

## Física del siglo XX

[Método y recomendaciones](#)

### ◊ PROBLEMAS

#### ● Física cuántica

- La frecuencia umbral del wolframio es  $1,30 \cdot 10^{15}$  Hz.
  - Justifica que, si se ilumina su superficie con luz de longitud de onda  $1,50 \cdot 10^{-7}$  m, se emiten electrones.
  - Calcula la longitud de onda incidente para que la velocidad de los electrones emitidos sea de  $4,50 \cdot 10^5$  m·s<sup>-1</sup>.
  - ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie asociada a los electrones emitidos con la velocidad de  $4,50 \cdot 10^5$  m·s<sup>-1</sup>?

Datos:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s;  $c = 3 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup>;  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg

(P.A.U. sep. 15)

Rta.: a) Sí; b)  $\lambda_2 = 208$  nm; c)  $\lambda_3 = 1,62$  nm

#### Datos

Frecuencia umbral del wolframio  
Longitud de onda  
Velocidad de los electrones emitidos  
Constante de Planck  
Velocidad de la luz en el vacío  
Masa del electrón

#### Cifras significativas: 3

$f_0 = 1,30 \cdot 10^{15}$  Hz  
 $\lambda_1 = 1,50 \cdot 10^{-7}$  m  
 $v = 4,50 \cdot 10^5$  m/s  
 $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s  
 $c = 3,00 \cdot 10^8$  m/s  
 $m_e = 9,10 \cdot 10^{-31}$  kg

#### Incógnitas

Energía de un fotón de  $\lambda = 1,5 \cdot 10^{-7}$  m  
Longitud de onda incidente para que la velocidad de los electrones emitidos  $\lambda$  sea  $4,50 \cdot 10^5$  m/s  
Longitud de onda de De Broglie asociada a los electrones

$E_f$

$\lambda_3$

#### Otros símbolos

Trabajo de extracción

$W_e$

#### Ecuaciones

Ecuación de Planck (energía del fotón)  
Ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico  
Relación entre la frecuencia umbral y el trabajo de extracción  
Relación entre la frecuencia de una onda luminosa y la longitud de onda  
Energía cinética  
Longitud de onda de De Broglie

$E_f = h \cdot f$   
 $E_f = W_e + E_c$   
 $W_e = h \cdot f_0$   
 $f = c / \lambda$   
 $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$   
 $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$

#### Solución:

a) Una luz producirá efecto fotoeléctrico si su energía es mayor que el trabajo de extracción. Se calcula el trabajo de extracción a partir de la frecuencia umbral:

$$W_e = h \cdot f_0 = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ [J·s]} \cdot 1,30 \cdot 10^{15} \text{ [Hz]} = 8,61 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Se calcula la energía de la radiación de  $\lambda = 1,50 \cdot 10^{-7}$  m, combinando la ecuación de Planck con la relación entre la frecuencia y la longitud de onda:

$$E_f = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ [J·s]} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ [m·s}^{-1}\text{]}}{1,50 \cdot 10^{-7} \text{ [m]}} = 1,32 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Se compara la energía de la radiación con el trabajo de extracción:

$$(E_f = 1,32 \cdot 10^{-18} \text{ J}) > (W_e = 8,61 \cdot 10^{-19} \text{ J})$$

Se producirá efecto fotoeléctrico porque la energía de la radiación de  $\lambda = 1,50 \cdot 10^{-7}$  m es mayor que el trabajo de extracción. Por tanto, se emitirán electrones.

b) Se calcula la energía cinética de los electrones emitidos:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{ [kg]} \cdot (4,50 \cdot 10^5 \text{ m/s})^2 / 2 = 9,22 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

Se calcula la energía de los fotones usando la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$$E_f = W_e + E_c = 8,61 \cdot 10^{-19} \text{ [J]} + 9,22 \cdot 10^{-20} \text{ [J]} = 9,54 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Se calcula la frecuencia de los fotones incidentes usando la ecuación de Planck:

$$E_f = h \cdot f \Rightarrow f = \frac{E_f}{h} = \frac{9,54 \cdot 10^{-19} \text{ [J]}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ [J} \cdot \text{s]}} = 1,44 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} = 1,44 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Se calcula la longitud de onda de los fotones usando la relación entre la frecuencia y la longitud de onda:

$$f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}}{1,44 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}} = 2,08 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 208 \text{ nm}$$

c) Se calcula la longitud de onda asociada a los electrones usando la [ecuación de De Broglie](#)

$$\lambda_3 = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ [J} \cdot \text{s]}}{9,10 \cdot 10^{-31} \text{ [kg]} \cdot 4,50 \cdot 10^5 \text{ [m/s]}} = 1,62 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 1,62 \text{ nm}$$

2. Un rayo de luz produce efecto fotoeléctrico en un metal. Calcula:

a) La velocidad de los electrones si el potencial de frenado es de 0,5 V.

b) La longitud de onda necesaria si la frecuencia umbral es  $f_0 = 10^{15}$  Hz y el potencial de frenado es 1 V.

c) ¿Aumenta la velocidad de los electrones incrementando la intensidad de la luz incidente?

Datos:  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ;  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

(P.A.U. jun. 11)

**Rta.:** a)  $v = 4,2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ ; b)  $\lambda = 242 \text{ nm}$

### Datos

Potencial de frenado a

Frecuencia umbral

Potencial de frenado b

Constante de Planck

Velocidad de la luz en el vacío

Carga del electrón

Masa del electrón

### Incógnitas

Velocidad de los electrones

Longitud de onda

### Ecuaciones

Ecuación de Planck (energía del fotón)

Ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico

Relación entre la frecuencia umbral y el trabajo de extracción

Relación entre la frecuencia de una onda luminosa y la longitud de onda

Energía cinética

Relación entre potencial de frenado V y energía cinética

### Cifras significativas: 3

$V_a = 0,500 \text{ V}$

$f_0 = 1,00 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$

$V_b = 1,00 \text{ V}$

$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$m_e = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$v$

$\lambda$

$E_f = h \cdot f$

$E_f = W_e + E_c$

$W_e = h \cdot f_0$

$f = c / \lambda$

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

$E_c = |e| \cdot V$

### Solución:

a) Se calcula la velocidad máxima de los electrones emitidos igualando las expresiones de la energía cinética en función de la velocidad y en función del potencial de frenado:

$$\frac{1}{2} m_e \cdot v^2 = |e| \cdot V$$

$$v = \sqrt{\frac{2|e| \cdot V_a}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} [\text{C}] \cdot 0,500 [\text{V}]}{9,10 \cdot 10^{-31} [\text{kg}]}} = 4,19 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

b) Para determinar la longitud de onda necesaria para producir efecto fotoeléctrico en un metal, se usa la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$$E_f = W_e + E_c$$

Se calcula el trabajo de extracción a partir de la longitud de onda umbral:

$$W_e = h \cdot f_0 = 6,63 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] \cdot 1,00 \cdot 10^{15} [\text{s}^{-1}] = 6,63 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Se calcula la energía cinética a partir de su expresión en función del potencial de frenado

$$E_c = |e| \cdot V_b = 1,60 \cdot 10^{-19} [\text{C}] \cdot 1,00 [\text{V}] = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Se calcula la energía del fotón a partir de la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico

$$E_f = W_e + E_c = 6,63 \cdot 10^{-19} [\text{J}] + 1,60 \cdot 10^{-19} [\text{J}] = 8,23 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Se calcula la frecuencia del fotón a partir de la ecuación de Planck

$$E_f = h \cdot f \Rightarrow f = \frac{E_f}{h} = \frac{8,23 \cdot 10^{-19} [\text{J}]}{6,63 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}]} = 1,24 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} = 1,24 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Se calcula la longitud de onda

$$f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3,00 \cdot 10^8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]}{1,24 \cdot 10^{15} [\text{s}^{-1}]} = 2,42 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

c) La intensidad de la luz no afecta a la velocidad de los electrones que solo depende de la frecuencia de la luz. Es una de las leyes experimentales del efecto fotoeléctrico, explicada por la interpretación de Einstein que dice que la luz es un haz de partículas llamadas fotones. Cuando un fotón choca con un electrón, le comunica toda su energía. Por la ecuación de Planck:

$$E_f = h \cdot f$$

Si la energía es suficiente para arrancar el electrón del metal ( $E_f > W_e$ ), la energía restante queda en forma de energía cinética del electrón. Cuanto mayor sea la frecuencia del fotón, mayor será la velocidad del electrón.

Al aumentar la intensidad de la luz, lo que se conseguiría sería un mayor número de fotones, que, de tener la energía suficiente, arrancarían más electrones, produciendo una mayor intensidad de corriente eléctrica.

3. La longitud de onda máxima capaz de producir efecto fotoeléctrico en un metal, es 4500 Å:

- Calcula el trabajo de extracción.
- Calcula el potencial de frenado si la luz incidente es de  $\lambda = 4000 \text{ Å}$ .
- ¿Habría efecto fotoeléctrico con luz de  $5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ?

Datos:  $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ;  $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

(P.A.U. jun. 10)

Rta.: a)  $W_0 = 4,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ; b)  $V = 0,34 \text{ V}$

#### Datos

Longitud de onda umbral  
Longitud de onda  
Frecuencia de la radiación  
Constante de Planck  
Velocidad de la luz en el vacío  
Carga del electrón

#### Incógnitas

Trabajo de extracción  
Potencial de frenado  
Energía de un fotón de  $f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

#### Otros símbolos

Energía cinética máxima de los electrones emitidos

#### Cifras significativas: 3

$\lambda_0 = 4500 \text{ Å} = 4,50 \cdot 10^{-7} \text{ m}$   
 $\lambda = 4000 \text{ Å} = 4,00 \cdot 10^{-7} \text{ m}$   
 $f = 5,00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$   
 $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$   
 $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$   
 $e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$W_e$

$V$

$E_f$

$E_c$

**Ecuaciones**

Ecuación de Planck (energía del fotón)

$$E_f = h \cdot f$$

Ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico

$$E_f = W_e + E_c$$

Relación entre la frecuencia umbral y el trabajo de extracción

$$W_e = h \cdot f_0$$

Relación entre la frecuencia de una onda luminosa y la longitud de onda

$$f = c / \lambda$$

Relación entre potencial de frenado y energía cinética

$$E_c = |e| \cdot V$$

**Solución:**

a) Se calcula el trabajo de extracción a partir de la longitud de onda umbral:

$$W_e = h \cdot f_0 = \frac{h \cdot c}{\lambda_0} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ J}}{4,50 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 4,42 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

b) El potencial de frenado se calcula a partir de la energía cinética máxima de los electrones emitidos.

Se calcula la energía cinética máxima de los electrones emitidos a partir de la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$$E_c = E_f - W_e$$

La energía de los fotones, después de sustituir la frecuencia por su expresión en función de la longitud de onda, es:

$$E_f = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] \cdot 3,00 \cdot 10^8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]}{4,00 \cdot 10^{-7} [\text{m}]} = 4,97 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La energía cinética máxima de los electrones emitidos vale:

$$E_c = 4,97 \cdot 10^{-19} [\text{J}] - 4,42 \cdot 10^{-19} [\text{J}] = 5,5 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

Se calcula el potencial de frenado a partir de la ecuación que lo relaciona con la energía cinética:

$$E_c = |e| \cdot V \Rightarrow V = \frac{E_c}{|e|} = \frac{5,5 \cdot 10^{-20} [\text{J}]}{1,60 \cdot 10^{-19} [\text{C}]} = 0,35 \text{ V}$$

c) Una luz producirá efecto fotoeléctrico si su energía es mayor que el trabajo de extracción.

Se calcula la energía de la radiación de  $f = 5,00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ 

$$E_f = h \cdot f = 6,63 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] \cdot 5,00 \cdot 10^{14} [\text{s}^{-1}] = 3,32 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Se compara con el trabajo de extracción:

$$(E_f = 3,32 \cdot 10^{-19} \text{ J}) < (W_e = 4,42 \cdot 10^{-19} \text{ J})$$

Como la energía de la radiación es menor que el trabajo de extracción, no se producirá efecto fotoeléctrico.

4. El trabajo de extracción del cátodo metálico en una célula fotoeléctrica es 3,32 eV. Sobre él incide radiación de longitud de onda  $\lambda = 325 \text{ nm}$ . Calcula:

a) La velocidad máxima con la que son emitidos los electrones.

b) El potencial de frenado.

Datos: constante de Planck  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ,  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , $e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ 

(P.A.U. jun. 05)

**Rta.:** a)  $v = 4,2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ , b)  $V = 0,51 \text{ V}$ **Datos**

Longitud de onda de la radiación

Trabajo de extracción del metal

Constante de Planck

Velocidad de la luz en el vacío

Masa del electrón

**Cifras significativas: 3**

$$\lambda = 325 \text{ nm} = 3,25 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$W_e = 3,32 \text{ eV} = 5,31 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

**Incógnitas**

Velocidad máxima con la que son emitidos los electrones

$$v$$

Potencial de frenado

$$V$$

**Ecuaciones**

Ecuación de Planck (energía del fotón)

$$E_f = h \cdot f$$

Ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico

$$E_f = W_e + E_c$$

Relación entre la frecuencia de una onda luminosa y la longitud de onda

$$f = c / \lambda$$

Energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Relación entre la energía cinética de los electrones y el potencial de frenado

$$E_c = |e| \cdot V$$

**Solución:**

a) Se obtiene la velocidad máxima con la que son emitidos los electrones a partir de la energía cinética.

La energía cinética máxima de los electrones emitidos se calcula a partir de la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$$E_c = E_f - W_e$$

La energía de los fotones, después de sustituir la frecuencia por su expresión en función de la longitud de onda, es:

$$E_f = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] \cdot 3,00 \cdot 10^8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]}{3,25 \cdot 10^{-7} [\text{m}]} = 6,12 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La energía cinética máxima de los electrones emitidos vale:

$$E_c = 6,12 \cdot 10^{-19} [\text{J}] - 5,31 \cdot 10^{-19} [\text{J}] = 8,1 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

Se calcula la velocidad a partir de la expresión de la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,1 \cdot 10^{-20} [\text{J}]}{9,11 \cdot 10^{-31} [\text{kg}]}} = 4,2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

b) Se calcula el potencial de frenado en la ecuación que lo relaciona con la energía cinética:

$$E_c = |e| \cdot V \Rightarrow V = \frac{E_c}{|e|} = \frac{8,1 \cdot 10^{-20} [\text{J}]}{1,60 \cdot 10^{-19} [\text{C}]} = 0,51 \text{ V}$$

**● Física nuclear y de partículas**1. El isótopo del boro  ${}^{10}_5\text{B}$  es bombardeado por una partícula  $\alpha$  y se produce  ${}^{13}_6\text{C}$  y otra partícula.

a) Escribe la reacción nuclear.

b) Calcula la energía liberada por núcleo de boro bombardeado.

c) Calcula la energía liberada si se considera 1 g de boro.

Datos: masa atómica( ${}^{10}_5\text{B}$ ) = 10,0129 u; masa atómica( ${}^{13}_6\text{C}$ ) = 13,0034 u; masa( $\alpha$ ) = 4,0026 u; masa(proton) = 1,0073 u;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ;  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ; 1 u =  $1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . (P.A.U. sep. 16)**Rta.:** a)  ${}^{10}_5\text{B} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{13}_6\text{C} + {}^1_1\text{H}$ ; b)  $E = 7,15 \cdot 10^{-13} \text{ J/átomo}$ ; c)  $E_2 = 43,1 \text{ GJ/g}$ **Datos**

Masa: boro-10

carbono-13

partícula  $\alpha$ 

protón

Número de Avogadro

Unidad de masa atómica

Velocidad de la luz en el vacío

**Cifras significativas: 3**

$$m({}^{10}_5\text{B}) = 10,0129 \text{ u}$$

$$m({}^{13}_6\text{C}) = 13,0034 \text{ u}$$

$$m({}^4_2\text{He}) = 4,0026 \text{ u}$$

$$m({}^1_1\text{H}) = 1,0073 \text{ u}$$

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

**Incógnitas**

Energía liberada por núcleo de boro bombardeado

$$E$$

Energía liberada / g de boro

$$E_2$$

**Otros símbolos**

Constante de desintegración radiactiva

$$\lambda$$

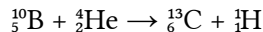
**Ecuaciones**

Equivalencia masa energía de Einstein

$$E = m \cdot c^2$$

**Solución:**

a) Se escribe la reacción nuclear aplicando los principios de conservación del número másico y de la carga eléctrica en los procesos nucleares.



b) Se calcula el defecto de masa

$$\Delta m = m({}^{13}_6\text{C}) + m({}^1_1\text{H}) - (m({}^{10}_5\text{B}) + m({}^4_2\text{He})) = 13,0034 \text{ [u]} + 1,0073 \text{ [u]} - (10,0129 \text{ [u]} + 4,0026 \text{ [u]}) = -0,00480 \text{ u}$$

$$\Delta m = -0,00480 \text{ u} \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u} = -7,97 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

Se calcula la energía equivalente según la ecuación de Einstein

$$E = m \cdot c^2 = 7,97 \cdot 10^{-30} \text{ [kg]} \cdot (3,00 \cdot 10^8 \text{ [m/s]})^2 = 7,15 \cdot 10^{-13} \text{ J/átomo B}$$

c) Se calcula la cantidad de átomos de boro que hay en 1 g de boro.

$$N = 1,00 \text{ g B} \cdot \frac{1 \text{ mol B}}{10,0129 \text{ g B}} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ átomos}}{1 \text{ mol}} = 6,01 \cdot 10^{22} \text{ átomos B}$$

Se calcula la energía para 1 g de boro

$$E_2 = 7,15 \cdot 10^{-13} \text{ [J/átomo B]} \cdot 6,01 \cdot 10^{22} \text{ [átomos B/g B]} = 4,31 \cdot 10^{10} \text{ J} = 43,1 \text{ GJ/g B}$$

2. El Cobalto 60 es un elemento radiactivo utilizado en radioterapia. La actividad de una muestra se reduce a la milésima parte en 52,34 años. Calcula:

a) El periodo de semidesintegración.

b) La cantidad de muestra necesaria para que la actividad sea de  $5 \cdot 10^6$  desintegraciones/segundo.

c) La cantidad de muestra que queda al cabo de 2 años.

Datos  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ; masa atómica del  ${}^{60}\text{Co} = 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ; 1 año =  $3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$  (P.A.U. jun. 16)

**Rta.:** a)  $T_{1/2} = 5,25$  años; b)  $m = 0,12 \text{ } \mu\text{g}$ ; c)  $m_2 = 0,091 \text{ } \mu\text{g}$

**Datos**

Actividad al cabo de 52,34 años

Tiempo transcurrido

Actividad para el cálculo de la cantidad del apartado b

Tiempo para el cálculo de la cantidad del apartado c

**Incógnitas**

Período de semidesintegración

Cantidad de muestra para que la actividad sea de  $5 \cdot 10^6 \text{ Bq}$

Cantidad de muestra que queda al cabo de 2 años

**Otros símbolos**

Constante de desintegración radiactiva

**Ecuaciones**

Ley de la desintegración radiactiva

Cuando  $t = T_{1/2}$ ,  $N = N_0 / 2$

Actividad radiactiva

**Cifras significativas: 3**

$$A = 0,00100 \text{ A}_0$$

$$t = 52,34 \text{ años} = 1,65 \cdot 10^9 \text{ s}$$

$$A_b = 5 \cdot 10^6 \text{ Bq}$$

$$t_c = 2,00 \text{ años} = 6,32 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$T_{1/2}$$

$$m$$

$$m_2$$

$$\lambda$$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\lambda = \ln(N_0 / N) / t$$

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$$

$$A = -dN / dt = \lambda \cdot N$$

**Solución:**

a) Se calcula la constante de desintegración radiactiva  $\lambda$  en la ecuación de desintegración radiactiva

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Es más fácil usar la expresión anterior en forma logarítmica.

$$-\ln(N / N_0) = \ln(N_0 / N) = \lambda \cdot t$$

$$\lambda = \frac{\ln(N_0/N)}{t} = \frac{\ln(\lambda \cdot N_0 / \lambda \cdot N)}{t} = \frac{\ln(A_0/A)}{t} = \frac{\ln(1000)}{1,65 \cdot 10^9 [s]} = 4,18 \cdot 10^{-9} [s^{-1}]$$

Se calcula el período de semidesintegración a partir de la constante de desintegración radiactiva:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{4,18 \cdot 10^{-9} [s^{-1}]} = 1,653 \cdot 10^9 s = 5,25 \text{ años}$$

b) Se calcula el número de átomos a partir de la actividad

$$N = \frac{A}{\lambda} = \frac{5,00 \cdot 10^6 \text{ Bq}}{4,18 \cdot 10^{-9} [s^{-1}]} = 1,20 \cdot 10^{15} \text{ átomos}$$

Con el número de Avogadro y la masa atómica se calcula la masa de cobalto-60

$$m = 1,20 \cdot 10^{15} \text{ átomos } {}^{60}\text{Co} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ átomos}} \cdot \frac{60 \text{ g } {}^{60}\text{Co}}{1 \text{ mol } {}^{60}\text{Co}} = 1,19 \cdot 10^{-7} \text{ g} = 0,119 \mu\text{g}$$

c) Se calcula la masa que queda con la ecuación de desintegración radiactiva.

La ley de desintegración radiactiva,  $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ , puede escribirse en función de la masa porque el número de átomos de un elemento es proporcional a su masa.

La constante de proporcionalidad es:  $N_A / M$ , el número de átomos que hay en la unidad de masa de ese elemento, donde  $N_A$  es el número de Avogadro y  $M$  es la masa atómica del elemento.

$$N = m \cdot N_A / M$$

$$m \frac{N_A}{M} = m_0 \frac{N_A}{M} e^{-\lambda \cdot t}$$

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$m_2 = 1,19 \cdot 10^{-7} [g] \cdot e^{-4,18 \cdot 10^{-9} [s^{-1}] \cdot 6,32 \cdot 10^7 [s]} = 9,15 \cdot 10^{-8} \text{ g} = 0,091 \mu\text{g}$$

3. Una muestra de carbono-14 tiene una actividad de  $2,8 \cdot 10^8$  desintegraciones/s. El período de semidesintegración es  $T_{1/2} = 5730$  años. Calcula:

a) La masa de la muestra en el instante inicial.

b) La actividad al cabo de 2000 años.

c) La masa de muestra en ese instante.

$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ; masa atómica del  ${}^{14}\text{C} = 14 \text{ g/mol}$ ; 1 año =  $3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$

(P.A.U. jun. 12)

**Rta.:** a)  $m_0 = 1,7 \text{ mg}$ ; b)  $A = 2,2 \cdot 10^8 \text{ Bq}$ ; c)  $m = 1,3 \text{ mg}$

### Datos

Período de semidesintegración

Actividad de la muestra

Tiempo para calcular la actividad

Masa atómica del  ${}^{14}\text{C}$

Número de Avogadro

### Incógnitas

Masa inicial de la muestra

Actividad radiactiva a los 2000 años

Masa de la muestra a los 2000 años

### Otros símbolos

Constante de desintegración radiactiva

### Ecuaciones

Ley de la desintegración radiactiva

Cuando  $t = T_{1/2}$ ,  $N = N_0 / 2$

Actividad radiactiva

### Cifras significativas: 3

$T_{1/2} = 5730 \text{ años} = 1,81 \cdot 10^{11} \text{ s}$

$A_0 = 2,80 \cdot 10^8 \text{ Bq}$

$t = 2000 \text{ años} = 6,31 \cdot 10^{10} \text{ s}$

$M = 14,0 \text{ g/mol}$

$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$m_0$

$A$

$m$

$\lambda$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\lambda = \ln(N_0 / N) / t$$

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$$

$$A = -dN / dt = \lambda \cdot N$$

### Solución:

a) Se puede calcular el número de átomos  $N$  a partir de la expresión de la actividad radiactiva:  $A = \lambda \cdot N$ . Antes hay que calcular la constante  $\lambda$  de desintegración radiactiva, a partir del período de semidesintegración

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{1,81 \cdot 10^{11} [\text{s}]} = 3,83 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1} = 0,000175 \text{ año}^{-1}$$

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{2,80 \cdot 10^8 [\text{Bq}]}{3,83 \cdot 10^{-12} [\text{s}^{-1}]} = 7,30 \cdot 10^{19} \text{ átomos}$$

La masa es proporcional a la cantidad de átomos:

$$m_0 = \frac{N_0}{N_A} \cdot M = \frac{7,30 \cdot 10^{19} [\text{átomos}]}{6,02 \cdot 10^{23} [\text{átomos/mol}]} \cdot 14,0 [\text{g/mol}] = 1,70 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 1,70 \text{ mg}$$

b) Como la actividad radiactiva es proporcional a la cantidad de núcleos,  $A = \lambda \cdot N$ , se puede obtener una expresión similar a la ley de la desintegración radiactiva,  $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ , en la que aparece la actividad en vez de la cantidad de átomos:

$$\lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 1,00 \cdot 10^7 [\text{Bq}] \cdot e^{-0,000175 [\text{año}]^{-1} \cdot 2000 [\text{año}]} = 2,20 \cdot 10^8 \text{ Bq}$$

c) Como la masa también es proporcional a la cantidad de núcleos se puede obtener una expresión similar a la ley de la desintegración radiactiva,  $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ , en la que aparece la masa en vez de la cantidad de átomos. La constante de proporcionalidad es:  $N_A / M$ , el número de átomos que hay en la unidad de masa de ese elemento, donde  $N_A$  es el número de Avogadro y  $M$  es la masa atómica del elemento.

$$N = m \cdot N_A / M$$

$$m \cdot \frac{N_A}{M} = m_0 \cdot \frac{N_A}{M} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 1,70 [\text{mg}] \cdot e^{-0,000175 [\text{año}]^{-1} \cdot 2000 [\text{año}]} = 1,33 \text{ mg}$$

4. El carbono-14 tiene un período de semidesintegración  $T_{1/2} = 5730$  años. Una muestra tiene una actividad de  $6 \cdot 10^8$  desintegraciones/minuto. Calcula:

a) La masa inicial de la muestra.

b) Su actividad dentro de 5000 años.

c) Justifica por qué se usa este isótopo para estimar la edad de yacimientos arqueológicos.

Datos:  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ; masa atómica del  $^{14}\text{C} = 14 \text{ g}$

(P.A.U. sep. 10)

Rta.: a)  $m = 6,04 \cdot 10^{-5} \text{ g}$ ; b)  $A = 5,46 \cdot 10^6 \text{ Bq}$

### Datos

Período de semidesintegración

Actividad de la muestra

Tiempo para calcular la actividad

Masa atómica del  $^{14}\text{C}$

Número de Avogadro

### Incógnitas

Masa inicial de la muestra

Actividad radiactiva a los 5000 años

### Otros símbolos

Constante de desintegración radiactiva

### Ecuaciones

Ley de la desintegración radiactiva

Cuando  $t = T_{1/2}$ ,  $N = N_0 / 2$

Actividad radiactiva

### Cifras significativas: 3

$$T_{1/2} = 5730 \text{ años} = 1,81 \cdot 10^{11} \text{ s}$$

$$A_0 = 6,00 \cdot 10^8 \text{ des./min} = 1,00 \cdot 10^7 \text{ Bq}$$

$$t = 5000 \text{ años} = 1,58 \cdot 10^{11} \text{ s}$$

$$M = 14,0 \text{ g/mol}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$m_0$$

$$A$$

$$\lambda$$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\lambda = \ln(N_0 / N) / t$$

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$$

$$A = -dN / dt = \lambda \cdot N$$



**Solución:**

a) Se puede calcular el número de átomos  $N$  a partir de la expresión de la actividad radiactiva:  $A = \lambda \cdot N$ . Antes hay que calcular la constante  $\lambda$  de desintegración radiactiva, a partir del período de semidesintegración.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{1,81 \cdot 10^{11} [\text{s}]} = 3,83 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1} = 0,000175 \text{ año}^{-1}$$

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{1,00 \cdot 10^7 [\text{Bq}]}{3,83 \cdot 10^{-12} [\text{s}^{-1}]} = 2,61 \cdot 10^{18} \text{ átomos}$$

La masa es proporcional a la cantidad de átomos:

$$m_0 = \frac{N_0}{N_A} \cdot M = \frac{2,61 \cdot 10^{18} [\text{átomos}]}{6,02 \cdot 10^{23} [\text{átomos/mol}]} \cdot 14 [\text{g/mol}] = 6,06 \cdot 10^{-5} \text{ g} = 60,6 \text{ } \mu\text{g}$$

b) Como la actividad radiactiva es proporcional a la cantidad de núcleos,  $A = \lambda \cdot N$ , se puede obtener una expresión similar a la ley de la desintegración radiactiva,  $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ , en la que aparece la actividad en vez de la cantidad de átomos:

$$\lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 1,00 \cdot 10^7 [\text{Bq}] \cdot e^{-0,000175 [\text{año}]^{-1} \cdot 5000 [\text{año}]} = 5,46 \cdot 10^6 \text{ Bq} = 3,28 \cdot 10^8 \text{ des/min}$$

c) Por el valor del período de semidesintegración, el carbono-14 se emplea para datar restos (que necesariamente deben contener carbono, normalmente restos orgánicos como madera, huesos, etc.) relativamente recientes, de menos de 50 000 años, (tiempo en el que la actividad radiactiva original habrá disminuido a la milésima parte).

El método del carbono-14 se basa en el hecho de que la proporción de carbono-14 en las plantas vivas se mantiene constante al largo de su vida, ya que el carbono desintegrado se compensa por el asimilado en la fotosíntesis, y que el carbono-14 atmosférico se restituye por la radiación cósmica que convierte el nitrógeno atmosférico en carbono-14. Cuando la planta muere, el carbono que se desintegra ya no se repone y, con la ecuación anterior, podemos determinar el tiempo transcurrido midiendo su actividad radiactiva y comparándola con la que tiene una planta viva.

5. El  $^{210}\text{Po}$  tiene una vida media  $\tau = 199,09$  días. Calcula:

a) El tiempo necesario para que se desintegre el 70 % de los átomos iniciales.

b) Los miligramos de  $^{210}\text{Po}$  al cabo de 2 años si inicialmente había 100 mg.

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

(P.A.U. sep. 06)

**Rta.:** a)  $t = 240$  días b)  $m = 2,55$  mg

**Datos**

Vida media

Porcentaje de la muestra que se ha desintegrado

Masa inicial de la muestra

Tiempo para calcular la masa que queda

Masa atómica del  $^{210}\text{Po}$

Número de Avogadro

**Incógnitas**

Tiempo necesario para que se desintegre el 70 %

Masa (mg) al cabo de 2 años

**Otros símbolos**

Constante de desintegración radiactiva

**Ecuaciones**

Ley de la desintegración radiactiva

Vida media

**Cifras significativas: 3**

$$\tau = 199 \text{ días} = 1,72 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$d = 70,00 \%$$

$$m = 100 \text{ mg} = 1,00 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$$

$$t = 2,00 \text{ años} = 6,31 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$M = 210 \text{ g/mol}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$t$$

$$m$$

$$\lambda$$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\lambda = \ln(N_0 / N) / t$$

$$\tau = 1 / \lambda$$

**Solución:**

a) Se calcula la constante radiactiva a partir de la vida media

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{1,72 \cdot 10^7 [\text{s}]} = 5,81 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

Si se ha desintegrado el 70,0 %, solo queda el 30,0 %.

Se calcula el tiempo en la ecuación de la ley de desintegración radiactiva

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Es más fácil usar la expresión anterior en forma logarítmica.

$$-\ln(N / N_0) = \ln(N_0 / N) = \lambda \cdot t$$

$$t = \frac{\ln(N_0 / N)}{\lambda} = \frac{\ln(100/30,0)}{5,81 \cdot 10^{-8} [\text{s}^{-1}]} = 2,07 \cdot 10^7 \text{ s} = 240 \text{ días}$$

b) La ley de desintegración radiactiva,  $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ , puede escribirse en función de la masa porque el número de átomos de un elemento es proporcional a su masa.

La constante de proporcionalidad es:  $N_A / M$ , el número de átomos que hay en la unidad de masa de ese elemento, donde  $N_A$  es el número de Avogadro y  $M$  es la masa atómica del elemento.

$$N = m \cdot N_A / M$$

$$m \frac{N_A}{M} = m_0 \frac{N_A}{M} e^{-\lambda \cdot t}$$

$$m = m_0 e^{-\lambda \cdot t} = 100 [\text{mg}] \cdot e^{-5,81 \cdot 10^{-8} [\text{s}] \cdot 6,31 \cdot 10^7 [\text{s}]} = 2,55 \text{ mg}$$

6. En una muestra de  $^{131}_{53}\text{I}$  radiactivo con un periodo de semidesintegración de 8 días había inicialmente  $1,2 \cdot 10^{21}$  átomos y actualmente solo hay  $0,2 \cdot 10^{20}$ . Calcula:

a) La antigüedad de la muestra.

b) La actividad de la muestra transcurridos 50 días desde el instante inicial.

(P.A.U. jun. 06)

**Rta.:** a)  $t = 47$  días; b)  $A = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ Bq}$

**Datos**

Cantidad inicial

Cantidad actual

Período de semidesintegración

Tiempo para el cálculo de la actividad

**Incógnitas**

Tiempo transcurrido

Actividad radiactiva

**Otros símbolos**

Constante de desintegración radiactiva

**Ecuaciones**

Ley de la desintegración radiactiva

Cuando  $t = T_{1/2}$ ,  $N = N_0 / 2$

Actividad radiactiva

**Cifras significativas: 2**

$N_0 = 1,2 \cdot 10^{21}$  núcleos

$N = 0,20 \cdot 10^{20}$  núcleos

$T_{1/2} = 8,0$  días =  $6,9 \cdot 10^5 \text{ s}$

$t' = 50$  días =  $4,3 \cdot 10^6 \text{ s}$

$t$

$A$

$\lambda$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\lambda = \ln(N_0 / N) / t$$

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$$

$$A = -dN / dt = \lambda \cdot N$$

**Solución:**

a) Se calcula la constante de desintegración radiactiva del yodo-131 a partir del período de semidesintegración

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,69}{6,9 \cdot 10^5 [\text{s}]} = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Se calcula el tiempo en la ecuación de la ley de desintegración radiactiva

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Es más fácil usar la expresión anterior en forma logarítmica.

$$-\ln(N/N_0) = \ln(N_0/N) = \lambda \cdot t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{N_0}{N}\right)}{\lambda} = \frac{\ln\left(\frac{1,2 \cdot 10^{21} [\text{núcleos}]}{0,20 \cdot 10^{20} [\text{núcleos}]}\right)}{1,0 \times 10^{-6} [\text{s}^{-1}]} = 4,1 \cdot 10^6 \text{ s} = 47 \text{ días}$$

b) Para calcular la actividad se calcula primero el número de átomos que quedan al cabo de 50 días

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 1,2 \cdot 10^{21} [\text{núcleos}] \cdot e^{-1,0 \cdot 10^{-6} [\text{s}] \cdot 4,3 \cdot 10^6 [\text{s}]} = 1,6 \cdot 10^{19} \text{ núcleos}$$

La actividad será:

$$A = \lambda \cdot N = 1,0 \cdot 10^{-6} [\text{s}^{-1}] \cdot 1,6 \cdot 10^{19} [\text{núcleos}] = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ Bq}$$

7. El período  $T_{1/2}$  del elemento radiactivo  $^{60}_{27}\text{Co}$  es 5,3 años y se desintegra emitiendo partículas  $\beta$ . Calcula:

a) El tiempo que tarda la muestra en convertirse en el 70 % de la original.

b) ¿Cuántas partículas  $\beta$  emite por segundo una muestra de  $10^{-6}$  gramos de  $^{60}\text{Co}$ ?

Dato:  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

(P.A.U. sep. 05)

**Rta.:** a)  $t = 2,73$  años; b)  $A = 4,1 \cdot 10^7 \text{ Bq}$

#### Datos

Período de semidesintegración

Porcentaje que queda sin desintegrar de la muestra

Masa de la muestra

Número de Avogadro

#### Incógnitas

Tiempo transcurrido

Partículas  $\beta$  emitidas por segundo

#### Otros símbolos

Constante de desintegración radiactiva

#### Ecuaciones

Ley de la desintegración radiactiva

Cuando  $t = T_{1/2}$ ,  $N = N_0 / 2$

Actividad radiactiva

#### Cifras significativas: 3

$T_{1/2} = 5,3$  año =  $1,67 \cdot 10^8 \text{ s}$

70,00 %

$m = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ g} = 1,00 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$

$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$t$

$A$

$\lambda$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\lambda = \ln(N_0/N) / t$$

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$$

$$A = -dN / dt = \lambda \cdot N$$

#### Solución:

a) Se calcula la constante radiactiva a partir del período de semidesintegración

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{1,67 \cdot 10^8 [\text{s}]} = 4,14 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$$

Se calcula el tiempo en la ecuación de la ley de desintegración radiactiva

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Es más fácil usar la expresión anterior en forma logarítmica.

$$-\ln(N/N_0) = \ln(N_0/N) = \lambda \cdot t$$

$$t = \frac{\ln(N_0/N)}{\lambda} = \frac{\ln(100/70,0)}{4,14 \cdot 10^{-9} [\text{s}^{-1}]} = 8,62 \cdot 10^7 \text{ s} = 2,73 \text{ años}$$

*Análisis: Puesto que aún no se ha desintegrado ni la mitad de la muestra, el tiempo transcurrido debe ser menor que el período de semidesintegración.*

b) Si la ecuación de desintegración es  ${}^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni} + {}^0_{-1}\text{e} + {}^0_0\bar{\nu}_e$ , el número de partículas  $\beta$  ( $e^-$ ) emitidas por segundo es igual al número de desintegraciones por segundo, o sea, a la actividad radiactiva. Se calcula primero la cantidad de átomos.

$$N = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ g } {}^{60}_{27}\text{Co} \cdot \frac{1 \text{ mol } {}^{60}_{27}\text{Co}}{60 \text{ g } {}^{60}_{27}\text{Co}} \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ átomos } {}^{60}_{27}\text{Co}}{1 \text{ mol } {}^{60}_{27}\text{Co}} \cdot \frac{1 \text{ núcleo } {}^{60}_{27}\text{Co}}{1 \text{ átomo } {}^{60}_{27}\text{Co}} = 1,0 \cdot 10^{16} \text{ núcleos } {}^{60}_{27}\text{Co}$$

Después se calcula la actividad radiactiva

$$A = \lambda \cdot N = 4,14 \cdot 10^{-9} [\text{s}^{-1}] \cdot 1,0 \cdot 10^{16} [\text{núcleos}] = 4,1 \cdot 10^7 \text{ Bq} = 4,1 \cdot 10^7 \text{ partículas } \beta / \text{s}$$

8. El tritio ( ${}^3_1\text{H}$ ) es un isótopo del hidrógeno inestable con un período de semidesintegración  $T_{1/2}$  de 12,5 años, y se desintegra emitiendo una partícula beta. El análisis de una muestra en una botella de agua lleva a que la actividad debida al tritio es el 75 % de la que presenta el agua en el manantial de origen. Calcula:

a) El tiempo que lleva embotellada el agua de la muestra.

b) La actividad de una muestra que contiene  $10^{-6}$  g de  ${}^3_1\text{H}$ .

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

(P.A.U. sep. 04)

**Rta.:** a)  $t = 5,2$  años; b)  $A = 4 \cdot 10^8 \text{ Bq}$

### Datos

Período de semidesintegración

Actividad de la muestra

Masa de la muestra

Número de Avogadro

### Incógnitas

Tiempo transcurrido

Actividad radiactiva

### Otros símbolos

Constante de desintegración radiactiva

### Ecuaciones

Ley de la desintegración radiactiva

Cuando  $t = T_{1/2}$ ,  $N = N_0 / 2$

Actividad radiactiva

### Cifras significativas: 3

$$T_{1/2} = 12,5 \text{ año} = 3,94 \cdot 10^8 \text{ s}$$

$$A = 75,0 \% A_0$$

$$m = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ g} = 1,00 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$t$

$A$

$\lambda$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\lambda = \ln(N_0 / N) / t$$

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$$

$$A = -dN / dt = \lambda \cdot N$$

### Solución:

a) Se calcula la constante radiactiva a partir del período de semidesintegración

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{3,94 \cdot 10^8 [\text{s}]} = 1,76 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$$

Se calcula el tiempo en la ecuación de la ley de desintegración radiactiva

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Es más fácil usar la expresión anterior en forma logarítmica.

$$-\ln(N / N_0) = \ln(N_0 / N) = \lambda \cdot t$$

Como la actividad radiactiva es proporcional a la cantidad de núcleos,  $A = \lambda \cdot N$ , se obtiene una expresión similar en la que aparece la actividad en vez de la cantidad de átomos:

$$\lambda t = \ln\left(\frac{N_0}{N}\right) = \ln\left(\frac{A_0/\lambda}{A/\lambda}\right)$$

$$t = \frac{\ln(A_0/A)}{\lambda} = \frac{\ln(100/75,0)}{1,76 \cdot 10^{-9} [\text{s}^{-1}]} = 1,64 \cdot 10^8 \text{ s} = 5,19 \text{ años}$$

*Análisis: Puesto que aún no se ha desintegrado ni la mitad de la muestra, el tiempo transcurrido debe ser menor que el período de semidesintegración.*

b) Para calcular la actividad se calcula primero el número de átomos que hay  $10^{-6}$  g de  ${}^3_1\text{H}$

$$N = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ g } {}^3_1\text{H} \frac{1 \text{ mol } {}^3_1\text{H}}{3 \text{ g } {}^3_1\text{H}} \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ átomos } {}^3_1\text{H}}{1 \text{ mol } {}^3_1\text{H}} \frac{1 \text{ núcleo } {}^3_1\text{H}}{1 \text{ átomo } {}^3_1\text{H}} = 2,01 \cdot 10^{17} \text{ núcleos } {}^3_1\text{H}$$

La actividad será:

$$A = \lambda \cdot N = 1,76 \cdot 10^{-9} [\text{s}^{-1}] \cdot 2,01 \cdot 10^{17} [\text{núcleos}] = 3,53 \cdot 10^8 \text{ Bq}$$

9. Una muestra radiactiva disminuye desde  $10^{15}$  a  $10^9$  núcleos en 8 días. Calcula:

a) La constante radiactiva  $\lambda$  y el período de semidesintegración  $T_{1/2}$ .

b) La actividad de la muestra una vez transcurridos 20 días desde que tenía  $10^{15}$  núcleos.

(P.A.U. jun. 04)

**Rta.:** a)  $\lambda = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ;  $T_{1/2} = 9$  horas; b)  $A(20 \text{ días}) \approx 0$

### Datos

Cantidad inicial

Cantidad al cabo de 8 días

Tiempo transcurrido

Tiempo para el cálculo de la actividad

### Incógnitas

Constante de desintegración radiactiva

Período de semidesintegración

Actividad radiactiva

### Ecuaciones

Ley de la desintegración radiactiva

Cuando  $t = T_{1/2}$ ,  $N = N_0 / 2$

Actividad radiactiva

### Cifras significativas: 1

$N_0 = 10^{15}$  núcleos

$N = 10^9$  núcleos

$t = 8$  días =  $7 \cdot 10^5 \text{ s}$

$t' = 20$  días =  $2 \cdot 10^6 \text{ s}$

$\lambda$

$T_{1/2}$

$A$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\lambda = \ln(N_0 / N) / t$$

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$$

$$A = -dN / dt = \lambda \cdot N$$

### Solución:

a) Se calcula la constante de desintegración radiactiva  $\lambda$  en la ecuación de la ley de desintegración radiactiva

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Es más fácil usar la expresión anterior en forma logarítmica.

$$-\ln(N / N_0) = \ln(N_0 / N) = \lambda \cdot t$$

$$\lambda = \ln(N_0 / N) / t = \ln(10^6) / 7 \cdot 10^5 [\text{s}] = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda = 3 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 9 \text{ horas}$$

b) Para calcular la actividad se calcula primero el número de átomos que quedan al cabo de 20 días,

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 10^{15} \cdot e^{-40} = 1 \text{ núcleo}$$

*Este resultado indica que la ley estadística de la desintegración deja de ser válida, ya que el número de átomos es demasiado pequeño. (Es como si se quisiera aplicar el dato de la esperanza de vida de una mujer (83 años) para deducir que una mujer concreta – María – morirá a los 83 años). Para un átomo en concreto, solo se puede decir que la probabilidad de que se desintegre en el período de semidesintegración es del 50 %.*

Como no se puede calcular la cantidad de núcleos que quedan (pueden ser unos pocos o ninguno), la actividad tampoco se puede calcular (unas  $10^{-4}$  o  $10^{-5}$  Bq o ninguna). teniendo en cuenta de  $10^{-4}$  Bq es una desintegración cada 3 horas, un contador Geiger no detectaría actividad en la muestra al cabo de esos 20 días)

## ◊ CUESTIONES

### ● Física relativista

- La energía relativista total de una masa en reposo:
  - Relaciona la longitud de onda con la cantidad de movimiento.
  - Representa la equivalencia entre materia y energía.
  - Relaciona las incertidumbres de la posición y del momento.

(P.A.U. sep. 12)

**Solución:** B

La ecuación de Einstein establece la relación entre masa y energía.

$$E_0 = m_0 \cdot c^2$$

$E_0$  representa la energía en reposo de una partícula y  $m_0$  es la masa en reposo de la partícula, Esta ecuación permite expresar la masa de las partículas en unidades de energía. Por ejemplo, la masa de un protón es de 938 MeV, o la del electrón 0,511 MeV.

Las otras opciones:

A. Falsa. La ecuación que relaciona la longitud de onda  $\lambda$  con la cantidad de movimiento  $p$  es la ecuación de Luis De Broglie, de la dualidad onda-partícula.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

Permite calcular la longitud de onda asociada a una partícula de masa  $m$  que se mueve con una velocidad  $v$ .

C. Falsa. El principio de indeterminación (antes conocido como principio de incertidumbre) de Heisenberg podía interpretarse como la imposibilidad de conocer con precisión absoluta dos magnitudes cuyo producto tuviese las unidades de energía · tiempo («acción»). La incertidumbre en la posición de una partícula  $\Delta x$  multiplicado por la incertidumbre en su momento (cantidad de movimiento)  $\Delta p_x$  era superior a la constante  $h$  de Planck dividida entre  $4\pi$ .

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

- Un vehículo espacial se aleja de la Tierra con una velocidad de  $0,5 c$  ( $c$  = velocidad de la luz). Desde la Tierra se envía una señal luminosa y la tripulación mide la velocidad de la señal obteniendo el valor:
  - $0,5 c$
  - $c$
  - $C$
  - $1,5 c$

(P.A.U. sep. 07, jun. 04)

**Solución:** B

El segundo postulado de la teoría especial de la relatividad de Einstein establece que la velocidad de la luz en el vacío es constante e independiente del sistema de referencia inercial desde el que se mida.

3. La ecuación de Einstein  $E = m \cdot c^2$  implica que:
- A) Una determinada masa  $m$  necesita una energía  $E$  para ponerse en movimiento.
  - B) La energía  $E$  es la que tiene una masa  $m$  que se mueve a la velocidad de la luz.
  - C)  $E$  es la energía equivalente a una determinada masa.

(P.A.U. sep. 05)

**Solución:** C

La ecuación  $E = m \cdot c^2$  da la energía total de una partícula (en ausencia de campos que puedan comunicarle una energía potencial). Aunque la partícula esté en reposo, tendrá una energía:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2$$

Siendo  $m_0$  la masa en reposo de la partícula.

Una aplicación de esa ecuación es para el cálculo de la energía que puede obtenerse en la desintegración nuclear, es decir de la energía nuclear. Un gramo ( $1 \cdot 10^{-3}$  kg) de masa, si se «aniquila» totalmente, produce una energía de:

$$E = m \cdot c^2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ [kg]} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]})^2 = 9 \cdot 10^{13} \text{ J} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kW} \cdot \text{h} = 250 \text{ GW} \cdot \text{h}$$

Energía que cubriría las necesidades energéticas de una ciudad mediana durante un mes.

## ● Física cuántica

1. Para el efecto fotoeléctrico, razona cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:
- A) La frecuencia umbral depende del número de fotones que llegan a un metal en cada segundo.
  - B) La energía cinética máxima del electrón emitido por un metal no depende de la frecuencia de la radiación incidente.
  - C) El potencial de frenado depende de la frecuencia de la radiación incidente.

(P.A.U. sep. 16)

**Solución:** C

Es una de las leyes experimentales del efecto fotoeléctrico. Estas son:

1. Empleando luz monocromática, solo se produce efecto fotoeléctrico si la frecuencia de la luz supera un valor mínimo, llamado frecuencia umbral.
2. Es instantáneo.
3. La intensidad de la corriente de saturación es proporcional a la intensidad de la luz incidente.
4. La energía cinética máxima de los electrones emitidos por el cátodo, medida como potencial de frenado, depende únicamente de la frecuencia de la luz incidente.

La [ecuación de Einstein](#) del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

La energía cinética  $E_c$  máxima de los electrones se escribe en función del potencial de frenado

$$E_c = |e| \cdot V$$

La energía de los fotones depende de su frecuencia (ecuación de Planck).

$$E_f = h \cdot f$$

La ecuación de Einstein queda

$$h \cdot f = W_e + |e| \cdot V$$

$$V = (h \cdot f - W_e) / |e|$$

2. En el efecto fotoeléctrico, la representación gráfica de la energía cinética máxima de los electrones emitidos en función de la frecuencia de la luz incidente es:

- A) Una parábola.  
 B) Una línea recta.  
 C) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

(P.A.U. jun. 16)

**Solución:** B

Interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico.

Cuando la luz interacciona con el metal de la célula fotoeléctrica lo hace como si fuese un chorro de partículas llamadas fotones (paquetes de energía).

Cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.

Para que se produzca efecto fotoeléctrico, los electrones emitidos deben tener energía suficiente para llegar al anticátodo, lo que ocurre cuando la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, que es una característica del metal.

La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación,  $E_f$  representa la energía del fotón incidente,  $W_e$  el trabajo de extracción del metal y  $E_c$  la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.

La energía que lleva un fotón de frecuencia  $f$  es:

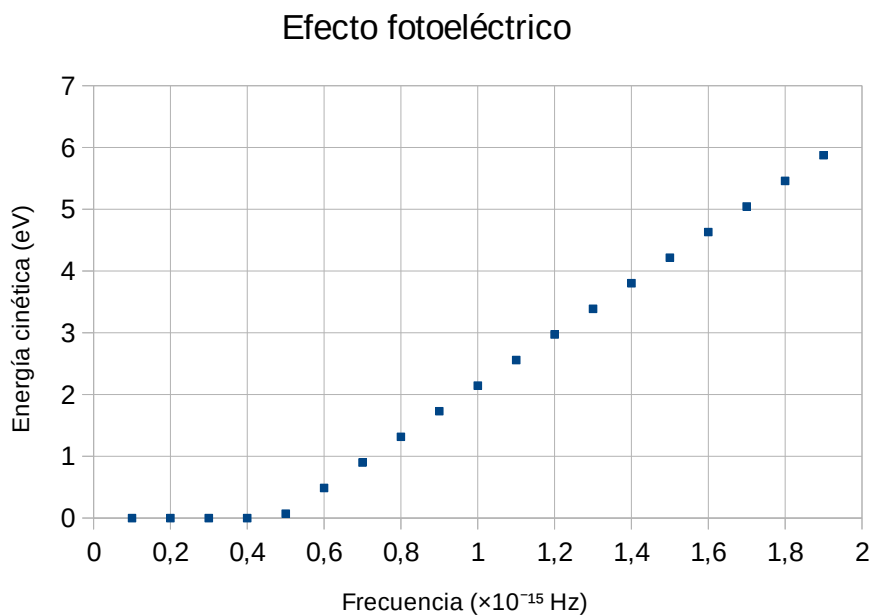
$$E_f = h \cdot f$$

En esta ecuación,  $h$  es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

La energía cinética máxima de los electrones emitidos será:

$$E_c = E_f - W_e = h \cdot f - W_e$$

La representación gráfica de la energía cinética frente a la frecuencia de la radiación incidente es una línea recta cuya pendiente es la constante de Planck. Teniendo en cuenta que para energías inferiores al trabajo de extracción no se produce efecto fotoeléctrico, la energía cinética vale cero hasta que la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción. La representación sería parecida a la de la figura.



3. En una célula fotoeléctrica, el cátodo metálico se ilumina con una radiación de  $\lambda = 175 \text{ nm}$  y el potencial de frenado es de 1 V. Cuando usamos una luz de 250 nm, el potencial de frenado será:
- A) Menor.  
 B) Mayor.  
 C) Igual.

(P.A.U. jun. 15)

**Solución:** A

Interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico.



Cuando la luz interacciona con el metal de la célula fotoeléctrica lo hace como si fuese un chorro de partículas llamadas fotones (paquetes de energía).

Cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.

Para que se produzca efecto fotoeléctrico, los electrones emitidos deben tener energía suficiente para llegar al anticátodo, lo que ocurre cuando la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, que es una característica del metal.

La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación,  $E_f$  representa la energía del fotón incidente,  $W_e$  el trabajo de extracción del metal y  $E_c$  la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.

La energía que lleva un fotón de frecuencia  $f$  es:

$$E_f = h \cdot f$$

En esta ecuación,  $h$  es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

La frecuencia de una onda es inversamente proporcional su longitud de onda  $\lambda$ ,

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Cuanto mayor sea su longitud de onda, menor será la frecuencia y menor será la energía del fotón.

La energía cinética máxima de los electrones emitidos será:

$$E_c = E_f - W_e$$

La energía del fotón, que depende de la frecuencia  $f$ , se escribe en función de la longitud de onda  $\lambda$ .

$$E_f = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

La energía cinética  $E_c$  máxima de los electrones se escribe en función del potencial de frenado

$$E_c = |e| \cdot V$$

La ecuación de Einstein queda

$$\frac{h \cdot c}{\lambda} = W_e + |e| \cdot V$$

Por lo tanto, cuanto mayor sea su longitud de onda menor será la energía de los fotones y la energía cinética y el potencial de frenado de los electrones emitidos.

Si tuviésemos todos los datos para hacer los cálculos (la constante de Planck, la velocidad de la luz en el vacío y la carga del electrón) descubriríamos que la radiación de 250 nm no produciría efecto fotoeléctrico.

El trabajo de extracción es:

$$W_e = \frac{h \cdot c}{\lambda} - |e| \cdot V = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] \cdot 3,00 \cdot 10^8 [\text{m/s}]}{175 \cdot 10^{-9} [\text{m}]} - 1,60 \cdot 10^{-19} [\text{C}] \cdot 1 [\text{V}] = 9,74 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Y la energía del fotón de 250 nm vale:

$$E_f = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] \cdot 3,00 \cdot 10^8 [\text{m/s}]}{250 \cdot 10^{-9} [\text{m}]} = 7,95 \cdot 10^{-19} [\text{J}]$$

Energía menor que el trabajo de extracción. No sería suficiente para producir efecto fotoeléctrico.

4. Si se duplica la frecuencia de la radiación que incide sobre un metal:

- A) Se duplica la energía cinética de los electrones extraídos.
- B) La energía cinética de los electrones extraídos no experimenta modificación.
- C) No es cierta ninguna de las opciones anteriores.

(P.A.U. sep. 14)

**Solución:** C

### Interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico.

Cuando la luz interacciona con el metal de la célula fotoeléctrica lo hace como si fuese un chorro de partículas llamadas fotones (paquetes de energía).

Cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.

Para que se produzca efecto fotoeléctrico, los electrones emitidos deben tener energía suficiente para llegar al anticátodo, lo que ocurre cuando la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, que es una característica del metal.

La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación,  $E_f$  representa la energía del fotón incidente,  $W_e$  el trabajo de extracción del metal y  $E_c$  la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.

La energía que lleva un fotón de frecuencia  $f$  es:

$$E_f = h \cdot f$$

En esta ecuación,  $h$  es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

La energía cinética máxima de los electrones emitidos será:

$$E_c = E_f - W_e$$

Por lo tanto, si se duplica la frecuencia de la radiación incidente, se duplica la energía de los fotones, y se hace mayor la energía cinética (y la velocidad) de los electrones emitidos.

Por tanto, la opción B es falsa.

Pero como no hay proporcionalidad entre la energía cinética y la energía del fotón, la opción A también es falsa.

5. Al irradiar un metal con luz roja (682 nm) se produce efecto fotoeléctrico. Si irradiamos el mismo metal con luz amarilla (570 nm):
- A) No se produce efecto fotoeléctrico.
  - B) Los electrones emitidos se mueven más rápidamente.
  - C) Se emiten más electrones pero a la misma velocidad.

(P.A.U. jun. 14)

### **Solución:** B

### Interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico.

Cuando la luz interacciona con el metal de la célula fotoeléctrica lo hace como si fuese un chorro de partículas llamadas fotones (paquetes de energía).

Cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.

Para que se produzca efecto fotoeléctrico, los electrones emitidos deben tener energía suficiente para llegar al anticátodo, lo que ocurre cuando la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, que es una característica del metal.

La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación,  $E_f$  representa la energía del fotón incidente,  $W_e$  el trabajo de extracción del metal y  $E_c$  la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.

La energía que lleva un fotón de frecuencia  $f$  es:

$$E_f = h \cdot f$$

En esta ecuación,  $h$  es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

La frecuencia de una onda es inversamente proporcional su longitud de onda  $\lambda$ ,

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Cuanto menor sea su longitud de onda, mayor será la frecuencia y mayor será la energía del fotón.

La energía cinética máxima de los electrones emitidos será:

$$E_c = E_f - W_e$$

Por lo tanto, cuanto mayor sea la energía de los fotones, mayor será la energía cinética (y la velocidad) de los electrones emitidos.

Las otras opciones:

A. Falsa. Si la luz roja produce efecto fotoeléctrico es que sus fotones tienen energía suficiente para extraer los electrones del metal. Como los fotones de luz amarilla tienen más energía (porque su longitud de onda es menor), también podrán producir efecto fotoeléctrico.

C. Falsa. Como ya se dijo, el efecto fotoeléctrico se produce cuándo cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía. Para producir más electrones tendría que haber más fotones. La cantidad de fotones está relacionada con la intensidad de la luz, pero no tiene que ver con la energía de los fotones.

6. Una radiación monocromática, de longitud de onda 300 nm, incide sobre cesio. Si la longitud de onda umbral del cesio es 622 nm, el potencial de frenado es:

A) 12,5 V

B) 2,15 V

C) 125 V

Datos:  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ;  $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

(P.A.U. sep. 13)

### Datos

Longitud de onda de la radiación

Longitud de onda umbral del cesio

Constante de Planck

Velocidad de la luz en el vacío

Carga del electrón

### Incógnitas

Potencial de frenado

### Otros símbolos

Frecuencia umbral

### Ecuaciones

Ecuación de Planck (energía de un fotón)

Ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico

Relación entre la frecuencia de una onda luminosa y la longitud de onda

Relación entre la energía cinética de los electrones y el potencial de frenado  $E_c = |e| \cdot V$

### Cifras significativas: 3

$$\lambda = 300 \text{ nm} = 3,00 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$\lambda_0 = 622 \text{ nm} = 6,22 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$V$$

$$f_0$$

$$E_f = h \cdot f$$

$$E_f = W_e + E_c$$

$$f = c / \lambda$$

$$E_c = |e| \cdot V$$

### Solución: B

Interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico.

Cuando la luz interacciona con el metal de la célula fotoeléctrica lo hace como si fuese un chorro de partículas llamadas fotones (paquetes de energía).

Cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.

Para que se produzca efecto fotoeléctrico, los electrones emitidos deben tener energía suficiente para llegar al anticátodo, lo que ocurre cuando la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, que es una característica del metal.

La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación,  $E_f$  representa la energía del fotón incidente,  $W_e$  el trabajo de extracción del metal y  $E_c$  la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.

La energía que lleva un fotón de frecuencia  $f$  es:

$$E_f = h \cdot f$$

En esta ecuación,  $h$  es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

Partiendo de la ecuación de Einstein y sustituyendo en ella las de Planck y la relación entre longitud de onda y frecuencia, queda

$$E_c = E_f - W_e = h \cdot f - h \cdot f_0 = \frac{h \cdot c}{\lambda} - \frac{h \cdot c}{\lambda_0} = h \cdot c \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)$$

$$E_c = 6,62 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] \cdot 3,00 \cdot 10^8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}] \left( \frac{1}{3,00 \cdot 10^{-7} [\text{m}]} - \frac{1}{6,22 \cdot 10^{-7} [\text{m}]} \right) = 3,43 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Usando la relación entre la energía cinética de los electrones y el potencial de frenado

$$E_c = |e| \cdot V \Rightarrow V = \frac{E_c}{|e|} = \frac{3,43 \cdot 10^{-19} [\text{J}]}{1,6 \cdot 10^{-19} [\text{C}]} = 2,14 \text{ V}$$

7. La longitud de onda asociada a un electrón de 100 eV de energía cinética es:

- A)  $2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$
- B)  $1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
- C)  $10^{-7} \text{ m}$

Datos:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ;  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ;  $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

(P.A.U. sep. 13)

**Solución:** B

De Broglie propuso que en algunos casos el comportamiento de ciertas partículas podría interpretarse como el de ondas cuya longitud de onda asociada  $\lambda$  vendría dada por la expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

En la ecuación,  $h$  es la constante de Planck,  $m$  la masa de la partícula y  $v$  su velocidad.

La energía cinética de 100 eV es:

$$E_c = 100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} [\text{C}] \cdot 1 [\text{V}] = 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

Un electrón con esa energía cinética se mueve a una velocidad de:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-17} [\text{J}]}{9,1 \cdot 10^{-31} [\text{kg}]}} = 5,93 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la ecuación de De Broglie, queda

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}]}{9,1 \cdot 10^{-31} [\text{kg}] \cdot 5,93 \cdot 10^6 [\text{m/s}]} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

8. Se produce efecto fotoeléctrico cuando fotones de frecuencia  $f$ , superior a una frecuencia umbral  $f_0$ , inciden sobre ciertos metales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- A) Se emiten fotones de menor frecuencia.
- B) Se emiten electrones.
- C) Hay un cierto retraso temporal entre el instante de la iluminación y el de la emisión de partículas.

(P.A.U. jun. 13)

**Solución:** B

Interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico.

Cuando la luz interacciona con el metal de la célula fotoeléctrica lo hace como si fuese un chorro de partículas llamadas fotones (paquetes de energía).

Cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.

Para que se produzca efecto fotoeléctrico, los electrones emitidos deben tener energía suficiente para llegar al anticátodo, lo que ocurre cuando la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, que es una característica del metal.

La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación,  $E_f$  representa la energía del fotón incidente,  $W_e$  el trabajo de extracción del metal y  $E_c$  la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.

La energía que lleva un fotón de frecuencia  $f$  es:

$$E_f = h \cdot f$$

En esta ecuación,  $h$  es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s

Las otras opciones:

A. Falsa. El fenómeno por el que algunas sustancias emiten radiación de menor frecuencia al ser iluminadas se conoce como fluorescencia, pero no tiene nada que ver con el efecto fotoeléctrico.

C. Falsa. Una de las leyes experimentales del efecto fotoeléctrico dice que la emisión de electrones por el metal es instantánea al ser iluminado con la frecuencia adecuada. No existe ningún retraso.

9. Según la hipótesis de De Broglie, se cumple que:

A) Un protón y un electrón con la misma velocidad tienen asociada la misma onda.

B) Dos protones a diferente velocidad tienen asociada la misma onda.

C) La longitud de la onda asociada a un protón es inversamente proporcional a su momento lineal.

(P.A.U. sep. 12)

**Solución:** C

De Broglie propuso que en algunos casos el comportamiento de ciertas partículas podría interpretarse como el de ondas cuya longitud de onda asociada  $\lambda$  vendría dada por la expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

En la ecuación,  $h$  es la constante de Planck y  $m$  la masa de la partícula y  $v$  su velocidad.

Como  $h$  es una constante y  $m \cdot v$  es la expresión del momento lineal o cantidad de movimiento, la longitud de la onda asociada a un protón es inversamente proporcional a su momento lineal.

Las otras opciones.

A. Falsa. De la expresión anterior se deduce que la longitud de onda depende de la masa además de la velocidad. Como la masa de un protón es mucho mayor que la del electrón, la longitud de onda asociada a un protón que se mueve a la misma velocidad que un electrón es mucho menor.

B. Falsa. El protón más rápido tendrá menor longitud de onda.

10. Con un rayo de luz de longitud de onda  $\lambda$  no se produce efecto fotoeléctrico en un metal. Para conseguirlo se debe aumentar:

A) La longitud de onda  $\lambda$ .

B) La frecuencia  $f$ .

C) El potencial de frenado.

(P.A.U. jun. 11)

**Solución:** B

Interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico.

Cuando la luz interacciona con el metal de la célula fotoeléctrica lo hace como si fuese un chorro de partículas llamadas fotones (paquetes de energía).

Cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.

Para que se produzca efecto fotoeléctrico, los electrones emitidos deben tener energía suficiente para llegar al anticátodo, lo que ocurre cuando la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, que es una característica del metal.

La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación,  $E_f$  representa la energía del fotón incidente,  $W_e$  el trabajo de extracción del metal y  $E_c$  la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.

La energía que lleva un fotón de frecuencia  $f$  es:

$$E_f = h \cdot f$$

En esta ecuación,  $h$  es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s

Cuanto mayor sea la frecuencia, mayor será la energía del fotón.

Si no se produce efecto fotoeléctrico con el rayo de luz original, habrá que emplear otro de mayor energía, o sea, de mayor frecuencia.

11. Para producir efecto fotoeléctrico no se usa luz visible, sino ultravioleta, y es porque la luz UV:
- A) Calienta más la superficie metálica.
  - B) Tiene mayor frecuencia.
  - C) Tiene mayor longitud de onda.

(P.A.U. sep. 09)

**Solución:** B

Una de las leyes experimentales del efecto fotoeléctrico dice que, empleando luz monocromática, solo se produce efecto fotoeléctrico si la frecuencia de la luz supera un valor mínimo, llamado frecuencia umbral. Como la luz ultravioleta tiene mayor frecuencia que la luz visible, es más seguro que se produzca efecto fotoeléctrico con luz ultravioleta que con luz visible, aunque existen metales empleados como cátodos en células fotoeléctricas en los que luz visible, de alta frecuencia como azul o violeta, puede hacerlas funcionar.

12. Se produce efecto fotoeléctrico, cuando fotones más energéticos que los visibles, como por ejemplo luz ultravioleta, inciden sobre la superficie limpia de un metal. ¿De qué depende el que haya o no emisión de electrones?:
- A) De la intensidad de la luz.
  - B) De la frecuencia de la luz y de la naturaleza del metal.
  - C) Solo del tipo de metal.

(P.A.U. sep. 08)

**Solución:** B

La [ecuación de Einstein](#) del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

Para que ocurra efecto fotoeléctrico debe haber electrones con energía suficiente para llegar al anticátodo. Esto depende de que la energía de los fotones supere al trabajo de extracción, que es una característica del metal. La energía de los fotones depende de su frecuencia (ecuación de Planck).

$$E_f = h \cdot f$$

13. De la hipótesis de De Broglie, dualidad onda-corpúsculo, se deriva como consecuencia:
- A) Que las partículas en movimiento pueden mostrar comportamiento ondulatorio.
  - B) Que la energía total de una partícula es  $E = m \cdot c^2$ .
  - C) Que se puede medir simultáneamente y con precisión ilimitada la posición y el momento de una partícula.

(P.A.U. jun. 08)

**Solución:** A. Ver la respuesta a la cuestión de [junio de 2005](#)

14. Un metal cuyo trabajo de extracción es 4,25 eV, se ilumina con fotones de 5,5 eV. ¿Cuál es la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos?

A) 5,5 eV  
B) 1,25 eV  
C) 9,75 eV

(P.A.U. sep. 07)

**Solución:** B

La [ecuación de Einstein](#) del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación,  $E_f$  representa la energía del fotón incidente,  $W_e$  el trabajo de extracción del metal y  $E_c$  la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.

Sustituyendo valores, queda:

$$E_c = E_f - W_e = 5,5 - 4,25 = 1,25 \text{ eV}$$

15. La relación entre la velocidad de una partícula y la longitud de onda asociada se establece:

A) Con la ecuación de De Broglie.  
B) Por medio del principio de Heisenberg.  
C) A través de la relación de Einstein masa-energía.

(P.A.U. jun. 05)

**Solución:** A

La interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico demostró que la luz se comporta como un chorro de partículas llamadas fotones de energía:

$$E = h \cdot f$$

En el efecto Compton, el fotón se comporta como una partícula de momento lineal:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h \cdot f}{\lambda \cdot f} = \frac{h}{\lambda}$$

Como ya estaba establecido que la luz se propaga como una onda, se propuso que el comportamiento era dual: en algunos experimentos el comportamiento de la luz parece ser corpuscular y en otros, ondulatorio. De Broglie sugirió que este comportamiento dual también afecta a cualquier partícula. En algunos casos el comportamiento de ciertas partículas podría interpretarse como el de ondas cuya longitud de onda asociada  $\lambda$  viene dada por la expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

En la ecuación,  $h$  es la constante de Planck,  $m$  la masa de la partícula y  $v$  su velocidad.

Esta hipótesis quedó confirmada en pocos años por los experimentos de difracción de electrones.

16. Cuando se dispersan rayos X en grafito, se observa que emergen fotones de menor energía que la incidente y electrones de alta velocidad. Este fenómeno puede explicarse por una colisión:

A) Totalmente inelástica entre un fotón y un átomo.  
B) Elástica entre un fotón y un electrón.  
C) Elástica entre dos fotones.

(P.A.U. sep. 04)

**Solución:** B

Se conoce como efecto Compton, que, junto a la interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico, sentó las bases de la naturaleza corpuscular de la luz (aunque sin abandonar su carácter ondulatorio).

En el efecto Compton los electrones débilmente ligados a los átomos de carbono son golpeados por los fotones en un choque elástico. (Se conserva la energía, y también el momento lineal). Los rayos X dispersados salen con una energía menor, y, por tanto, su longitud de onda aumenta.

$$\lambda_f - \lambda_0 = \frac{h}{m \cdot c} (1 - \cos \theta)$$

La ecuación permite calcular la variación de la longitud de onda de la radiación emergente  $\lambda_f$  respecto a la emergente  $\lambda_0$  en función del ángulo de dispersión  $\theta$ . El término  $h / (m \cdot c)$  tiene dimensión de longitud y recibe el nombre de longitud de onda de Compton.

La opción A no puede ser correcta porque en un choque inelástico las partículas quedan pegadas. Cuando un fotón incide en un átomo, y la energía no llega para expulsar un electrón, se provoca un salto del electrón a un nivel de energía superior, y luego se emite un fotón cuando el electrón retorna a su nivel de energía más bajo.

La opción C tampoco es correcta. En un choque entre dos fotones, si la energía es suficiente y las condiciones adecuadas, se producirá un par electrón-positrón, de acuerdo con la ecuación de equivalencia entre masa y energía de Einstein:  $E = m \cdot c^2$ .

17. La luz generada por el Sol:

- A) Está formada por ondas electromagnéticas de diferente longitud de onda.
- B) Son ondas que se propagan en el vacío a diferentes velocidades.
- C) Son fotones de la misma energía.

(P.A.U. sep. 04)

**Solución:** A

La luz del Sol es luz blanca. Newton ya demostró que, al pasar a través de un prisma de vidrio, se dispersaba en varios colores que al pasar de nuevo por un segundo prisma, orientado adecuadamente, recomponían de nuevo la luz blanca. Aunque Newton pensaba que la luz estaba formada por un chorro de partículas, fue la hipótesis ondulatoria de su rival Huygens la que se fue comprobando a lo largo de los siglos. Así Young consiguió figuras de interferencia al hacer pasar luz a través de una doble rendija. Maxwell unificó la fuerza eléctrica y la magnética y vio que el valor de la velocidad de la luz en el vacío se obtenía de la expresión que combina la permitividad eléctrica  $\epsilon_0$  y la permeabilidad magnética  $\mu_0$  del vacío:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

Maxwell demostró que la luz es una superposición de un campo eléctrico oscilante que generaba un campo magnético oscilante perpendicular al eléctrico que se propagaba por el vacío a 300 000 km/s.

Una luz monocromática tiene una longitud de onda determinada (entre 400 y 700 nm). Los colores del arco iris corresponden a una dispersión de la luz en sus componentes monocromáticas.

Las otras opciones:

La opción B no puede ser correcta, ya que uno de los postulados de Einstein de la relatividad especial dice que la velocidad de la luz en el vacío es una constante, independientemente del sistema de referencia desde el que se mida.

La opción C tampoco es la correcta. Cuando la naturaleza ondulatoria de la luz estaba probada, la interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico demostró que la luz monocromática era también un chorro de partículas a las que llamó fotones, que tenían una energía dada por la ecuación de Planck

$$E = h \cdot f$$

En la ecuación,  $h$  es la constante de Planck y  $f$  la frecuencia de la luz monocromática. En las experiencias del efecto fotoeléctrico se vio que al iluminar el cátodo con luz monocromática de distintas frecuencias, obtenidas por ejemplo, dispersando la luz blanca con un prisma, existía una frecuencia mínima o frecuencia umbral para que se produjese el efecto fotoeléctrico. Según la interpretación de Einstein, la luz que no producía el efecto fotoeléctrico era porque cada uno de los fotones no tenía la energía suficiente.



## ● Física nuclear y de partículas

1. Indica, justificando la respuesta, cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- A) La actividad de una muestra radiactiva es el número de desintegraciones que tienen lugar en 1 s.
- B) Período de semidesintegración y vida media tienen el mismo significado.
- C) La radiación gamma es la emisión de electrones por parte del núcleo de un elemento radiactivo.

(P.A.U. sep. 15)

**Solución:** A

La actividad radiactiva es el número de desintegraciones por segundo y es proporcional a la cantidad de isótopo radiactivo

$$A = -dN/dt = \lambda \cdot N$$

Donde  $\lambda$  es la constante de desintegración radiactiva, que aparece en la ecuación exponencial de desintegración:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

La actividad radiactiva disminuye con el tiempo. Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por  $\lambda$  queda:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Las otras opciones:

B: Falsa. La vida media es la «esperanza de vida» de un núcleo. Es un término estadístico igual a la suma de los productos del tiempo de vida de cada núcleo por el número de núcleos que tienen ese tiempo dividido por el total de núcleos.

$$\tau = \frac{\int_0^{N_0} t dN}{N_0} = \frac{1}{\lambda}$$

Donde  $\lambda$  es la constante de desintegración radiactiva, que aparece en la ecuación exponencial de desintegración:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

El período de semidesintegración es el tiempo que tarda en reducirse a la mitad la cantidad de núcleos de sustancia radiactiva. Si en la ecuación de desintegración sustituimos  $N$  por  $N_0 / 2$ ,  $t = T_{1/2}$ .

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Al extraer logaritmos:

$$\ln(1/2) = -\lambda \cdot T_{1/2}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

La relación entre el período de semidesintegración y la vida media es:

$$T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$$

C: Falsa. La radiación gamma  $\gamma$  es una radiación electromagnética de alta energía, mientras que la emisión de electrones por parte del núcleo de un elemento radiactivo es la desintegración  $\beta$ .

2. El periodo de semidesintegración de un elemento radiactivo que se desintegra emitiendo una partícula alfa es de 28 años. ¿Cuánto tiempo tendrá que transcurrir para que la cantidad de muestra sea el 75 % de la inicial?

- A) 4234 años.

- B) 75 años.  
C) 11,6 años.

(P.A.U. jun. 15)

**Solución: C**

El período de semidesintegración de una sustancia radiactiva es el tiempo que transcurre hasta que solo queda la mitad de la muestra original. Es un valor constante.

Si la cantidad de muestra que queda sin desintegrar al cabo de un tiempo es el 75 %, significa que aún no ha transcurrido un período de desintegración. La opción C es la única que propone un tiempo inferior al período de semidesintegración.

Es una consecuencia de la ley de desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Siendo  $\lambda$  la constante de desintegración.

Para encontrar la relación con el período  $T_{1/2}$  de semidesintegración sacamos logaritmos:

$$-\ln(N/N_0) = \lambda \cdot t$$

Para  $t = T_{1/2}$ ,  $N = N_0 / 2$ ,

$$-\ln \frac{(N_0/2)}{N_0} = \lambda T_{1/2}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{28 [\text{año}]} = 0,024 \text{ año}^{-1}$$

Despejando el tiempo  $t$  en la ecuación de logaritmos

$$t = \frac{-\ln(N/N_0)}{\lambda} = \frac{-\ln 0,75}{0,024 [\text{año}^{-1}]} = 11,6 \text{ años}$$

3. En la formación del núcleo de un átomo:  
A) Disminuye la masa y se desprende energía.  
B) Aumenta la masa y se absorbe energía.  
C) En unos casos sucede la opción A y en otros casos la B.

(P.A.U. sep. 14)

**Solución: A**

La masa del núcleo es siempre inferior a la suma de las masas de los nucleones que lo componen. La diferencia entre la masa del núcleo y los nucleones se llama defecto de masa « $\Delta m$ ».

El proceso hipotético de la formación de un núcleo a partir de la unión de los protones y neutrones que lo forman desprende una gran cantidad de energía que procede de la transformación del defecto de masa « $\Delta m$ » en energía « $E$ », según la ecuación de Einstein.

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

Siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío.

A esta energía se la conoce como energía de enlace y, dividida por el número de nucleones, como energía de enlace por nucleón.

Esta energía de enlace por nucleón aumenta con el número atómico en los núcleos más ligeros hasta alcanzar un máximo en el hierro, a partir del cual descendiendo ligeramente. Esto indica que el núcleo de hierro es el más estable.

En realidad los núcleos de los átomos se forman por reacciones de fusión nuclear o bien en el interior de las estrellas, los anteriores al hierro, o bien en la explosión de supernovas, los posteriores.

4. La actividad en el instante inicial de medio mol de una sustancia radiactiva cuyo período de semidesintegración es de 1 día, es:

A)  $2,41 \cdot 10^{18}$  BqB)  $3,01 \cdot 10^{23}$  Bq

C) 0,5 Bq

Dato:  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ 

(P.A.U. sep. 13)

**Solución:** A

La actividad radiactiva es el número de desintegraciones por segundo y es proporcional a la cantidad de isótopo radiactivo

$$A = - dN / dt = \lambda \cdot N$$

Siendo  $\lambda$  la constante de desintegración radiactiva.

Integrando la ecuación anterior, se encuentra la relación entre  $\lambda$  y el período de semidesintegración  $T_{1/2}$

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\lambda = \frac{\ln(N_0/N)}{t}$$

Cuando  $t = T_{1/2}$ ,  $N = N_0 / 2$

$$\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{1 [\text{día}] \cdot 24 [\text{h/día}] \cdot 3600 [\text{s/h}]} = 8,02 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

$$A = \lambda \cdot N = 8,02 \cdot 10^{-6} [\text{s}^{-1}] \cdot 0,500 [\text{mol}] \cdot 6,022 \cdot 10^{23} [\text{mol}^{-1}] = 2,42 \cdot 10^{18} \text{ Bq}$$

5. En la reacción  ${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^A_Z\text{X} + 3 {}^1_0\text{n}$  se cumple que:

A) Es una fusión nuclear.

B) Se libera energía correspondiente al defecto de masa.

C) El elemento X es  ${}^{92}_{35}\text{X}$ .

(P.A.U. jun. 13)

**Solución:** B

En las reacciones nucleares se libera energía. Esta energía proviene de la transformación de masa en energía que sigue la ley de Einstein.

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

Siendo  $\Delta m$  el defecto de masa y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío.

Las otras opciones:

A: Falsa. El proceso de fusión nuclear consiste en la reacción entre núcleos ligeros para producir otros más pesados. Esta reacción nuclear consiste en romper un núcleo pesado en otros más ligeros: es una fisión.

C: Cumple el principio de conservación del número bariónico ( $n.^\circ$  nucleones =  $n.^\circ$  de protones +  $n.^\circ$  neutrones)

$$235 + 1 = 141 + A + 3 \cdot 1$$

$$A = 92$$

Pero no el de conservación de la carga eléctrica:

$$92 + 0 = 56 + Z + 3 \cdot 0$$

$$Z = 36 \neq 35$$

6. Si un núcleo atómico emite una partícula  $\alpha$  y dos partículas  $\beta$ , su número atómico  $Z$  y másico  $A$ :

A)  $Z$  aumenta en dos unidades y  $A$  disminuye en dos.

- B)  $Z$  no varía y  $A$  disminuye en cuatro.  
 C)  $Z$  disminuye en dos y  $A$  no varía.

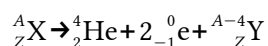
(P.A.U. jun. 12)

**Solución:** B

Las propiedades del núcleo resultante después de una emisión alfa o beta pueden deducirse por la naturaleza de estas radiaciones y las leyes de conservación del número másico y de la carga eléctrica en los procesos nucleares.

Una partícula alfa es un núcleo de helio-4 ( $\alpha = {}^4_2\text{He}$ ) y una partícula beta(-) es un electrón ( $\beta^- = {}^0_{-1}\text{e}$ )

Escribiendo las reacciones del enunciado y aplicando las leyes de conservación mencionadas



7. Una roca contiene el mismo número de núcleos de dos isótopos radiactivos A y B, de periodos de semidesintegración de 1600 años y 1000 años respectivamente. Para estos isótopos se cumple que:  
 A) A tiene mayor actividad radiactiva que B.  
 B) B tiene mayor actividad que A.  
 C) Ambos tienen la misma actividad.

(P.A.U. sep. 11)

**Solución:** B

La actividad radiactiva es el número de desintegraciones por segundo y es proporcional a la cantidad de isótopo radiactivo

$$A = -dN / dt = \lambda \cdot N$$

Siendo  $\lambda$  la constante de desintegración radiactiva.

Integrando la ecuación anterior, se encuentra la relación entre  $\lambda$  y el periodo de semidesintegración  $T_{1/2}$ .

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\lambda = \ln(N_0 / N) / t$$

Cuando  $t = T_{1/2}$ ,  $N = N_0 / 2$

$$\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$$

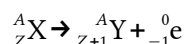
Tendrá una constante  $\lambda$  de desintegración mayor el isótopo de menor periodo de semidesintegración.

8. En la desintegración beta(-):  
 A) Se emite un electrón de la parte externa del átomo.  
 B) Se emite un electrón desde el núcleo.  
 C) Se emite un neutrón.

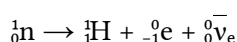
(P.A.U. sep. 11)

**Solución:** B

Las leyes de Soddy dicen que cuando un átomo emite radiación  $\beta(-)$ , el átomo resultante tiene el mismo número másico pero una unidad más de número atómico.



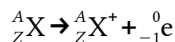
Cuando se analizó la radiación  $\beta(-)$  se descubrió que estaba constituida por electrones. Como la desintegración es debida a la inestabilidad del núcleo, los electrones proceden del núcleo aunque el núcleo está constituido solo por neutrones y protones. Pero se sabe que un neutrón aislado se descompone por interacción débil en poco tiempo (una vida media de unos 15 min) en un protón, un electrón y un antineutrino electrónico.



Por lo que se puede suponer que los electrones nucleares proceden de una desintegración semejante.

Las otras opciones:

A: Falsa. Si un átomo emitiese electrones de su envoltura, se obtendría un átomo del mismo número atómico y másico, pero con carga positiva (un catión).



B: Falsa. La emisión de un neutrón no es una desintegración natural del núcleo. Únicamente ocurre cuando es bombardeado por otras partículas (incluso neutrones). Las formas de desintegración natural (radiactividad natural) son la desintegración alfa ( $\alpha$  = núcleo de helio-4), desintegración beta ( $\beta$  = electrón) y la emisión de radiación gamma ( $\gamma$  = radiación electromagnética de alta energía).

9. El elemento radioactivo  ${}^{232}_{90}\text{Th}$  se desintegra emitiendo una partícula alfa, dos partículas beta y una radiación gamma. El elemento resultante es:

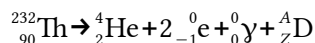


(P.A.U. jun. 11)

**Solución:** C

Las partículas alfa son núcleos de helio  ${}^4_2\text{He}$ , las partículas beta electrones  ${}^0_{-1}\text{e}$  y las radiaciones gamma fotones  ${}^0_0\gamma$ .

Escribiendo la reacción nuclear:



Aplicando los principios de conservación del número bariónico (o número másico) y de la carga, queda:

$$232 = 4 + A \Rightarrow A = 228$$

$$90 = 2 + 2 \cdot (-1) + Z \Rightarrow Z = 90$$

10. En una fusión nuclear:

A) No se precisa energía de activación.

B) Intervienen átomos pesados.

C) Se libera energía debida al defecto de masa.

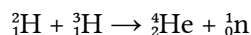
(P.A.U. sep. 10)

**Solución:** C

El proceso de fusión nuclear consiste en la reacción entre núcleos ligeros para producir otros más pesados.

Es el proceso que proporciona la energía las estrellas y que se produce en la bomba de hidrógeno.

Una reacción de fusión sería la que ocurre entre los isótopos tritio y deuterio para producir helio y un neutrón.



Las reacciones nucleares producen una gran cantidad de energía que procede de la transformación del defecto de masa « $\Delta m$ » en energía « $E$ », según la ecuación de Einstein.

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

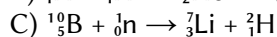
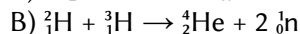
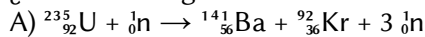
Siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío.

La suma de las masas del helio-4 y del neutrón es inferior a la suma de las masas del tritio  ${}^3\text{H}$  y del deuterio  ${}^2\text{H}$ .

La energía de activación es un concepto de la cinética química que mide la energía necesaria para iniciar un proceso, como la que aporta la llama de una cerilla para iniciar la combustión del papel. Las reacciones nucleares de fusión necesitan una gran energía para acercar los núcleos a distancias muy cortas venciendo la repulsión eléctrica entre ellos. La temperatura que necesitaría un gas de átomos de isótopos de hidrógeno para que los choques entre ellos fueran eficaces y los núcleos produjeran helio es de la orden del mi-

llón de grados. El proceso ocurre en el interior de las estrellas donde la energía gravitatoria produce enormes temperaturas. En las pruebas nucleares de la bomba H de hidrógeno, se empleaba una bomba atómica de fisión como detonante. En la actualidad los experimentos para producir energía nuclear de fusión emplean láseres de alta energía que comuniquen a átomos individuales la energía suficiente para superar la barrera de repulsión eléctrica, y aunque se han obtenido resultados positivos, no se ha diseñado un sistema rentable de producir energía a gran escala.

11. ¿Cuál de las siguientes reacciones nucleares es correcta?



(P.A.U. jun. 10)

**Solución:** A

Por los principios de conservación del número bariónico (n.º de nucleones = n.º de protones + n.º de neutrones) y de la carga, la única solución posible es la A.

Reacción	N.º bariónico	Carga
A: ${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 3 {}^1_0\text{n}$	$235 + 1 = 141 + 92 + 3 \cdot 1 = 236$	$92 + 0 = 56 + 36 + 3 \cdot 0$
B: ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2 {}^1_0\text{n}$	$2 + 3 \neq 4 + 2 \cdot 1$	$1 + 1 = 2 + 2 \cdot 0$
C: ${}^{10}_5\text{B} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + {}^4_2\text{He}$	$10 + 1 \neq 7 + 2$	$5 + 0 \neq 3 + 1$

12. Una masa de átomos radiactivos tarda tres años en reducir su masa al 90 % de la masa original.

¿Cuántos años tardará en reducirse al 81 % de la masa original?:

A) Seis.

B) Más de nueve.

C) Tres.

(P.A.U. sep. 09)

**Solución:** A

El período de semidesintegración de una sustancia radiactiva es el tiempo que transcurre hasta que solo queda la mitad de la muestra original. Es un valor constante.

La ecuación que da la cantidad  $N$  de sustancia que queda al fin y al cabo de un tiempo  $t$  es:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Siendo  $\lambda$  la constante de desintegración radiactiva.

Escribiendo esta ecuación con logaritmos y sustituyendo los datos se puede calcular la constante  $\lambda$ :

$$\ln N = \ln N_0 - \lambda \cdot t$$

$$\ln 0,90 N_0 = \ln N_0 - \lambda \cdot 3$$

$$\ln 0,90 = -\lambda \cdot 3$$

$$\lambda = \frac{-\ln 0,90}{3} = 0,015 \text{ año}^{-1}$$

Con el dato del 81 % despejamos  $t$  y queda:

$$t = \frac{-\ln 0,81}{\lambda} = \frac{-\ln 0,81}{0,015 \text{ año}^{-1}} = 6 \text{ años}$$

También se podría resolver notando que el 81 % de la muestra original es el 90 % del que quedaba a los 3 años. Por tanto, tendrían que transcurrir 3 años más.

13. Si la vida media de un isótopo radiactivo es  $5,8 \cdot 10^{-6}$  s, el periodo de semidesintegración es:

- A)  $1,7 \cdot 10^5$  s
- B)  $4,0 \cdot 10^{-6}$  s
- C)  $2,9 \cdot 10^5$  s

(P.A.U. jun. 09)

**Solución:** B

La respuesta más simple es por semejanza. Aunque período de semidesintegración y vida media no son lo mismo, son del mismo orden de magnitud.

La vida media es la «esperanza de vida» de un núcleo. Es un término estadístico igual a la suma de los productos del tiempo de vida de cada núcleo por el número de núcleos que tienen ese tiempo dividido por el total de núcleos.

$$\tau = \frac{\int_0^{N_0} t \, dN}{N_0} = \frac{1}{\lambda}$$

Donde  $\lambda$  es la constante de desintegración radiactiva, que aparece en la ecuación exponencial de desintegración:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

El período de semidesintegración es el tiempo que tarda en reducirse a la mitad la cantidad de núcleos de sustancia radiactiva. Si en la ecuación de desintegración sustituimos  $N$  por  $N_0 / 2$ ,  $t = T_{1/2}$ .

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Extraemos logaritmos:

$$\ln(1/2) = -\lambda \cdot T_{1/2}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

El período de semidesintegración es algo menor ( $\ln 2 = 0,693$ ) que la vida media  $\tau$ .

$$T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$$

Esto se cumple con la opción B.

$$\frac{4,0 \cdot 10^{-6} \text{ [s]}}{5,8 \cdot 10^{-6} \text{ [s]}} = 0,69 \approx \ln 2$$

14. En una reacción nuclear de fisión:

- A) Se funden núcleos de elementos ligeros (deuterio o tritio).
- B) Es siempre una reacción espontánea.
- C) Se libera gran cantidad de energía asociada al defecto de masa.

(P.A.U. jun. 09)

**Solución:** C

En las reacciones nucleares se libera mucha energía que es equivalente al defecto de masa, según la ecuación de Einstein:

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

Las reacciones de fisión se producen al bombardear un núcleo pesado, uranio o plutonio, con neutrones térmicos, que se mueven a la velocidad adecuada para producir la fragmentación del núcleo en dos núcleos

más pequeños y la emisión de dos o tres neutrones que producen una reacción en cadena (si no se controla).

Las otras opciones:

A: Falsa. El proceso propuesto corresponde a una reacción de fusión. Concretamente, la que ocurre en el interior de las estrellas para producir helio.

B: Falsa. Los procesos de fisión deben ser provocados. Aunque es cierto que algunos isótopos del uranio emiten espontáneamente neutrones, se necesita enriquecer el uranio para que la emisión de neutrones sea capaz de mantener la reacción. Y se necesita que se acumule suficiente cantidad de uranio para superar la masa crítica que podría provocar la reacción de fisión.

15. El  $^{237}_{94}\text{Pu}$  se desintegra, emitiendo partículas alfa, con un período de semidesintegración de 45,7 días. Los días que deben transcurrir para que la muestra inicial se reduzca la octava parte son:

- A) 365,6  
B) 91,4  
C) 137,1

(P.A.U. sep. 08)

**Solución:** C

El período de semidesintegración de una sustancia radiactiva es el tiempo que transcurre hasta que solo queda la mitad de la muestra original. Es un valor constante.

Si se parte de una masa  $m$  de isótopo, al cabo de un período quedará la mitad sin desintegrar, al cabo de otro período quedará la cuarta parte y al cabo de un tercer período únicamente habrá la cuarta parte.

El tiempo transcurrido es de 3 períodos =  $3 \cdot 45,7 = 137$  días.

Es una consecuencia de la ley de desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Siendo  $\lambda$  la constante de desintegración, relacionada con el período  $T_{1/2}$  de semidesintegración por:

$$\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$$

16. Un isótopo radiactivo tiene un periodo de semidesintegración de 10 días. Si se parte de 200 gramos del isótopo, se tendrán 25 gramos del mismo al cabo de:

- A) 10 días.  
B) 30 días.  
C) 80 días.

(P.A.U. jun. 08)

**Solución:** B

El período de semidesintegración de una sustancia radiactiva es el tiempo que transcurre hasta que solo queda la mitad de la muestra original. Es un valor constante.

Si se parte de 200 g del isótopo, al cabo de 10 días quedarán 100 g (la mitad) sin desintegrar. Al cabo de otros 10 días quedarán 50 g y al cabo de otros 10 días únicamente habrá 25 g.

El tiempo transcurrido es de  $10 + 10 + 10 = 30$  días.

Es una consecuencia de la ley de desintegración radiactiva:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Siendo  $\lambda$  la constante de desintegración, relacionada con el período  $T_{1/2}$  de semidesintegración por:

$$\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$$

17. ¿Cuál de estas reacciones nucleares es posible?:

- A)  $^2_1\text{H} + ^3_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He}$



- B)  ${}^1_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^1_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$   
 C)  ${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 2 {}^1_0\text{n}$

(P.A.U. jun. 07)

**Solución: B**

Por los principios de conservación del número bariónico (n.º nucleones = n.º de protones + n.º neutrones) y de la carga, la única solución posible es la B.

Reacción	N.º bariónico	Carga
A: ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He}$	$2 + 3 \neq 4$	$1 + 1 = 2$
B: ${}^1_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^1_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$	$14 + 4 = 17 + 1$	$7 + 2 = 8 + 1$
C: ${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 2 {}^1_0\text{n}$	$235 + 1 \neq 141 + 92 + 2 \cdot 1$	$92 + 0 = 56 + 36 + 2 \cdot 0$

18. Si un núcleo atómico emite una partícula  $\alpha$ , dos partículas  $\beta^-$  y dos partículas  $\gamma$ , su número atómico:  
 A) Disminuye en dos unidades.  
 B) Aumenta en dos unidades.  
 C) No varía.

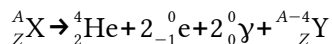
(P.A.U. jun. 07)

**Solución: C**

Las propiedades del núcleo resultante después de una emisión alfa, beta o gamma pueden deducirse por la naturaleza de estas radiaciones y las leyes de conservación del número másico y de la carga eléctrica en los procesos nucleares.

Una partícula alfa es un núcleo de helio-4 ( $\alpha = {}^4_2\text{He}$ ), una partícula beta(-) es un electrón ( $\beta^- = {}^0_{-1}\text{e}$ ) y la radiación gamma es radiación electromagnética de alta energía ( $\gamma = {}^0_0\gamma$ ).

Escribiendo las reacciones del enunciado y aplicando las leyes de conservación mencionadas

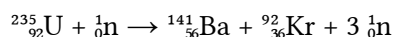


19. ¿Cuál de las siguientes reacciones nucleares representa el resultado de la fisión del  ${}^{235}_{92}\text{U}$  cuando absorbe un neutrón?  
 A)  ${}^{209}_{82}\text{Pb} + 5 \alpha + 3 \text{p} + 4 \text{n}$   
 B)  ${}^{90}_{62}\text{Sr} + {}^{140}_{54}\text{Xe} + 6 \text{n} + \beta$   
 C)  ${}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 3 \text{n}$

(P.A.U. sep. 06)

**Solución: C**

Una reacción de fisión se produce cuando un núcleo absorbe un neutrón y se rompe (fisiona) en dos fragmentos emitiendo dos o tres neutrones.



Cumple los principios de conservación del número bariónico y de la carga eléctrica:

$$235 + 1 = 141 + 92 + 3 = 236$$

$$92 + 0 = 56 + 36 + 0 = 92$$

Las otras opciones:

A: Falsa. El tamaño de los fragmentos  ${}^{209}_{82}\text{Pb}$  y  $\alpha$  ( ${}^4_2\text{He}$ ) es muy diferente, se produce un número de neutrones (4) excesivo, se emiten protones y no se cumple el principio de conservación de la carga eléctrica:  $82 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \neq 92$ .

B: Falsa. Se produce un número de neutrones (6) excesivo, se producen además electrones  $\beta$  y no se cumple el principio de conservación de la carga eléctrica:  $62 + 54 + 6 \cdot 0 + (-1) \neq 92$ .

20. Cuando se bombardea nitrógeno  $^{14}_7\text{N}$  con partículas alfa se genera el isótopo  $^{17}_8\text{O}$  y otras partículas. La reacción es:

- A)  $^{14}_7\text{N} + {}^4_2\alpha \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + \text{p}$   
 B)  $^{14}_7\text{N} + {}^4_2\alpha \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + \text{n} + \beta$   
 C)  $^{14}_7\text{N} + {}^4_2\alpha \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + \text{p} + \text{n} + \gamma$

(P.A.U. jun. 06)

**Solución:** A

Partícula	Alfa $\alpha$	Beta $\beta$	Protón p	Neutrón n	Radiación $\gamma$
N.º bariónico	4	0	1	1	0
Carga	+2	-1	+1	0	0
Símbolo	${}^4_2\text{He}$	${}^0_{-1}\text{e}$	${}^1_1\text{H}$	${}^1_0\text{n}$	${}^0_0\gamma$

Por los principios de conservación del número bariónico (n.º nucleones = n.º de protones + n.º neutrones) y de la carga, la única solución posible es la A, ya que el número bariónico total y la carga total de los reactivos y de los productos de las reacciones nucleares son:

Reactivos	N.º bariónico	Carga
$^{14}_7\text{N} + {}^4_2\alpha$ : ( $^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He}$ )	$14 (\text{N}) + 4 (\alpha) = 18$	$7 (\text{N}) + 2 (\alpha) = +9$
Productos	N.º bariónico	Carga
A) $^{17}_8\text{O} + \text{p}$ : ( $^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$ )	$17 (\text{O}) + 1 (\text{p}) = 18$	$8 (\text{O}) + 1 (\text{p}) = +9$
B) $^{17}_8\text{O} + \text{n} + \beta$ : ( $^{17}_8\text{O} + {}^1_0\text{n} + {}^0_{-1}\beta$ )	$17 (\text{O}) + 1 (\text{n}) + 0 (\beta) = 18$	$8 (\text{O}) + 0 (\text{n}) + (-1) (\beta) = +7$
C) $^{17}_8\text{O} + \text{p} + \text{n} + \gamma$ : ( $^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{n} + {}^0_0\gamma$ )	$17 (\text{O}) + 1 (\text{p}) + 1 (\text{n}) + 0 (\gamma) = 19$	$8 (\text{O}) + 1 (\text{p}) + 0 (\text{n}) + 0 (\gamma) = +9$

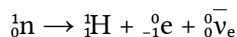
21. En la desintegración  $\beta^-$ .

- A) El número atómico aumenta una unidad.  
 B) El número másico aumenta una unidad.  
 C) Ambos permanecen constantes.

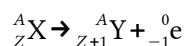
(P.A.U. jun. 05)

**Solución:** A

Una desintegración  $\beta^-$  es una emisión de un electrón del núcleo, que se produce por la transformación de un neutrón en un protón.



Por las leyes de conservación de la carga y el número másico



Actualizado: 05/08/23

#### ACLARACIONES

Los datos de los enunciados de los problemas no suelen tener un número adecuado de cifras significativas, bien porque el redactor piensa que la Física es una rama de las Matemáticas y los números enteros son números «exactos» (p. ej. la velocidad de la luz:  $3 \cdot 10^8$  m/s cree que es 300 000 000,000000 000 000 000... m/s) o porque aún no se ha enterado de que se puede usar calculadora en el examen y le parece más sencillo usar  $3 \cdot 10^8$  que 299 792 458 m/s).

Por eso he supuesto que los datos tienen un número de cifras significativas razonables, casi siempre

tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en ciertos casos, con una incertidumbre desmedida. Así que cuando tomo un dato como  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s y lo reescribo como:

***Cifras significativas: 3***

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Lo que quiero indicar es que supongo que el dato original tiene tres cifras significativas (no que las tenga en realidad) para poder realizar los cálculos con una incertidumbre más pequeña que la que tendría en ese caso. ( $3 \cdot 10^8$  m/s tiene una sola cifra significativa, y una incertidumbre relativa del 30 %. Como las incertidumbres se suelen acumular a lo largo del cálculo, la incertidumbre final sería inadmisibles. Entonces, ¿para qué realizar los cálculos? Con una estimación sería suficiente).

Cuestiones y problemas de las [Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad](#) (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.

[Respuestas](#) y composición de [Alfonso J. Barbadillo Marán](#).

Algunos cálculos se hicieron con una [hoja de cálculo](#) de [LibreOffice](#) u [OpenOffice](#) del mismo autor.

Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión [CLC09](#) de Charles Lalanne-Cassou.

La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de [traducindote](#), de Óscar Hermida López.

Se procuró seguir las [recomendaciones](#) del Centro Español de Metrología (CEM).

Se consultó el chat de Bing y se usaron algunas respuestas en las cuestiones.



## Sumario

### FÍSICA DEL SIGLO XX

PROBLEMAS.....	1
<i>Física cuántica</i> .....	1
<i>Física nuclear y de partículas</i> .....	5
CUESTIONES.....	14
<i>Física relativista</i> .....	14
<i>Física cuántica</i> .....	15
<i>Física nuclear y de partículas</i> .....	25

### Índice de pruebas P.A.U.

2004.....	
1. (jun.).....	13 s.
2. (sep.).....	12, 23 s.
2005.....	
1. (jun.).....	4, 23, 34
2. (sep.).....	11, 15
2006.....	
1. (jun.).....	10, 34
2. (sep.).....	9, 33
2007.....	
1. (jun.).....	33
2. (sep.).....	14, 23
2008.....	
1. (jun.).....	22, 32
2. (sep.).....	22, 32
2009.....	
1. (jun.).....	31
2. (sep.).....	22, 30
2010.....	
1. (jun.).....	3, 30
2. (sep.).....	8, 29
2011.....	
1. (jun.).....	2, 21, 29
2. (sep.).....	28
2012.....	
1. (jun.).....	7, 28
2. (sep.).....	14, 21
2013.....	
1. (jun.).....	20, 27
2. (sep.).....	19 s., 27
2014.....	
1. (jun.).....	18
2. (sep.).....	17, 26
2015.....	
1. (jun.).....	16, 26
2. (sep.).....	1, 25
2016.....	
1. (jun.).....	6, 16
2. (sep.).....	5, 15