Incógnitas	
Intensidad del campo eléctrico en el cuarto vértice	$\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Potencial eléctrico en el cuarto vértice	V_D
Fuerza del campo sobre una carga de −2 µC en el cuarto vértice	$\overline{\boldsymbol{F}}$
Trabajo del campo al llevar −2 µC desde el 4º vértice al centro del cuadrado	$W_{D \to G}$
Otros símbolos	
Distancia	r
Ecuaciones	
Campo eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$\vec{\boldsymbol{E}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A = \sum \vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$V = K \frac{Q}{r}$
Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo de la fuerza eléctrica al mover una carga del punto A al punto B	$W_{A \to B} = q\,(V_A - V_B)$

Campo eléctrico $\vec{E}=\frac{\vec{F}_E}{q}$

Solución:



a) Se hace un dibujo del cuadrado en el que se sitúan los puntos A, B, C y D. Se dibujan los vectores del campo en el cuarto vértice, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Los campos creados por las cargas situadas en los puntos C y B son del mismo valor y la resultante de ellas va hacia fuera en la diagonal AD.
El campo creado por la carga situada en el punto A es de menor valor, porque está más lejos, pero también va hacia fuera en la diagonal AD.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\vec{E}_D$.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas por una distancia, r, viene dada por la ley de Coulomb, en la que K es la constante de Coulomb y $\vec{u}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E=K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}_E}{q}=\frac{K\frac{Q\cdot \cancel{q}}{r^2}\vec{u}_r}{\cancel{q}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

Se elige un sistema de referencia con el origen en cada carga, tomando el eje X horizontal, positivo hacia la derecha y el eje Y vertical, positivo hacia arriba.
La distancia AD es la longitud de la diagonal del cuadrado:

$$r_{AD}=|\vec{r}_{AD}|=\sqrt{(1{,}00\text{ [m]})^2+(1{,}00\text{ [m]})^2}=1{,}41\text{ m}$$

Se calcula el vector unitario del punto D, tomando como origen el punto A:

$$\vec{u}_{AD}=\frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|}=\frac{(1{,}00\,\vec{\mathbf{i}}+1{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\text{ [m]}}{1{,}41\text{ [m]}}=0{,}707\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}$$

Se calcula el campo en el punto D, creado por la carga de 1 µC situada en el punto A:

$$\vec{E}_{DA}=9{,}00\cdot 10^9\text{ [N·m}^2\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\text{ [C]}}{(1{,}41\text{ [m]})^2}(0{,}707\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}707\,\vec{\mathbf{j}})=(3{,}18\cdot 10^3\,\vec{\mathbf{i}}+3{,}18\cdot 10^3\,\vec{\mathbf{j}})\text{ N/C}$$

La distancia BD es la longitud del lado: r_{BD} = l = 1,00 m
El vector unitario del punto D, tomando como origen el punto B, es $\vec{\mathbf{j}}$, el vector unitario del eje Y.
Se calcula el campo en el punto D, creado por la carga de 1 µC situada en el punto B:

$$\vec{E}_{DB}=9{,}00\cdot 10^9\text{ [N·m}^2\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\text{ [C]}}{(1{,}00\text{ [m]})^2}\vec{\mathbf{j}}=9{,}00\cdot 10^3\,\vec{\mathbf{j}}\text{ N/C}$$

El campo en el punto D, creado por la carga de 1 µC situada en el punto C, vale lo mismo, porque la carga y la distancia son las mismas, pero está dirigida en el sentido positivo del eje X. El vector unitario del punto D, tomando como origen el punto C, es $\vec{\mathbf{i}}$, el vector unitario del eje X.

$$\vec{E}_{DC}=9{,}00\cdot 10^3\,\vec{\mathbf{i}}\text{ N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto D es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\boldsymbol{E}}_{DA} + \overline{\boldsymbol{E}}_{DB} + \overline{\boldsymbol{E}}_{DC}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = (3{,}18·10^3\ \overline{\mathbf{i}} + 3{,}18·10^3\ \overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] + 9{,}00·10^3\ \overline{\mathbf{j}}\ [\text{N/C}] + 9{,}00·10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ [\text{N/C}] = (1{,}22·10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 1{,}22·10^4\ \overline{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Análisis: Coincide con el dibujo. El campo resultado del cálculo es diagonal hacia arriba y hacia la derecha.

El valor del campo eléctrico es:

$$|\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{D}}|=\sqrt{(1{,}22\cdot 10^4\ [\text{N/C}])^2+(1{,}22\cdot 10^4\ [\text{N/C}])^2}=1{,}72\cdot 10^4\ \text{N/C}$$

Un resultado independiente de cómo se hayan elegido los vértices es: el campo en el vértice libre vale $1{,}72·10^4$ N/C y va en la dirección de su diagonal, hacia fuera.
El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
Los potenciales eléctricos en el punto D, debidos a las cargas situadas en los puntos C y B, son iguales, porque tanto las cargas como las distancias son iguales.

$$V_{\text{DB}}=V_{\text{DC}}=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}00\ [\text{m}])}=9{,}00\cdot 10^3\ \text{V}$$

Se calcula el potencial eléctrico en el punto D, creado por la carga situada en el punto A:

$$V_{\text{DA}}=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(1{,}41\ [\text{m}])}=6{,}36\cdot 10^3\ \text{V}$$

El potencial eléctrico en el punto D es la suma de los potenciales de cada una de las cargas en ese punto.

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} + V_{DC} = 6{,}36·10^3\ [\text{V}] + 9{,}00·10^3\ [\text{V}] + 9{,}00·10^3\ [\text{V}] = 2{,}44·10^4\ \text{V}$$

b) Como el campo eléctrico en un punto es la fuerza sobre la unidad de carga positiva colocada en ese punto, se calcula la fuerza eléctrica sobre la carga de −2 µC a partir del campo:

$$\vec{\boldsymbol{E}}=\frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{q} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{F}} = q\cdot\overline{\boldsymbol{E}} = -2{,}00·10^{-6}\ [\text{C}]\ (1{,}22·10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 1{,}22·10^4\ \overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] = (-2{,}44·10^{-2}\ \overline{\mathbf{i}} - 2{,}44·10^{-2}\ \overline{\mathbf{j}})\ \text{N}$$

El módulo de la fuerza vale:

$$|\overline{\boldsymbol{F}}| = |q|\cdot|\overline{\boldsymbol{E}}| = 2{,}00·10^{-6}\ [\text{C}]\cdot 1{,}72·10^4\ [\text{N/C}] = 3{,}44·10^{-2}\ \text{N}$$

Un resultado independiente de cómo se hayan elegido los puntos es: la fuerza sobre la carga de −2 µC, situada en el vértice libre, es de $3{,}44·10^{-2}$ N en la dirección de su diagonal, hacia el centro del cuadrado, porque la carga es negativa.
El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V=\frac{E_p}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A\rightarrow B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = q\cdot V_A - q\cdot V_B = q\,(V_A - V_B)$$

c) Falta calcular el potencial eléctrico en el punto G, situado en el centro del cuadrado, de forma análoga a como se hizo antes.
La distancia de cada vértice al centro del cuadrado es la mitad de la diagonal:

$$r_{AG} = r_{BG} = r_{CG} = 1{,}41\ [\text{m}]\ /\ 2 = 0{,}707\ \text{m}$$

Se calculan los potenciales eléctricos en el punto G, debidos a las cargas situadas en los puntos A, B y C, que son iguales, porque tanto las cargas como las distancias son iguales. El potencial eléctrico en el punto G, que es la suma, vale el triple que el potencial de una carga.

$$V_G = V_{GA} + V_{GB} + V_{GC} = 3 \cdot V_{GA} = 3 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}] \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}707\ [\text{m}])} = 3 \cdot 1{,}27 \cdot 10^4\ [\text{V}] = 3{,}82 \cdot 10^4\ \text{V}$$

El trabajo que realiza la fuerza del campo cuando se traslada una carga de −2 μC desde el vértice D hasta el centro, G, del cuadrado vale:

$$W_{D\to G} = q\,(V_D - V_G) = -2{,}00\cdot10^{-6}\ [\text{C}] \cdot (2{,}44\cdot10^4 - 3{,}82\cdot10^4)\ [\text{V}] = 2{,}76\cdot10^{-2}\ \text{J}$$

El trabajo es positivo porque el sentido de la fuerza, hacia el centro del cuadrado, y el del desplazamiento son iguales.

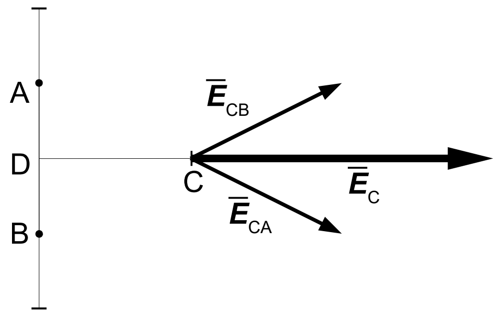
4. Dos cargas eléctricas de +8 μC están situadas en A(0, 0,5) y B(0, −0,5) (en metros). Calcula:
   a) El campo eléctrico en C(1, 0) y en D(0, 0)
   b) El potencial eléctrico en C y en D.
   c) Si una partícula de masa m = 0,5 g y carga q = −1 μC se sitúa en C con una velocidad inicial de 10^3 m/s, calcula la velocidad en D.

   Datos: $K = 9\cdot10^9\ \text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}$; 1 μC = 10^{-6} C. Nota: solo intervienen fuerzas eléctricas. *(P.A.U. sep. 12)*
   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1{,}03\cdot10^5\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\mathbf{0}}$; b) $V_C = 1{,}29\cdot10^5$ V; $V_D = 2{,}88\cdot10^5$ V; c) $\overline{\boldsymbol{v}}_D = -1{,}00\cdot10^3\ \overline{\mathbf{i}}$ m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	$Q_A = 8{,}00\ \mu\text{C} = 8{,}00\cdot10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	$Q_B = 8{,}00\ \mu\text{C} = 8{,}00\cdot10^{-6}$ C
Posición do punto A	$\boldsymbol{r}_A = (0,\ 0{,}500)$ m
Posición do punto B	$\boldsymbol{r}_B = (0,\ -0{,}500)$ m
Posición del punto C	$\boldsymbol{r}_C = (1{,}00,\ 0{,}00)$ m
Posición del punto D	$\boldsymbol{r}_D = (0{,}00,\ 0{,}00)$ m
Masa de la partícula que se desplaza	$m = 0{,}500\ \text{g} = 5{,}00\cdot10^{-4}$ kg
Carga de la partícula que se desplaza	$q = -1{,}00\ \mu\text{C} = -1{,}00\cdot10^{-6}$ C
Velocidad inicial en el punto C	$v_C = 1{,}00\cdot10^3$ m/s
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00\cdot10^9\ \text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}$
Incógnitas	
Campo eléctrico en los puntos C y D	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$, $\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Potenciales eléctricos en los puntos C y D	V_C, V_D
Velocidad que tendrá al pasar por el punto D	v_D
Otros símbolos	
Distancia	r
Ecuaciones	
Campo eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$\vec{\boldsymbol{E}} = K\dfrac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A = \sum \vec{\boldsymbol{E}}_{Ai}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial eléctrica de una carga, q, situada en un punto A	$E_{pA} = q \cdot V_A$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Principio de la conservación de la energía entre dos puntos A y B	$(E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$

Solución:

a) Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A(0, 0,5), B(0, -0,5) y C(1, 0). Se dibujan los vectores del campo en el punto C, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Como sus valores son iguales, porque las cargas y las distancias son iguales, los vectores serán de la misma medida.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\overline{\boldsymbol{E}}_C$.
Las componentes verticales de los campos creados por las cargas se anulan y la resultante estará dirigida en el sentido positivo del eje *X*. El valor de la resultante será la suma de las componentes horizontales de cada campo, y, como son dos, el vector campo resultante medirá el doble de la componente horizontal de uno de ellos.



El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, *Q* y *q*, separadas por una distancia, *r*, viene dada por la ley de Coulomb, en la que *K* es la constante de Coulomb y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = \frac{K \frac{Q \cdot \cancel{q}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{q}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Se calcula la distancia del punto A al punto C:

$$r_{AC} = \sqrt{(0,500\ [\mathrm{m}])^2 + (1,00\ [\mathrm{m}])^2} = 1,12\ \mathrm{m}$$

Se calcula el vector unitario del punto C, tomando como origen el punto A:

$$\vec{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \frac{(1,00\ \vec{\mathbf{i}} - 0,500\ \vec{\mathbf{j}})\ [\mathrm{m}]}{1,12\ [\mathrm{m}]} = 0,894\ \vec{\mathbf{i}} - 0,447\ \vec{\mathbf{j}}$$

Se calcula el campo en el punto C de la carga de +8 µC situada en el punto A:

$$\vec{E}_{CA} = 9,00 \cdot 10^9\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \cdot \frac{8,00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1,12\ [\mathrm{m}])^2} (0,894\ \vec{\mathbf{i}} - 0,447\ \vec{\mathbf{j}}) = (5,15 \cdot 10^4\ \vec{\mathbf{i}} - 2,58 \cdot 10^4\ \vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

El campo en el punto C, creado por la carga de +8 µC situada en el punto B, es simétrico al del punto A. Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente vertical es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

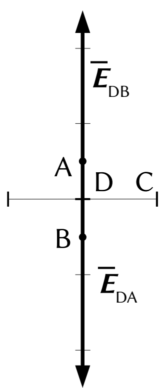
$$\overline{\boldsymbol{E}}_{CB} = (5,15 \cdot 10^4\ \bar{\mathbf{i}} + 2,58 \cdot 10^4\ \bar{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto C es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{CA} + \overline{\boldsymbol{E}}_{CB} = 1,030 \cdot 10^5\ \bar{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: Coincide con el dibujo. El campo resultante del cálculo va en el sentido positivo del eje X.

Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A, B y D. Se dibujan los vectores del campo en el punto D(0, 0), un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Como las distancias AD y BD son las mismas y las cargas situadas en A y en B son iguales, los campos creados por las cargas situadas en los puntos A y B son opuestos, del mismo valor y dirección pero de sentido contrario, como se ve en el dibujo, por lo que su resultante es nula.



$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\mathbf{0}}$$

A continuación, se van a realizar los cálculos, aunque no es necesario.
Se calcula el campo en el punto D, creado por la carga de +8 µC situada en el punto A:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{DA} = 9{,}00 \cdot 10^9 \text{ [N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \cdot \frac{8{,}00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(0{,}500 \text{ [m]})^2} (-\vec{\mathbf{j}}) = -2{,}88 \cdot 10^5 \vec{\mathbf{j}} \text{ N/C}$$

El campo en el punto D, creado por la carga de 8 µC situada en el punto B, es el opuesto al creado por la carga situada en el punto A:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{DB} = 2{,}88 \cdot 10^5 \, \overline{\mathbf{j}} \text{ N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto D es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\boldsymbol{E}}_{DA} + \overline{\boldsymbol{E}}_{DB} = \overline{\mathbf{0}}$$

Análisis: Como las distancias y las cargas son iguales, y están situadas simétricamente, la resultante tiene que ser nula.

El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V = K \frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
b) Los potenciales eléctricos en el punto C, debidos a las cargas situadas en los puntos A y B, son iguales, porque tanto las cargas como las distancias son iguales. El potencial eléctrico en el punto C, que es la suma, vale el doble que el potencial de una carga.

$$V_C = V_{CA} + V_{CB} = 2 \cdot V_{CA} = 2 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9 \text{ [N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{8{,}00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(1{,}12 \text{ [m]})} = 2 \cdot 6{,}44 \cdot 10^4 \text{ [V]} = 1{,}29 \cdot 10^5 \text{ V}$$

El potencial eléctrico en el punto D se calcula de forma similar:

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} = 2 \cdot V_{DA} = 2 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9 \text{ [N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{8{,}00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(0{,}500 \text{ [m]})} = 2 \cdot 1{,}44 \cdot 10^5 \text{ [V]} = 2{,}88 \cdot 10^5 \text{ V}$$

c) Como la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$
$$½ \, m \, v_C^2 + q \cdot V_C = ½ \, m \, v_D^2 + q \cdot V_D$$
$$(5{,}00 \cdot 10^{-4} \text{ [kg]} / 2) \cdot (1{,}00 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2 + (-1{,}00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}) \cdot 1{,}29 \cdot 10^5 \text{ [V]} =$$
$$= (5{,}00 \cdot 10^{-4} \text{ [kg]} / 2) \cdot v_D^2 + (-1{,}00 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}) \cdot 2{,}88 \cdot 10^5 \text{ [V]}$$

Se calcula la velocidad que tendrá al pasar por el punto D, despejando:

$$v_D = \sqrt{\frac{500 + 2(0{,}288 - 0{,}128)}{5{,}00 \cdot 10^{-4}}} = 1{,}00 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Análisis: La velocidad es prácticamente la misma, pero un poco mayor, ya que la carga negativa es acelerada en sentido contrario al campo electrostático.

Como la velocidad es un vector, hay que determinar la dirección y el sentido.
Se puede deducir que la aceleración tiene la dirección del eje X en sentido negativo, ya que las cargas negativas sufren una fuerza de sentido opuesto al campo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la misma línea que la aceleración.

$$\overline{\boldsymbol{v}}_D = -1{,}00 \cdot 10^3 \, \overline{\mathbf{i}} \text{ m/s}$$

5. Tres cargas de +3 µC están situadas equidistantes entre sí sobre una circunferencia de radio 2 m. Calcula:
   a) El potencial eléctrico en el centro de la circunferencia.
   b) El campo eléctrico en el mismo punto.
   c) El trabajo para traer una carga q = 1 µC desde el infinito al centro de la circunferencia.
   Dato: $K = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$. *(P.A.U. jun. 12)*
   Rta.: a) $V = 4{,}05 \cdot 10^4$ V; b) $\overline{\boldsymbol{E}}_\mathrm{O} = \overline{\mathbf{0}}$; c) $W(\mathrm{ext.}) = 4{,}05 \cdot 10^{-2}$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de cada carga	Q = 3,00 µC = $3{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Radio de la circunferencia	R = 2,00 m
Valor de la carga que se traslada	q = −1,00 µC = $1{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$
Incógnitas	
Potencial eléctrico en el centro de la circunferencia	V_O
Campo eléctrico en el centro de la circunferencia	$\overline{\boldsymbol{E}}_\mathrm{O}$
Trabajo para trasladar una carga de 1 µC del infinito al centro	$W_{\infty \to \mathrm{O}}$
Otros símbolos	
Distancia	r
Ecuaciones	
Campo eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$\vec{\boldsymbol{E}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_\mathrm{A} = \sum \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{A}\,i}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$V = K \frac{Q}{r}$
Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo de la fuerza eléctrica al mover una carga del punto A al punto B	$W_{\mathrm{A} \to \mathrm{B}} = q\,(V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B})$

Solución:

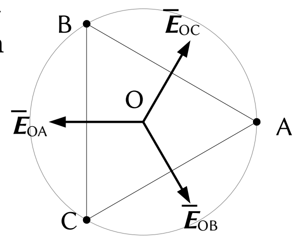
a)
El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V = K \frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
Los potenciales eléctricos en el centro, O, de la circunferencia, debidos a las cargas situadas en los puntos A, B y C, son iguales, porque tanto las cargas como las distancias son iguales. El potencial eléctrico en el punto O, que es la suma, vale el triple que el potencial de una carga.

$$V_\mathrm{O} = V_\mathrm{OC} + V_\mathrm{OB} + V_\mathrm{OA} = 3 \cdot V_\mathrm{OA} = 3 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{3{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(2{,}00\ [\mathrm{m}])} = 3 \cdot 1{,}05 \cdot 10^4\ [\mathrm{V}] = 4{,}05 \cdot 10^4\ \mathrm{V}$$

b) Se hace un dibujo del triángulo inscrito en la circunferencia y se sitúan los vértices A, B y C. Se dibujan los vectores del campo en el centro de la circunferencia, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Al ser las tres cargas iguales y estar a la misma distancia del centro de la circunferencia, los tres vectores del campo son del mismo valor, son simétricos y su resultante es nula.



$$\overline{\boldsymbol{E}}_\mathrm{O} = \overline{\mathbf{0}}$$

A continuación, se van a realizar los cálculos, aunque no es necesario.

El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas por una distancia, r, viene dada por la ley de Coulomb, en la que K es la constante de Coulomb y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = \frac{K \frac{Q \cdot \cancel{q}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{q}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

El vector unitario del punto O, tomando como origen el punto A, es $-\overline{\mathbf{i}}$, el vector unitario del eje X en sentido negativo,
Se calcula el campo en el centro, O, de la circunferencia, creado por la carga de 3 μC situada en el punto A:

$$\vec{E}_{\mathrm{OA}} = 9{,}00 \cdot 10^9 \, [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{3{,}00 \cdot 10^{-6} \, [\mathrm{C}]}{(2{,}00 \, [\mathrm{m}])^2} (-\vec{\mathbf{i}}) = -6{,}75 \cdot 10^3 \, \vec{\mathbf{i}} \; \mathrm{N/C}$$

Cuando se conoce el ángulo α que forma un vector con el eje X, el vector unitario se calcula con la expresión: $\overline{\boldsymbol{u}}_r = \cos \alpha \, \overline{\mathbf{i}} + \operatorname{sen} \alpha \, \overline{\mathbf{j}}$. El vector unitario del punto O, tomando como origen el punto B es:

$$\vec{u}_{\mathrm{OB}} = \cos(-60°) \, \vec{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}(-60°) \, \vec{\mathbf{j}} = -0{,}500 \, \vec{\mathbf{i}} - 0{,}866 \, \vec{\mathbf{j}}$$

Se calcula el campo en el centro, O, de la circunferencia, creado por la carga de 3 μC situada en el punto B:

$$\vec{E}_{\mathrm{OB}} = 9{,}00 \cdot 10^9 \, [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{3{,}00 \cdot 10^{-6} \, [\mathrm{C}]}{(2{,}00 \, [\mathrm{m}])^2} (-0{,}500 \, \vec{\mathbf{i}} - 0{,}866 \, \vec{\mathbf{j}}) = (3{,}38 \cdot 10^3 \, \vec{\mathbf{i}} - 5{,}85 \cdot 10^3 \, \vec{\mathbf{j}}) \; \mathrm{N/C}$$

El campo en el centro, O, de la circunferencia, creado por la carga de 3 μC situada en el punto C, es simétrico al creado por la carga situada en el punto B. Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente vertical es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{OC}} = 3{,}38 \cdot 10^3 \, \overline{\mathbf{i}} + 5{,}85 \cdot 10^3 \, \overline{\mathbf{j}} \; \mathrm{N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto O es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{O}} = \overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{OA}} + \overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{OB}} + \overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{OC}} = (-6{,}75 \cdot 10^3 \, \overline{\mathbf{i}}) + (3{,}38 \cdot 10^3 \, \overline{\mathbf{i}} - 5{,}85 \cdot 10^3 \, \overline{\mathbf{j}}) + (3{,}38 \cdot 10^3 \, \overline{\mathbf{i}} + 5{,}85 \cdot 10^3 \, \overline{\mathbf{j}}) = 0 \, \overline{\mathbf{i}} + 0 \, \overline{\mathbf{j}}$$

El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V = \frac{E_p}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A \to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = q \cdot V_A - q \cdot V_B = q\,(V_A - V_B)$$

c) El potencial eléctrico en el infinito es cero, porque se toma como origen. El trabajo que realiza la fuerza del campo cuando se traslada una carga de 1 μC desde el punto O hasta el infinito, vale:

$$W_{\infty\to O} = q\,(V_\infty - V_O) = 1{,}00\cdot10^{-6}\ [C]\cdot(0 - 4{,}05\cdot10^{4})\ [V] = -4{,}05\cdot10^{-2}\ J$$

Suponiendo que llega con la misma velocidad con la que sale, el trabajo de la fuerza resultante, igual a la variación de energía cinética, será nulo:

$$W(\text{resultante}) = W(\text{campo}) + W(\text{exterior}) = \Delta E_c = 0$$

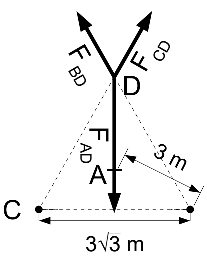
El trabajo que hay que hacer es el opuesto al de la fuerza del campo.

$$W(\text{exterior}) = 0 - W(\text{campo}) = 4{,}05\cdot10^{-2}\ J$$

6. Una carga q de 2 mC está fija en el punto A(0, 0), que es el centro de un triángulo equilátero de lado $3\sqrt{3}$ m. Tres cargas iguales Q están en los vértices y la distancia de cada carga Q a A es 3 m. El conjunto está en equilibrio electrostático. Calcula:
   a) El valor de Q.
   b) La energía potencial de cada carga Q.
   c) La energía puesta en juego para que el triángulo rote 45° alrededor de un eje que pasa por A y es perpendicular al plano del papel.
   Dato: $K = 9\cdot10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$. *(P.A.U. jun. 11)*
   Rta.: a) $Q = -3{,}46$ mC; b) $E_p = 2{,}07\cdot10^4$ J; c) $\Delta E = 0$.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	$q = 2{,}00\ mC = 0{,}00200\ C$
Longitud del lado del triángulo	$L = 3\sqrt{3}\ m = 5{,}20\ m$
Distancia del centro del triángulo a cada vértice	$r = 3{,}00\ m$
Posición del punto A	$\boldsymbol{r}_A = (0, 0)\ m$
Ángulo girado por el triángulo	$\theta = 45°$
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00\cdot10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2}$
Incógnitas	
Valor de la carga, Q, que se encuentra en cada uno de los vértices	Q
Energía potencial de cada carga Q	E_p
Energía para rotar el triángulo 45° alrededor de un eje perpendicular	ΔE
Ecuaciones	
Ley de Coulomb: fuerza entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas una distancia, r	$\vec{F} = K\dfrac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{Ai}$
Energía potencial eléctrica de una interacción entre dos cargas, Q y q, situadas a una distancia, r, una de la otra.	$E_p = q\cdot V = K\dfrac{Q\cdot q}{r}$
Energía potencial eléctrica de un conjunto de cargas	$E_p = \Sigma E_{p\,i} = ½\Sigma E_{p\,q}$

Solución:



a) Se dibuja un triángulo con el punto A en su centro y se asignan letras a los vértices B, C y D. Se dibujan los vectores fuerza eléctrica en el vértice superior D, porque en ese punto los cálculos son más sencillos. Se dibuja un vector por cada carga, prestando atención al sentido.
Las fuerzas producidas por las cargas situadas en los puntos C y B son de repulsión, porque las cargas son positivas. Como sus valores son iguales, por las cargas y las distancias son las mismas, los vectores serán de la misma medida. Sus componentes horizontales se anulan y la resultante de estas dos fuerzas será vertical y estará dirigida en el sentido positivo del eje Y.
La fuerza producida por la carga situada en el punto A tiene que ser de atracción, y su valor debe ser igual a la suma de las componentes verticales de las fuerzas de las cargas situadas en los puntos C y B, y, como son dos, la fuerza resultante medirá el doble de la componente vertical de uno de ellos.
La fuerza entre dos cargas eléctricas viene dada por la ley de Coulomb.

$$\vec{F} = K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$$

Se escribe la expresión de la fuerza eléctrica, $\overline{\boldsymbol{F}}_{DA}$, que ejerce la carga q, situada en el punto A, sobre la carga, Q, situada en el punto D, en función de la carga, Q, desconocida:

$$\vec{F}_{DA}=9,00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\frac{0,00200\ [\mathrm{C}]\cdot Q}{(3,00\ [\mathrm{m}])^2}\vec{\mathbf{j}}=2,00\cdot 10^{6}\,Q\,\vec{\mathbf{j}}\ \mathrm{N}$$

Se escribe la expresión de la fuerza eléctrica, $\overline{\boldsymbol{F}}_{DB}$, que ejerce la carga Q, situada en el punto B, sobre la carga Q, situada en el punto D, en función de la carga, Q, desconocida:

$$\vec{F}_{DB}=9,00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\frac{Q\cdot Q}{(5,20\ [\mathrm{m}])^2}(\cos 120°\,\vec{\mathbf{i}}+\mathrm{sen}\,120°\,\vec{\mathbf{j}})=(-167\,\vec{\mathbf{i}}+289\,\vec{\mathbf{j}})\cdot 10^{6}\,Q^2\ [\mathrm{N}]$$

La fuerza eléctrica que ejerce la carga Q, situada en el punto C, sobre la carga Q, situada en el punto D, es simétrica a la del punto B. Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente horizontal es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{DC} = (167\ \bar{\mathbf{i}} + 289\ \bar{\mathbf{j}})\cdot 10^6\ Q^2\ [\mathrm{N}]$$

Por el principio de superposición, la fuerza resultante en el punto D es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por cada carga sobre la carga situada en ese punto.

$$\overline{\boldsymbol{F}}_{D} = \overline{\boldsymbol{F}}_{DA} + \overline{\boldsymbol{F}}_{DB} + \overline{\boldsymbol{F}}_{DC} = \overline{\mathbf{0}}$$

La fuerza resultante es nula porque la carga situada en el punto D está en equilibrio. Las componentes x de las fuerzas se anulan. Para las componentes en el eje Y se cumple la igualdad:

$$(2,00 + 289\ Q + 289\ Q)\ Q\cdot 10^6 = 0$$

Se despeja Q para obtener el valor de la carga:

$$Q=\frac{-2,00\,\mathrm{C}}{(2\cdot 289)}=-0,00346\ \mathrm{C}=-3,46\ \mathrm{mC}$$

b) La energía potencial de cada carga es la suma de las energías potenciales de todas las interacciones entre los pares de carga que le afecten. La energía potencial de la carga Q situada en el punto D es:

$$E_{pD} = E_{pCD} + E_{pBD} + E_{pAD}$$

La energía potencial de cada interacción entre dos cargas viene dada por la expresión:

$$E_{p\,i}=K\frac{Q\cdot q}{r}$$

Se calcula la energía potencial de la interacción entre las cargas situadas en los puntos C y D:

$$E_{pCD}=9,00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{(-3,46\cdot 10^{-3}\ [\mathrm{C}])\cdot(-3,46\cdot 10^{-3}\ [\mathrm{C}])}{5,20\ [\mathrm{m}]}=2,08\cdot 10^{4}\ \mathrm{J}$$

La energía potencial de la interacción entre las cargas situadas en los puntos B y D vale lo mismo que la de la interacción entre las cargas situadas en los puntos C y D:

$$E_{pBD} = E_{pCD} = 2,08\cdot 10^4\ \mathrm{J}$$

Se calcula la energía potencial de la interacción entre las cargas situadas en los puntos A y D:

$$E_{pAD}=9,00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{2,00\cdot 10^{-3}\ [\mathrm{C}]\cdot(-3,46\cdot 10^{-3}\ [\mathrm{C}])}{3,00\ [\mathrm{m}]}=-2,08\cdot 10^{4}\ \mathrm{J}$$

La energía potencial de la carga Q vale:

$$E_{pD} = E_{pCD} + E_{pBD} + E_{pAD} = 2,08\cdot 10^4\ [\mathrm{J}] + 2,08\cdot 10^4\ [\mathrm{J}] + (-2,08\cdot 10^4\ [\mathrm{J}]) = 2,08\cdot 10^4\ \mathrm{J}$$

c) La energía potencial de la carga situada en el punto A es la suma de las energías potenciales de las tres interacciones en las que aparece:

$$E_{pA} = E_{pAB} + E_{pAC} + E_{pAD}$$

Las energías potenciales de las tres interacciones son iguales, porque los pares de cargas y las distancias son las mismas. Por tanto:

$$E_{pA}=3\cdot\left(9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{2\cdot 10^{-3}\ [\mathrm{C}]\cdot(-3{,}46\cdot 10^{-3}\ [\mathrm{C}])}{(3{,}00\ [\mathrm{m}])}\right)=-6{,}24\cdot 10^4\ \mathrm{J}$$

La energía potencial de la disposición de cargas es la suma de las energías potenciales de las interacciones entre los pares de cargas o, lo que es lo mismo, la mitad de la suma de las energías potenciales de todas las cargas, porque en esta caso cada interacción se cuenta dos veces. Por ejemplo, la interacción A ↔ C aparece en el cálculo de la energía potencial de la carga situada en el punto A y también en el cálculo de la energía potencial de la carga situada en el punto C.

$$E_p=\frac{1}{2}(E_{pA}+E_{pB}+E_{pC}+E_{pD})=\frac{1}{2}(E_{pA}+3\cdot E_{pD})=\frac{1}{2}(-6{,}24\cdot 10^4\ [\mathrm{J}]+3\cdot 2{,}08\cdot 10^4\ [\mathrm{J}])=0$$

Como al girar 45°, las distancias relativas no cambian, la energía de la nueva disposición es la misma, y la energía total requerida es cero.

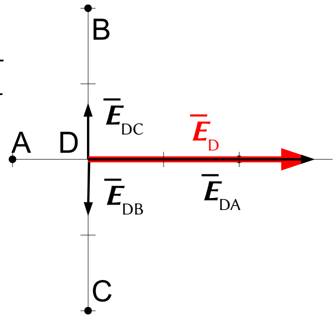
7. Tres cargas eléctricas de +1 μC, están en los puntos A(–1, 0), B(0, 2) y C(0, –2) (metros). Calcula en D(0, 0) y en F(2, 0):
   a) El campo eléctrico.
   b) El potencial eléctrico.
   c) Si en D(0, 0) se coloca una tercera carga q de +1 μC y de 10 g de masa, sometida solo a la acción electrostática de las otras tres, calcula la velocidad con la que llega al punto F(2, 0).

   Datos: K = 9·10⁹ N·m²·C⁻²; 1 μC = 10⁻⁶ C. *(P.A.U. jun. 10)*

   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_D = 9{,}0\cdot 10^3\ \bar{\mathbf{i}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_F = 2{,}6\cdot 10^3\ \bar{\mathbf{i}}$ N/C; b) $V_D = 1{,}8\cdot 10^4$ V; $V_F = 9{,}4\cdot 10^3$ V; c) v = 1,31 m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	$Q_A = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00\cdot 10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	$Q_B = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00\cdot 10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto C	$Q_C = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00\cdot 10^{-6}$ C
Masa de la partícula que se desplaza	$m = 10{,}0$ g $= 1{,}00\cdot 10^{-2}$ kg
Carga de la partícula que se desplaza	$q = 1{,}00\ \mu C = 1{,}00\cdot 10^{-6}$ C
Velocidad inicial en el punto D	$v_D = 0$
Posición del punto A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A = (-1{,}00,\ 0)$ m
Posición del punto B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (0,\ 2{,}00)$ m
Posición del punto C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C = (0,\ -2{,}00)$ m
Posición del punto D del que sale	$\overline{\boldsymbol{r}}_D = (0,\ 0)$ m
Posición del punto F al que llega	$\overline{\boldsymbol{r}}_F = (2{,}00,\ 0)$ m
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00\cdot 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$
Incógnitas	
Campo eléctrico en los puntos D y F	$\overline{\boldsymbol{E}}_D$, $\overline{\boldsymbol{E}}_F$
Potenciales eléctricos en los puntos D y F	V_D, V_F
Velocidad que tendrá al pasar por el punto F	v_F
Otros símbolos	
Distancia	r
Ecuaciones	
Campo eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$\vec{\boldsymbol{E}}=K\dfrac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A=\sum \vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$V=K\dfrac{Q}{r}$
Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial eléctrica de una carga, q, situada en un punto A	$E_{pA} = q\cdot V_A$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m\cdot v^2$
Principio de la conservación de la energía entre dos puntos A y B	$(E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$

Solución:



a) Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A(−1, 0), B(0, 2), C(0, −2) y D(0, 0). Se dibujan los vectores del campo en el punto D, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Los valores de los campos creados por las cargas situadas en los puntos B y C, situados en el eje *Y*, son iguales, porque las cargas son iguales y están a la misma distancia, y, por tanto, se anulan.
El vector suma, que es el campo resultante, $\overline{\boldsymbol{E}}_D$, coincide con el vector $\overline{\boldsymbol{E}}_{DA}$.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, *Q* y *q*, separadas por una distancia, *r*, viene dada por la ley de Coulomb, en la que *K* es la constante de Coulomb y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E = K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = \frac{K\frac{Q\cdot \cancel{q}}{r^2}\vec{u}_r}{\cancel{q}} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

La distancia del punto A al punto D es: r_{AD} = |(0, 0) − (−1,00, 0) [m]| = 1,00 m.
El vector unitario del punto D, tomando como origen el punto A, es $\overline{\mathbf{i}}$, el vector unitario del eje *X*.
Se calcula el campo en el punto D, creado por la carga de +1 µC situada en el punto A:

$$\vec{E}_{DA} = 9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\cdot\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])^2}\vec{\mathbf{i}} = 9{,}00\cdot 10^3\,\vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

La distancia del punto B al punto D es: r_{BD} = |(0, 0) − (0, 2,00) [m]| = 2,00 m.
El vector unitario del punto D, tomando como origen el punto B, es -$\overline{\mathbf{j}}$, el vector unitario del eje *Y*, en sentido negativo.
Se calcula el campo en el punto D, creado por la carga de +1 µC situada en el punto B:

$$\vec{E}_{DB} = 9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\cdot\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(2{,}00\ [\mathrm{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}}) = -2{,}25\cdot 10^3\,\vec{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

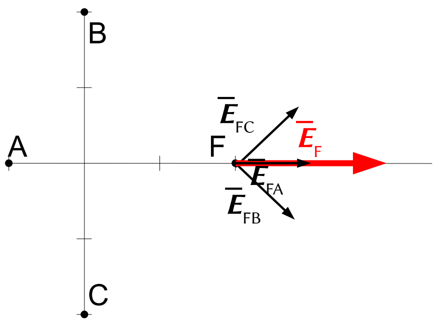
El campo en el punto D, creado por la carga de +1 µC situada en el punto C, es opuesto al del punto B.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{DC} = 2{,}25\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto D es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\boldsymbol{E}}_{DA} + \overline{\boldsymbol{E}}_{DB} + \overline{\boldsymbol{E}}_{DC} = 9{,}00\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: Coincide con el dibujo. El campo resultante del cálculo va en el sentido positivo del eje X.



Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A(−1, 0), B(0, 2), C(0, −2) y F(2, 0). Se dibujan los vectores del campo en el punto F, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Como los valores de los campos creados por las cargas situadas en los puntos B y C, son iguales, porque las cargas son iguales y están a la misma distancia, los vectores serán de la misma medida.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\overline{\boldsymbol{E}}_F$.
La resultante de los campos creados por las cargas situadas en los puntos B y C irá en el sentido positivo del eje *X*, porque sus componentes verticales se anulan. El vector resultante también estará dirigido en el sentido positivo del eje *X*.

La distancia del punto A al punto F es: $r_{AF} = |(2,00, 0) \text{ [m]} - (-1,00, 0) \text{ [m]}| = 3,00$ m.
El vector unitario del punto F, tomando como origen el punto A, es $\overline{\mathbf{i}}$, el vector unitario del eje *X*.
Se calcula el campo en el punto F, creado por la carga de +1 µC situada en el punto A:

$$\vec{E}_{FA}=9,00\cdot 10^{9} \text{ [N·m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1,00\cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(3,00 \text{ [m]})^{2}}\vec{\mathbf{i}}=1,00\cdot 10^{3}\vec{\mathbf{i}} \text{ N/C}$$

Se calcula la distancia del punto B al punto F:

$$r_{BF}=\sqrt{(2,00 \text{ [m]})^{2}+(2,00 \text{ [m]})^{2}}=2,83 \text{ m}$$

Se calcula el vector unitario del punto F, tomando como origen el punto B:

$$\vec{u}_{BF}=\frac{\vec{r}_{BF}}{|\vec{r}_{BF}|}=\frac{(2,00\vec{\mathbf{i}}-2,00\vec{\mathbf{j}}) \text{ [m]}}{2,83 \text{ [m]}}=0,707\vec{\mathbf{i}}-0,707\vec{\mathbf{j}}$$

Se calcula el campo en el punto F, creado por la carga de +1 µC situada en el punto B:

$$\vec{E}_{FB}=9,00\cdot 10^{9} \text{ [N·m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1,00\cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(2,83 \text{ [m]})^{2}}(0,707\vec{\mathbf{i}}-0,707\vec{\mathbf{j}})=(795\vec{\mathbf{i}}-795\vec{\mathbf{j}}) \text{ N/C}$$

El campo en el punto F, creado por la carga de +1 µC situada en el punto C, es simétrico al del punto B. Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente vertical es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{FC} = (795\ \overline{\mathbf{i}} + 795\ \overline{\mathbf{j}}) \text{ N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto F es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{F} = \overline{\boldsymbol{E}}_{FA} + \overline{\boldsymbol{E}}_{FB} + \overline{\boldsymbol{E}}_{FC} = 2,59\cdot 10^{3}\ \overline{\mathbf{i}} \text{ N/C}$$

Análisis: Coincide con el dibujo. El campo resultante del cálculo va en el sentido positivo del eje X.

El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*, es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
b) Se calculan los potenciales en el punto D, debidos a las cargas situadas en los puntos A, B y C:

$$V_{DA}=9,00\cdot 10^{9} \text{ [N·m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1,00\cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(1,00 \text{ [m]})}=9,00\cdot 10^{3} \text{ V}$$

$$V_{DC}=V_{DB}=9,00\cdot 10^{9} \text{ [N·m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1,00\cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(2,00 \text{ [m]})}=4,50\cdot 10^{3} \text{ V}$$

El potencial eléctrico en el punto D es la suma de los potenciales de cada una de las cargas en ese punto:

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} + V_{DC} = 9,00\cdot 10^{3} \text{ [V]} + 4,50\cdot 10^{3} \text{ [V]} + 4,50\cdot 10^{3} \text{ [V]} = 1,800\cdot 10^{4} \text{ V}$$

Se calculan los potenciales en el punto F, debidos a las cargas situadas en los puntos A, B y C:

$$V_{FC}=V_{FB}=9,00\cdot 10^{9} \text{ [N·m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1,00\cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(2,83 \text{ [m]})}=3,18\cdot 10^{3} \text{ V}$$

$$V_{FA}=9,00\cdot 10^{9} \text{ [N·m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1,00\cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(3,00 \text{ [m]})}=3,00\cdot 10^{3} \text{ V}$$

El potencial eléctrico en el punto F es la suma de los potenciales de cada una de las cargas en ese punto:

$$V_F = V_{FA} + V_{FB} + V_{FC} = 3,00\cdot 10^{3} \text{ [V]} + 3,18\cdot 10^{3} \text{ [V]} + 3,18\cdot 10^{3} \text{ [V]} = 9,36\cdot 10^{3} \text{ V}$$

c) Como la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_F = (E_c + E_p)_D$$

$$½\ m\ v^2_F + q \cdot V_F = ½\ m\ v^2_D + q \cdot V_D$$

$$(1{,}00 \cdot 10^{-2}\ [kg] / 2) \cdot v_F^2 + 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [C] \cdot 9{,}36 \cdot 10^3\ [V] = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [C] \cdot 1{,}800 \cdot 10^4\ [V]$$

Se calcula la velocidad en el punto F despejando:

$$v_F = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [C](1{,}800 \cdot 10^4 - 9{,}36 \cdot 10^3)\ [V]}{0{,}0100\ [kg]}} = 1{,}31\ m/s$$

Como la velocidad es un vector, hay que determinar la dirección y el sentido.
Se puede deducir que la aceleración tiene la dirección del eje X en sentido positivo, porque la carga es positiva y la aceleración seguirá la dirección y el sentido del campo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la misma línea que la aceleración.

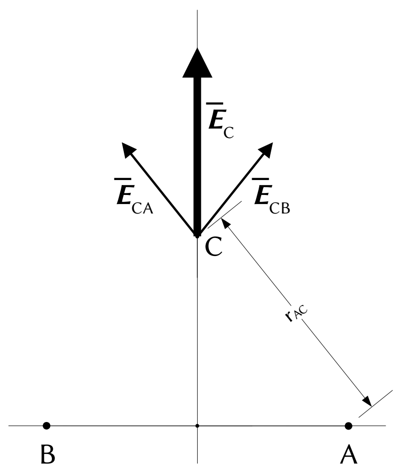
$$\overline{\boldsymbol{v}}_F = 1{,}31\ \overline{\mathbf{i}}\ m/s$$

8. Dos cargas eléctricas de 3 mC están situadas en A(4, 0) y B(−4, 0) (en metros). Calcula:
   a) El campo eléctrico en C(0, 5) y en D(0, 0).
   b) El potencial eléctrico en los mismos puntos C y D.
   c) El trabajo para trasladar q = −1 mC desde C a D.
   Datos: $K = 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$; 1 mC = 10^{-3} C. *(P.A.U. jun. 09)*
   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1{,}03 \cdot 10^6\ \overline{\mathbf{j}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\mathbf{0}}$; b) $V_C = 8{,}43 \cdot 10^6$ V; $V_D = 1{,}35 \cdot 10^7$ V; c) W(ext.) = $-5{,}1 \cdot 10^3$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Posición de la carga Q_1	$\overline{\boldsymbol{r}}_A = (4{,}00,\ 0)$ m
Posición de la carga Q_2	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (-4{,}00,\ 0)$ m
Posición del punto C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C = (0,\ 5{,}00)$ m
Posición del punto D	$\overline{\boldsymbol{r}}_D = (0,\ 0)$ m
Valor de la carga situada en el punto A	$Q_1 = 3{,}00\ mC = 3{,}00 \cdot 10^{-3}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	$Q_2 = 3{,}00\ mC = 3{,}00 \cdot 10^{-3}$ C
Valor de la carga que se traslada	$q = -1{,}00\ mC = -1{,}00 \cdot 10^{-3}$ C
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00 \cdot 10^9\ N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$
Incógnitas	
Campo eléctrico en los puntos C y D	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$, $\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Potencial eléctrico en los puntos C y D	V_C, V_D
Trabajo para trasladar una carga de −1 mC del punto C al punto D	$W_{C \to D}$
Otros símbolos	
Distancia	r
Ecuaciones	
Campo eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$\vec{\boldsymbol{E}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A = \sum \vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$V = K \frac{Q}{r}$
Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo de la fuerza eléctrica al mover una carga del punto A al punto B	$W_{A \to B} = q\ (V_A - V_B)$

Solución:

a) Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A(4, 0), B(−4, 0) y C(0, 5). Se dibujan los vectores del campo en el punto C, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Como sus valores son iguales, porque las cargas y las distancias son iguales, los vectores serán de la misma medida.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\overline{\boldsymbol{E}}_C$.
Las componentes horizontales de los campos creados por las cargas se anulan y la resultante estará dirigida en el sentido positivo del eje Y.



El valor de la resultante será la suma de las componentes verticales de cada campo, y, como son dos, el vector campo resultante medirá el doble de la componente vertical de uno de ellos.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas por una distancia, r, viene dada por la ley de Coulomb, en la que K es la constante de Coulomb y $\overline{\boldsymbol{u}}_\text{r}$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = \frac{K \frac{Q \cdot \cancel{q}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{q}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Se calcula la distancia entre los puntos A(4, 0) y C(0, 5).

$$\vec{r}_\text{AC} = \vec{r}_\text{C} - \vec{r}_\text{A} = 5{,}00\,\vec{\mathbf{j}}\ [\text{m}] - 4{,}00\,\vec{\mathbf{i}}\ [\text{m}] = (-4{,}00\,\vec{\mathbf{i}} + 5{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\ \text{m}$$
$$r_\text{AC} = |\vec{r}_\text{AC}| = \sqrt{(-4{,}00\ [\text{m}])^2 + (5{,}00\ [\text{m}])^2} = 6{,}40\ \text{m}$$

Se calcula el vector unitario del punto C, tomando como origen el punto A:

$$\vec{u}_\text{AC} = \frac{\vec{r}_\text{AC}}{|\vec{r}_\text{AC}|} = \frac{(-4{,}00\,\vec{\mathbf{i}} + 5{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{6{,}40\ [\text{m}]} = -0{,}625\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}781\,\vec{\mathbf{j}}$$

Se calcula el campo en el punto C, creado por la carga de 3 mC situada en el punto A:

$$\vec{E}_\text{CA} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{3{,}00 \cdot 10^{-3}\ [\text{C}]}{(6{,}40\ [\text{m}])^2} (-0{,}625\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}781\,\vec{\mathbf{j}}) = (-4{,}11 \cdot 10^5\,\vec{\mathbf{i}} + 5{,}14 \cdot 10^5\,\vec{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

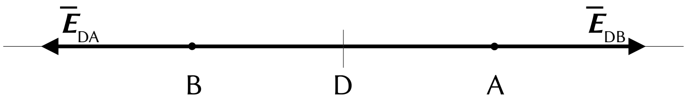
El campo en el punto C, creado por la carga de 3 mC situada en el punto B, es simétrico al del punto A. Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente horizontal es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_\text{CB} = (4{,}11 \cdot 10^5\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}14 \cdot 10^5\ \overline{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto C es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_\text{C} = \overline{\boldsymbol{E}}_\text{CA} + \overline{\boldsymbol{E}}_\text{CB} = (-4{,}11 \cdot 10^5\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}14 \cdot 10^5\ \overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] + (4{,}11 \cdot 10^5\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}14 \cdot 10^5\ \overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] = 1{,}03 \cdot 10^6\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Análisis: Coincide con el dibujo. El campo resultante del cálculo va en el sentido positivo del eje Y.



Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A(4, 0), B(−4, 0) y D(0, 0). Se dibujan los vectores del campo en el punto D, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Como las distancias AD y BD son las mismas, y las cargas situadas en A y en B son iguales, los campos son opuestos, del mismo valor y dirección, pero de sentido contrario, y se anulan.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_\text{D} = \overline{\mathbf{0}}$$

b)
El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
Los potenciales eléctricos en el punto C, debidos a las cargas situadas en los puntos A y B, son iguales, porque tanto las cargas como las distancias son iguales. El potencial eléctrico en el punto C, que es la suma, vale el doble que el potencial de una carga.

$$V_{\mathrm{C}}=V_{\mathrm{CB}}+V_{\mathrm{CA}}=2\cdot V_{\mathrm{CA}}=2\cdot 9{,}00\cdot 10^{9}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\frac{3{,}00\cdot 10^{-3}\,[\mathrm{C}]}{(6{,}40\,[\mathrm{m}])}=2\cdot 4{,}22\cdot 10^{6}\,[\mathrm{V}]=8{,}43\cdot 10^{6}\,\mathrm{V}$$

El potencial eléctrico en el punto D se calcula de forma similar:

$$V_{\mathrm{D}}=V_{\mathrm{DB}}+V_{\mathrm{DA}}=2\cdot V_{\mathrm{DA}}=2\cdot 9{,}00\cdot 10^{9}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\frac{3{,}00\cdot 10^{-3}\,[\mathrm{C}]}{(4{,}00\,[\mathrm{m}])}=2\cdot 6{,}25\cdot 10^{6}\,[\mathrm{V}]=13{,}5\cdot 10^{6}\,\mathrm{V}$$

El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_{p}, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W=-\Delta E_{\mathrm{p}}$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V=\frac{E_{\mathrm{p}}}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{\mathrm{A\to B}}=-\Delta E_{\mathrm{p}}=-(E_{\mathrm{pB}}-E_{\mathrm{pA}})=(E_{\mathrm{pA}}-E_{\mathrm{pB}})=q\cdot V_{\mathrm{A}}-q\cdot V_{\mathrm{B}}=q\,(V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{B}})$$

c) El trabajo realizado por la fuerza del campo cuando se traslada una carga de −1 mC desde el punto C hasta el punto D, vale:

$$W_{\mathrm{C\to D}}=q\,(V_{\mathrm{C}}-V_{\mathrm{D}})=-1{,}00\cdot 10^{-3}\,[\mathrm{C}]\cdot(8{,}43\cdot 10^{6}-13{,}5\cdot 10^{6})\,[\mathrm{V}]=5{,}1\cdot 10^{3}\,\mathrm{J}$$

Suponiendo que llega con la misma velocidad con la que sale, el trabajo de la fuerza resultante, igual a la variación de energía cinética, será nulo:

$$W(\text{resultante})=W(\text{campo})+W(\text{exterior})=\Delta E_{\mathrm{c}}=0$$

El trabajo que hay que hacer es el opuesto al de la fuerza del campo.

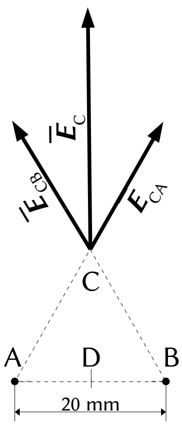
$$W(\text{exterior})=0-W(\text{campo})=-5{,}1\cdot 10^{3}\,\mathrm{J}$$

9. En dos de los vértices de un triángulo equilátero de 2 cm de lado se sitúan dos cargas puntuales de +10 μC cada una. Calcula:
   a) El campo eléctrico en el tercer vértice.
   b) El trabajo para llevar una carga de 5 μC desde el tercer vértice hasta el punto medio del lado opuesto.
   c) Justifica por qué no necesitas conocer la trayectoria en el apartado anterior.
   Datos: $K = 9\cdot 10^9$ N·m²·C⁻²; 1 μC = 10^{-6} C. *(P.A.U. jun. 08)*
   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{C}} = 3{,}90\cdot 10^{8}$ N/C, en la bisectriz hacia el exterior; b) $W(\text{ext.}) = 45{,}0$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de cada carga fija	$Q = 10{,}0\ \mu\mathrm{C} = 1{,}00\cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}$
Longitud del lado del triángulo equilátero	$L = 2{,}00\ \mathrm{cm} = 0{,}0200\ \mathrm{m}$
Valor de la carga que se desplaza	$q = 5{,}00\ \mu\mathrm{C} = 5{,}00\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00\cdot 10^{9}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}$
Incógnitas	
Campo eléctrico en el tercer vértice	$\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{C}}$

Trabajo para llevar 5 µC desde el tercer vértice hasta el punto medio del lado opuesto	$W_{C\to D}$
Otros símbolos	
Distancia	r
Ecuaciones	
Campo eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$\vec{E}=K\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A=\sum\vec{E}_{A\,i}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$V=K\dfrac{Q}{r}$
Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo de la fuerza eléctrica al mover una carga del punto A al punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$

Solución:



a) Se hace un esquema en el que se dibuja el triángulo equilátero y se sitúan los puntos A, B y C. Se dibujan los vectores del campo eléctrico en el vértice superior C (para que los cálculos sean más sencillos), un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Como sus valores son iguales, porque las cargas y las distancias son las mismas, los vectores serán de la misma medida.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\overline{\boldsymbol{E}}_C$.
Las componentes horizontales de los campos creados por las cargas se anulan y la resultante irá en el sentido positivo del eje Y. El valor de la resultante será la suma de las componentes verticales de cada campo, y, como son dos, el vector campo resultante medirá el doble de la componente vertical de uno de ellos.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas por una distancia, r, viene dada por la ley de Coulomb, en la que K es la constante de Coulomb y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E=K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}_E}{q}=\frac{K\dfrac{Q\cdot\cancel{q}}{r^2}\vec{u}_r}{\cancel{q}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

Cuando se conoce el ángulo α que forma un vector con el eje X, el vector unitario se calcula con la expresión: $\overline{\boldsymbol{u}}_r = \cos\alpha\,\overline{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\alpha\,\overline{\mathbf{j}}$. El vector unitario del punto C, tomando como origen el punto A, es:

$$\vec{u}_{CA}=\cos 60°\,\vec{\mathbf{i}}+\operatorname{sen} 60°\,\vec{\mathbf{j}}=0{,}500\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}866\,\vec{\mathbf{j}}$$

Se calcula el campo en el punto C, creado por la carga de 10 µC situada en el punto A:

$$\vec{E}_{CA}=9{,}00\cdot10^9\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot10^{-5}\,[\mathrm{C}]}{(0{,}0200\,[\mathrm{m}])^2}(0{,}500\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}866\,\vec{\mathbf{j}})\;=(1{,}13\cdot10^8\,\vec{\mathbf{i}}+1{,}95\cdot10^8\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

El campo eléctrico en el punto C, creado por la carga de 10 µC situada en el punto B, es simétrico al del punto A. Los valores de sus componentes son iguales, pero el signo de la componente horizontal es opuesto, porque se dirige en sentido contrario:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{CB} = (-1{,}13\cdot10^8\,\overline{\mathbf{i}} + 1{,}95\cdot10^8)\,\overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto C es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = (-1{,}13\cdot10^8\ \overline{\mathbf{i}} + 1{,}95\cdot10^8\ \overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] + (1{,}13\cdot10^8\ \overline{\mathbf{i}} + 1{,}95\cdot10^8\ \overline{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] = 3{,}90\cdot10^8\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Análisis: Coincide con el dibujo. El campo resultante del cálculo va en el sentido positivo del eje Y.

Un resultado independiente de cómo se hayan elegido los vértices es: el campo eléctrico en el tercer vértice vale $3{,}90\cdot10^8$ N/C y está dirigido según la bisectriz del ángulo de ese vértice, hacia el exterior del triángulo.
b, c)
El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V = \frac{E_p}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = q \cdot V_A - q \cdot V_B = q\,(V_A - V_B)$$

El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V = K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
Los potenciales eléctricos en el punto C, debidos a las cargas situadas en los puntos A y B, son iguales, porque tanto las cargas como las distancias son iguales. El potencial eléctrico en el punto C, que es la suma, vale el doble que el potencial de una carga:

$$V_C = V_{CA} + V_{CB} = 2\cdot V_{CA} = 2\cdot 9{,}00\cdot10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\cdot10^{-5}\ [\text{C}]}{(0{,}0200\ [\text{m}])} = 2\cdot 4{,}50\cdot10^6\ [\text{V}] = 9{,}00\cdot10^6\ \text{V}$$

Llamando punto D al centro del lado AB, los potenciales en el punto D, debidos a las cargas situadas en los puntos A y B, son iguales, porque tanto las cargas como las distancias son iguales. El potencial eléctrico en el punto D, que es la suma, vale el doble que el potencial de una carga:

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} = 2\cdot V_{DA} = 2\cdot 9{,}00\cdot10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\cdot10^{-5}\ [\text{C}]}{(0{,}0100\ [\text{m}])} = 2\cdot 9{,}00\cdot10^6\ [\text{V}] = 1{,}80\cdot10^7\ \text{V}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo eléctrico al trasladar una carga de 5 μC desde el punto C hasta el punto D, vale:

$$W_{C\to D} = q\,(V_C - V_D) = 5{,}00\cdot10^{-6}\ [\text{C}]\cdot(9{,}00\cdot10^6 - 1{,}80\cdot10^7)\ [\text{V}] = -45{,}0\ \text{J}$$

Suponiendo que llega con la misma velocidad con la que sale, el trabajo de la fuerza resultante, igual a la variación de energía cinética, será nulo:

$$W(\text{resultante}) = W(\text{campo}) + W(\text{exterior}) = \Delta E_c = 0$$

El trabajo que hay que hacer es el opuesto al de la fuerza del campo.

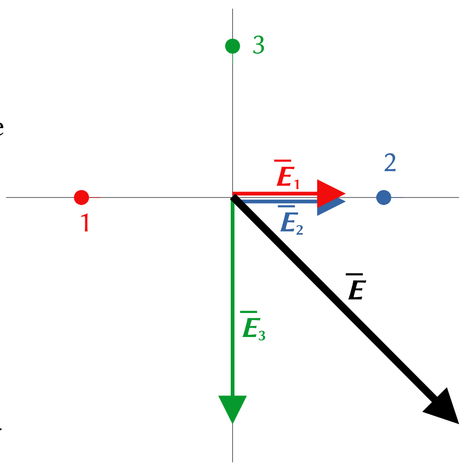
$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 45{,}0\ \text{J}$$

10. Dadas tres cargas puntuales q_1 = 10^{-3} µC en (-8, 0) m, q_2 = -10^{-3} µC en (8, 0) m y q_3 = $2·10^{-3}$ µC en (0, 8) m. Calcula:
    a) El campo y el potencial eléctricos en (0, 0).
    b) La energía electrostática.
    c) Justifica que el campo electrostático es conservativo.
    Datos: 1 µC = 10^{-6} C; K = $9·10^9$ N·m²·C⁻². *(P.A.U. sep. 07)*
    Rta.: a) $\overline{E}_O$ = 0,282 $\overline{\mathbf{i}}$ – 0,282 $\overline{\mathbf{j}}$ N/C; V_O = 2,25 V; b) E = $-5{,}63·10^{-10}$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto 1(−8,00, 0) m	q_1 = 10^{-3} µC = $1{,}00·10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto 2(+8,00, 0) m	q_2 = -10^{-3} µC = $-1{,}00·10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto 3(0, 8,00) m	q_3 = $2·10^{-3}$ µC = $2{,}00·10^{-9}$ C
Posición del punto 1	$\overline{\boldsymbol{r}}_1$ = (−8,00, 0) m
Posición del punto 2	$\overline{\boldsymbol{r}}_2$ = (+8,00, 0) m
Posición del punto 3	$\overline{\boldsymbol{r}}_3$ = (0, 8,00) m
Posición del punto 4 donde hay que calcular el campo y potencial	$\overline{\boldsymbol{r}}_4$ = (0, 0) m
Constante de Coulomb	K = $9{,}00·10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Campo eléctrico en el punto (0, 0)	$\overline{\boldsymbol{E}}_4$
Potencial eléctrico en el punto (0, 0)	V_4
Energía eléctrica	E
Otros símbolos	
Distancia	r
Ecuaciones	
Campo eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$\vec{\boldsymbol{E}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A=\sum\vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial eléctrica de una interacción entre dos cargas, Q y q, situadas a una distancia, r, una de la otra.	$E_p=q\cdot V=K\frac{Q\cdot q}{r}$
Energía potencial eléctrica de un conjunto de cargas	$E_p = \sum E_{p\,i} = ½\sum E_{p\,q}$

Solución:

a) Se hace un dibujo en el que se sitúan las cargas 1(−8, 0), 2(8, 0), 3(0, 8) y 4(0, 0). Se dibujan los vectores del campo en el punto 4, un vector por cada carga, prestando atención al sentido.



Los campos creados por las cargas situadas en los puntos 1 y 3 son de repulsión, porque las cargas son positivas, pero el campo creado por la carga 2, que es negativa, es de atracción.
Los campos creados por las cargas situadas en los puntos 1 y 2 son del mismo valor, porque las cargas y las distancias son iguales, y los vectores serán de la misma medida. El vector resultante de ambos medirá el doble que uno de ellos e irá en el sentido positivo del eje X.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\overline{\boldsymbol{E}}$.
El campo producido por la carga situada en el punto 3 vale el doble que el producido por la carga en el punto 1, y va en el sentido negativo de eje Y.
La resultante de los tres campos estará en el cuarto cuadrante, en dirección diagonal, porque el campo creado por la carga 3 vale lo mismo que la suma de los campos de las cargas 1 y 2.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas por una distancia, r, viene dada por la ley de Coulomb, en la que K es la constante de Coulomb y $\boldsymbol{u}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = \frac{K \frac{Q \cdot \cancel{q}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{q}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

La distancia del punto 1 al punto 4 es: $r_{14} = |(0, 0) - (-8{,}00, 0)\ [\text{m}]| = 8{,}00$ m.
El vector unitario del punto 4, tomando como origen el punto 1, es $\mathbf{\bar{i}}$, el vector unitario del eje X.
Se calcula el campo en el punto 4, creado por la carga 1, de 1 nC:

$$\vec{E}_{41} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \cdot \frac{1{,}00 \cdot 10^{-9}\ [\text{C}]}{(8{,}00\ [\text{m}])^2} \vec{\mathbf{i}} = 0{,}141\ \vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

El campo en el punto 4, creado por la carga 2, de −1 nC, es igual:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{42} = 0{,}141\ \mathbf{\bar{i}}\ \text{N/C}$$

La distancia del punto 3 al punto 4 es: $r_{34} = |(0, 0) - (8{,}00, 0)\ [\text{m}]| = 8{,}00$ m.
El vector unitario del punto 4, tomando como origen el punto 3, es -$\mathbf{\bar{j}}$, el vector unitario del eje Y en sentido negativo.
Se calcula el campo en el punto 4, creado por la carga 3, de 2 nC, es:

$$\vec{E}_{43} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \cdot \frac{2{,}00 \cdot 10^{-9}\ [\text{C}]}{(8{,}00\ [\text{m}])^2} (-\vec{\mathbf{j}}) = -0{,}282\ \vec{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto 4 es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_4 = \overline{\boldsymbol{E}}_{41} + \overline{\boldsymbol{E}}_{42} + \overline{\boldsymbol{E}}_{43} = (0{,}282\ \mathbf{\bar{i}} - 0{,}282\ \mathbf{\bar{j}})\ \text{N/C}$$

Su módulo vale:

$$|\vec{E}_4| = \sqrt{((0{,}282\ [\text{N/C}])^2 + (0{,}282\ [\text{N/C}])^2)} = 0{,}398\ \text{N/C}$$

El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V = K \frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
Se calcula el potencial eléctrico en el punto 4, creado por la carga 1:

$$V_{41} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{1{,}00 \cdot 10^{-9}\ [\text{C}]}{(8{,}00\ [\text{m}])} = 1{,}13\ \text{V}$$

El potencial eléctrico creado por la carga 2 es opuesto, ya que la carga 2 vale lo mismo que la carga 1, pero es negativo y se encuentra a la misma distancia:

$$V_{42} = -1{,}13\ \text{V}$$

El potencial eléctrico creado por la carga 3 es el doble que el creado por la carga 1, ya que la carga 3 vale el doble y se encuentra a la misma distancia:

$$V_{43} = 2 \cdot V_{41} = 2 \cdot 1{,}13\ [\text{V}] = 2{,}25\ \text{V}$$

El potencial eléctrico en el punto 4 es la suma de los potenciales de cada una de las cargas en ese punto:

$$V_4 = V_{41} + V_{42} + V_{43} = 1{,}13\ [\text{V}] - 1{,}13\ [\text{V}] + 2{,}25\ [\text{V}] = 2{,}25\ \text{V}$$

b) La energía potencial eléctrica de cada interacción entre dos cargas viene dada por la expresión:

$$E_{\text{p i}} = K\frac{Q \cdot q}{r}$$

Se calcula la energía potencial electrostática de cada una de las tres interacciones: 1↔2; 2↔3 y 1↔3.

$$E_{12} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-9}\ [\text{C}]\cdot(-1{,}00\cdot 10^{-9})\ [\text{C}]}{16{,}00\ [\text{m}]} = -5{,}63\cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

$$E_{23} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{(-1{,}00\cdot 10^{-9})\ [\text{C}]\cdot 2{,}00\cdot 10^{-9}\ [\text{C}]}{\sqrt{(8{,}00\ [\text{m}])^2+(8{,}00\ [\text{m}])^2}} = -15{,}9\cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

$$E_{13} = 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-9}\ [\text{C}]\cdot 2{,}00\cdot 10^{-9}\ [\text{C}]}{\sqrt{(8{,}00\ [\text{m}])^2+(8{,}00\ [\text{m}])^2}} = 15{,}9\cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

La energía total electrostática es la suma de las energías de las tres interacciones.

$$E = E_{12} + E_{23} + E_{13} = -5{,}63\cdot10^{-10}\ [\text{J}] + (-15{,}9\cdot10^{-10}\ [\text{J}]) + 15{,}9\cdot10^{-10}\ [\text{J}] = -5{,}63\cdot10^{-10}\ \text{J}$$

Análisis: Si se calculase la energía total como la suma de las energías potenciales de las tres cargas, el resultado sería el doble, porque las interacciones se contarían dos veces. Por ejemplo, la interacción 1 ↔ 2 aparece en el cálculo de la energía potencial de la carga 1 y también en el cálculo de la energía potencial de la carga 2.

c)

El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V = \frac{E_p}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

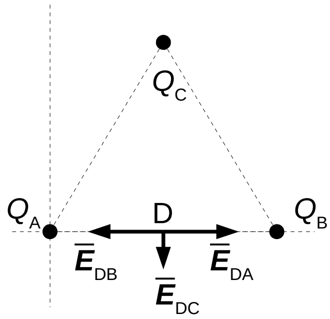
$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = q \cdot V_A - q \cdot V_B = q\,(V_A - V_B)$$

11. Tres cargas puntuales de 2 μC se sitúan respectivamente en A(0, 0), B(1, 0) y C(1/2, $\sqrt{3}/2$). Calcula:
    a) El campo eléctrico en los puntos D(1/2, 0) y F(1/2, 1/(2$\sqrt{3}$))
    b) El trabajo para trasladar una carga q = 1 μC de D a F.
    c) Con este trabajo, ¿aumenta o disminuye la energía electrostática del sistema?
    Datos: Las coordenadas en metros, $K = 9\cdot10^9$ N·m²·C⁻²; 1 μC = 10^{-6} C. *(P.A.U. jun. 07)*
    Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_D = -2{,}40\cdot10^4\ \overline{\mathbf{j}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_F = \overline{\mathbf{0}}$; b) $W_{D\to F}$ (exterior) = $-W_{D\to F}$ (campo) = $7\cdot10^{-4}$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	Q_A = 2,00 μC = $2{,}00\cdot10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	Q_B = 2,00 μC = $2{,}00\cdot10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto C	Q_C = 2,00 μC = $2{,}00\cdot10^{-6}$ C
Carga de la partícula que se desplaza	q = 1,00 μC = $1{,}00\cdot10^{-6}$ C
Posición del punto A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A$ = (0, 0) m
Posición del punto B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B$ = (1,00, 0) m
Posición del punto C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C$ = (1/2, $\sqrt{3}/2$) = = (0,500, 0,866) m
Posición del punto D	$\overline{\boldsymbol{r}}_D$ = (0,500, 0) m
Posición del punto F	$\overline{\boldsymbol{r}}_F$ = (1/2, 1/(2$\sqrt{3}$)) = = (0,500, 0,289) m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00 \cdot 10^9\ \text{N·m}^2\text{·C}^{-2}$
Incógnitas	
Campo eléctrico en el punto D	$\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Campo eléctrico en el punto F	$\overline{\boldsymbol{E}}_F$
Trabajo para llevar 1 µC desde el punto D hasta el punto F	$W_{D\rightarrow F}$
Otros símbolos	
Distancia	r
Ecuaciones	
Campo eléctrico en un punto a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*	$\vec{\boldsymbol{E}}=K\dfrac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{E}}_A=\sum\vec{\boldsymbol{E}}_{A\,i}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*	$V=K\dfrac{Q}{r}$
Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo de la fuerza eléctrica al mover una carga del punto A al punto B	$W_{A\rightarrow B} = q\,(V_A - V_B)$

Solución:



a) Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A(0, 0), B(1, 0), C(0,5, 0,9) y D(0,5, 0). Se dibujan los vectores del campo en el punto D, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Los valores de los campos creados por las cargas situadas en los puntos A y B son iguales y se anulan entre sí.
El vector suma, que es el campo resultante, $\overline{\boldsymbol{E}}_D$, coincide con el vector $\overline{\boldsymbol{E}}_{DC}$.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, *Q* y *q*, separadas por una distancia, *r*, viene dada por la ley de Coulomb, en la que *K* es la constante de Coulomb y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{\boldsymbol{F}}_E=K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{\boldsymbol{E}}=\frac{\vec{\boldsymbol{F}}_E}{q}=\frac{K\dfrac{Q\cdot\cancel{q}}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r}{\cancel{q}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

La distancia del punto A al punto D es: $r_{AD} = |(0{,}500,\ 0)\ [\text{m}] - (0,\ 0)\ [\text{m}]| = 0{,}500$ m
El vector unitario del punto D, tomando como origen el punto A, es $\overline{\mathbf{i}}$, el vector unitario del eje *X*.
Se calcula el campo en el punto D, creado por la carga de 2 µC, situada en el punto A:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{DA}=9{,}00\cdot10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{2{,}00\cdot10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}500\ [\text{m}])^2}\vec{\mathbf{i}}=7{,}20\cdot10^4\,\vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

El campo en el punto D, creado por la carga de 2 µC, situada en el punto B es opuesto:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{DB} = -7{,}20\cdot10^4\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

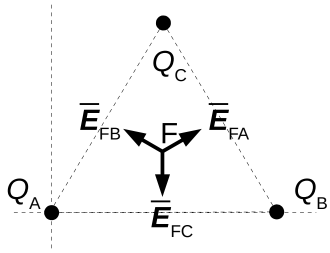
La distancia del punto C al punto D es: $r_{CD} = |(0{,}500,\ 0)\ [\text{m}] - (0{,}500,\ 0{,}866)\ [\text{m}]| = 0{,}866$ m
El vector unitario del punto D, tomando como origen el punto C, es $-\overline{\mathbf{j}}$, el vector unitario del eje *Y* en sentido negativo.
Se calcula el campo en el punto D, creado por la carga de 2 µC, situada en el punto C:

$$\vec{E}_{DC}=9,00\cdot 10^{9}\ [\text{N}\cdot\text{m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{2,00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0,866\ [\text{m}])^{2}}(-\vec{\mathbf{j}})=-2,40\cdot 10^{4}\vec{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto D es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\boldsymbol{E}}_{DA} + \overline{\boldsymbol{E}}_{DB} + \overline{\boldsymbol{E}}_{DC} = 7,20\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}}\ [\text{N/C}] + (-7,20\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}}\ [\text{N/C}]) + (-2,40\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}}\ [\text{N/C}]) = -2,40\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A(0, 0), B(1, 0), C(0,5, 0,9) y F(0,5, 0,3). Se dibujan los vectores del campo en el punto F, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Los tres campos valen lo mismo, porque las cargas y las distancias son iguales. Son simétricos y su resultante es nula.



$$\overline{\boldsymbol{E}}_O = \overline{\mathbf{0}}$$

A continuación, se van a realizar los cálculos, aunque no es necesario.
Las distancias de los puntos A, B y C al punto F valen todas lo mismo:

$$r_{BF}=r_{AF}=\sqrt{(0,500\ [\text{m}])^{2}+(0,289\ [\text{m}])^{2}}=0,577\ \text{m}$$
$$r_{CF}=\sqrt{(0,500\ [\text{m}]-0,500\ [\text{m}])^{2}+(0,289\ [\text{m}]-0,866\ [\text{m}])^{2}}=0,577\ \text{m}$$

Los módulos de los vectores del campo creados en F por las cargas iguales situadas en los puntos A, B y C, son iguales.
Se calcula el vector unitario del punto F, tomando como origen el punto A:

$$\vec{u}_{AF}=\frac{\vec{r}_{AF}}{|\vec{r}_{AF}|}=\frac{(0,500\,\vec{\mathbf{i}}+0,289\,\vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{0,577\ [\text{m}]}=0,866\,\vec{\mathbf{i}}+0,500\,\vec{\mathbf{j}}$$

Se calcula el campo en el punto F, creado por la carga de 2 μC, situada en el punto A:

$$\vec{E}_{FA}=9,00\cdot 10^{9}\ [\text{N}\cdot\text{m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{2,00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0,577\ [\text{m}])^{2}}(0,866\,\vec{\mathbf{i}}+0,500\,\vec{\mathbf{j}})=(4,68\cdot 10^{4}\,\vec{\mathbf{i}}+2,70\cdot 10^{4}\,\vec{\mathbf{i}})\ \text{N/C}$$

El campo en el punto F, creado por la carga de 2 μC, situada en el punto B, es simétrico al del punto A. Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente horizontal es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{FB} = -4,68\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 2,70\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

El vector unitario del punto F, tomando como origen el punto C, es -$\overline{\mathbf{j}}$, el vector unitario del eje *Y* en sentido negativo.
Se calcula el campo en el punto F, creado por la carga de 2 μC, situada en el punto C:

$$\vec{E}_{FC}=9,00\cdot 10^{9}\ [\text{N}\cdot\text{m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]\cdot\frac{2,00\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0,577\ [\text{m}])^{2}}(-\vec{\mathbf{j}})=-5,40\cdot 10^{4}\vec{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto F es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_F = \overline{\boldsymbol{E}}_{FA} + \overline{\boldsymbol{E}}_{FB} + \overline{\boldsymbol{E}}_{FC} = (4,68\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 2,70\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}}) + (-4,68\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 2,70\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}}) - 5,40\cdot 10^4\ \overline{\mathbf{j}} = \overline{\mathbf{0}}$$

El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V=\frac{E_p}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A\rightarrow B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = q \cdot V_A - q \cdot V_B = q\,(V_A - V_B)$$

El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
b) Se calculan los potenciales en el punto D, debidos a las cargas situadas en los puntos A, B y C:

$$V_{DA}=V_{DB}=9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}500\ [\mathrm{m}])}=3{,}60\cdot 10^4\ \mathrm{V}$$

$$V_{DC}=9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}866\ [\mathrm{m}])}=2{,}08\cdot 10^4\ \mathrm{V}$$

El potencial eléctrico en el punto D es la suma de los potenciales de cada una de las cargas en ese punto:

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} + V_{DC} = 3{,}60\cdot 10^4\ [\mathrm{V}] + 3{,}60\cdot 10^4\ [\mathrm{V}] + 2{,}08\cdot 10^4\ [\mathrm{V}] = 9{,}28\cdot 10^4\ \mathrm{V}$$

Los potenciales eléctricos en el punto F, debidos a las cargas situadas en los puntos A, B y C, son iguales, porque tanto las cargas como las distancias son iguales. El potencial eléctrico en el punto F, que es la suma, vale el triple que el potencial de una carga.

$$V_F=V_{FA}+V_{FB}+V_{FC}=3\cdot V_{FA}=3\cdot 9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}577\ [\mathrm{m}])} = 3\cdot 3{,}12\cdot 10^4\ [\mathrm{V}] = 9{,}35\cdot 10^4\ \mathrm{V}$$

Se calcula el trabajo que hace la fuerza del campo:

$$W_{D\rightarrow F} = q\,(V_D - V_F) = 1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot(9{,}28\cdot 10^4 - 9{,}35\cdot 10^4)\ [\mathrm{V}] = -7\cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

Análisis: Al restar dos valores tan próximos, se pierden cifras significativas.

Suponiendo que llega con la misma velocidad con la que sale, el trabajo de la fuerza resultante, igual a la variación de energía cinética, será nulo:

$$W(\text{resultante}) = W(\text{campo}) + W(\text{exterior}) = \Delta E_c = 0$$

El trabajo que hay que hacer es el opuesto al de la fuerza del campo.

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 7\cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

c) En un campo conservativo, el trabajo de las fuerzas del campo es igual y de sentido contrario a la variación de la energía potencial.

$$W_{A\rightarrow B} = -\Delta E_p = q\,(V_A - V_B)$$

Como el trabajo de la fuerza del campo eléctrico es negativo, la energía potencial del sistema aumenta.

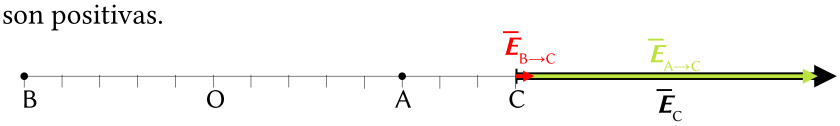
12. Dos cargas puntuales iguales q = 1 µC están situadas en los puntos A(5, 0) y B(−5, 0). Calcula:
    a) El campo eléctrico en los puntos C(8, 0) y D (0, 4)
    b) La energía para trasladar una carga de −1 µC desde C a D.
    Datos: 1 µC = 10^{-6} C, $K = 9\cdot 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$. Las coordenadas en metros. *(P.A.U. sep. 06)*
    Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1{,}05\cdot 10^3\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_D = 2{,}74\cdot 10^2\ \overline{\mathbf{j}}$ N/C; b) $\Delta E = 8{,}81\cdot 10^{-4}$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	Q_A = 1,00 µC = $1{,}00\cdot 10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	Q_B = 1,00 µC = $1{,}00\cdot 10^{-6}$ C
Posición del punto A	$\boldsymbol{r}_A$ = (5,00, 0,00) m
Posición del punto B	$\boldsymbol{r}_B$ = (−5,00, 0,00) m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Posición del punto C	$\overline{r}_C = (8{,}00,\ 0{,}00)$ m
Posición del punto D	$\overline{r}_D = (0{,}00,\ 4{,}00)$ m
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00 \cdot 10^9\ N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$
Incógnitas	
Campo eléctrico en los puntos C y D	$\overline{E}_C$, $\overline{E}_D$
Energía para llevar una carga de −1 µC desde C hasta D	$W_{C \to D}$
Otros símbolos	
Distancia	r
Ecuaciones	
Campo eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$\vec{E} = K \dfrac{Q}{r^2} \vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{A\,i}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$V = K \dfrac{Q}{r}$
Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial eléctrica de una carga, q, situada en un punto A	$E_{pA} = q \cdot V_A$

Solución:

a) Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A(5, 0), B(−5, 0) y C(8, 0). Se dibujan los vectores del campo en el punto C(8, 0), un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.



El campo creado por la carga situada en el punto B, es mucho menor que el creado por la carga situada en el punto A, porque está mucho más lejos.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\overline{E}_C$.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas por una distancia, r, viene dada por la ley de Coulomb, en la que K es la constante de Coulomb y $\overline{u}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = \frac{K \dfrac{Q \cdot \cancel{q}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{q}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

La distancia del punto A al punto C es: $r_{AC} = |(8{,}00,\ 0)\ [m] - (5{,}00,\ 0)\ [m]| = 3{,}00$ m
El vector unitario del punto C, tomando como origen el punto A, es $\overline{\mathbf{i}}$, el vector unitario del eje X.
Se calcula el campo en el punto C, creado por la carga de 1 µC situada en el punto A:

$$\vec{E}_{CA} = 9 \cdot 10^9\ [N \cdot m^2 \cdot C^{-2}] \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [C]}{(3{,}00\ [m])^2} \vec{\mathbf{i}} = 1{,}00 \cdot 10^3\ \vec{\mathbf{i}}\ N/C$$

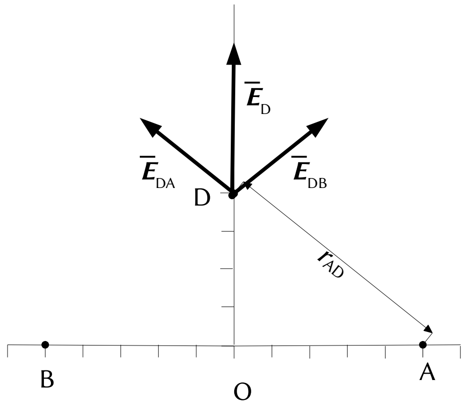
La distancia del punto B al punto C es: $r_{BC} = |(8{,}00,\ 0)\ [m] - (-5{,}00,\ 0)\ [m]| = 13{,}00$ m
El vector unitario del punto C, tomando como origen el punto B, es $\overline{\mathbf{i}}$, el vector unitario del eje X.
Se calcula el campo en el punto C, creado por la carga de 1 µC situada en el punto B:

$$\vec{E}_{CB} = 9 \cdot 10^9\ [N \cdot m^2 \cdot C^{-2}] \frac{1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [C]}{(13{,}0\ [m])^2} \vec{\mathbf{i}} = 53{,}3\ \vec{\mathbf{i}}\ N/C$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto C es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{CA} + \overline{\boldsymbol{E}}_{CB} = 1{,}00·10^3\ \bar{\mathbf{i}}\ [N/C] + 53{,}3\ \bar{\mathbf{i}}\ [N/C] = 1{,}05·10^3\ \bar{\mathbf{i}}\ N/C$$

Análisis: Coincide con el dibujo. El campo resultante del cálculo va en el sentido positivo del eje X.



Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A(5, 0), B(−5, 0) y D(0, 4). Se dibujan los vectores del campo en el punto D, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de repulsión, porque las cargas son positivas.
Como sus valores son iguales, porque las cargas y las distancias son las mismas, los vectores serán de la misma medida.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\overline{\boldsymbol{E}}_D$.
Las componentes horizontales de los campos creados por las cargas se anulan y la resultante irá en el sentido positivo del eje *Y*. El valor de la resultante será la suma de las componentes verticales de cada campo, y, como son dos, el vector campo resultante medirá el doble de la componente vertical de uno de ellos.
Se calcula la distancia de punto A al punto D:

$$r_{AD}=\sqrt{(5{,}00\ [m])^2+(4{,}00\ [m])^2}=6{,}40\ m$$

Se calcula el vector unitario del punto D, tomando como origen el punto A:

$$\vec{u}_{AD}=\frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|}=\frac{(-5{,}00\,\vec{\mathbf{i}}+4{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\ [m]}{\sqrt{(-5{,}00\ [m])^2+(4{,}00\ [m])^2}}=-0{,}781\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}625\,\vec{\mathbf{j}}$$

Se calcula el campo en el punto D, creado por la carga de 1 µC situada en el punto A:

$$\vec{E}_{DA}=9{,}00\cdot 10^9\ [N·m^2\cdot C^{-2}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [C]}{(6{,}40\ [m])^2}(-0{,}781\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}625\,\vec{\mathbf{j}})=(-1{,}71\cdot 10^2\,\vec{\mathbf{i}}+1{,}37\ 10^2\,\vec{\mathbf{j}})\ N/C$$

El campo en el punto D, creado por la carga de 1 µC situada en el punto B, es simétrico al del punto A. Los valores de sus componentes son iguales, pero el signo de la componente horizontal es opuesto, porque se dirige en sentido contrario:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{DB} = (1{,}71·10^2\ \bar{\mathbf{i}} + 1{,}37·10^2\ \bar{\mathbf{j}})\ N/C$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto D es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\boldsymbol{E}}_{DA} + \overline{\boldsymbol{E}}_{DB} = (-1{,}71·10^2\ \bar{\mathbf{i}} + 1{,}37·10^2\ \bar{\mathbf{j}})\ [N/C] + (1{,}71·10^2\ \bar{\mathbf{i}} + 1{,}37·10^2\ \bar{\mathbf{j}})\ [N/C] = 2{,}74·10^2\ \bar{\mathbf{j}}\ N/C$$

Análisis: Coincide con el dibujo. El campo resultante del cálculo va en el sentido positivo del eje Y.

El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V=\frac{E_p}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = q \cdot V_A - q \cdot V_B = q\ (V_A - V_B)$$

El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.

Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
b) Se calculan los potenciales en el punto C, debidos a las cargas situadas en los puntos A y B:

$$V_{CA}=9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(3{,}00\ [\mathrm{m}])}=3{,}00\cdot 10^3\ \mathrm{V}$$

$$V_{CB}=9{,}00\cdot 10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(13{,}00\ [\mathrm{m}])}=6{,}92\cdot 10^2\ \mathrm{V}$$

El potencial eléctrico en el punto C es la suma de los potenciales de cada una de las cargas en ese punto:

$$V_C = V_{CA} + V_{CB} = 3{,}00\cdot10^3\ [\mathrm{V}] + 6{,}92\cdot10^2\ [\mathrm{V}] = 3{,}69\cdot10^3\ \mathrm{V}$$

Los potenciales eléctricos en el punto D, debidos a las cargas situadas en los puntos A y B, son iguales, porque tanto las cargas como las distancias son iguales. El potencial eléctrico en el punto D, que es la suma, vale el doble que el potencial de una carga.

$$V_D=V_{DA}+V_{DB}=2\cdot V_{DA}=2\cdot 9{,}00\cdot 10^9[\mathrm{N\ m^2C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}[\mathrm{C}]}{(6{,}40[\mathrm{m}])} = 2\cdot 1{,}41\cdot10^3\ [\mathrm{V}] = 2{,}81\cdot10^3\ \mathrm{V}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo al trasladar una carga de −1 µC desde el punto C hasta el punto D es:

$$W_{C\to D} = q\,(V_C - V_D) = -1{,}00\cdot10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot(3{,}69\cdot10^3 - 2{,}81\cdot10^3)\ [\mathrm{V}] = -8{,}81\cdot10^{-4}\ \mathrm{J}$$

Suponiendo que llega con la misma velocidad con la que sale, el trabajo de la fuerza resultante, igual a la variación de energía cinética, será nulo:

$$W(\text{resultante}) = W(\text{campo}) + W(\text{exterior}) = \Delta E_c = 0$$

El trabajo que hay que hacer es el opuesto al de la fuerza del campo.

$$W(\text{resultante}) = 0 - W(\text{campo}) = 8{,}81\cdot10^{-4}\ \mathrm{J}$$

13. Dos cargas puntuales negativas iguales, de -10^{-3} µC, se encuentran sobre el eje de abscisas, separadas una distancia de 20 cm. A una distancia de 50 cm sobre la vertical que pasa por el punto medio de la línea que las une, se coloca una tercera partícula (puntual) de $+10^{-3}$ µC de carga y 1 g de masa, inicialmente en reposo. Calcula:
    a) El campo y potencial eléctrico creado por las dos primeras en la posición inicial de la tercera.
    b) La velocidad de la tercera carga al llegar al punto medio de la línea que une las dos primeras.
    Datos: 1 µC = 10^{-6} C; $K = 9\cdot10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}$. Solo se usa la interacción electrostática. *(P.A.U. jun. 04)*
    Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}$ = 67,9 N/C vertical hacia el eje de abscisas. V = −35,3 V; b) $\overline{\boldsymbol{v}} = -0{,}017\ \overline{\mathbf{j}}$ m/s.

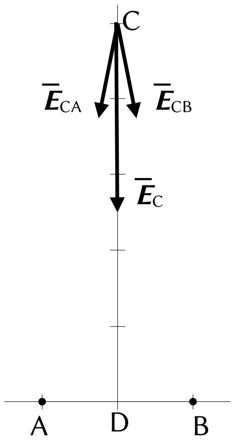
Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A	$Q_A = -1\cdot10^{-3}$ µC $= -1{,}00\cdot10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto B	$Q_B = -1\cdot10^{-3}$ µC $= -1{,}00\cdot10^{-9}$ C
Valor de la carga situada en el punto C	$Q_C = 1{,}00\cdot10^{-3}$ µC $= 1{,}00\cdot10^{-9}$ C
Masa de la partícula que se desplaza	m = 1,00 g = $1{,}00\cdot10^{-3}$ kg
Velocidad inicial en el punto C	$v_C = 0$
Distancia entre las dos cargas	r_{AB} = 20,0 cm = 0,200 m
Distancia de la tercera carga al punto medio entre A y B	r_C = 50,0 cm = 0,500 m
Distancia del punto medio de las cargas a uno de ellos	r_{DA} = 10,0 cm = 0,100 m
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00\cdot10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}$
Incógnitas	
Campo eléctrico en el punto C	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$
Potencial eléctrico en el punto C	V_C

Velocidad que tendrá al pasar por el punto D	v_D

Ecuaciones

Campo eléctrico en un punto a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A=\sum\vec{E}_{A\,i}$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial eléctrico en un punto debido a varias cargas	$V=\sum V_i$
Energía potencial eléctrica de una carga, *q*, situada en un punto A	$E_{pA}=q\cdot V_A$
Energía cinética de una masa, *m*, que se mueve con una velocidad, *v*	$E_c=½\,m\cdot v^2$
Principio de la conservación de la energía entre dos puntos A y B	$(E_c+E_p)_A=(E_c+E_p)_B$

Solución:



a) Se hace un esquema en el que se sitúan los puntos A, B y C. De los datos se pueden deducir sus coordenadas, aunque los puntos A y B son intercambiables: A(−0,1, 0), B(0,1, 0) y C(0, 0,5).
Se dibujan los vectores del campo en el punto C, un vector por cada carga, prestando atención al sentido, que es de atracción, porque las cargas son negativas.
Como sus valores son iguales, porque las cargas y las distancias son las mismas, los vectores serán de la misma medida.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\vec{E}_C$.
Las componentes horizontales de los campos creados por las cargas se anulan y la resultante irá en el sentido negativo del eje *Y*. El valor de la resultante será la suma de las componentes verticales de cada campo, y, como son dos, el vector campo resultante medirá el doble de la componente vertical de uno de ellos.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, *Q* y *q*, separadas por una distancia, *r*, viene dada por la ley de Coulomb, en la que *K* es la constante de Coulomb y $\vec{u}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E=K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, *r*, de una carga puntual, *Q*, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}_E}{q}=\frac{K\frac{Q\cdot \cancel{q}}{r^2}\vec{u}_r}{\cancel{q}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

Se calcula la distancia del punto A al punto C:

$$r_{AC}=\sqrt{(0{,}100\ [\mathrm{m}])^2+(0{,}500\ [\mathrm{m}])^2}=0{,}510\ \mathrm{m}$$

Se calcula el vector unitario del punto C, tomando como origen el punto A:

$$\vec{u}_{AC}=\frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|}=\frac{(0{,}100\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}500\,\vec{\mathbf{j}})\ [\mathrm{m}]}{0{,}510\ [\mathrm{m}]}=0{,}196\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}981\,\vec{\mathbf{j}}$$

Se calcula el campo en el punto C, creado por la carga de −1 nC situada en el punto A:

$$\vec{E}_{CA}=9{,}00\cdot10^9\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{-1{,}00\cdot10^{-9}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}510\ [\mathrm{m}])^2}(0{,}196\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}981\,\vec{\mathbf{j}})=(-6{,}79\,\vec{\mathbf{i}}-33{,}9\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

El campo en el punto C, creado por la carga de −1 nC situada en el punto B, es simétrico al del punto A. Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente horizontal es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{CB} = (6{,}79\ \bar{\mathbf{i}} - 33{,}9\ \bar{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto C es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada carga.

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{CA} + \overline{\boldsymbol{E}}_{CB} = (-6{,}79\ \bar{\mathbf{i}} - 33{,}9\ \bar{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] + (6{,}79\ \bar{\mathbf{i}} - 33{,}9\ \bar{\mathbf{j}})\ [\text{N/C}] = -67{,}9\ \bar{\mathbf{j}}\ \text{N/C}$$

Análisis: Coincide con el dibujo. El campo resultante del cálculo va en el sentido negativo del eje Y.

El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V = K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
Los potenciales eléctricos en el punto C, debidos a las cargas situadas en los puntos A y B, son iguales, porque tanto las cargas como las distancias son iguales. El potencial eléctrico en el punto C, que es la suma, vale el doble que el potencial de una carga.

$$V_C = V_{CA} + V_{CB} = 2 \cdot V_{CA} = 2 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{-1{,}00 \cdot 10^{-9}\ [\text{C}]}{(0{,}510\ [\text{m}])} = -35{,}3\ \text{V}$$

b) Como la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, y es la única que hay que tener en cuenta, porque es mucho más intensa que la gravitatoria, la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$
$$\tfrac{1}{2}\ m\ v^2_C + q \cdot V_C = \tfrac{1}{2}\ m\ v^2_D + q \cdot V_D$$

Se calcula el potencial eléctrico en el punto D de forma análoga al del punto C:

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} = 2 \cdot V_{DA} = 2 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{C}^{-2}] \frac{-1{,}00 \cdot 10^{-9}\ [\text{C}]}{(0{,}100\ [\text{m}])} = -180\ \text{V}$$

Se escribe la ecuación de conservación de la energía:

$$1{,}00 \cdot 10^{-9}\ [\text{C}] \cdot (-35{,}3\ [\text{V}]) = \tfrac{1}{2}\ 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ [\text{kg}] \cdot v^2_D + 1{,}00 \cdot 10^{-9}\ [\text{C}] \cdot (-180\ [\text{V}])$$

Se despeja la velocidad:

$$v_D = \sqrt{\frac{2(180 - 35{,}3)\ [\text{V}] \cdot 10^{-9}\ [\text{C}]}{1{,}00 \cdot 10^{-3}\ [\text{kg}]}} = 0{,}017\ \text{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, hay que determinar la dirección y el sentido.
Se puede deducir que la aceleración tiene la dirección del eje Y en sentido negativo, porque la carga es positiva y la aceleración seguirá la dirección y el sentido del campo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la misma línea que la aceleración.

$$\overline{\boldsymbol{v}}_D = -0{,}017\ \bar{\mathbf{j}}\ \text{m/s}$$

● Campo e potencial

1. Dos láminas conductoras con igual carga y signo contrario están colocadas horizontalmente y separadas 5 cm. La intensidad del campo eléctrico en su interior es $2{,}5 \cdot 10^5$ N·C⁻¹. Una microgota de aceite cuya masa es $4{,}90 \cdot 10^{-14}$ kg, y con carga negativa, está en equilibrio, suspendida en un punto equidistante de ambas placas.
   a) Razona cuál de las dos láminas está cargada positivamente.
   b) Determina la carga de la microgota.
   c) Calcula la diferencia de potencial entre las láminas conductoras.
   Dato: g = 9,8 m·s⁻². *(P.A.U. sep. 15)*

Rta.: b) $q = 1{,}92·10^{-18}$ C; c) $\Delta V = 1{,}25·10^4$ V.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Intensidad del campo eléctrico	$\lvert\overline{\boldsymbol{E}}\rvert = 2{,}50·10^5$ N/C
Distancia entre las láminas conductoras	$d = 5{,}00$ cm $= 0{,}0500$ m
Masa de la microgota	$m = 4{,}90·10^{-14}$ kg
Valor del campo gravitatorio terrestre	$g = 9{,}80$ m/s²
Incógnitas	
Carga de la microgota	q
Diferencia de potencial entre las láminas conductoras	ΔV
Ecuaciones	
Fuerza sobre una carga puntual q en un campo electrostático uniforme $\overline{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q · \overline{\boldsymbol{E}}$
Valor de la fuerza peso	$P = m · g$
Diferencia de potencial en un campo eléctrico constante	$\Delta V = \lvert\overline{\boldsymbol{E}}\rvert · d$

Solución:

a, b) Peso:

$$P = m · g = 4{,}90·10^{-14}\ [\text{kg}] · 9{,}80\ [\text{m·s}^{-2}] = 4{,}80·10^{-13}\ \text{N}$$

Cuando la microgota alcanza el equilibrio, la fuerza eléctrica equilibra a la fuerza peso.

$$F_E = q · E = 4{,}80·10^{-13}\ \text{N}$$

Carga eléctrica:

$$q=\frac{F_E}{E}=\frac{4{,}80·10^{-13}\ [\text{N/C}]}{2{,}5·10^5\ [\text{N}]}=1{,}92·10^{-18}\ \text{C}$$

Análisis: La carga eléctrica de la microgota es solo ligeramente mayor que la del electrón. Corresponde a la de $1{,}92·10^{-18}$ C / $1{,}6·10^{-19}$ C = 12 *electrones. Este resultado parece razonable.*
La fuerza eléctrica está dirigida hacia arriba, en sentido contrario al peso. Como la carga de la microgota es negativa, el campo eléctrico debe estar dirigido hacia abajo: la lámina superior es la positiva y la inferior la negativa.

c) La diferencia de potencial vale:

$$\Delta V = \lvert\overline{\boldsymbol{E}}\rvert · d = 2{,}50·10^5\ [\text{N/C}] · 0{,}0500\ [\text{m}] = 1{,}25·10^4\ \text{V}$$

2. Una carga puntual Q ocupa la posición (0, 0) del plano XY en el vacío. En un punto A del eje X el potencial es $V = -100$ V y el campo eléctrico es $\overline{\boldsymbol{E}} = -10\ \bar{\mathbf{i}}$ N/C (coordenadas en metros):
   a) Calcula la posición del punto A y el valor de Q.
   b) Determina el trabajo necesario para llevar un protón desde el punto B(2, 2) hasta el punto A.
   c) Haz una representación gráfica aproximada de la energía potencial del sistema en función de la distancia entre ambas cargas. Justifica la respuesta.
   Datos: Carga del protón: $1{,}6·10^{-19}$ C; $K = 9·10^9$ N·m²·C⁻². *(P.A.U. sep. 11)*
   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{r}}_A = (10{,}0,\ 0)$ m; $Q = -1{,}11·10^{-7}$ C; b) $W = -4{,}05·10^{-17}$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Posición de la carga Q	$\overline{\boldsymbol{r}}_O = (0,\ 0)$ m
Potencial eléctrico en el punto A	$V_A = -100$ V
Campo eléctrico en el punto A	$\overline{\boldsymbol{E}} = -10{,}0\ \bar{\mathbf{i}}$ N/C
Posición del punto B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (2{,}000,\ 2{,}000)$ m
Carga del protón	$q_p = 1{,}60·10^{-19}$ C
Constante de Coulomb	$K = 9{,}00·10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Posición del punto A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A$
Valor de la carga Q	Q
Trabajo necesario para llevar un protón del punto B al punto A	$W_{B→A}$

Incógnitas

Posición del punto A	$\bar{r}_A$
Valor de la carga Q	Q
Trabajo necesario para llevar un protón del punto B al punto A	$W_{B\to A}$

Ecuaciones

Campo eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial eléctrico en un punto a una distancia, r, de una carga puntual, Q	$V=K\frac{Q}{r}$
Trabajo de la fuerza eléctrica al mover una carga del punto A al punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$
Energía potencial eléctrica de una interacción entre dos cargas, Q y q, situadas a una distancia, r, una de la otra.	$E_p=q\cdot V=K\frac{Q\cdot q}{r}$

Solución:

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas por una distancia, r, viene dada por la ley de Coulomb, en la que K es la constante de Coulomb y $\bar{u}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{F}_E=K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}_E}{q}=\frac{K\frac{Q\cdot \cancel{q}}{r^2}\vec{u}_r}{\cancel{q}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

a) Se sustituyen los datos en la ecuación del campo eléctrico:

$$-10{,}0\,\vec{\mathbf{i}}\ [\text{N/C}]=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

Tomando solo el módulo, queda:

$$10{,}0\ [\text{N/C}]=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{|Q|}{r^2}$$

La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
También se sustituye en la ecuación de potencial eléctrico:

$$-100\ [\text{V}]=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{Q}{r}$$

Como en la ecuación del campo eléctrico aparece el valor absoluto de la carga, $|Q|$, se usa la ecuación del potencial en valores absolutos:

$$100\ [\text{V}]=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{|Q|}{r}$$

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases}10{,}0=9{,}00\cdot 10^9\dfrac{|Q|}{r^2}\\[2ex]100=9{,}00\cdot 10^9\dfrac{|Q|}{r}\end{cases}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera se obtiene:

$$\frac{100}{10{,}0}=\frac{\frac{\cancel{9{,}00\cdot 10^{9}|Q|}}{r}}{\frac{\cancel{9{,}00\cdot 10^{9}|Q|}}{r^{2}}}=r$$

$$r = 10{,}0 \text{ m}$$

Despejando el valor absoluto de la carga $|Q|$ de la segunda ecuación:

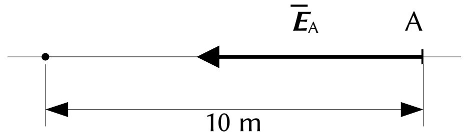
$$|Q|=\frac{100\ [\text{V}]\cdot r}{9{,}00\cdot 10^{9}\ [\text{N·m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]}=\frac{100\ [\text{V}]\cdot 10{,}0\ [\text{m}]}{9{,}00\cdot 10^{9}\ [\text{N·m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]} = 1{,}11\cdot 10^{-7}\ \text{C}$$

El potencial es negativo, por lo tanto, la carga debe ser negativa:

$$Q = -1{,}11\cdot 10^{-7}\ \text{C} = -11{,}1\ \mu\text{C}$$

Como el campo en el punto A va en sentido negativo del eje X, $\overline{\boldsymbol{E}}_{\text{A}} = -10{,}0\ \bar{\mathbf{i}}$ (N/C), el punto tiene que estar en el semieje positivo:

$$\overline{\boldsymbol{r}}_{\text{A}} = (10{,}0,\ 0)\ \text{m}$$



El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_{p}, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_{\text{p}}$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V=\frac{E_{\text{p}}}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{\text{A}\to\text{B}} = -\Delta E_{\text{p}} = -(E_{\text{pB}} - E_{\text{pA}}) = (E_{\text{pA}} - E_{\text{pB}}) = q\cdot V_{\text{A}} - q\cdot V_{\text{B}} = q\,(V_{\text{A}} - V_{\text{B}})$$

b) Para calcular el potencial del punto B, hay que calcular primero la distancia del punto B a la carga Q:

$$r_{\text{OB}}=\sqrt{(2{,}00\ [\text{m}])^{2}+(2{,}00\ [\text{m}])^{2}}=2{,}83\ \text{m}$$

Se calcula el potencial eléctrico en el punto B:

$$V_{\text{B}}=9{,}00\cdot 10^{9}\ [\text{N·m}^{2}\cdot\text{C}^{-2}]\frac{|-1{,}11\cdot 10^{-7}\ [\text{C}]|}{2{,}83\ [\text{m}]}=-353\ \text{V}$$

Se calcula el trabajo que hace la fuerza del campo:

$$W_{\text{A}\to\text{B}} = q\,(V_{\text{A}} - V_{\text{B}}) = 1{,}60\cdot 10^{-19}\ [\text{C}]\cdot(-353 - (-100))\ [\text{V}] = -4{,}05\cdot 10^{-17}\ \text{J}$$

Suponiendo que llega con la misma velocidad con la que sale, el trabajo de la fuerza resultante, igual a la variación de energía cinética, será nulo:

$$W(\text{resultante}) = W(\text{campo}) + W(\text{exterior}) = \Delta E_{\text{c}} = 0$$

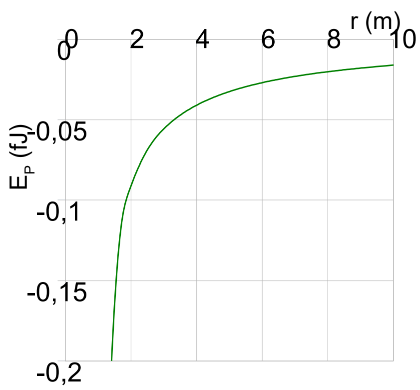
El trabajo que hay que hacer es el opuesto al de la fuerza del campo.

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 4{,}05\cdot 10^{-17}\ \text{J}$$

c) La energía potencial de una interacción entre dos cargas viene dada por la expresión:

$$E_{\text{p}}=q\cdot V=K\frac{Q\cdot q}{r}$$

Es inversamente proporcional a la distancia entre ambas cargas.



Como las cargas son de signo opuesto, la energía potencial es negativa y aumenta con la distancia, llegando a cero a una distancia infinita.
La gráfica de la energía potencial del sistema en función de la distancia entre ambas cargas se muestra a la derecha.

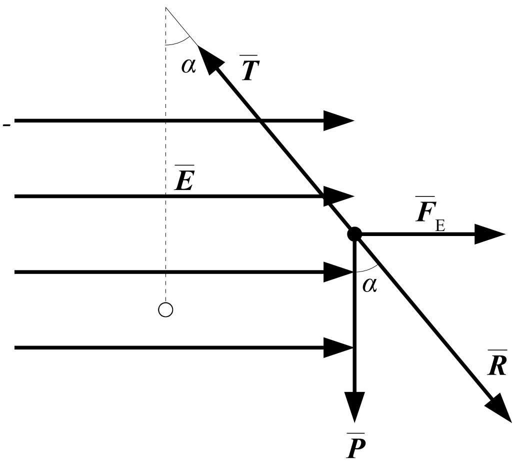
● Péndulo eléctrico

1. Una esfera metálica de masa m = 8 g y carga q = 7 μC, cuelga de un hilo de 10 cm de longitud situado entre dos láminas metálicas paralelas de cargas iguales y de signo contrario. Calcula:
   a) El ángulo que forma el hilo con la vertical si entre las láminas existe un campo electrostático uniforme de $2{,}5 \cdot 10^3$ N/C.
   b) La tensión del hilo en ese momento.
   c) Si las láminas se descargan, ¿cuál será la velocidad de la esfera al pasar por la vertical?
   Dato: g = 9,8 m/s². *(P.A.U. jun. 14)*
   Rta.: a) α = 12,6°; b) T = 0,0802 N; c) v = 0,217 m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de la esfera	m = 8,00 g = $8{,}00 \cdot 10^{-3}$ kg
Carga de la esfera	q = 7,00 μC = $7{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Longitud del hilo	L = 10,0 cm = 0,100 m
Valor del campo eléctrico	$E = 2{,}50 \cdot 10^3$ N/C
Valor del campo gravitatorio terrestre	g = 9,80 m/s²
Incógnitas	
Ángulo que forma el hilo con la vertical	α
Tensión del hilo	T
Velocidad de la esfera al pasar por la vertical	v
Ecuaciones	
Fuerza sobre una carga puntual q en un campo electrostático uniforme $\overline{\boldsymbol{E}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q \cdot \overline{\boldsymbol{E}}$
Valor de la fuerza peso	$P = m \cdot g$
Energía potencial de la fuerza peso	$E_p = m \cdot g \cdot h$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$

Solución:

a) En el enunciado no se especifica ni la dirección ni el sentido del campo electrostático uniforme.
Si fuera horizontal, el esquema con las fuerzas sería el siguiente:
Cuando la esfera alcanza el equilibrio, la tensión equilibra a la resultante de las fuerzas peso y eléctrica. Estas valen:



Peso:

$$P = m \cdot g = 8{,}00 \cdot 10^{-3}\ [\text{kg}] \cdot 9{,}80\ [\text{m·s}^{-2}] = 0{,}0784\ \text{N}$$

Fuerza eléctrica:

$$F_E = q \cdot E = 7{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\text{C}] \cdot 2{,}50 \cdot 10^3\ [\text{N/C}] = 0{,}0175\ \text{N}$$

Como son perpendiculares, la fuerza resultante vale:

$$|\vec{\boldsymbol{R}}| = \sqrt{(0{,}078\ 4\ [\text{N}])^2 + (0{,}017\ 5\ [\text{N}])^2} = 0{,}080\ 2\ \text{N}$$

El ángulo entre la resultante y la vertical mide

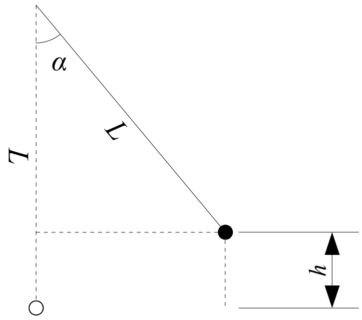
$$\alpha = \arccos \frac{P}{R} = \arccos \frac{0{,}078\ 4}{0{,}080\ 2} = 12{,}6°$$

b) El valor de la tensión es el mismo que el de la fuerza resultante:

$$T = R = 0{,}0802\ \text{N}$$

c) Al descargarse las láminas solo actúa la fuerza peso, que es una fuerza conservativa. La energía mecánica se conserva entra la posición inicial y el punto más bajo de la trayectoria.

La altura del punto de equilibrio respecto al punto más bajo puede calcularse del triángulo:



$$h = L - L \cos \alpha = L\,(1 - \cos \alpha) = 0{,}100\ [\text{m}]\ (1 - \cos 12{,}6°) = 0{,}00240\ \text{m}$$

La energía potencial del peso en el punto de partida es:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 8{,}00·10^{-3}\ [\text{kg}] \cdot 9{,}80\ [\text{m·s}^{-2}] \cdot 0{,}00240\ [\text{m}] = 1{,}88·10^{-4}\ \text{J}$$

Como la energía cinética es nula en ese punto, la energía mecánica valdrá lo mismo.

$$E = E_p = 1{,}88·10^{-4}\ \text{J}$$

En el punto más bajo la energía mecánica es la misma, y como no hay energía potencial, ese será el valor de la energía cinética. Por lo tanto, la velocidad valdrá:

$$v=\sqrt{\frac{2E_c}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}88\cdot 10^{-4}[\text{J}]}{9{,}00\cdot 10^{-3}[\text{kg}]}}=0{,}217\ \text{m/s}$$

También podría suponerse que el campo eléctrico fuera vertical. En cuyo caso el hilo no se desviaría de la vertical. De estar dirigido hacia arriba, la fuerza eléctrica (0,0175 N), no compensaría la fuerza peso (0,0784 N) y la esfera no se movería, pero la tensión variaría de los 0,0784 N con las placas descargadas a 0,0609 N cuando las placas estén cargadas.

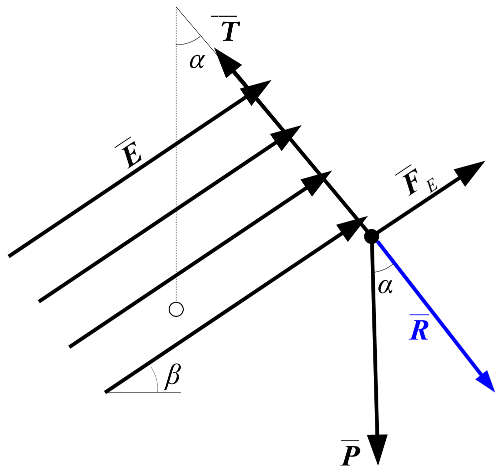
$$T = 0{,}0784\ \text{N} - 0{,}0175\ \text{N} = 0{,}0609\ \text{N}$$

Si el campo fuera vertical, pero hacia abajo, la esfera tampoco se movería, y la tensión valdría

$$T = 0{,}0784\ \text{N} + 0{,}0175\ \text{N} = 0{,}0959\ \text{N}$$

Por imaginar, podría imaginarse que las placas estuvieran colocadas de tal modo que el campo eléctrico formara un ángulo β cualquiera con la horizontal.

En un plano XY, la fuerza eléctrica podría expresarse cómo:



$$\overline{\boldsymbol{F}}_E = 0{,}0175\ (\cos \beta\ \bar{\mathbf{i}} + \text{sen}\ \beta\ \bar{\mathbf{j}})\ \text{N}$$

La fuerza resultante $\overline{R}$ sería la suma vectorial de esta fuerza eléctrica y la fuerza peso:

$$\overline{\boldsymbol{P}} = -0{,}0784\ \bar{\mathbf{j}}\ \text{N}$$

$$\overline{R} = \overline{\boldsymbol{F}}_E + \overline{\boldsymbol{P}} = 0{,}0175 \cos \beta\ \bar{\mathbf{i}} + (0{,}0175\ \text{sen}\ \beta - 0{,}0784)\ \bar{\mathbf{j}}\ \text{N}$$

$$|\vec{\boldsymbol{R}}|=\sqrt{(0{,}0175\ \text{sen}\ \beta-0{,}0784)^2[\text{N}]^2+(0{,}0175 \cos \beta\,[\text{N}])^2}$$

$$|\vec{\boldsymbol{R}}|=\sqrt{(0{,}0175\,[\text{N}])^2\ \text{sen}(2\beta)+(0{,}0784\,[\text{N}])^2+(0{,}0175\,[\text{N}])^2}=\sqrt{3{,}06\cdot 10^{-4}\ \text{sen}(2\beta)\,[N]^2+6{,}45\cdot 10^{-3}\,[\text{N}]^2}$$

El ángulo entre la resultante y la vertical mediría

$$\alpha=\arccos\frac{P}{R}=\arccos\frac{0{,}0784}{\sqrt{3{,}06\cdot 10^{-4}\ \text{sen}(2\beta)+6{,}45\cdot 10^{-3}}}$$

Por ejemplo, si β = 30°, el ángulo α = 17,0°

◊ CUESTIONES

● Esferas

1. Un conductor macizo en forma de esfera recibe una carga eléctrica ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?:
A) El potencial electrostático es el mismo en todos los puntos del conductor.
B) La carga se distribuye por todo el conductor.
C) En el interior del conductor el campo electrostático varía linealmente, aumentando al acercarnos a la superficie del conductor.

(P.A.U. jun. 16)

Solución: A

La intensidad, $\overline{\boldsymbol{E}}$, de campo electrostático en el interior de un conductor metálico en equilibrio es nula. Si no fuese así, las cargas se desplazarían debido a la fuerza del campo.
La diferencia de potencial entre dos puntos, $V_1 - V_2$, es:

$$V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\, d\vec{r}$$

Al ser nula la intensidad del campo, también lo será la diferencia de potencial entre dos puntos:

$$V_1 - V_2 = 0$$

O sea, el potencial será constante:

$$V_1 = V_2$$

Las otras opciones:
B: Falsa.
La carga se distribuye por la superficie de la esfera.
Si hubiese carga en el interior del conductor, esta crearía un campo eléctrico que produciría el movimiento de las cargas y el conductor ya no estaría en equilibrio.
C: Falsa.
La intensidad, $\overline{\boldsymbol{E}}$, de campo electrostático en el interior de un conductor metálico en equilibrio es nula. Si no fuese así, las cargas se desplazarían debido a la fuerza del campo.

2. En el interior de una esfera conductora cargada:
A) El potencial no es nulo.
B) La carga no es nula.
C) El campo eléctrico no es nulo.

(P.A.U. sep. 15)

Solución: A

La intensidad, $\overline{\boldsymbol{E}}$, de campo electrostático en el interior de un conductor metálico en equilibrio es nula. Si no fuese así, las cargas se desplazarían debido a la fuerza del campo.
La diferencia de potencial entre dos puntos, $V_1 - V_2$, es:

$$V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\, d\vec{r}$$

Al ser nula la intensidad del campo, también lo será la diferencia de potencial entre dos puntos:

$$V_1 - V_2 = 0$$

O sea, el potencial será constante:

$$V_1 = V_2$$

Pero no es nulo, porque en un punto de la superficie, el campo ya no es cero, sino igual al producido por la carga como si estuviese concentrada en el centro de la esfera de radio r:

$$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

El potencial en la superficie, y también en el interior de la esfera, es igual al que produciría toda la carga concentrada en el centro de la esfera:

$$V=K\frac{Q}{r}\neq 0$$

3. Un conductor macizo de forma esférica recibe una carga eléctrica ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?:
   A) La carga se distribuye por todo el conductor.
   B) El potencial es cero en todos los puntos del conductor.
   C) En el interior del conductor no hay campo electrostático.

(P.A.U. sep. 14)

Solución: C

La intensidad, $\overline{\boldsymbol{E}}$, de campo electrostático en el interior de un conductor metálico en equilibrio es nula.

Las otras opciones:
B: Falsa.
La intensidad, $\overline{\boldsymbol{E}}$, de campo electrostático en el interior de un conductor metálico en equilibrio es nula. Si no fuese así, las cargas se desplazarían debido a la fuerza del campo.
La diferencia de potencial entre dos puntos, $V_1 - V_2$, es:

$$V_1-V_2=\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

Al ser nula la intensidad del campo, también lo será la diferencia de potencial entre dos puntos:

$$V_1 - V_2 = 0$$

O sea, el potencial será constante:

$$V_1 = V_2$$

Pero no es nulo, porque en un punto de la superficie, el campo ya no es cero, sino igual al producido por la carga como si estuviese concentrada en el centro de la esfera de radio r:

$$\vec{E}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

El potencial en la superficie, y también en el interior de la esfera, es igual al que produciría toda la carga concentrada en el centro de la esfera:

$$V=K\frac{Q}{r}\neq 0$$

C: Falsa.
La carga se distribuye por la superficie de la esfera.
Si hubiese carga en el interior del conductor, esta crearía un campo eléctrico que produciría el movimiento de las cargas y el conductor ya no estaría en equilibrio.

4. Dos esferas de radio R con cargas $+Q$ y $-Q$, tienen sus centros separados una distancia d. A una distancia $d/2$ (siendo $d/2 \gg R$); se cumple:
   A) El potencial es cero y el campo electrostático $4\ K\ Q\ d^{-2}$

B) El potencial es cero y el campo electrostático 8 $K\,Q\,d^{-2}$
C) El potencial es 4 $K\,Q\,d^{-1}$ y el campo cero.

(P.A.U. jun. 12)

Solución: B

Si $d/2 \gg R$, las esferas pueden considerarse como cargas puntuales.
El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
Por tanto, el potencial electrostático en el punto medio creado por ambas cargas es cero:

$$V=V_{+}+V_{-}=K\frac{+Q}{d/2}+K\frac{-Q}{d/2}=0$$

El principio de superposición dice que la intensidad de campo eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada carga, y luego se suman los vectores.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas por una distancia, r, viene dada por la ley de Coulomb, en la que K es la constante de Coulomb y $\vec{u}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

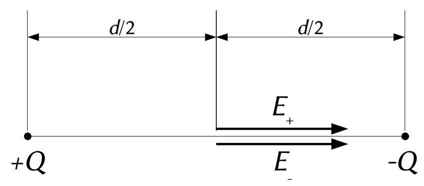
$$\vec{F}_E=K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$$

El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}_E}{q}=\frac{K\frac{Q\cdot \cancel{q}}{r^2}\vec{u}_r}{\cancel{q}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{E}=\vec{E}_{+}+\vec{E}_{-}=K\frac{+Q}{(d/2)^2}\vec{\mathbf{i}}+K\frac{-Q}{(d/2)^2}(-\vec{\mathbf{i}})=2\left(4K\frac{Q}{d^2}\right)\vec{\mathbf{i}}=8K\frac{Q}{d^2}\vec{\mathbf{i}}$$

$$|\vec{E}|=8K\frac{Q}{d^2}$$



5. Dadas dos esferas conductoras cargadas y de diferente radio, con cargas Q_A y Q_B, si se ponen en contacto:
A) Se igualan las cargas en las dos esferas.
B) Se igualan los potenciales de las esferas.
C) No ocurre nada.

(P.A.U. sep. 09)

Solución: B

Cuando dos esferas conductoras cargadas se ponen en contacto eléctrico las cargas se desplazan desde la esfera que tiene mayor potencial hacia la que lo tiene menor, hasta que sus potenciales se igualan. Las cargas eléctricas positivas se desplazan siempre en el sentido de los potenciales decrecientes. Suponiendo que el sistema de dos esferas está aislado del exterior, la carga eléctrica deberá conservarse. Por lo tanto, se podría calcular la carga final, q', de cada esfera resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2$$

$$V'_1 = K\frac{q'_1}{R_1} = K\frac{q'_2}{R_2} = V'_2$$

● Campo y potencial

1. Explica cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:
   A) No se realiza trabajo cuando una carga eléctrica se traslada entre dos puntos de una superficie equipotencial.
   B) Las líneas de fuerza del campo electrostático son cerradas.
   C) Las líneas de fuerza siempre se cortan.

(P.A.U. sep. 16)

Solución: A

El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V = \frac{E_p}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A\rightarrow B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = q \cdot V_A - q \cdot V_B = q\,(V_A - V_B)$$

Si los puntos se encuentran en una superficie equipotencial, la diferencia de potencial entre ellos es cero lo el trabajo de la fuerza del campo también valdrá cero.
Suponiendo que llega con la misma velocidad con la que sale, el trabajo de la fuerza resultante, igual a la variación de energía cinética, será nulo:

$$W(\text{resultante}) = W(\text{campo}) + W(\text{exterior}) = \Delta E_c = 0$$

El trabajo que hay que hacer es el opuesto al de la fuerza del campo.
No se realiza trabajo cuando una carga eléctrica se traslada entre dos puntos de una superficie equipotencial.

Las otras opciones:
B. Falsa. Las líneas de fuerza de un campo electrostático surgen de las cargas positivas (fuentes) y terminan en las cargas negativas (sumideros). Son abiertas.
C. Falsa. Por definición, las líneas de fuerza se dibujan de forma que el campo eléctrico sea tangente a ellas en cada punto. El campo eléctrico en un punto es único. Si las líneas de fuerza se cortasen, habría dos tangentes y dos vectores campo eléctrico.

2. Dos cargas distintas Q y q, separadas una distancia d, producen un potencial cero en un punto P situado entre las cargas y en la línea que las une. Esto quiere decir que:
   A) Las cargas deben tener el mismo signo.

B) El campo eléctrico debe ser nulo en P.
C) El trabajo necesario para traer una carga desde el infinito hasta P es cero.

(P.A.U. jun. 15)

Solución: C

El campo eléctrico es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una carga se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una carga entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de carga.

$$V = \frac{E_p}{q}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una carga mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A \to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = q \cdot V_A - q \cdot V_B = q\,(V_A - V_B)$$

El potencial eléctrico del infinito es cero, porque se toma como origen de potencial. Si el potencial del punto P también es nulo, el trabajo que hace la fuerza eléctrica cuando una carga se traslada desde el infinito hasta el punto P, será:

$$W_{\infty \to P} = q\,(V_\infty - V_P) = q\,(0 - 0) = 0$$

Suponiendo que llega con la misma velocidad con la que sale, el trabajo de la fuerza resultante, igual a la variación de energía cinética, será nulo:

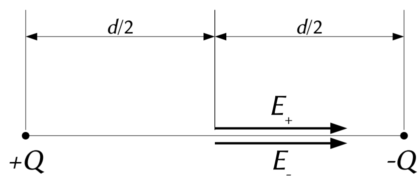
$$W(\text{resultante}) = W(\text{campo}) + W(\text{exterior}) = \Delta E_c = 0$$

El trabajo que hay que hacer es el opuesto al de la fuerza del campo.
El trabajo necesario para traer una carga desde el infinito hasta P es cero.

Las otras opciones.
A. Falsa. Si las cargas tuviesen el mismo signo, el potencial en el punto creado por ambas cargas, que es la suma de los potenciales producidos por cada carga, $V = K \cdot Q / r$, siempre se acumularían, nunca podrían anularse.
B. Falsa. En un caso simple de un punto P que equidista de dos cargas de igual valor y signo opuesto, el potencial en el punto es nulo:

$$V = K\frac{Q}{r} + K\frac{-Q}{r} = 0$$

Pero el campo eléctrico no es nulo, porque los vectores intensidad de campo eléctrico tienen el mismo sentido.



3. Se dispone de varias cargas eléctricas puntuales. Si en un punto del espacio próximo a las cargas el potencial eléctrico es nulo:
   A) Puede haber campo eléctrico en ese punto.
   B) Las líneas del campo se cortan en ese punto.
   C) El campo no es conservativo.

(P.A.U. jun. 13)

Solución: A

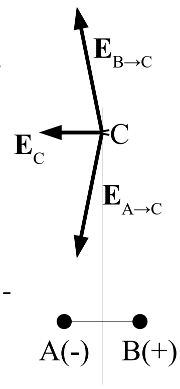
El potencial eléctrico en un punto, debido a la presencia de varias cargas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada carga, como si el resto de las cargas no estuviese presente.
Para determinar el potencial eléctrico en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada carga, y luego se suman.
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V = K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.
El ejemplo más sencillo es el punto medio de un dipolo eléctrico, que es el conjunto de dos cargas del mismo valor y signo contrario.
Cualquier punto que se encuentre en la mediatriz a la misma distancia de ambas cargas tendrá un potencial nulo, ya que el potencial en ese punto será la suma de los potenciales creados por cada una de las cargas:

$$V = K\frac{Q}{r} + K\frac{-Q}{r} = 0$$

Las cargas son opuestas y las distancias iguales.
Pero el campo electrostático en ese punto no es nulo, pues es la suma vectorial de los vectores campo creados por cada una de las dos cargas que produce una resultante que no es nula, como se puede ver en la figura.



Las otras opciones:
B. Falsa. Una de las propiedades de las líneas de campo es que no se cortan en ningún punto, ya que el campo en cada punto es único en valor y dirección. Las líneas de campo se dibujan de forma que el vector campo es tangente a ellas en cada punto. Si en un punto se cortasen dos líneas, existirían dos vectores campo tangentes a cada línea en ese punto, lo que contradice la definición.

C. Falsa. El campo electrostático es un campo conservativo. El trabajo de la fuerza del campo cuando una carga de prueba se mueve entre dos puntos es independiente del camino. (También se podría decir que la circulación del vector campo a lo largo de una línea cerrada es nula).

4. Cuando se compara la fuerza eléctrica entre dos masas, con la gravitatoria entre dos masas (cargas y masas unitarias y a distancia unidad):
   A) Ambas son siempre atractivas.
   B) Son de un orden de magnitud semejante.
   C) Las dos son conservativas.

(P.A.U. sep. 10)

Solución: C

Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza cuando se desplaza una magnitud sensible (masa para las fuerzas gravitatorias, carga para las fuerzas eléctricas) entre dos puntos es independiente del camino seguido, y solo depende de las posiciones inicial y final. En esos casos se puede definir una magnitud llamada energía potencial que depende, además de la magnitud sensible, únicamente de las posiciones inicial y final. Por tanto, el trabajo de la fuerza es la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Es el caso de las fuerzas gravitatoria y eléctrica.

	Gravitatoria	***Eléctrica***
Fuerza	$\vec{F}_G = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F}_E = K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$

Energía potencial	$E_p = -G\dfrac{M \cdot m}{r}$	$E_{pE} = K\dfrac{Q \cdot q}{r}$

Las otras opciones:
A. Falsa. La fuerza gravitatoria es siempre atractiva, pero la fuerza eléctrica es atractiva para cargas de distinto signo, pero repulsiva para cargas del mismo signo.
B. Falsa. Dado el valor tan diferente de las constantes (K = 9·10⁹ N·m²·C⁻² y G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²), la fuerza entre masas o cargas unitarias separadas por la distancia unidad, será ≈ 10^{20} mayor en el caso de la fuerza eléctrica, aunque esta comparación no tenga mucho sentido.

5. Si una carga de 1 µC se mueve entre dos puntos de la superficie de un conductor separados 1 m (cargado y en equilibrio electrostático), ¿cuál es la variación de energía potencial que experimenta esta carga?:
   A) 9 kJ.
   B) Depende del potencial del conductor.
   C) Cero.
   Dato: $K = 9\cdot10^9$ N·m²·C⁻²; 1 µC = 10^{-6} C. *(P.A.U. sep. 08)*

Solución: C

La intensidad, $\overline{\boldsymbol{E}}$, de campo electrostático en el interior de un conductor metálico en equilibrio es nula. Si no fuese así, las cargas se desplazarían debido a la fuerza del campo.
La diferencia de potencial entre dos puntos, $V_1 - V_2$, es:

$$V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{\boldsymbol{E}}\, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$$

Al ser nula la intensidad del campo, también lo será la diferencia de potencial entre dos puntos:

$$V_1 - V_2 = 0$$

O sea, el potencial será constante:

$$V_1 = V_2$$

Como el potencial, V, de un punto es la energía potencial, E_p, de la unidad de carga situada en ese punto, la variación de energía potencial valdrá cero:

$$\Delta E_p = q \cdot \Delta V = 0$$

6. Si el flujo del campo eléctrico a través de una superficie gaussiana que rodea a una esfera conductora cargada y en equilibrio electrostático es Q / ε_0, el campo eléctrico en el exterior de la esfera es:
   A) Cero
   B) $Q / (4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2)$
   C) Q / ε_0

(P.A.U. sep. 05)

Solución: B

Como el flujo elemental, dΦ, del vector campo eléctrico, $\overline{\boldsymbol{E}}$, que atraviesa una superficie elemental, dS, que se puede representar por el vector, d$\overline{\boldsymbol{S}}$, perpendicular a ella dirigido hacia el exterior, es el producto escalar de ambos vectores.

$$\mathrm{d}\Phi = \overline{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\overline{\boldsymbol{S}}$$

El flujo total a través de una superficie cerrada es:

$$\Phi = \oiint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

A una distancia, r, del centro de la esfera el vector campo eléctrico, $\overline{\boldsymbol{E}}$, tiene dirección radial y es paralelo al vector superficie que represente cualquier superficie elemental en la superficie de la esfera.
En todos los puntos de una esfera imaginaria de radio R el valor de campo eléctrico es el mismo porque todos distan lo mismo del centro de la esfera.

El flujo del vector campo eléctrico, $\overline{\boldsymbol{E}}$, que atraviesa esa esfera imaginaria es:

$$\Phi = \oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \oint_S |\vec{\boldsymbol{E}}| \cdot |\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}| \cos 0 = \oint_S E \cdot \mathrm{d}S = E \oint_S \mathrm{d}S = E \cdot S = E \cdot 4 \pi R^2$$

Como el flujo total viene dado por el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Igualando las expresiones anteriores, queda:

$$E \, 4 \pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Despejando el módulo, E, del campo eléctrico:

$$E = \frac{Q}{4 \pi R^2 \varepsilon_0}$$

7. En el interior de un conductor esférico cargado y en equilibrio electrostático se cumple:
A) El potencial y el campo aumentan desde el centro hasta la superficie de la esfera.
B) El potencial es nulo y el campo constante.
C) El potencial es constante y el campo nulo.

(P.A.U. jun. 05)

Solución: C

La intensidad, $\overline{\boldsymbol{E}}$, de campo electrostático en el interior de un conductor metálico en equilibrio es nula. Si no fuese así, las cargas se desplazarían debido a la fuerza del campo.
La diferencia de potencial entre dos puntos, $V_1 - V_2$, es:

$$V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{\boldsymbol{E}} \, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$$

Al ser nula la intensidad del campo, también lo será la diferencia de potencial entre dos puntos:

$$V_1 - V_2 = 0$$

O sea, el potencial será constante:

$$V_1 = V_2$$

Actualizado: 03/08/23

ACLARACIONES

Los datos de los enunciados de los problemas no suelen tener un número adecuado de cifras significativas, bien porque el redactor piensa que la Física es una rama de las Matemáticas y los números enteros son números «exactos» (p. ej. la velocidad de la luz: $3 \cdot 10^8$ m/s cree que es 300 000 000,000000 000 000 000… m/s) o porque aún no se ha enterado de que se puede usar calculadora en el examen y le parece más sencillo usar $3 \cdot 10^8$ que 299 792 458 m/s).
Por eso he supuesto que los datos tienen un número de cifras significativas razonables, casi siempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en ciertos casos, con una incertidumbre desmedida. Así que cuando tomo un dato como $c = 3 \cdot 10^8$ m/s y lo reescribo como:
Cifras significativas: 3

$c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s
Lo que quiero indicar es que supongo que el dato original tiene tres cifras significativas (no que las tenga en realidad) para poder realizar los cálculos con una incertidumbre más pequeña que la que tendría en ese caso. ($3 \cdot 10^8$ m/s tiene una sola cifra significativa, y una incertidumbre relativa del 30 %. Como las incertidumbres se suelen acumular a lo largo del cálculo, la incertidumbre final sería inadmisible. Entonces, ¿para qué realizar los cálculos? Con una estimación sería suficiente).

Cuestiones y problemas de las Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo de LibreOffice u OpenOffice del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM).
Se consultó el chat de Bing y se usaron algunas respuestas en las cuestiones.

Sumario

CAMPO ELECTROSTÁTICO

Índice de pruebas P.A.U.