



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL PERÚ

DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN GENERAL

TEXTO

MATEMÁTICA BÁSICA

CICLO I

TÍTULO DE LA OBRA
MATEMÁTICA BÁSICA

AUTORES

Dr. César Acuña Peralta
Ing. Juan Alfaro Cabanillas
Mg. Marilú Flores Lezama
Mg. Risley Rengifo Tello

Universidad Autónoma del Perú
Panamericana Sur km 16.3 Villa El Salvador

PRIMERA EDICIÓN MARZO 2015

Tiraje: 2650 Ejemplares

EDITOR GENERAL

Universidad Autónoma del Perú
Panamericana Sur km 16.3 Villa El Salvador

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN

Universidad Autónoma del Perú

DISEÑO CARATULA

Universidad Autónoma del Perú

Ley 26905 Biblioteca Nacional Perú

Hecho el depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2015-05335

ISBN ISBN: 978-612-45929-7-3

IMPRESO EN

IMPRESIÓN ARTE PERÚ S.A.C.
Jr. Loreto 585 - Breña
(Esquina con Jr. Recuay 592)
Telf: 3323401 RPC: 986601361

Derechos reservados conforme a la Ley N° 822.

Queda terminantemente prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, químico, óptico, incluyendo el sistema de fotocopiado, sin autorización escrita de los autores, quedando protegidos los derechos de propiedad intelectual y auditoría por la legislación peruana.

ÍNDICE

UNIDAD I	
LÓGICA PROPOSICIONAL	7
1.1. INTRODUCCIÓN.....	10
1.2. LA LÓGICA EN LA VIDA COTIDIANA (I).....	15
1.3. LA LÓGICA	16
1.4. PROPOSICIONES LÓGICAS	16
1.5. LÓGICA PROPOSICIONAL	17
1.6. CLASES DE PROPOSICIONES	23
1.7. FORMALIZACIÓN.....	35
1.8. VERDAD FORMAL	41
1.9. EQUIVALENCIAS LÓGICAS.....	52
1.10 CIRCUITOS LÓGICOS	57
1.11. INFERENCIAS LÓGICAS.....	62
UNIDAD II ALGEBRA	71
2.1. HISTORIA DEL ÁLGEBRA	73
2.2. NÚMEROS REALES Y ECUACIONES DE PRIMER GRADO.....	77
2.3. EXPONENTES Y RADICALES.....	81
2.4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS	85
2.5. ECUACIONES	90
2.6. INECUACIONES DE PRIMER GRADO.....	114
2.7. INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	120
2.8. ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO.....	126
UNIDAD III MATRICES	131
3.1. MATRICES	133
3.2. IGUALDAD DE MATRICES.....	136
3.3. TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ	136
3.4. MATRICES ESPECIALES	137
3.5. OPERACIONES CON MATRICES	138
3.6. MATRIZ IDENTIDAD.....	141
3.7. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.....	144
3.8. INVERSA DE UNA MATRIZ	149

3.9. MATRIZ ADJUNTA	152
3.10. TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE FILAS Y COLUMNAS DE UNA MATRIZ.....	155
3.11. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	159
3.12. RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR LA REGLA DE CRAMER.....	163
3.13. RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE GAUSS.....	166
UNIDAD IV PROPORCIONALIDAD NUMÉRICA.....	173
4.1. RAZONES Y PROPORCIONES	177
4.2. REPARTO PROPORCIONAL	185
4.3. REGLA DE TRES	195
4.4. TANTO POR CIENTO.....	199
4.5. INTERÉS	207
UNIDAD V FUNCIONES.....	211
5.1. FUNCIONES	213
5.2. RELACIONES	214
5.3. FUNCIONES ESPECIALES	228
5.4. OPERACIONES CON FUNCIONES	233
5.5. FUNCIÓN CUADRÁTICA	237
5.6. FUNCIÓN EXPONENCIAL	243
5.7. FUNCIÓN LOGARÍTMICA.....	249
UNIDAD VI.....	255
PROGRAMACIÓN LINEAL	255
6.1. INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES	258
6.2. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES	261
6.3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN SUJETA A RESTRICCIONES	265
UNIDAD VII	273
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	273
7.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN	275
7.2. DEFINICIÓN INTUITIVA DE LÍMITE	276
7.3. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN	282
7.4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA.....	283
7.5. LA ANTIDERIVADA DE UNA FUNCIÓN	289
BIBLIOGRAFÍA.....	294

INTRODUCCIÓN

Es grato presentar a la comunidad educativa universitaria el presente Texto: Matemática Básica, que ha sido elaborado por docentes del curso de matemática básica de la Universidad Autónoma del Perú, con la finalidad de orientar eficazmente el aprendizaje significativo de nuestros estudiantes.

El conocimiento matemático siempre representa un reto para quienes desean involucrarse en el mundo de la ciencia y la tecnología, por esta razón en la elaboración hemos considerado tópicos significativos para el estudiante que se inicia en el nivel superior y que a través de ellos descubra que la Matemática es una herramienta importante para la ciencia dado que ha contribuido y contribuye al desarrollo científico y tecnológico de la humanidad.

La matemática permite que el estudiante se enfrente a situaciones problemáticas, vinculadas o no a un contexto real, con una actitud crítica. Se debe propiciar en el estudiante un interés permanente por desarrollar sus capacidades relacionadas al pensamiento lógico-matemático que sea de utilidad para su vida actual y futura. Es decir, se debe aprender a usar la matemática; esta afirmación es cierta por las características que presenta la labor matemática en donde la lógica y la rigurosidad permiten desarrollar un pensamiento crítico.

En el primer ciclo se enfatiza más el desarrollo del lenguaje matemático proporcionando al estudiante los elementos para la formulación de argumentos, la reflexión y aclaración de sus ideas sobre conceptos y situaciones con contenido matemático. Así como la resolución de problemas que posibilita el desarrollo de capacidades complejas y procesos cognitivos de orden superior que permiten una diversidad de transferencias y aplicaciones a otras situaciones y áreas.

El Texto de Matemática Básica, se ha estructurado con aspectos teóricos y prácticos de la matemática con el fin de que nuestros estudiantes desarrollen sus capacidades cognitivas y las habilidades numéricas que le permitan desarrollar situaciones problemáticas, además de darse cuenta de la utilidad de la misma.

UNIDAD I

LÓGICA PROPOSICIONAL



<http://ejemplosyejerciciosde.blogspot.com>

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA.

**PROPOSICIONES. TIPOS
FORMALIZACIÓN.**

VERDAD FORMAL.

**EQUIVALENCIAS LÓGICAS.
SIMPLIFICACIÓN. CIRCUITOS
LÓGICOS E INFERENCIAS.**



<http://intertecno.com>

ACTIVIDADES INICIALES:

Anota tu respuesta en la columna de la derecha	Respuesta
1. ¿Qué estudia la lógica?
2. ¿En cuántas partes se divide la lógica y qué estudia cada una de ellas?
3. ¿Cuáles son las formas del pensamiento?
4. ¿Cuál es la importancia de la lógica matemática?

1.1. INTRODUCCIÓN

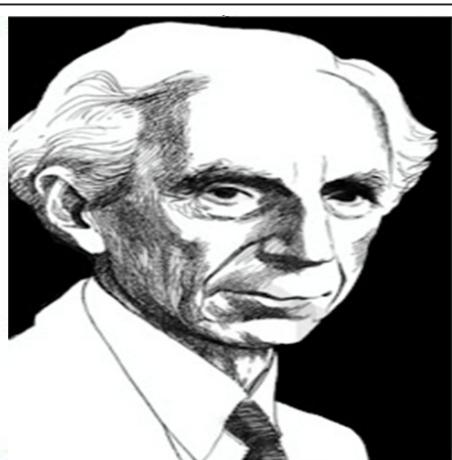
Pensar es un proceso complejo que se manifiesta a través de la creación de imágenes mentales en nuestro cerebro que las asociamos con nuestros conceptos o esquemas que tenemos memorizados, representándonos las situaciones del mundo y de nosotros mismos en un proceso simbólico que necesitamos estructurar en secuencias sintácticamente lógicas.

Eso significa que construimos secuencias temporalizadas de imágenes o conceptos que representan simbólicamente cosas o eventos y que podemos poner en movimiento simbólicamente lo que aún no ha ocurrido. Ese poner en movimiento, que necesita naturalmente no solo una memoria en funcionamiento, sino también una conciencia de lo que estamos pensando, es a lo que podemos denominar **razonamiento**. De esta manera, razonar consiste en producir juicios. Un juicio tiene la forma de una proposición, es decir, de una oración. Por ejemplo “esta pizarra es verde” es un juicio. En él están contenidos los conceptos: “pizarra”, “verde”; también hay imágenes que singularizan nuestros objetos o que relacionamos con los conceptos y hay una estructura lógica, sintáctica, que nos permite en una secuencia expresar un estado de cosas del mundo.

Para incorporar esa estructura lógica nos servimos de elementos de enlace como el verbo “ser” o de conjunciones o cuantificadores que nos indican el dominio del que hablamos, etc. Estos elementos tienen un origen en nuestros esquemas de imágenes que contienen una lógica implícita, pero los hemos exteriorizado en ciertos elementos del lenguaje para facilitar nuestro pensamiento. Estos elementos, que nos permiten razonar, también nos permite ir de lo dado a lo que todavía no sabemos o no ha ocurrido. Pues una vez creado un juicio podemos conectarlo con otro y producir una secuencia causal o deductiva entre ellos.

LÓGICA GENERAL

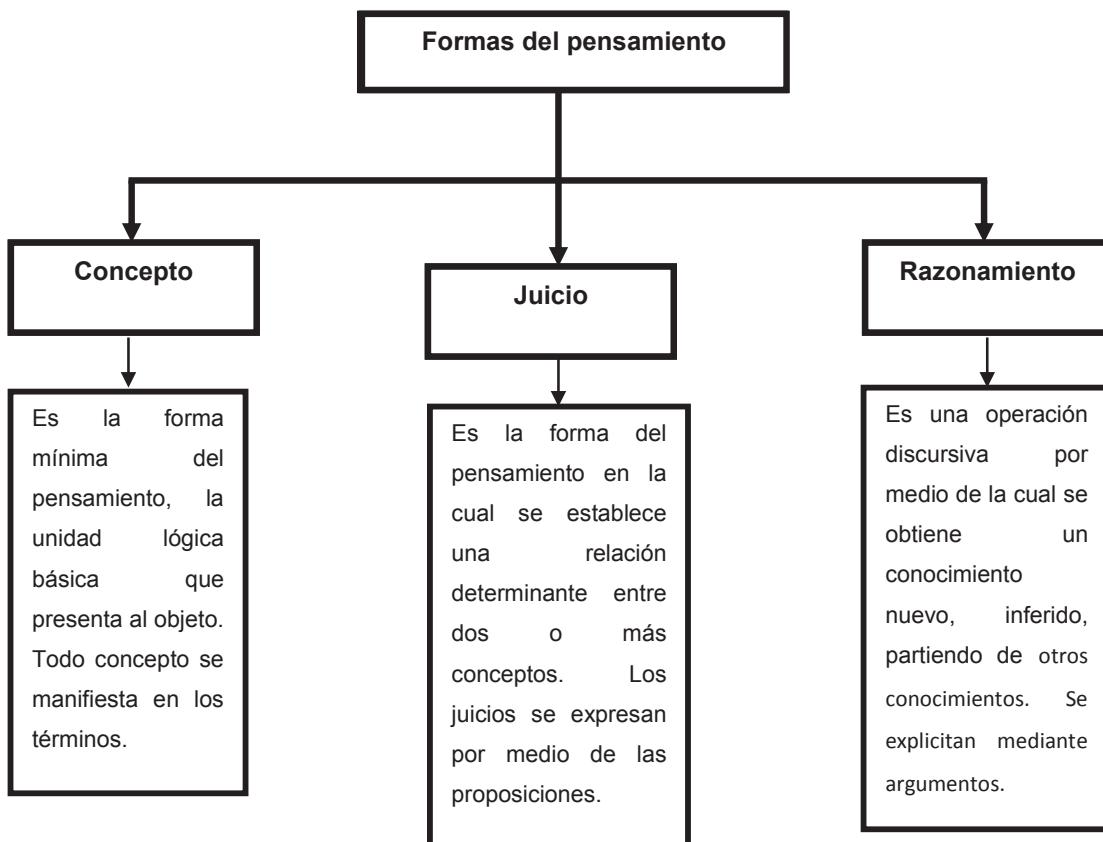
Entendiendo que la lógica debe estudiar tanto la estructura como el contenido del pensamiento, asumimos conceptualmente que: “La lógica general es la ciencia que estudia las leyes dialécticas y lógico-formales, los métodos, los procedimientos, las propiedades y las relaciones, sobre la base de las **formas del pensamiento**”.



<http://vampiroerudito.blogspot.com>

“La vida real, para la mayoría de los hombres, es un perpetuo compromiso, en gran medida secundario, entre lo ideal y lo posible; pero el mundo de la razón pura no conoce compromisos, ni limitaciones prácticas, ni barreras para la actividad creativa que engloba en espléndidos edificios la apasionada aspiración por lo perfecto de la que brotan todas las grandes obras”.

Bertrand Russell



<http://www.brahiangz.blogspot.com>

La lógica General se divide en:

Lógica dialéctica: Estudia el contenido de las formas del pensamiento (lo esencial, contextual del concepto, juicio y raciocinio), en correspondencia con la realidad objetiva que es dinámica. Su objetivo es encontrar la veracidad o verdad relativa-absoluta de los pensamientos.

Lógica Formal: Estudia la estructura o forma de los conceptos, juicios y raciocinios, sus relaciones de validez, métodos, reglas, principios y leyes con abstracción del contenido material de los pensamientos.

La lógica formal se divide en:

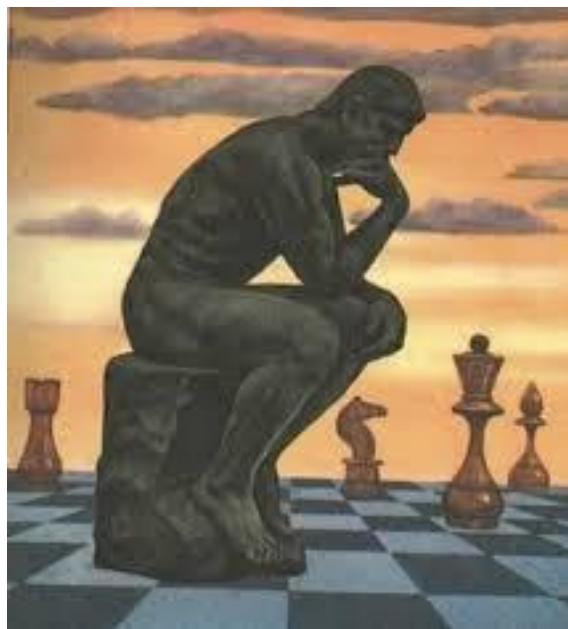
Lógica Proposicional: Considera la proposición como base para la determinación de la validez de los razonamientos.

Lógica Cuantificacional: Su objeto es la cantidad, la cualidad y relaciones de las proposiciones categóricas.

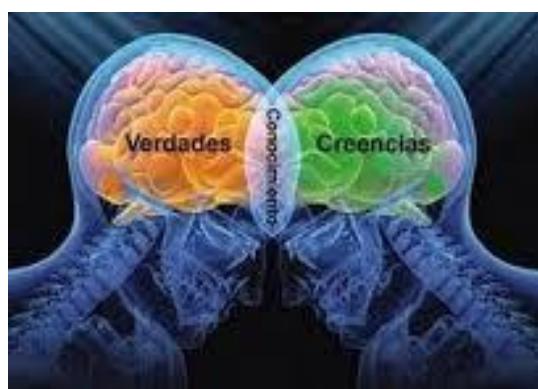
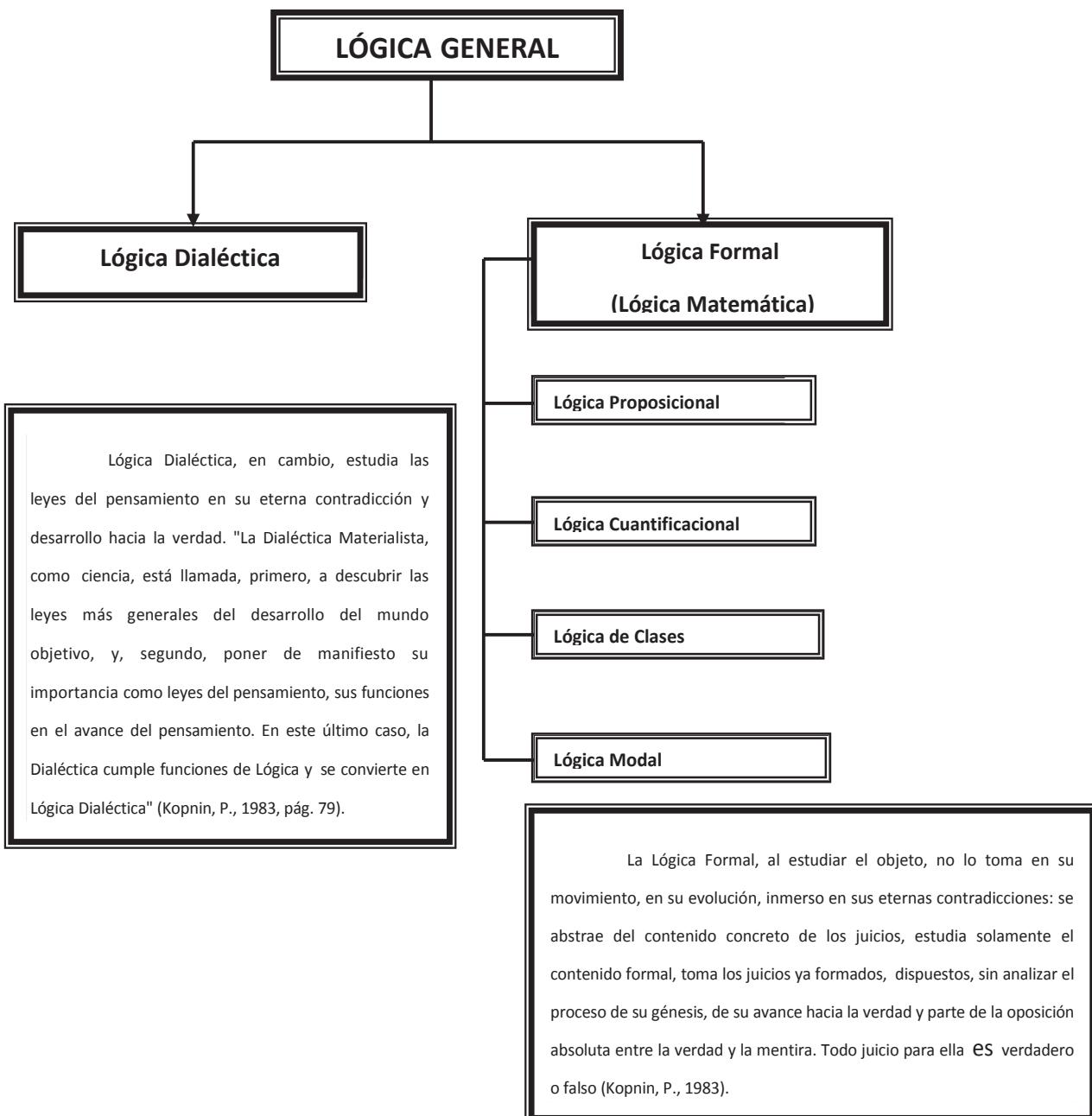
Lógica de Clases: Utiliza diagramas de Venn Euler para determinar la validez de los razonamientos.

Lógica Modal: Utiliza las relaciones lógicas entre las afirmaciones de posibilidad e imposibilidad de necesidad y contingencia.

Hoy en día la lógica formal se ha tornado en: **Lógica Matemática** cuyo objetivo es **demostrar la VALIDEZ** de los razonamientos de los argumentos simbólicos o formalizados.



<http://trabajo-colaborativo-turno-tarrde.wikispaces.com>



<http://taringa.net>

Importancia de la Lógica Matemática

La Lógica Matemática toma auge a partir de los trabajos de Bertrand Russell y Alfred Whitehead con su obra: "Principia Matemática", un trabajo que por primera vez formalizó y axiomatizó todas las matemáticas en un único sistema mediante el uso de conceptos lógicos.

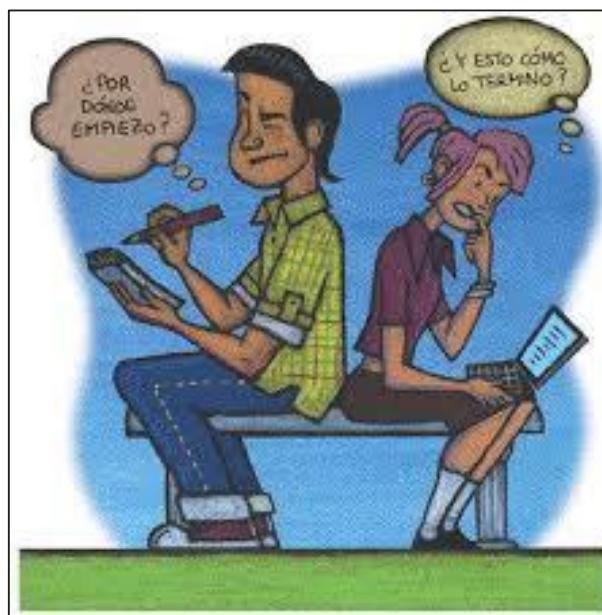
Aquí lo resaltante es que haciendo uso de métodos formales de la matemática basados en un empleo de un lenguaje especial de símbolos y fórmulas ha contribuido a complementar y desarrollar las ideas y métodos de la lógica tradicional.

En el avance científico-tecnológico.

- Permite en base al conocimiento ya obtenido y válido, deducir nuevos conocimientos.
- Facilita la formalización del lenguaje científico para la posterior demostración de validez, tornándose preciso, exacto, convencional y universal.
- En tanto métodos lógicos son el puente entre los métodos de investigación científica y los métodos de exposición científica.



Importancia de la lógica en la ciencia y la tecnología



<http://nhu Uribe.wix.com/logica-proposicional>

La lógica y el orden en la vida diaria

1.2. LA LÓGICA EN LA VIDA COTIDIANA (I)

|

Sergio Centeno García

Tradicionalmente, se entiende a la Lógica como la disciplina que estudia el pensamiento en cuanto a sus formas mentales (concepto, juicio y raciocinio) con la finalidad de elaborar razonamientos correctos y verdaderos. Y es que existe una gran diferencia entre lo que es correcto y lo que es verdadero, pues en Lógica lo correcto se refiere a la estructura de los razonamientos, a su forma; es decir a la manera en cómo están construidos, pero no al contenido de verdad o falsedad de los mismos.

En este sentido, hay razonamientos que pueden estar perfectamente bien estructurados o construidos, pero que al analizar su contenido de verdad resultan falsos. Por ejemplo, he aquí un razonamiento correcto pero completamente falso: "Ninguna mujer piensa, María es mujer, por lo tanto, María no piensa". Este silogismo es correcto porque su conclusión "María no piensa" se deriva por necesidad de 2 premisas previamente planteadas, pero es falso porque tiene como punto de partida una premisa falsa: "Ninguna mujer piensa" y por lo tanto, su conclusión también es falsa. Vemos así como a la Lógica Formal, que es una especie de primera parte en el estudio de la Lógica, no se interesa por la verdad o falsedad de los razonamientos, sino sólo de su estructura o forma.

La otra parte de la Lógica, que se encarga de estudiar el contenido de verdad o falsedad de los razonamientos, suele llamarse Lógica Material, Científica o también Dialéctica, porque tiene como finalidad el estudio del método, y también el origen, posibilidad, esencia y formas del conocimiento.

Hablemos por lo pronto de Lógica Formal, que como hemos dicho, se interesa por el razonamiento correcto, que es lo mismo que decir coherente y ordenado. Un razonamiento de esta naturaleza es posible si la conclusión que se obtiene se deriva por necesidad de otros pensamientos previamente planteados llamados premisas. Esto es, todo razonamiento o argumento está estructurado con premisas y conclusión.

¿Qué es una premisa? Es un pensamiento que funciona como punto de partida o sustento para derivar otro al cual llamamos conclusión; y ¿qué es una conclusión? Es un pensamiento derivado por necesidad de otro(s) que llamamos premisa(s).

Para que un razonamiento sea correcto debe existir una conexión tan estrecha entre las premisas que haga necesaria la existencia de la conclusión. Pero, ¿qué se entiende en Lógica por necesario? Esto: lo necesario es aquello que es y ocurre de una manera y no puede ser ni ocurrir de otra. Por ejemplo, si yo sostengo un objeto pesado y después lo suelto sin que haya ningún obstáculo entre mi mano y el piso es de toda necesidad que caiga hasta el suelo, en condiciones naturales no puede ser de otro modo. Eso es lo necesario, lo que no puede ser de otra manera, aquello que no deja opción para que suceda de otro modo.

Así, un razonamiento incorrecto ocurre cuando no existe un vínculo de necesidad entre su(s) premisa(s) y la conclusión, por ejemplo: "Está nublado y por tanto va a llover", este es un pensamiento ilógico o incorrecto por la sencilla razón de que del hecho de que esté nublado no se deriva por necesidad que tenga que llover, ya que todo el día puede permanecer totalmente nublado y sin embargo no caer una sola gota de lluvia.

En cambio, un razonamiento correcto sería el siguiente: "Todos los hermanos de Juan son varones, Toño es hermano de Juan, por lo tanto, Toño es varón", como es evidente, que Toño siendo hermano de Juan sea varón no podría ser de otra manera, pues la primera premisa ha establecido categóricamente que todos los hermanos de Juan son varones.

1.3. LA LÓGICA

- Lógica es una ciencia formal que estudia la estructura o formas del pensamiento humano (como proposiciones, conceptos y razonamientos) para establecer leyes y principios válidos para obtener criterios de verdad.
- Es una ciencia que está orientada al estudio de las estructuras y procesos relacionados con la validez del razonamiento.

OBJETO DE ESTUDIO

- Pensamiento como reflejo de la realidad.
- Razonamiento correcto o válido.

PROCESO DEL CONOCIMIENTO – ELEMENTOS

SUJETO COGNOSCIBLE: lo integra el hombre.

OBJETO COGNOSCIBLE: mundo que nos rodea.

CONOCER (PENSAR): actividad mental por la cual se generan ideas acerca del mundo (sentidos, sensaciones,...etc.).

CONOCIMIENTO (PENSAMIENTO): son las formas ideales que se dan como producto del pensar (conceptos, juicios... etc.).

FORMAS DEL CONOCIMIENTO

CONCEPTOS. Representación mental de un objeto: carpeta, átomo, valores.

JUICIOS. Dos o más conceptos donde se afirma o niega algo: “Aristóteles fue un filósofo”.

RAZONAMIENTO. Obtención de un nuevo juicio a partir de otros ya establecidos: “Si estudio entonces triunfo. Pero estudio. Por lo tanto triunfo”.

1.4. PROPOSICIONES LÓGICAS

LENGUAJE

Es el sistema a través del cual el hombre comunica sus ideas y sentimientos, ya sea a través del habla, la escritura u otros signos convencionales, pudiendo utilizar todos los sentidos para ello.

Facultad del hombre para comunicarse mediante sonidos orales articulados o escritos.

Conjunto de medios que nos permite transmitir el estado de anímico e intelectual.

FUNCIONES DEL LENGUAJE

- A) **EXPRESIVA:** comunica sentimientos, emociones (subjetivo del hombre), expresan diversos estados de ánimo, no transmiten conocimiento. Ejemplo: ¡Te amo Perú!
- B) **DIRECTIVA:** comunica una orden, un pedido, una pregunta. No usa un lenguaje proposicional. No es usado por el lenguaje científico. Ejemplo: ¡Cierra la puerta!
- C) **INFORMATIVA:** comunica hechos. Usa oraciones aseverativas (V o F). Utiliza el lenguaje de las ciencias, describe hechos que ocurren en el mundo. Ejemplo: Economía peruana creció 0.31% en noviembre del 2014, la menor tasa del año junto a junio.

ORACIÓN

Es la palabra o conjunto de palabras con autonomía sintáctica. Esto quiere decir que se trata de una unidad de sentido que expresa una coherencia gramatical completa.

La oración es una palabra o construcción con entonación propia y sentido completo.

CLASES DE ORACIONES

A) DECLARATIVAS O ASEVERATIVAS (afirma o niega algo)

INFORMATIVAS: "La biología es una ciencia natural"

DESCRIPTIVAS: "Lima es una ciudad extensa y tiene muchas universidades"

EXPLICATIVAS: "Hay producción agrícola porque los agricultores usan tecnología moderna"

B) EXPRESIVAS

INTERROGATIVAS: ¿Cuál es tu nombre?

DESIDERATIVAS: Deseo ser el mejor estudiante de la UA

IMPERATIVAS: ¡No fumes!

EXCLAMATIVAS: ¡Qué lindo día!

1.5. LÓGICA PROPOSICIONAL

PROPOSICIÓN LÓGICA

Es la expresión lingüística del juicio cuya característica fundamental es ser verdadera o falsa.

Es el significado de toda oración aseverativa con sentido y con la propiedad de ser verdadera o falsa.

VALOR DE VERDAD

El valor verdad es la correspondencia que existe entre la realidad objetiva y lo que se dice o piensa. Puede ser verdadero o falso.

Ejemplos:

El área del triángulo rectángulo es igual a: base por altura sobre dos (V)

Todas las aves son mamíferos (F)

La neurona es la unidad biológica del sistema nervioso (V)

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) * (q \rightarrow p) \text{ (V)}$$

$$x^2 = 4 \leftrightarrow (x = 2 \text{ ó } x = -2) \text{ (V)}$$

SE CONSIDERAN PROPOSICIONES LÓGICAS

Enunciados con información objetiva

"El Presupuesto General de la República es un instrumento de la política fiscal Peruana".

"El MEF es el órgano encargado de elaborar el Presupuesto General durante el primer semestre de cada año para el año siguiente."

Enunciados que se refieren a personajes ficticios desde el punto de vista de la realidad

“Sherlock Holmes, es personaje de una película”

“Don Quijote de la Mancha, es personaje de una obra literaria”

Toda fórmula de la ciencia que son consideradas leyes o principios

" $a^2 + b^2 = c^2$ "

" $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ "

Enunciados cerrados

" $x + 2 = 5$ si y sólo si $x = 8$ "

" $x^2 + 5x + 6 = 0$, es una ecuación de segundo grado"

NO SE CONSIDERAN PROPOSICIONES LÓGICAS**Enunciados con función expresiva**

“Deseo comer un pastel de chocolate”

¿En cuántos cursos te has matriculado?

Enunciados que reflejan opinión

“Los mejores docentes están en la Universidad Autónoma del Perú”

“El mejor equipo del Perú es el César Vallejo”

Enunciados que usan personajes Ficticios

“El Quijote peleó contra los molinos de viento”

“Romeo y Julieta murieron por amor”

Los refranes

“La memoria es como el mal amigo; cuando más falta te hace, te falla”

“Mientras hay vida hay esperanza”

Proverbios

“Lo pasado ha huido, lo que esperas está ausente, pero el presente es tuyo”

“Le pedí a Dios todo para gozar la vida, él me dio vida para gozarla todo”.

Enunciados abiertos

“x es más grande que y”

“ $x + 5 = 10$ ”

“ $2x + 3 > 5$ ”

OBSERVACIÓN

Cuando un enunciado va entre comillas o apostrofes éste adopta una connotación diferente a la que tiene normalmente, es decir, se hace uso del metalenguaje. La connotación que adopta el enunciado se deduce del resto del enunciado.

Ejemplo:

“Lima” tiene cuatro letras.

Si a un enunciado le corresponde la connotación y para ello se le coloca comillas, la proposición se convierte en un sin sentido.

Ejemplo:

Alrededor del “sol” giran todos los planetas.

Cuando un hecho literario, oración exclamativa, enunciado abierto, etc. Está contextualizado el contexto lo convierte en proposición.

Ejemplo:

Javier le dijo a Marita: te quiero mucho.

VARIABLES LÓGICAS

La proposición se representa mediante variables, las mismas que pueden ser:

Variables proposicionales: Constituidas por letras minúsculas desde “p” hasta “z”

Ejemplo:

p: La matemática es una ciencia formal.

q: Los metales son buenos conductores de la electricidad.

r: El Corazón es un órgano vital de todo ser viviente.

Variables Metalenguísticas: Constituidas por letras mayúsculas desde “A” hasta “Z”. Sirven para hacer operaciones, enunciar reglas y también para enunciar esquemas moleculares.

Ejemplo:

$$A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B \quad (\text{Ley de equivalencia})$$

$$\sim (\sim A \vee \sim B) \equiv (A \wedge B) \quad (\text{Ley De Morgan})$$

TALLER 01

En los siguientes enunciados identifique cuáles son proposiciones colocando en el paréntesis (si) o (no), además verifique su valor de verdad y coloque V o F.

- | | |
|--|----------------------|
| El estómago es parte del sistema digestivo. | (.....) (.....)..... |
| Deseo ingresar a la UA. | (.....) (.....)..... |
| Trujillo está al norte de Chimbote. | (.....) (.....)..... |
| “A bicho que no conozcas, no le pisés la cola”, es un refrán. | (.....) (.....)..... |
| $8 < 3$. | (.....) (.....)..... |
| $5 + x = 25$. | (.....) (.....)..... |
| “Dadme una palanca y un punto de apoyo y moveré el mundo” dijo Newton. | (.....) (.....)..... |
| La paciencia es un árbol de raíz amarga pero de frutos muy dulces | (.....) (.....)..... |
| “Sol” tiene tres letras. | (.....) (.....)..... |
| $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. | (.....) (.....)..... |
| Los peruanos habitan en zonas sísmicas. | (.....) (.....)..... |
| La palabra cola tiene cuatro letras. | (.....) (.....)..... |
| “Cola” tiene cuatro letras. | (.....) (.....)..... |
| Hoy es martes. | (.....) (.....)..... |
| Comeré un pastel de choclo. | (.....) (.....)..... |
| El constructivismo es una corriente pedagógica de mucha utilidad para el aprendizaje del estudiante. | (.....) (.....)..... |
| Me gustaría ver a mis padres el día domingo. | (.....) (.....)..... |
| El nuevo sol es la moneda peruana. | (.....) (.....)..... |
| La vida hay que gozarla. | (.....) (.....)..... |
| El Perú es más extenso que Chile. | (.....) (.....)..... |
| Manuel González Prada, escribió el artículo: “Baladas Peruanas”. | (.....) (.....)..... |
| A la vejez se acorta el dormir y se alarga el gruñir, es un refrán. | (.....) (.....)..... |
| Flora Tristan y Moscoso fue precursora del feminismo. | (.....) (.....)..... |
| José Carlos Mariátegui, escribió: “7 Ensayos de Interpretación de la Realidad Peruana”. | (.....) (.....)..... |

TALLER 02

De los enunciados que se dan a continuación. Determine cuáles son proposiciones lógicas y cuáles no lo son e indique su valor de verdad.

ENUNCIADOS	NO ES PROPOSICIÓN ¿POR QUÉ?	SI ES PROPOSICIÓN	VALOR DE VERDAD
1. César Vallejo es un poeta peruano.			
2. La historia es una ciencia natural.			
3. El agua se evapora por el calor.			
4. “Ante la duda, abstente”, dice un refrán.			
5. Perú y Chile son países vecinos.			
6. La riqueza de un país trae consigo el progreso.			
7. Paco Yunque luchaba contra Humberto Grieve.			
8. La Constitución Política es justa siempre y cuando los jueces lo cumplan a cabalidad.			
9. Lleva las maletas al autobús por favor.			
10. La “virgen de la Puerta” es Patrona de Otuzco y Reyna de la paz mundial.			
11. La “Virgen de Chapi” es milagrosa.			
12. La Lógica no es una ciencia formal.			
13. Debes estudiar para ser algo en la vida.			

14. Los Políticos de hoy son demagogos así como también los Gobernantes.			
15. $x + y = 5$ si y sólo si $x = 3$ e $y = 2$.			
16. $3 - 5 + 6$ es igual a 10.			
17. ¡Mi casa se está quemando!			
18. “Mentiroso sin memoria, pierde el hilo de la historia”.			
19. “Bachiller en medicina, confunde el vino con la orina”, dice el refrán.			
20. El departamento de La Libertad es más grande que el departamento de Piura.			
21. Todas las gallinas son aves.			
22. Dos más tres es igual a cinco.			
23. ¿En qué curso te has matriculado?			
24. Lima es la capital del Perú.			
25. “Lima” tiene cuatro letras.			
26. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$			
27. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$			
28. Diez es menor que ocho.			
29. ¡carajo!			
30. “Gula y vanidad, crecen con la edad”.			
31. “Hermanos, hay mucho que hacer”, dice el poeta César Vallejo.			
32. “Me levanté con el pie izquierdo me trae mala suerte”, es una superstición en la que mucha gente cree.			

1.6. CLASES DE PROPOSICIONES

PROPOSICIONES SIMPLES O ATÓMICAS

Aquellas que no tienen ningún operador lógico.

Sólo pueden tener un solo sujeto y un solo predicado.

Pueden tener dos o más sujetos unidos por una relación lógica.

P.S. PREDICATIVAS: Si al sujeto se le atribuye una cualidad o circunstancia.

Ejemplos:

Einstein es el creador de la física clásica.

La célula es la unidad básica de los seres vivos.

El Sol es el centro del Sistema Solar.

El Perú tiene tres regiones naturales.

P.S. RELACIONALES: establecen un enlace entre dos o más sujetos a través de un vínculo relacional.

Ejemplos:

5 y 6 son números consecutivos.

César Vallejo fue contemporáneo de Ciro Alegría.

Carla y José son hermanos.

Perú y Bolivia son países vecinos.

TÉRMINOS RELACIONALES

Igual, semejante, contemporáneo, amar, compañero, amigo, juntos, similar, etc.

PROPOSICIONES COMPUESTAS O MOLECULARES

Es la unión de dos o más proposiciones simples o atómicas enlazadas por uno o más

OPERADORES LÓGICOS.

Las proposiciones compuestas son:

PROPOSICIONES COMPUESTAS NEGATIVAS: Es un operador monádico porque afecta mayormente a una proposición simple, cambiando su valor de verdad.

Símbolo: (“-”, “~”, “ \neg ”)

Ejemplos:

- Hoy no es lunes.
- Es falso que, los métodos psicológicos sean la introspección así como la extrospección.
- La Biología no es una ciencia natural.

Nota:

- Cuando se niega a una proposición simple se llama NEGADOR INTERNO (no, nunca, jamás, tampoco, etc.).
- Cuando se niega a una proposición compuesta se llama NEGADOR EXTERNO (“es falso que”, “es absurdo que”,..., etc.).
- Existen negadores por antonimia. “alto–bajo”, “vida–muerte”, “irreal–real”, “blanco–negro”.

PROPOSICIÓN COMPUESTA CONJUNTIVA: Es un operador binario (diádico) porque enlaza dos proposiciones.

Símbolo: (“ \wedge ”, “ $\&$ ”, “ \cdot ”)

Se lee “...y...”, Otras formas: “no obstante”, “sin embargo”,... etc.

Ejemplos:

- La historia no obstante la matemática son ciencias.
- La prensa del mismo modo la radio son medios de comunicación.
- Carlos al igual que Robert son ingenieros.

PROPOSICIÓN COMPUESTA DISYUNTIVAS:

Disyuntivas débiles o incluyentes: Operador binario a través del cual se incluye, es decir se da la posibilidad de que se den ambas proposiciones a la vez.

Símbolo: (“ \vee ”, “ $+$ ”)

Se lee: “...o...” otras formas: “a menos que”, “salvo que”,..., etc.

Ejemplos:

- La abogacía o la medicina son carreras profesionales humanitarias.
- Los mamíferos son vertebrados o incluso vivíparos.
- La Lógica o incluso la Filosofía estudian el pensamiento.

Disyuntivas fuertes o excluyentes: Operador binario que excluye la posibilidad que se den ambas proposiciones a la vez. Es la negación del biimplicador.

Símbolo: (“ $<.../...>$ ”, “ \neq ”, “ $>...<$ ”, “ $\vee\!\!\!\wedge$ ”, “ Δ ”)

Se lee: “O...o...”, “o sólo”, “o únicamente”,...etc.

Casos:

Doble explicitación del disyuntor débil o incluyente: “O.....o.....”

Ejemplos:

- O bien viajas a España o bien a Estados Unidos.
- O Mariátegui fue ensayista o bien actor de cine.
- Los virus son microscópicos salvo que sean visibles a simple vista.

Explicitación del disyuntor débil remarcada:

Disyuntor débil	+	solo solamente únicamente exclusivamente necesariamente	= disyuntor fuerte
-----------------	---	---	--------------------

Ejemplos:

- Robert viajará a Lima salvo que solo viaje a Trujillo.
- Deysi estudiará en la universidad salvo que solamente postule al instituto.
- Dos es un número par o solamente es número primo.

Por su contenido: El disyuntor fuerte no admite que las 2 proposiciones componentes sean verdaderas.

Ejemplos:

- Hoy es sábado o domingo.
- Julio Ramón Ribeyro, nació en Lima o en Iquitos.

PROPOSICIÓN COMPUESTA IMPLICATIVA: Operador binario que conecta a una proposición que es el antecedente con otra proposición que es el consecuente.

Símbolo: (“ \rightarrow ”, “ \Rightarrow ”)

Se lee “si... entonces...” otras formas: “de manera que”, “de modo que”,...etc.

Ejemplos:

- Si la economía de Estados Unidos mejora, es obvio que la economía de América Latina se recuperará.
- Si hay nuevas inversiones en el Perú, habrá más trabajo.
- Si el niño, el adolescente y el anciano son abandonados, entonces son protegidos por el Estado.

PROPOSICIÓN COMPUESTA REPLICATIVA: Operador que indica que la operación de implicación está invertida.

Símbolo: (“ \leftarrow ”, “ \Leftarrow ”)

Se lee: “... si....” otras formas: “...porque...”, “... cada vez que...”, etc.

Ejemplos:

- La situación económica del Perú cambiaría si llegaran nuevas inversiones.
- Viajaré a España porque obtuve la visa.
- Enrique pasó de año porque aprobó todos sus cursos.

PROPOSICIÓN COMPUESTA BIIMPLICATIVA: Operador binario que desempeña la función de doble implicador, es decir, es la conjunción de la condicional y su recíproca.

Símbolo: (“ \leftrightarrow ”, “ \equiv ”)

Se lee “... sí y solo sí...” otras formas de leer “siempre y cuando”,...etc.

Ejemplos:

- Un número es par si y solo si es divisible por dos.
- La Tierra es esférica si y sólo si el Sol es una estrella.
- Habrá reforma en el sistema educativo peruano siempre y cuando el Perú elabore su proyecto educativo nacional.
- La computadora es un procesador de información por lo cual y según lo cual simplifica las operaciones y procesos más complejos.

INALTERADOR (“↓”)

Se lee “ni....ni...”

Ejemplos:

- Ni Perú ni Ecuador son países ricos.
- Ni Alcides Carrión ni Luna Pizarro descubrieron la Verruga.
- Ni Chile ni Ecuador son países pobres.

INCOMPATIBILIZADOR (“↑”, “/ ”)

Se lee: “... es incompatibilizador...”

- Los eucaliptos no son vegetales o incluso no son seres vivos.
- No es cierto que Vallejo es limeño o no es verdad que Neruda es chileno.
- No voy al cine o incluso al teatro.

A continuación te damos la traducción verbal de los conectores lógicos:

OPERADOR	SÍMBOLOS	EXPRESIONES EQUIVALENTES
DISYUNTOR INCLUYENTE	“∨” , “+”	A menos que B A a no ser que B A excepto que B A o B A o en todo caso B A o incluso B A o también B A salvo que B A salvo que también B A y bien, o también B A ya bien, o incluso B A y/o B A menos que A, B A o bien B.

OPERADOR	SÍMBOLOS	EXPRESIONES EQUIVALENTES
DISYUNTOR EXCLUYENTE	"<.../...>", "≠", " $>...<$ ", " \vee ", " Δ "	A o B (pero no ambos) A salvo que solo B A salvo que únicamente B A o solamente B A o solo B A o tan solo B A o únicamente B A y bien, o también únicamente B O A o B O bien A o bien B O solo A o solo B.

OPERADOR	SÍMBOLOS	EXPRESIONES EQUIVALENTES
CONJUNTOR	" \wedge ", "&", ". "	A a la vez B A al igual que B A al mismo tiempo B A a pesar B A así como B A así también B A aun cuando B A aunque B A de la misma forma que B A de la misma manera B A del mismo modo B A empero B A es compatible con B A junto con B A incluso B A igualmente B A más bien B A no obstante B A pero B A simultáneamente B A sin embargo B A tal como B A también B A tanto como B A vemos que también B A y B A y también B Conjuntamente A con B

		No solo A también B Siempre ambos A con B Tanto A como B Tanto A cuanto B
--	--	--

OPERADOR	SÍMBOLOS	EXPRESIONES EQUIVALENTES
IMPLICADOR	“ \rightarrow ”, “ \Rightarrow ”	A condición de que A, B A de ahí que B A de manera que B A de modo que B A en consecuencia B A es suficiente para B A es una condición suficiente para B A implica B A luego B A por consiguiente B A por lo tanto B A solo si B Cada vez que A, B Cada vez que A consiguientemente B Como quiera que A por lo cual B Con la condición de A esto trae consigo B Con tal que A es obvio que B Cuando A, B Cuando A así pues B Dado A por eso B De A concluimos en B De A deducimos B De A derivamos B De A deviene B En cuanto A por tanto B En el caso que A así pues B En el caso que A en tal sentido B En virtud de que A es evidente B

		Es suficiente A para B Es una condición suficiente A para B Para A es necesario B Para A es una condición necesaria B Porque A, B Puesto que A, así pues B Se supone A para B Si A, B Si A entonces B Siempre que A por consiguiente B Siempre que A por tanto B Toda vez que A en consecuencia B Una condición necesaria para A es B Ya que A entonces B Ya que A es evidente que B.
--	--	--

OPERADOR	SÍMBOLOS	EXPRESIONES EQUIVALENTES
REPLICADOR	“ \leftarrow ”, “ \Leftarrow ”	A condición de que B A cada vez que B A dado que B A está implicado por B A es una condición necesaria para B A porque B A puesto que B A se concluye de B A, si B A, siempre que B A supone que B A ya que B Es una condición necesaria A para B Para A es suficiente B

		<p>Para A es una condición suficiente B</p> <p>Solo si A, B</p> <p>Tan solo si A, B</p> <p>Una condición suficiente para A es B.</p>
--	--	--

OPERADOR	SÍMBOLOS	EXPRESIONES EQUIVALENTES
BIIMPLICADOR	“ \leftrightarrow ”, “ \equiv ”	<p>A cada vez que y solo si B</p> <p>A cuando y solo cuando B</p> <p>A entonces y solo entonces B</p> <p>A equivale B</p> <p>A equivale lógicamente a B</p> <p>A es necesaria y suficiente para B</p> <p>A es suficiente y necesario para B</p> <p>A es equipolente a B</p> <p>A es equivalente a B</p> <p>A implica y está implicado en B</p> <p>A por lo cual y según lo cual B</p> <p>A se define como B</p> <p>A se define lógicamente como B</p> <p>A según lo cual y por lo cual B</p> <p>A si de la forma B</p> <p>A siempre y cuando B</p> <p>A siempre que y solo cuando B</p> <p>A sí y solo sí B.</p>

OPERADOR	SÍMBOLOS	EXPRESIONES EQUIVALENTES
NEGADOR	“_”, “~”, “¬”	<p>Es negable A</p> <p>Es no cierto que A</p> <p>Es objetable que A</p> <p>Es refutable que A</p> <p>Es totalmente falso que A</p> <p>Imposible que sea A</p> <p>Jamás se cumple que A</p> <p>Jamás se da que A</p> <p>Jamás se verifica que A</p> <p>No acaece que A</p> <p>No es cierto que A</p> <p>No es concebible que A</p> <p>No es el caso que A</p> <p>No es verdad que A</p> <p>Carece de todo sentido que A</p> <p>Definitivamente no se da que A</p> <p>De ninguna forma se da que A</p> <p>De ninguna manera se da que A</p> <p>En absoluto se da que A</p> <p>En modo alguno se da que A</p> <p>Es absurdo que A</p> <p>Es erróneo que A</p> <p>Es falaz que A</p> <p>Es falso que A</p> <p>Es imposible que A</p> <p>Es inaceptable que A</p> <p>Es inadmisible que A</p> <p>Es incierto que A</p>

	<p>Es inconcebible que A</p> <p>Es incorrecto que A</p> <p>Es insostenible decir que A</p> <p>Es inverosímil que A</p> <p>Es mentira que A</p> <p>Es imposible que A</p> <p>No es veraz que A</p> <p>No es verosímil que A</p> <p>No ocurre que A</p> <p>No se cumple que A</p> <p>No se da la posibilidad de que A</p> <p>No se da que A</p> <p>No tiene sentido que A</p> <p>Nunca jamás A</p> <p>Nunca se da que A</p> <p>Para nada se da que A</p> <p>Se rechaza que A.</p>
--	--



Store No : 60713

<https://es.aliexpress.com>

TALLER 03

Clasifique los siguientes enunciados según el tipo de proposición simple o compuesta.

PROPOSICIONES	TIPOS DE PROPOSICIÓN
1. La historia es considerada una ciencia fáctica.	
2. Albert Einstein publicó una serie de trabajos que revolucionaron la física.	
3. La filosofía es considerada madre de todas las ciencias.	
4. La psicosis no es un desorden de la personalidad.	
5. Dos vectores son perpendiculares si y sólo si el producto escalar entre ellos da cero.	
6. Vargas Llosa es novelista así mismo es reconocido internacionalmente.	
7. El metal se dilata si se calienta.	
8. Dado que “Chan Chan” es considerada la ciudad de barro más grande del mundo es obvio que es un atractivo turístico Trujillano.	
9. Ernesto y Julio son amigos.	
10. Los perros callejeros son buenos guardianes o los perros de raza son mejores.	
11. Una condición necesaria para que la política se democratice es que en el Perú se opere la descentralización.	
12. Las organizaciones se consolidan siempre y cuando sus integrantes trabajen en equipo.	
13. Los Gobiernos regionales y/o locales han formulado sus presupuestos participativos acorde con las nuevas directivas gubernamentales.	

14.Estudia para el examen o vas a reprobarte el ciclo.	
15.Si el PBI de Perú está en Auge, es obvio que existen algunos productos tradicionales que han sido exportados en gran volumen.	
16.O bien viajas a Estados Unidos o bien viajas a España.	
17.Una condición suficiente para que haya empleo, es que exista aumento de la producción.	
18.Los cuadernos, lápices y/o borradores son útiles escolares.	
19.Carla y José son hermanos.	
20.La física es una ciencia así como la matemática.	
21.Los ofidios tienen extremidades o solamente vertebras.	
22.La lógica o incluso la filosofía estudian el pensamiento.	
23.Los refranes y las leyendas no son proposiciones lógicas.	
24.Ricardo Palma nació en Lima o en Chiclayo.	
25.La computadora es un procesador de información equivale lógicamente a decir que simplifica las operaciones y procesos más complejos.	

1.7. FORMALIZACIÓN

Es el procedimiento mediante el cual se identifican proposiciones simples y estructuras lógicas proposicionales, asignándole a cada uno un determinado símbolo del lenguaje de la lógica proposicional, organizándolos con signos de agrupación.

La formalización consiste en pasar expresiones de un lenguaje verbal a un lenguaje formal, utilizando variables, conectores lógicos y signos de agrupación.

VARIABLES PROPOSICIONALES

Son letras cuya función es remplazar a las proposiciones simples p, q, r, s,...etc.

Ejemplo:

El perro es un animal cuadrúpedo $\equiv p$

Vargas Llosa es novelista $\equiv q$

VARIABLES METALINGUISTICAS

Son variables de mayor amplitud que las anteriores y un solo símbolo puede representar a una proposición compuesta o a una fórmula lógica. A, B, C,... Z

Ejemplo:

A: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$

B: $(p \leftrightarrow q) \Delta r$

SÍMBOLOS AUXILIARES O DE AGRUPACION

Sirven para ordenar las proposiciones, así como, establecer su nivel de jerarquía y son:

(),...[],...{ }..., etc. Sistema de puntos “,”, “.”, “;”, “:”, etc.

PROCEDIMIENTO DE FORMALIZACION

Ejemplo:

1. “**Si** la contaminación ambiental continua **y** los desperdicios nucleares son abandonados, **entonces** el planeta se destruirá **a la vez** será imposible la vida”

Paso 1: detectar los conectivos lógicos.

a) y = “ \wedge ” b) sientonces = “ \rightarrow ” c) a la vez = “ \wedge ”

Paso 2: identificar las proposiciones simples y asignarles variables proposiciones en orden.

p: La contaminación ambiental continua.

q: Los desperdicios nucleares son abandonados.

r: El planeta se destruirá.

s: La vida será imposible.

Paso 3: agrupar ordenadamente las proposiciones con ayuda de los símbolos auxiliares.

$$[(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)]$$

RECOMENDACIONES PARA FORMALIZAR

NEGACIÓN

Cuando las proposiciones simples de una proposición compuesta tienen la misma clase de negadores.

Ejemplo:

$$\text{Es falso que } p \text{ y es falso que } q \dots \quad \sim p \wedge \sim q$$

$$\text{No } p \text{ o no } q \dots \quad \sim p \vee \sim q$$

Cuando un Negador se ubica al inicio de una proposición compuesta usando o no coma requiere el uso de paréntesis.

Ejemplo:

$$\text{Es falso que } p \text{ o no } q \dots \quad \sim(p \vee \sim q)$$

$$\text{Es falso que, } p \text{ o no } q \dots \quad \sim(p \vee \sim q)$$

De acuerdo a la estructura de la disyunción fuerte y la implicación.

Ejemplo:

$$\text{O es falso que } p \text{ o no } q \dots \quad \sim p \Delta \sim q$$

$$\text{Es falso que o } p \text{ o no } q \dots \quad \sim(p \Delta \sim q)$$

$$\text{Es mentira que si } p \text{ entonces no } q \dots \quad \sim(p \rightarrow \sim q)$$

CONJUNTOR

Cuando se usan comas (,) y el último conectivo es “y” también “o”, entonces se formaliza como conjunciones o como disyunciones respectivamente.

Ejemplo:

José, Carlos y Lucía son médicos. $(p \wedge q \wedge r)$

Alan García, Evo Morales o Nicolás Maduro son presidentes Latinoamericanos. $p \vee q \vee r$

NOTA

Si la proposición utiliza términos relacionales se considera proposición simple.

Ejemplo:

José, Armando y Sofía son **amigos** $\equiv p$

Perú y Chile no son Países en conflicto $\equiv \sim p$

OBSERVACIÓN

Los signos lingüísticos (coma, punto, punto y coma, etc.) pueden ser conectores en algunos casos dependiendo del sentido de la expresión.

Ejemplo:

1. Jesús estudia, Carmen se divierte..... ($p \wedge q$)
 2. Javier trabaja, y María se pasea..... ($p \wedge q$)
 3. Si Guillermo estudia, Jennifer se divierte..... ($p \rightarrow q$)
 4. El texto es una actividad lingüística concreta sí y solo sí es un acontecimiento comunicativo. Es una actividad lingüística. En consecuencia es un acontecimiento comunicativo.
- [$(p \leftrightarrow q) \wedge p$] $\rightarrow q$
5. Es absurdo que; si hay calor y humedad, entonces hay lluvia. Siempre y cuando se trate de la sierra.

$\sim\{(p \wedge q) \rightarrow r\} \leftrightarrow s\}$

JERARQUÍA DE OPERADORES

1ero. “ \leftrightarrow ”

2do. “ Δ ”

3ro. “ \rightarrow ”; “ \leftarrow ”

4to. “ \vee ”

5to. “ \wedge ”



www.youtube.com

TALLER 04

Teniendo en cuenta las recomendaciones para formalizar. Lee con atención, identifica al conector o conectores y formaliza las siguientes proposiciones.

PROPOSICIONES	FORMALIZACIÓN
1. Puesto que la lógica es uno de los medios principales que asegura la disciplina e integridad intelectual, entonces aplicada apropiadamente promueve el logro de fines sociales deseables.	
2. Gian Marco Signago es un cantautor peruano.	
3. La Perricholi fue escrita por Luis Alberto Sánchez y Los Heraldos Negros por César Vallejo.	
4. Carlos y Julio son peruanos de nacimiento.	
5. Si se promueve la lectura, saldremos del atraso en el que nos encontramos.	
6. Walter y Juan Carlos son contemporáneos.	
7. Si soy un hijo sobreprotegido en consecuencia tendré hijos sobreprotegidos.	
8. Si soy honrado entonces tengo la aceptación de la sociedad.	
9. Los maestros deben crear un clima de felicidad en el aula porque son motivadores, activos y están capacitados en metodologías activas.	
10. Julio Ramón Ribeyro escribió Los Gallinazos sin Pluma.	
11. Tenemos que invertir en la Bolsa de Valores, puesto que todos nuestros competidores lo han hecho y nosotros no podemos quedarnos atrás.	
12. $\sqrt{5}$ y π son números reales.	

13. 8xy junto con 12 xy son términos semejantes.	
14. Nadie desea algo excepto si no lo tiene. Nadie desea más de lo que ya tiene. De ahí que el sentido común debe de ser algo que todas las personas posean.	
15. Es falso que; el fútbol peruano clasifique al mundial o es mentira que, si el estado interviene en el deporte, será excluido de las competencias internacionales incluso del mundial a jugarse en Sudáfrica 2010.	
16. Cuando tienes una metodología de estudio además no te faltan conocimientos teóricos, consigues los éxitos esperados consiguientemente tu autoestima se ve fortalecida o bien tu futuro será prominente.	
17. Lima será una ciudad limpia y hermosa sí y solo sí sus habitantes toman cursos intensivos de higiene o la municipalidad provincial emprenda una campaña de limpieza.	
18. Los psicólogos estudian la conducta normal o incluso la anormal. Así como los psiquiatras tratan los trastornos mentales. Por lo tanto los Psicólogos y los Psiquiatras aplican tratamientos diferentes.	
19. La tutoría facilita el desarrollo de habilidades dado que el docente está capacitado para ayudar al estudiante. Por lo tanto la asistencia es necesaria, tal como a las actividades integradoras.	
20. La multiplicación es conmutativa siempre y cuando sean números reales, entonces y solo entonces la sustracción y división no son conmutativas para números enteros.	
21. Si jamás salgo de mi país porque soy nacionalista, trabajaré en bien del desarrollo Nacional. Siempre y cuando el gobierno me brinde las oportunidades de trabajo o únicamente seré un desempleado más.	

<p>22. El incremento de la competitividad o la globalización de los mercados ponderan la importancia de la acreditación universitaria, al mismo tiempo responden a la necesidad de establecer estándares mínimos como referentes de comparación de modo que la acreditación permita a las universidades vincularse con el sector productivo.</p>	
<p>23. La misión de la educación superior es preservar, desarrollar y promover la cultura de la humanidad de modo que es absurdo que la Universidad esté aislada porque funciona bajo una planificación y organización adecuada. No obstante vinculada con el sector empresarial.</p>	
<p>24. Es falso que se privatice la educación tal como el seguro social, salvo que los gremios sindicales lo permitan o incluso los propios docentes. Dado que hay cambios en las políticas de estado, no obstante las promesas innovadoras ofrecidas por el presidente.</p>	
<p>25. El razonamiento usa argumentos relevantes con el objeto de aplicar a la investigación. Muchas veces el razonamiento requiere de máquinas inteligentes para conseguir sus objetivos con mayor rapidez.</p>	

De la serie "Se encuentra un hombre normal a un profesor de lógica proposicional dentro de un ascensor"



1.8. VERDAD FORMAL

Es aquella que se obtiene evaluando esquemas moleculares, haciendo uso de reglas de operadores lógicos y tablas de verdad.

ESQUEMAS MOLECULARES

Llamados también fórmulas lógicas, están compuestos por variables, operadores lógicos y signos de agrupación.

OBSERVACIÓN

Los Esquemas moleculares se denotan por variables metalingüísticas. A, B, C, etc.

Ejemplos:

A: $(p \rightarrow q) \Delta \sim r$

B: $p \leftrightarrow (q \wedge r)$

Los esquemas moleculares pueden identificarse por medio de su operador principal en la fórmula.

Ejemplos:

A: $p \rightarrow (q \vee r)$ (condicional)

B: $\sim(p \uparrow q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ (biimplicativo)

C: $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim(r \Delta s)$ (.....)

D: $\sim[(p \rightarrow q) \leftrightarrow r] \vee (\sim p \leftarrow s)$ (.....)

TABLAS DE VERDAD

Es un método que nos permite analizar dos cosas:

1. Los Tipos de Fórmulas: en razón a su matriz principal o resultante final pueden ser:

TAUTOLÓGICA: si los valores de verdad de su matriz principal son todos verdaderos: 1111

CONTRADICTORIA: si los valores de verdad de su matriz principal son todos falsos: 0000

CONTINGENTE: si existen valores verdaderos y falsos en su matriz principal: 1001, 1100, etc.

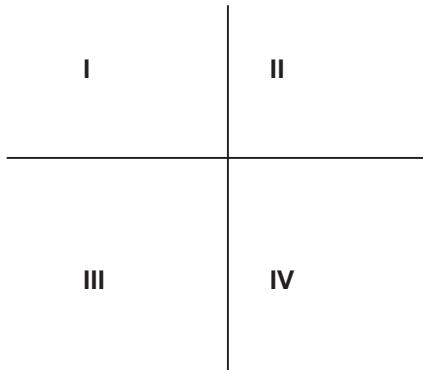
2. La relación con los Circuitos Eléctricos: para lo cual tenemos que manejar el siguiente lenguaje:

Lámpara, foco, motor, aparato eléctrico **ENCENDIDO = 1**

Lámpara, foco, motor, aparato eléctrico **APAGADO = 0**

INTERMITENCIA ELÉCTRICA = 1010

Diagrama de la Tabla de Verdad:



En el I Cuadrante, se colocan las variables (p, q, r, \dots), en el II Cuadrante, se ubica la fórmula que vamos a analizar, en el III Cuadrante, van los valores de las variables y en el IV Cuadrante, van los valores de las fórmulas y la matriz principal.

Para evaluar los esquemas moleculares necesitamos conocer las reglas de conectores lógicos, los cuales dependen de la combinación de los valores de verdad de las variables.

LEYES DE CONECTORES LÓGICOS

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Delta q$	$p \rightarrow q$	$p \leftarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \downarrow q$	$p \uparrow q$
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1

Ejemplo:

¿Qué tipo de fórmula y/o cuántos focos amarillos permite encender en un circuito la siguiente fórmula?

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

1º Paso: Ubicar variables, fórmulas y distribuir valores.

Fórmula de Distribución de valores = 2^n

$2^2 = 4$ distribuciones

Donde:

2 = Constante

$n = N^{\circ}$ de variables que contiene el esquema molecular

p	q	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$			
1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0

2º Paso: Resolver aplicando reglas de operación.

p	q	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$					
1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0

Rpta: La fórmula es tautológica y permite encender 4 focos amarillos.

MÉTODO DIRECTO DE SOLUCIÓN

Ejemplo: (1)

Dadas las proposiciones:

- p: La Administración es una ciencia social que tiene por objeto de estudio las organizaciones.
- q: La psicología es la disciplina que investiga sobre procesos mentales de las personas.
- r: La ingeniería de sistemas integra todas las disciplinas.

Hallar el valor de verdad de:

- $(p \leftarrow q) \leftrightarrow [(\sim p \Delta r) \vee q]$
- $[p \rightarrow (q \Delta r)] \uparrow (p \downarrow q)$

a) Solución:

- Encontremos los valores de verdad de las proposiciones:

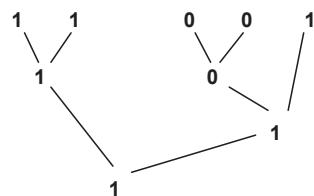
p: La Administración es una ciencia social que tiene por objeto de estudio las organizaciones. (1)

q: La psicología es la disciplina que investiga sobre procesos mentales de las personas. (1)

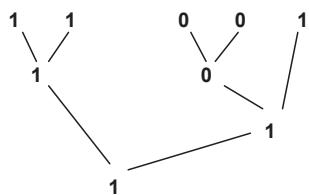
r: La ingeniería de sistemas integra todas las disciplinas. (0)

- Asignamos los valores de verdad a cada variable y aplicamos reglas de operación:

$$(p \leftarrow q) \leftrightarrow [(\sim p \Delta r) \vee q]$$



$$(p \leftarrow q) \leftrightarrow [(\sim p \Delta r) \vee q]$$



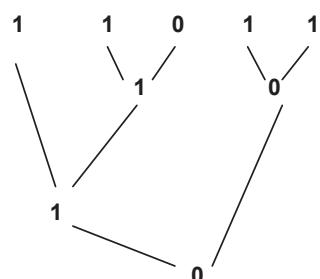
El esquema es verdadero.

b) Solución:

- Trabajamos con los mismos valores de verdad encontrados.

- Asignamos los valores de verdad a cada variable y aplicamos reglas de operación:

$$[p \rightarrow (q \Delta r)] \downarrow (p \uparrow q)$$



El esquema es falso.

Ejemplo: (2)

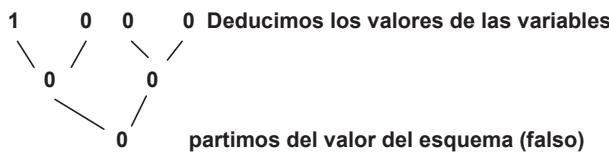
Si el valor de verdad de $(p \rightarrow q) \vee (r \vee s)$ es falso. Hallar el valor de:

- $\sim p \leftrightarrow [(q \vee r) \rightarrow s]$
- $(p \Delta q) \vee \sim [(p \leftrightarrow r) \vee s]$

Solución:

- Encontrar los valores de verdad de cada variable en el esquema propuesto, teniendo en cuenta las reglas de operación.

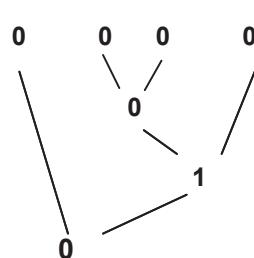
$$(p \rightarrow q) \vee (r \vee s)$$



Por lo tanto los valores de las variables son: p (1); q (0); r (0) y s (0).

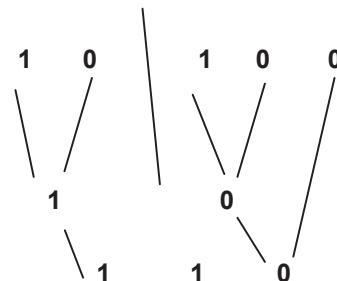
- Ahora evaluaremos los esquemas propuestos con los valores de verdad encontrados.

a) $\sim p \leftrightarrow [(q \vee r) \rightarrow s]$



Esquema falso

b) $(p \Delta q) \vee \sim [(p \leftrightarrow r) \vee s]$



Esquema verdadero

DETERMINACIÓN DE LA VALIDEZ POR EL CRITERIO DE POST

Se usa en inferencias implicativas, para saber si el esquema es o no válido

REGLAS

- Se asigna el valor FALSO a la IMPLICACIÓN.
- Se asigna según reglas de operación valores a las variables respectivas.
- Si las variables que se repiten mantienen sus mismos valores, la inferencia es NO ES VÁLIDA, y si los valores son contradictorios (1 y 0 a la vez), la INFERENCIA ES VALIDA O CORRECTA.

Ejemplo:

Demostrar si es válida o inválida la siguiente implicación:

$$1. \quad [(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

Solución:

1. Comenzaremos asignando el valor falso a la implicación (ver esquema)
 2. Le asignamos según reglas de operación valores a las variables (ver esquema)

3. Observamos que los valores de q se contradicen, por lo tanto, el esquema es válido.

Resuelve:

Aplicando el criterio de post indica si los esquemas son válidos.

$$a) \quad [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow (r \rightarrow q)$$

$$\text{b) } [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q)] \wedge \neg q$$

Ejercicio 01

Resuelve aplicando leyes de operación, luego encierra con un círculo la respuesta que consideres correcta.

1) Son proposiciones formalmente incorrectas:

1. O la lógica es una ciencia formal o la arqueología es ciencia social.
2. Dado que Rigoberta Menchu Túm, fue Premio Nobel, por lo tanto, Charles Lutwidge Dodgson escribió "Alicia en el país de las maravillas".
3. El nivel de motivación del empleado determina la cantidad de esfuerzo ejercido en el trabajo, no obstante, la cantidad de esfuerzo ejercido en el trabajo no es uno de los factores que determina la productividad.
4. Si y sólo si César Vallejo escribió "El Tungsteno" por consiguiente fue un gran poeta.
5. Las fórmulas matemáticas son proposiciones porque su valor de verdad es binario: 1 ó 0.

Son objetablemente incorrectas, excepto:

- a) 1, 3,4 b) 1 y 3 c) 2 y 5 d) 2, 4 y 5

2) Dadas las proposiciones:

p: Los apuntes son una técnica de estudio.

q: Las refranes y los mitos son proposiciones lógicas.

¿Qué fórmulas son verdaderas?

- a) $[(\neg p \oplus \neg q) \rightarrow p]$ b) $[(\neg q \vee \neg p) \rightarrow \neg p]$
 c) $[\neg(p \wedge \neg q) \leftrightarrow p]$ d) Todas

3) Si: $p = 1$, $\neg q = 0$, $\neg r = 1$, ¿Qué fórmulas biimplicativas son verdaderas?

- 1) $[(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow r]$ 2) $[(p \wedge q) \wedge \neg r]$
 3) $[(p \wedge \neg q) \leftrightarrow r]$ 4) $[(\neg r \oplus \neg p) \wedge q]$
 5) $(p \oplus \neg q) \leftrightarrow \neg r$

Son no absurdamente falsas, excepto:

- a) 2, 3 y 4 b) 1, 3 y 5 c) 2, 3 y 5 d) 1, 4 y 5

4) ¿Qué fórmula es tautológica?

- a) $[(p \rightarrow \neg q) \wedge q] \rightarrow p$ b) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
 c) $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q)$ d) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$

5) Si en un circuito, el foco se apaga sólo en el cuarto intento, ¿cuál es su fórmula correspondiente?

- 1) $(\neg q \rightarrow p)$ 2) $(\neg p \mid \neg q)$ 3) $\neg q \vee p$
 4) $(p \rightarrow q)$ 5) $(\neg q \wedge \neg p)$

Son ciertas:

- a) 1 y 2 b) Solo 1 y 3 c) 3, 4 y 5 d) todas

6) La siguiente fórmula: $[(p \wedge \neg q) \wedge q] \rightarrow p$ Produce en un circuito:

- a) 4 focos apagados
 b) 3 focos encendidos y 1 apagado
 c) 2 focos encendidos y 2 apagados
 d) 4 focos encendidos

7) Si la fórmula: $\neg[(p \rightarrow \neg q) \oplus (r \vee \neg s)]$ es verdadera, ¿cuál implicación es falsa?

- 1) $[(p \vee \neg q) \rightarrow r]$ 2) $(p \vee q) \wedge \neg(r \rightarrow s)$
 3) $(r \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (p \oplus s)$ 4) $(q \vee r) \leftrightarrow (\neg s \wedge p)$
 5) $(p \rightarrow s) \rightarrow (r \wedge q)$

Son refutablemente incorrectas:

- a) 3, 2,4 b) 3, 1,2 c) 1, 3, 5 d) 5, 3,4

8) ¿Cuáles son los conectores lógicos que deben ir en la siguiente tabla veritativa?

p	q	$\neg(q \dot{\wedge} p)$	$\neg(q \dot{\vee} p)$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	0

- a) $\leftrightarrow, \rightarrow$ b) \oplus, \rightarrow c) \wedge, \rightarrow d) \wedge, \leftrightarrow

9) El siguiente gráfico, corresponde a:

	q	1	0
p			
1			
0			

- a) $p|q$ b) $\neg p \vee \neg q$ c) $p \downarrow q$ d) $p \rightarrow q$
- 10) De: $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r)] \wedge (q \rightarrow \sim r)$ se afirma que es:
 a) Tautología b) Contradicción c) Contingencia d) No se puede definir
- 11) Luego de construir la tabla de verdad de la siguiente proposición: $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \Delta \sim p)$
 ¿Cuántos valores verdaderos y falsos aparecen respectivamente?
 a) 6; 2 b) 5; 3 c) 3; 5 d) 7; 1
- 12) El esquema: $[(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s] \rightarrow (p \vee s)$, evaluado con el criterio de Post es:
 a) válido b) no válido c) contingente d) impreciso

Ejercicio 02

Resuelve aplicando leyes de operación, luego encierra con un círculo la respuesta que consideres correcta.

1) Son proposiciones formalmente verdaderas:

1. Si el aveSTRUZ es ave corredora luego es falso que sea ovípara.
2. Las mareas se producen por influencia lunar o excluyentemente se producen por acción de los vientos
3. Los Ashánincas son una cultura andina o únicamente una cultura costeña.
4. Los Mochicas fueron una cultura costeña si y sólo si los Paracas no fueron una cultura andina.
5. Así como los epistemólogos son filósofos así también lo son los teóricos de la estética.

Son inválidamente incorrectas:

a) 1, 2, 3

b) 2, 3

c) 2, 5, 4

d) 4 y 5

2) Si: $p = 1$, $\neg q = 1$, $r = 0$, ¿qué implicaciones son no absurdamente verdaderas?

1) $\neg[(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r]$

2) $(\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg r \rightarrow p)$

3) $[(\neg r \vee \neg q \vee p) \rightarrow \neg q]$

4) $\neg(p \wedge \neg q) \oplus (r \rightarrow \neg p)$

5) $(p \vee \neg q) \rightarrow (r \leftrightarrow \neg p)$

Son innegablemente ciertas:

a) 2 y 4

b) 3 y 5

c) 1, 2, 3

d) 3, 4, 5

3) ¿En qué fórmulas se produce un corto circuito?

a) $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \wedge p)$

b) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

c) $(p \downarrow q) \leftrightarrow (p \vee q)$

d) $(p \rightarrow q) \oplus (\neg p \vee q)$

4) La siguiente fórmula: $[(\neg q \rightarrow p) \leftrightarrow (p \downarrow q)]$ Produce en un circuito:

a) 3 focos encendidos y 1 apagado

b) 2 focos encendidos y 1 apagado

c) 1 foco apagado y 3 encendidos

d) 4 focos apagados

- 5) El siguiente gráfico, corresponde a:

	$p \wedge q$	1	0
	1		
	0		

- a) $p \vee q$ b) $p \uparrow q$ c) $p \leftrightarrow q$ d) $p \leftarrow q$

- 6) La fórmula: $\{[p \oplus (q \wedge r)] \wedge (\neg r \vee \neg q)\} \rightarrow p$, con el criterio de Post es:

- a) válido b) no válido c) tautológico d) contingente

- 7) Dadas las proposiciones:

p: 9 es un número primo.

q: Si al evaluar una fórmula lógica, los valores de su conectivo principal son todos verdaderos, entonces se dice que la fórmula es una contingencia.

r: La lógica es una ciencia fáctica.

s: “Ángela y Juan comparten sus ganancias” es una proposición compuesta.

Determinar el valor de verdad de:

a) $[\neg(p \wedge \neg s) \leftrightarrow (r \rightarrow q)] \vee p$

b) $(s \leftarrow r) \Delta \neg[q \wedge (\neg s \vee \neg r)]$

- 8) Resolver el siguiente esquema mediante el criterio de Post e indicar si es válido o no.

$$\{p \wedge [(q \wedge p) \rightarrow \neg r]\} \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$$

- 9) Si “s” es verdadera y la proposición: $[(s \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q)] \vee (p \wedge r)$ Es falsa, halle el valor de verdad de las variables.

- 10) Si: $(p \rightarrow \sim q) \vee [(r \leftrightarrow \sim p) \vee (q \leftrightarrow \sim s)]$ es falsa, halle el valor de verdad de:

$$(p \rightarrow q) \vee (r \leftrightarrow s)$$

1.9. EQUIVALENCIAS LÓGICAS

Dos fórmulas o esquemas moleculares A y B son equivalentes si:

Los valores de verdad de su matriz principal de cada fórmula son iguales.

Unidos por el biimplicador “ \Leftrightarrow ” el resultado es una tautología.

Nota: Los operadores “ \leftrightarrow ” y “ \Leftrightarrow ” son iguales.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

USANDO TABLAS DE VERDAD

Ejemplo:

Sea A: $(p \rightarrow q) \vee \sim p$ y B: $\sim p \vee q$

Verificar si A es equivalente a B.

Solución:

FORMA 1

p	q	$(p \rightarrow q) \vee \sim p$	$\sim p \vee q$
1	1	1 1 0	0 1 1
1	0	0 0 0	0 0 0
0	1	1 1 1	1 1 1
0	0	1 1 1	1 1 0

IGUALES

FORMA 2

p	q	$[(p \rightarrow q) \vee \sim p] \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
1	1	1 1 0 1 0 1 1
1	0	0 0 0 1 0 0 0
0	1	1 1 1 1 1 1 1
0	0	1 1 1 1 1 1 0

TAUTOLOGIA



1. USANDO LEYES DE EQUIVQUIALENCIA (EQUIVALENCIAS NOTABLES)

1. LEYES CONMUTATIVAS	7. LEYES IMPLICATIVAS
a) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ b) $A \vee B \equiv B \vee A$ c) $A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$	a) $A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$ b) $A \rightarrow B \equiv \sim (A \wedge \sim B)$
2. LEYES ASOCIATIVAS	8. LEYES DE LA BIIMPLICACIÓN
a) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ b) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ c) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$	a) $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ b) $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$
3. LEYES DE IDEMPOTENCIA	9. LEYES DE DISYUNCION FUERTE
a) $(A \wedge A) \equiv A$ b) $(A \vee A) \equiv A$	a) $A \Delta B \equiv (A \wedge \sim B) \vee (B \wedge \sim A)$ b) $A \Delta B \equiv (A \vee B) \wedge \sim (A \wedge B)$
4. LEYES DISTRIBUTIVAS	10. LEYES DE TRANSPOSICION
a) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ b) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ c) $A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$ d) $A \rightarrow (B \vee C) \equiv (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$	a) $A \rightarrow B \equiv \sim B \rightarrow \sim A$ b) $A \leftrightarrow B \equiv \sim B \leftrightarrow \sim A$
5. LEYES DE ABSORCION	11. LEYES ADICIONALES
a) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ b) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ c) $A \wedge (\sim A \vee B) \equiv A \wedge B$ d) $A \vee (\sim A \wedge B) \equiv A \vee B$	a) $A \vee F \equiv A$ b) $A \vee V \equiv V$ c) $A \wedge F \equiv F$ d) $A \wedge V \equiv A$ e) $A \wedge \sim A \equiv F$ f) $A \vee \sim A \equiv V$
	<p style="text-align: center;">LEYES DE IDENTIDAD</p> <p style="text-align: center;">LEYES DE COMPLEMENTO</p>
6. LEYES DE MORGAN	12. LEYES DE DOBLE NEGACIÓN
a) $\sim (A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$ b) $\sim (A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$ c) $A \wedge B \equiv \sim (\sim A \vee \sim B)$ d) $A \vee B \equiv \sim (\sim A \wedge \sim B)$	a) $\sim (\sim A) \equiv A$

Ejemplos:

Encuentre proposiciones equivalentes a las dadas:

1. “Es imposible que Juan no estudie”, equivale a decir:

p : Juan estudia

$$\sim\sim p \equiv p \quad \text{Por la ley de doble negación.}$$

“Juan estudia”

2. “Si hoy llueve, estamos en invierno”, es equivalente a decir:

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad \text{Por definición del implicador.}$$

“Jamás llueve o estamos en invierno”

3. “Mi rendimiento académico es excelente de modo que obtengo una beca para estudiar”, es equivalente a decir:

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \quad \text{Por la ley de transposición.}$$

“Si no obtengo la beca, jamás tuve un rendimiento excelente”

4. “No es cierto que Julio canta y toca guitarra”.

Equivale a decir:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad \text{Por la ley De Morgan.}$$

“Julio no canta o incluso no toca guitarra”

5. “El pensamiento se expresa por medio del lenguaje y se identifica con este.”. Es equivalente a decir:

$$p \vee q \equiv q \vee p \quad \text{Por la ley conmutativa.}$$

“El pensamiento se identifica con el lenguaje o incluso se expresa por medio de este”

SIMPLIFICACIÓN DE PROPOSICIONES.- Las leyes del álgebra de proposiciones nos permiten reemplazar una proposición por otra más simple, que lógicamente es equivalente a la primera.

Ejemplos:

a) Simplifiquemos $p \wedge \sim (q \vee p)$

Solución:

$$p \wedge \sim (q \vee p) \equiv p \wedge (\sim q \wedge \sim p) \quad \text{Por ley De Morgan}$$

$$\equiv p \wedge (\sim p \wedge \sim q) \quad \text{Por ley Comutativa}$$

$$\equiv (p \wedge \sim p) \wedge \sim q \quad \text{Por ley Asociativa}$$

$$\equiv F \wedge \sim q \quad \text{Por la ley de Complemento}$$

$$\equiv F \quad \text{Por ley de Identidad}$$

b) Simplifiquemos $\{[p \wedge (q \vee p)] \vee \sim p\} \wedge q$

Solución:

$$\{[p \wedge (q \vee p)] \vee \sim p\} \wedge q \equiv \{[p \wedge (p \vee q)] \vee \sim p\} \wedge q \quad \text{Por ley Comutativa}$$

$$\equiv \{p \vee \sim p\} \wedge q \quad \text{Por ley de Absorción}$$

$$\equiv V \wedge q \quad \text{Por ley de Complemento}$$

$$\equiv q \quad \text{Por ley de Identidad.}$$

Completa el siguiente cuadro indicando las leyes de equivalencia que utilizas para realizar la simplificación.

Simplifiquemos $\sim(p \rightarrow q) \wedge q$	Leyes de equivalencias
$\sim(p \rightarrow q) \wedge q \equiv (p \wedge \sim q) \wedge q$ ≡ ≡ ≡ ≡	Por ley implicativa
Simplifiquemos $(\sim p \vee q) \vee p$	Leyes de equivalencias
$(\sim p \vee q) \vee p \equiv p \vee (\sim p \vee q)$ ≡ ≡ ≡	Por la ley conmutativa
Simplifiquemos $p \vee \sim(\sim p \wedge q)$	Leyes de equivalencias
$p \vee \sim(\sim p \wedge q) \equiv p \vee [\sim(\sim p) \vee \sim q]$ ≡ ≡ ≡	Por la ley De Morgan
Simplifiquemos $[p \wedge (\sim p \vee q)] \vee (q \wedge p)$	Leyes de equivalencias
$[p \wedge (\sim p \vee q)] \vee (q \wedge p) \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge p)$ ≡ ≡ ≡	Por la ley de Absorción

1.10. CIRCUITOS LÓGICOS

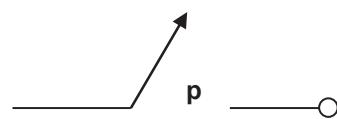
Cuando comparamos interruptores abiertos o cerrados con proposiciones estamos estableciendo un circuito lógico.

A un interruptor se le puede representar por medio de una proposición p y viceversa, de modo que el valor de verdad “1” de la proposición se identifique con “el paso de corriente”, por consiguiente se dice que el interruptor está cerrado y cuando el valor es “0”, con “la interrupción de la corriente”, se considera que el interruptor está abierto.

Gráficamente representaremos:



Circuito cerrado pasa corriente (1)

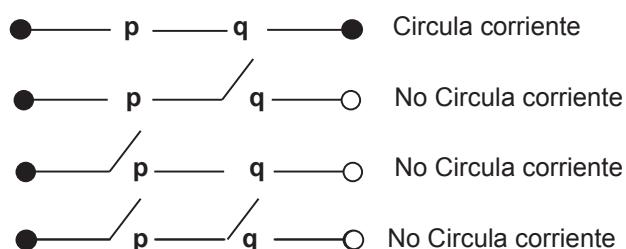


Circuito abierto no pasa corriente (0)

Circuito en Serie

La conjunción de proposiciones corresponde, en la teoría de los circuitos, a la conexión en serie de interruptores. En efecto la tabla de conducción de los interruptores conectados en serie coincide con la tabla de verdad de la conjunción.

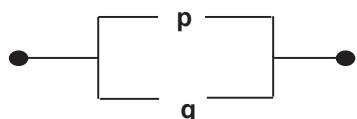
p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0



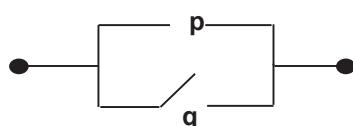
Círculo en Paralelo

La disyunción inclusiva de proposiciones corresponde, en la teoría de los circuitos, a la conexión en paralelo de interruptores. En efecto la tabla de conducción de los interruptores conectados en paralelo coincide con la tabla de verdad de la disyunción.

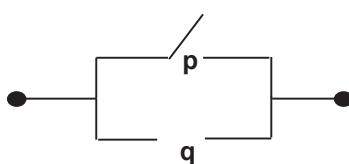
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



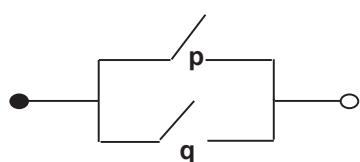
Circula corriente



Circula corriente



Circula corriente

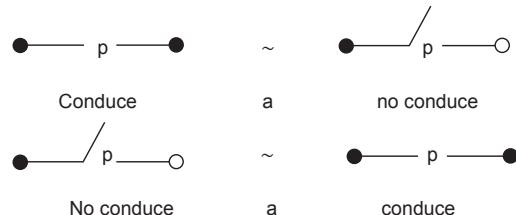


No circula corriente

La negación Lógica

La negación lógica tiene como equivalente el cambio de estado de un circuito del estado conductor a no conductor o viceversa.

p	$\sim p$
1	0
0	1



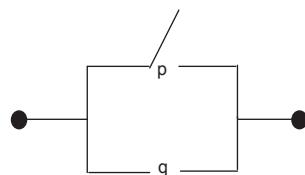
Ahora aplicando lo establecido vamos a construir circuitos.

- a) Construye un circuito para: $p \rightarrow q$

Solución:

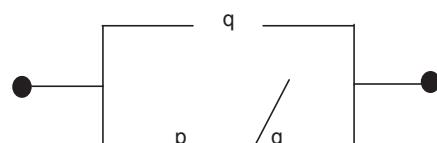
Utilizando las leyes del álgebra proposicional hallamos la expresión equivalente a la implicación.

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

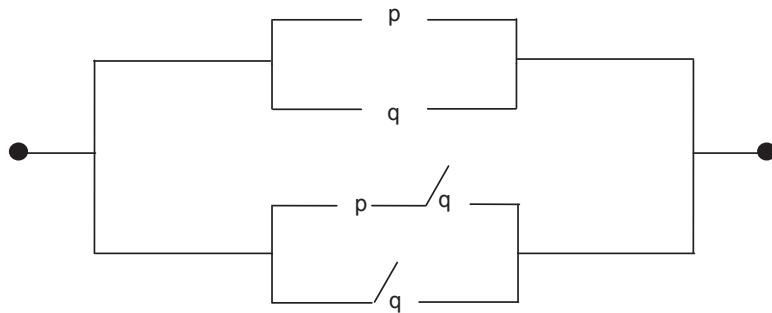


- b) Construye un circuito para el siguiente esquema: $q \vee (p \wedge \sim q)$

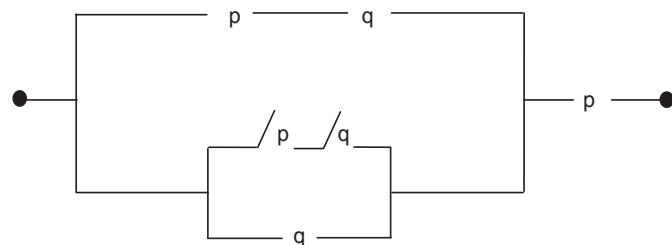
Solución:



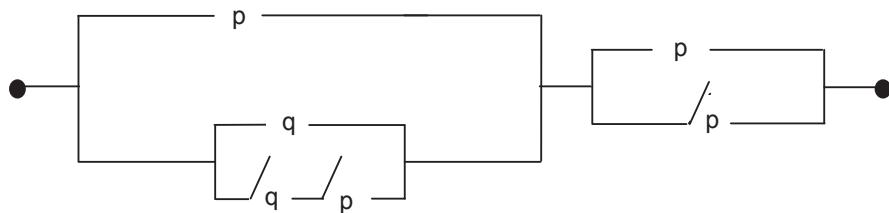
c) Construye un circuito para: $(p \vee q) \vee [(\sim q \wedge p) \vee \sim q]$



d) Construye un circuito para el siguiente esquema: $\{(p \wedge q) \vee [(\sim p \wedge \sim q) \vee q]\} \wedge p$

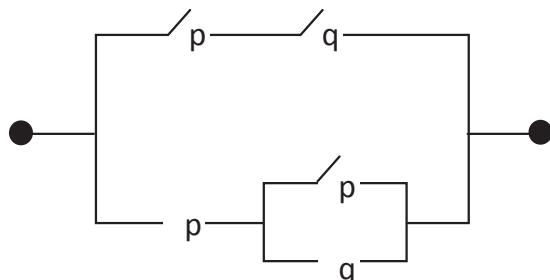


e) Dados los circuitos hallamos la forma proposicional correspondiente:



$$\{p \vee [q \vee (\sim q \wedge \sim p)]\} \wedge (p \vee \sim p)$$

f) Dados los circuitos hallamos la forma proposicional correspondiente



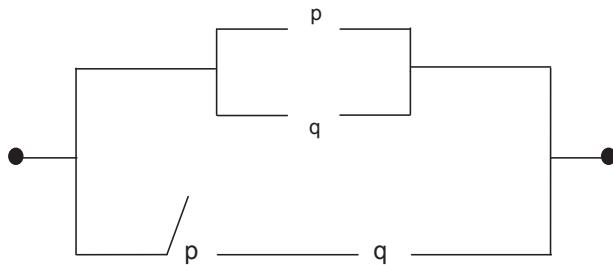
$$(\sim p \wedge \sim q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]$$

Simplificación de circuitos

Considerando la identificación de los circuitos en serie y en paralelo con las proposiciones básicas de conjunción y disyunción, así como las leyes del álgebra de proposiciones podemos efectuar la simplificación de circuitos; para ello, en primer lugar, se representa el circuito en su forma proposicional, en segundo lugar, se simplifica y por último se dibuja el nuevo circuito utilizando la proposición simplificada.

Ejemplos:

a) Simbolizamos y simplificamos el circuito:



Su forma proposicional es: $(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

Simplificación:

$$(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv [(p \vee q) \vee \sim p] \wedge [(p \vee q) \vee q] \text{ Ley Distributiva}$$

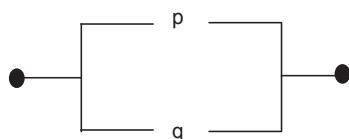
$$\equiv [(p \vee \sim p) \vee q] \wedge [p \vee (q \vee q)] \text{ Ley Asociativa y Comutativa}$$

$$\equiv (V \vee q) \wedge (p \vee q) \quad \text{Ley Idempotencia y Complementación}$$

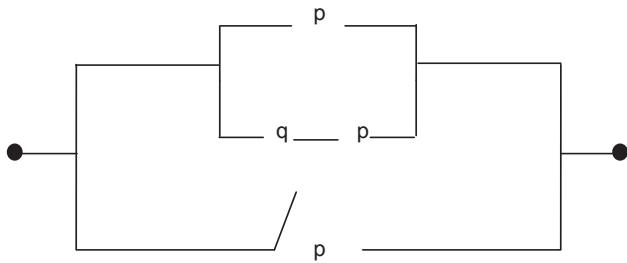
$$\equiv V \wedge (p \vee q) \quad \text{Ley Identidad}$$

$$\equiv p \vee q \quad \text{Ley Identidad}$$

Circuito simplificado:



b) tenemos la menor expresión que represente al circuito:

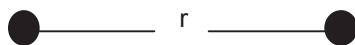


Su forma proposicional es: $\{[p \vee (q \wedge p) \vee \sim p]\} \wedge r$

Simplificando tenemos:

$$\begin{aligned}
 \{[p \vee (q \wedge p) \vee \sim p]\} \wedge r &\equiv [(p \vee \sim p) \wedge r] && \text{Ley Comutativa y Absorción} \\
 &\equiv V \wedge r && \text{Ley Complementación} \\
 &\equiv r && \text{Ley Identidad}
 \end{aligned}$$

Circuito simplificado:



1.11. INFERENCIAS LÓGICAS

Son argumentos o razonamientos. Es el proceso de pasar de un conjunto de proposiciones llamadas PREMISAS a otra proposición llamada CONCLUSIÓN.

La Inferencia es una condicional de la forma:

FORMA VERTICAL DE UNA INFERNICIA

$$\left. \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array} \right\} \text{premisas} \quad C \rightarrow \text{conclusion}$$

FORMA HORIZONTAL DE UNA INFERENCIA

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

IMPLICACIÓN LÓGICA

Una fórmula A implica a B (denotada por $A \Rightarrow B$), si el resultado es una tautología

Ejemplo:

Comprobar si las siguientes fórmulas son implicaciones lógicas.

$$A: [(p \leftrightarrow q) \wedge q] \rightarrow q$$

$$B: [(p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p)] \rightarrow \neg q$$

Solución:

p	q	$[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \rightarrow q$					p	q	r	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p)] \rightarrow \neg q$				
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	
Es una tautología							0	1	1	1	1	0	0	
							0	1	0	1	1	0	0	
							0	0	1	1	1	1	1	
							0	0	0	1	1	1	1	
No es una tautología														

VALIDEZ O INVALIDEZ DE UNA INFERENCIA

- MÉTODO DE LA TABLA DE VERDAD:** La inferencia será válida si esta es una implicación lógica, en caso contrario será una inferencia no válida (consistente).
- MÉTODO DE LAS EQUIVALENCIAS NOTABLES:** Es el procedimiento por el cual utilizando leyes de equivalencia se obtiene el valor de verdad (1).
- MÉTODO ABREVIADO DE LAS TABLAS:** Llamado también criterio de Post, se usa en inferencias cuyas variables proposicionales son numerosas además este método verifica si el esquema es o no válido.

IMPLICACIONES NOTABLES

1. REGLA DE LA ADICIÓN $\frac{A}{\therefore A \vee B}$	2. MODUS TOLLENDO PONENS (M.T.P.) $\begin{array}{c} A \Delta B \\ \neg A \\ \hline \therefore B \end{array}$ $\begin{array}{c} A \Delta B \\ \neg B \\ \hline \therefore A \end{array}$ $\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \\ \hline \therefore B \end{array}$
3. SIMPLIFICACIÓN $\begin{array}{c} A \wedge B \\ \hline \therefore A \end{array}$ $\begin{array}{c} A \wedge B \\ \hline \therefore B \end{array}$	4. MODUS TOLLENDO TOLLENS (M.T.T.) $\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \neg B \\ \hline \therefore \neg A \end{array}$ $\begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ \neg A \\ \hline \therefore \neg B \end{array}$ $\begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ \neg B \\ \hline \therefore \neg A \end{array}$
5. MODUS PONENDO PONENS (M.P.P.) $\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \leftrightarrow B \\ \hline \therefore B \end{array}$ $\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \leftrightarrow B \\ \hline \therefore A \end{array}$	6. SILOGISMO HIPOTETICO $\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \rightarrow B \\ \hline \therefore A \rightarrow C \end{array}$ $\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \rightarrow B \\ \hline \therefore C \rightarrow B \end{array}$ $\begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ B \rightarrow C \\ C \rightarrow A \\ \hline \therefore A \leftrightarrow C \end{array}$
7. MODUS PONENDO TOLLENS (M.P.T.) $\begin{array}{c} A \Delta B \\ A \Delta B \\ \hline \therefore \neg B \end{array}$ $\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore \neg A \end{array}$	8. DILEMA CONSTRUCTIVO $\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \rightarrow B \\ \hline \therefore B \vee D \end{array}$ $\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ C \leftrightarrow D \\ \hline \therefore B \wedge D \end{array}$ $\begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ C \rightarrow D \\ C \leftrightarrow D \\ \hline \therefore B \vee D \end{array}$ $\begin{array}{c} \neg A \rightarrow B \\ \neg C \rightarrow D \\ \neg A \vee \neg C \\ \hline \therefore B \vee D \end{array}$
9. DILEMA DESTRUCTIVO $\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \Delta B \\ C \rightarrow D \\ C \Delta D \\ \hline \therefore \neg A \vee \neg C \end{array}$ $\begin{array}{c} A \Delta B \\ C \Delta D \\ \neg B \vee \neg D \\ \hline \therefore A \vee C \end{array}$ $\begin{array}{c} C \Delta D \\ \neg B \vee \neg D \\ \hline \therefore \neg B \vee \neg D \end{array}$	10. REGLA DE LA CONJUNCION $\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A \wedge B \end{array}$

Ejemplos:

Modus Ponendo Ponens (M.P.P.):

1. "Si arriesgas, triunfarás. Es el caso que haz arriesgado". Por lo tanto:

Formalización vertical:

Formalización Lineal: $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

$$\frac{p \rightarrow q \\ p}{\therefore q} \quad "Triunfarás"$$

NOTA: Recuerda que no hay Ponendo Ponens para el consecuente.

Modus Ponendo Tollens (M.P.T.):

2. "Simón Bolívar nació en Venezuela o bien en Argentina. Nació en Venezuela. Por lo tanto:

Formalización vertical:

Formalización Lineal: $[(p \Delta q) \wedge p] \rightarrow \sim q$

$$\frac{p \Delta q \\ p}{\therefore \sim q} \quad "Simón Bolívar no nació en Argentina"$$

Silogismo:

3. "Si la tierra pertenece al sistema solar entonces gira alrededor del sol, del mismo modo si la tierra gira alrededor del sol entonces ella se favorece con la luz solar. Por lo tanto:

Formalización vertical:

Formalización Lineal: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

$$\frac{p \rightarrow q \\ q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$$

"Si la tierra pertenece al sistema solar entonces ella se

favorece con la luz solar"

Dilema Constructivo Compuesto (D.C.C.):

4. "Si hoy es sábado, voy al cine; pero si hoy voy a la playa, comeré ceviche. Hoy es sábado o voy a playa. Por lo tanto:

Formalización vertical:

Formalización Lineal: $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee r)$

$$\frac{p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r}{\therefore q \vee s}$$

"Voy al cine o incluso comeré ceviche"

Ejercicio 03

Resuelve aplicando leyes de equivalencias notables, luego escribe la respuesta que consideres correcta.

I. Encuentre proposiciones equivalentes a las dadas.

1. “Los refranes y los mitos no son proposiciones lógicas”.
2. “El monitor Huáscar es el buque más emblemático y legendario de la Marina de Guerra del Perú”.

3. “La pena privativa de libertad puede ser temporal o de cadena perpetua”.
4. “El álgebra es un sistema axiomático si y sólo si la geometría también lo es”.
5. “Caral es la primera civilización de América, es contemporánea con Egipto y las ciudades sumerias de Mesopotamia”.

6. “Si la temperatura no está elevada, las aguas marinas están frías”.

7. La proposición: “Es mentira que, hace frío y se congela”, es equivalente a:

- a) no hace frío, tampoco se congela.
- b) no hace frío o no se congela.
- c) no se congela o bien no hace frío.
- d) si hace frío, no se congela.

Son ciertas.....

8. La proposición: “Juan no es buen estudiante puesto que destaca en el fútbol y en el trabajo” equivale a:

- a) Si Juan destaca en el trabajo y en el fútbol, jamás será buen estudiante.
- b) Es mentira que Juan desataca en el trabajo así como en el fútbol, a menos que tampoco sea un buen estudiante.
- c) Juan no es buen estudiante o incluso tampoco destaca en el trabajo o jamás desatacará en el fútbol.
- d) Si Juan destaca en el fútbol y en el trabajo, será un buen estudiante.

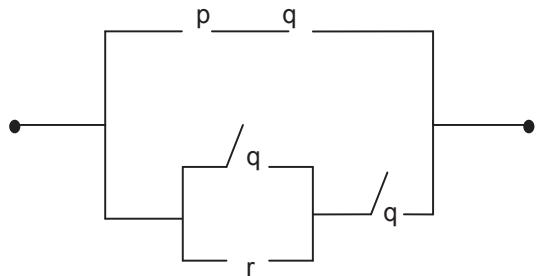
Son falsas excepto.....

9. La proposición: “Se supone que hay que pagar 100 soles y ser socio para ingresar al teatro” equivale a:

- a) Es inconcebible que pague 100 soles aun cuando soy socio, o en todo caso ingreso al teatro.
- b) Si no ingreso al teatro entonces es incorrecto que pague 100 soles y sea socio.
- c) Ingreso al teatro o no pago 100 soles o no soy socio.
- d) No ingreso al teatro porque no pague 100 soles y no soy socio.

Son falsas.....

10. Simboliza y simplifica el circuito:



11. Construya los circuitos lógicos correspondientes a:

- a) $[(\neg p \wedge r) \vee \neg p] \vee [(q \wedge (q \vee s))]$
- b) $[p \wedge (\neg q \vee r)] \vee q$
- c) $(p \wedge q) \vee [(\neg q \vee r) \wedge \neg q]$
- d) $(\neg p \wedge \neg q) \vee [p \wedge (\neg p \vee q)]$

II. Dados los siguientes enunciados encuentre la conclusión para cada caso:

1. El aula virtual es una gran ventaja para los estudiantes o solamente para los docentes sin embargo no es ventajoso para los docentes en consecuencia:
2. Si la educación virtual se aplicara actualmente, aumentaría el aprendizaje. Igualmente si aumenta el aprendizaje, mejorará la educación en general. Por lo tanto:
3. En los próximos años habrá escasez de agua de ahí que la prevención de los recursos hídricos son importantes. La tala de árboles es indiscriminada de modo que la flora se verá afectada. Además habrá escasez de agua o bien la tala de árboles es indiscriminada. Por lo tanto:
4. Las concesiones forestales no perjudicarán a los empresarios salvo que firmen convenios fraguados. A pesar que jamás será aprobado por el pueblo excepto que se promulgue una ley marco para este fin. Aun cuando no se firmen convenios fraguados o tampoco se promulgue una Ley Marco. En consecuencia:
5. Si en el mundial aparecen buenos jugadores y jóvenes, será el mejor jugado. Los estadios se llenarán sólo si las selecciones brindan un buen espectáculo. Es mentira que el mundial será el mejor jugado aun cuando brinden un buen espectáculo. Luego:

Ejercicio 04

- I. Encuentre proposiciones equivalentes a las dadas.

 1. “Es mentira que escucho música y toco el piano”.
 2. “Si Juan es deportista, mantiene una dieta estricta”.
 3. “Los refranes y las creencias religiosas no son proposiciones lógicas”.
 4. “Si la temperatura está bajo cero, el agua se congela”.
 5. “Los problemas sociales y económicos continuarán siendo un peligro latente para este gobierno a menos que se cumpla con los objetivos del Acuerdo Nacional”.
 6. La proposición: “No es innegable que, los caninos tal como los incisivos son dientes”, equivale a:
 - a) No es verdad que, los caninos son dientes salvo que los incisivos son dientes.
 - b) Los caninos no son dientes también los incisivos no son dientes.
 - c) Ni los caninos ni los incisivos son dientes.
 - d) Los caninos es absurdo que sean dientes excepto que los incisivos no sean dientes.
 - e) Los caninos o los incisivos no son dientes.

Son falsas.....

7. La transposición de: "Al haber enseñanza por ende existe aprendizaje", es:
 - a) No existe enseñanza puesto que tampoco hay aprendizaje.
 - b) Dado que no hay aprendizaje se infiere que es absurdo que haya enseñanza.
 - c) Es innegable que, si es falso que existe aprendizaje se colige que no hay enseñanza.
 - d) Todas
 - e) Es imposible que haya enseñanza.
 8. ¿Qué fórmulas son equivalentes?

8. ¿Qué fórmulas son equivalentes?

$$1. \left[(p \oplus \neg q) \rightarrow r \right]$$

$$2. [\neg r \rightarrow \neg(q \oplus \neg p)]$$

$$3. [r \leftarrow (\neg q \oplus p)]$$

$$4. \quad \left[(q \oplus \neg p) \rightarrow r \right]$$

$$5. \left[\neg(\neg p \oplus q) \leftarrow r \right]$$

Son falsas:

9. La proposición: "Es absurdo que, hayan tsunamis dado que los perros aullaron", equivale a:

 1. No acontece que, porque el perro aúlla en consecuencia hay tsunamis.
 2. Es negable que, puesto que no hay tsunamis por ende jamás los perros aúllan.
 3. Es falaz que, los perros no aúllan siempre que inexistan tsunamis.
 4. No sucede que, existan perros que aúllan mientras que hay tsunamis.
 5. Esobjetable que, en tanto los perros no aúllan por consecuencia no hay tsunamis.

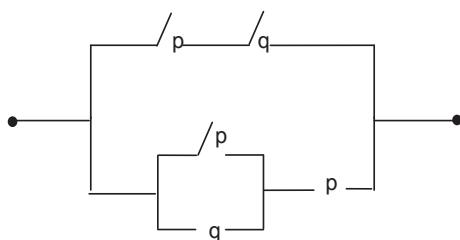
Son infaliblemente falsas:

- a) 1, 2, 3
- b) 2, 3, 4
- c) 1 y 5
- d) 4 y 5
- e) Todas

10. Aplicando las leyes del álgebra proposicional simplifique:

- a) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$
- b) $\sim (\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$

11. Simboliza y simplifica el circuito:



12. Construya los circuitos lógicos correspondientes a:

- a) $\{p \vee [q \vee (\neg q \wedge \neg p)]\} \wedge (p \vee \neg q)$
- b) $\{p \wedge [(q \wedge \neg r) \vee s]\} \vee (q \wedge s)$

II. Dados los siguientes enunciados encuentre la conclusión para cada caso usando las leyes de inferencias.

1. El objetivo de la Universidad Autónoma del Perú es la formación integral del estudiante ya que el profesional debe estar preparado para enfrentar los retos de la sociedad. Sin embargo la formación integral del estudiante no es el objetivo de la Universidad Autónoma del Perú. Por lo tanto:
2. Si 4 no es par, es múltiplo de 2. $1/2$ no es entero implica que es un número real. Sin embargo 4 no es par o bien $1/2$ no es entero. Por lo tanto:
3. O sentimos miedo o sentimos alegría. Del mismo modo somos románticos o únicamente somos atentos. Tal como no sentimos alegría o incluso no somos atentos. Por lo tanto:
4. Si me vacuno y guardo reposo, evitaré cualquier enfermedad. Así también esta campaña de vacunación se dará por única vez o incluso el Estado cubrirá los gastos de medicina siempre y cuando la comunidad colabore con su presencia y asista masivamente a los centros de salud.

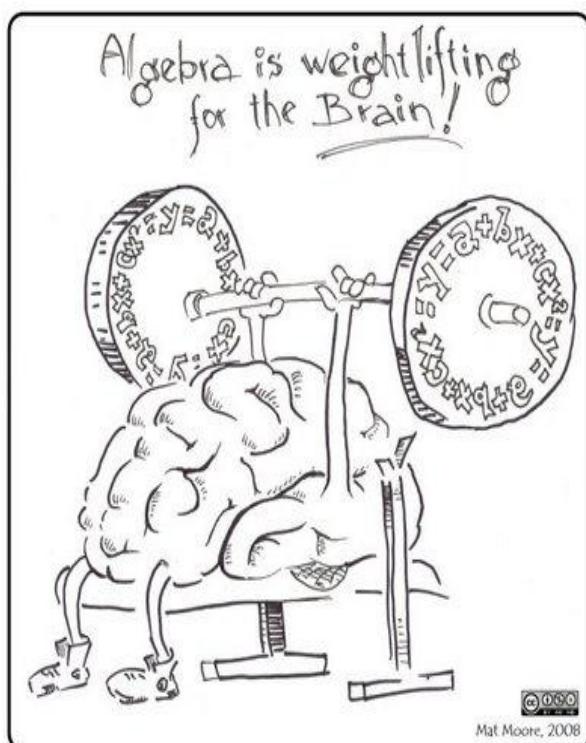
Pero me vacuno y guardo reposo, no obstante esta campaña de vacunación se dará por única vez o incluso el Estado cubrirá los gastos de medicina. En consecuencia:

5. La televisión educa o tan sólo entretiene. La televisión no educa." Luego:

6. Si ha ocurrido una transformación en la estructura molecular de una sustancia, entonces se ha producido una reacción química. Si se ha producido una reacción química, entonces ha ocurrido un fenómeno químico. En consecuencia:

UNIDAD II

ALGEBRA



NUMEROS REALES. ECUACIONES

DE PRIMER GRADO

ECUACIONES DE SEGUNDO

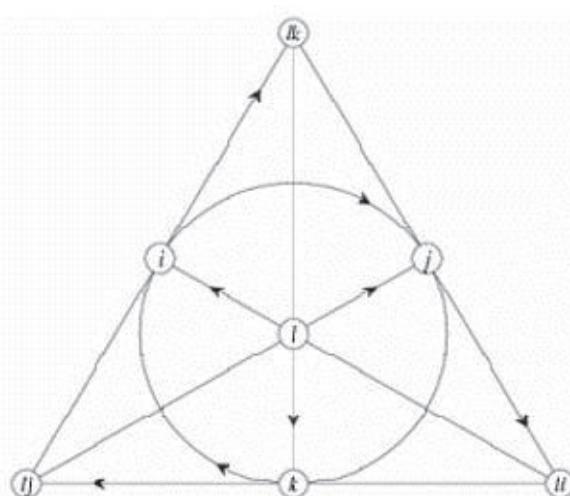
GRADO

INECUACIONES DE PRIMER Y

SEGUNDO GRADO

ECUACIONES E INEQUACIONES

CON VALOR ABSOLUTO



LECTURA

2.1. HISTORIA DEL ÁLGEBRA

El desarrollo histórico del álgebra sugiere que actualmente ésta se concibe como la rama de las matemáticas que trata la simbolización de relaciones numéricas generales y de estructuras matemáticas así como de la operación sobre esas estructuras. Los temas típicos incluyen:

- Propiedades de los números reales y complejos
- El planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado en una incógnita
- La simplificación de expresiones polinómicas y racionales
- La representación simbólica de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, junto con sus gráficas
- Sucesiones y series

El contenido del álgebra escolar ha cambiado poco. Al comienzo de este siglo los cursos iniciales de álgebra cubrían temas como:

- Simplificación de expresiones
- Planteo y resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas
- Uso de tales técnicas para hallar respuesta a problemas
- Práctica con razones, proporciones, potencias y raíces.

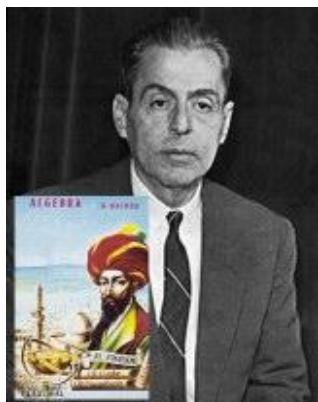
En las siguientes décadas se incluyeron aspectos prácticos y el uso de los métodos gráficos. Al comienzo de los años 60 se vio una brecha muy grande entre el álgebra escolar y las necesidades de ella en campos como la física nuclear, la exploración espacial, las comunicaciones y la tecnología computacional. Se crean entonces las nuevas matemáticas. Se incluyen las desigualdades y se hace énfasis en conceptos unificadores como conjunto y función a fin de enseñarlos de manera que su estructura y carácter deductivo fuera evidente.

Se mantiene el carácter estructural que era evidente a comienzos del siglo. Ejemplos de aspectos estructurales del álgebra superior tradicional incluyen: simplificación y factorización de expresiones; resolución de ecuaciones haciendo operaciones en ambos lados y manipulación de parámetros de ecuaciones funcionales tales como $y = v + (x - h)^3$, para manejar familias de funciones.

El capítulo introductorio de la mayor parte de los textos enfatiza la aritmética. Las representaciones algebraicas se tratan como enunciados generalizados de las operaciones aritméticas; es decir que se trabaja en términos procedimentales en donde los valores numéricos se sustituyen por expresiones algebraicas para obtener resultados específicos. Sin embargo, una vez que se ha completado esta introducción, relativamente suave, las representaciones algebraicas empiezan a tratarse como objetos matemáticos sobre los cuales se ejecutan ciertas operaciones estructurales tales como combinar términos; factorizar o restar un término en ambos lados de una ecuación.

En este texto se hace una distinción entre los términos procedural y estructural. Procedimental, se refiere a las operaciones aritméticas que se hacen sobre números para obtener números. Estructural se refiere a un conjunto de operaciones que se hacen, no sobre números, sino sobre expresiones algebraicas.

Obtenido de "<http://es.wikibooks.org>"



EL ÁLGEBRA DE BALDOR

Aurelio Baldor, el autor del libro que más terror despierta en los estudiantes de bachillerato de toda Latinoamérica, no nació en Bagdad. Nació en La Habana, Cuba, y su problema más difícil no fue una operación matemática, sino la revolución de Fidel Castro. Esa fue la única ecuación inconclusa del creador del Algebra de Baldor, un apacible abogado y matemático que se encerraba durante largas jornadas en su habitación, armado sólo de lápiz y papel, para escribir un texto que desde 1941 aterroriza y apasiona a millones de estudiantes de toda Latinoamérica.

El Algebra de Baldor, aún más que El Quijote de la Mancha, es el libro más consultado en los colegios y escuelas desde Tijuana hasta la Patagonia. Tenebroso para algunos, misterioso para otros y definitivamente indescifrable para los adolescentes que intentan resolver sus "misceláneas" a altas horas de la madrugada, es un texto que permanece en la cabeza de tres generaciones que ignoran que su autor, Aurelio Angel Baldor, no es el terrible hombre árabe que observa con desdén calculado a sus alumnos amedrentados, sino el hijo menor de Gertrudis y Daniel, nacido el 22 de octubre de 1906 en La Habana, y portador de un apellido que significa "valle de oro" y que viajó desde Bélgica hasta Cuba sin tocar la tierra de Scherezada.

Baldor, el grande

Daniel Baldor reside en Miami y es el tercero de los siete hijos del célebre matemático. Inversionista, consultor y hombre de finanzas, Daniel vivió junto a sus padres, sus seis hermanos y la abnegada nana negra que los acompañó durante más de cincuenta años, el drama que se ensañó con la familia en los días de la revolución de Fidel Castro.

"Aurelio Baldor era el educador más importante de la isla cubana durante los años cuarenta y cincuenta. Era fundador y director del Colegio Baldor, una institución que tenía 3.500 alumnos y 32 buses en la calle 23 y 4, en la exclusiva zona residencial del Vedado. Un hombre tranquilo y enorme, enamorado de la enseñanza y de mi madre, quien hoy lo sobrevive, y que pasaba el día ideando acertijos matemáticos y juegos con números", recuerda Daniel, y evoca a su padre caminando con sus 100 kilos de peso y su proverbial altura de un metro con noventa y cinco centímetros por los corredores del colegio, siempre con un cigarrillo en la boca, recitando frases de Martí y con su álgebra bajo el brazo, que para entonces, en lugar del retrato del sabio árabe intimidante, lucía una sobria carátula roja.

Los Baldor vivían en las playas de Tarará en una casa grande y lujosa donde las puestas de sol se despedían con un color distinto cada tarde y donde el profesor dedicaba sus tardes a leer, a crear nuevos ejercicios matemáticos y a fumar, la única pasión que lo distraía por instantes de los números y las ecuaciones. La casa aún existe y la administra el Estado cubano. Hoy hace parte de una villa turística para extranjeros que pagan cerca de dos mil dólares para pasar una semana de verano en las mismas calles en las que Baldor se cruzaba con el "Che" Guevara, quien vivía a pocas casas de la suya, en el mismo barrio.

"Mi padre era un hombre devoto de Dios, de la patria y de su familia", afirma Daniel. "Cada día rezábamos el rosario y todos los domingos, sin falta, íbamos a misa de seis, una costumbre que no se perdió ni siquiera después del exilio". Eran los días de riqueza y filantropía, días en que los Baldor ocupaban una posición privilegiada en la escalera social de la isla y que se esmeraban en distribuir justicia social por medio de becas en el colegio y ayuda económica para los enfermos de cáncer.

Algebra del exilio

El 2 de enero de 1959 los hombres de barba que luchaban contra Fulgencio Batista se tomaron La Habana. No pasaron muchas semanas antes de que Fidel Castro fuera personalmente al Colegio Baldor y le ofreciera la revolución al director del colegio. "Fidel fue a decirle a mi padre que la revolución estaba con la educación y que le agradecía su valiosa labor de maestro..., pero ya estaba planeando otra cosa", recuerda Daniel.

Los planes tendría que ejecutarlos Raúl Castro, hermano del líder del nuevo gobierno, y una calurosa tarde de septiembre envió a un piquete de revolucionarios hasta la casa del profesor con la orden de detenerlo. Sólo una contraorden de Camilo Cienfuegos, quien defendía con devoción de alumno el trabajo de Aurelio Baldor, lo salvó de ir a prisión. Pero apenas un mes después la familia Baldor se quedó sin protección, pues Cienfuegos, en un vuelo entre Camagüey y La Habana, desapareció en medio de un mar furioso que se lo tragó para siempre.

"Nos vamos de vacaciones para México, nos dijo mi papá. Nos reunió a todos, y como si se tratara de una clase de geometría nos explicó con precisión milimétrica cómo teníamos que prepararnos. Era el 19 de julio de 1960 y él estaba más sombrío que de costumbre. Mi padre era un hombre que no dejaba traslucir sus emociones, muy analítico, de una fachada estricta, durísima, pero ese día algo misterioso en su mirada nos decía que las cosas no andaban bien y que el viaje no era de recreo", dice el hijo de Baldor.

Un vuelo de Mexicana de Aviación los dejó en la capital azteca. La respiración de Aurelio Baldor estaba agitada, intranquila, como si el aire mexicano le advirtiera que jamás regresaría a su isla y que moriría lejos, en el exilio. El profesor, además del dolor del destierro, cargaba con otro temor. Era infalible en matemáticas y jamás se equivocaba en las cuentas, así que si calculaba bien, el dinero que llevaba le alcanzaría apenas para algunos meses. Partía acompañado de una pobreza monacal que ya sus libros no podrían resolver, pues doce años atrás había vendido los derechos de su álgebra y su aritmética a Publicaciones Culturales, una editorial mexicana, y había invertido el dinero en su escuela y su país. La lucha empezaba.

Los Baldor, incluida la nana, se estacionaron con paciencia durante 14 días en México y después se trasladaron hasta Nueva Orleans, en Estados Unidos, donde se encontraron con el fantasma vivo de la segregación racial. Aurelio, su mujer y sus hijos eran de color blanco y no tenían problemas, pero Magdalena, la nana, una soberbia mulata cubana, tenía que separarse de ellos si subían a un bus o llegaban a un lugar público.

Aurelio Baldor, heredero de los ideales libertarios de José Martí, no soportó el trato y decidió llevarse a la familia hasta Nueva York, donde consiguió alojamiento en el segundo piso de la propiedad de un italiano en Brooklyn, un vecindario formado por inmigrantes puertorriqueños, italianos, judíos y por toda la melancolía de la pobreza. El profesor, hombre friolento por naturaleza, sufrió aun más por la falta de agua caliente en su nueva vivienda, que por el desolador panorama que percibía desde la única ventana del segundo piso.

La aristocrática familia que invitaba a cenar a ministros y grandes intelectuales de toda América a su hermosa casa de las playas de Tarará, estaba condenada a vivir en el exilio, hacinada en medio del olvido y la sordidez de Brooklyn, mientras que la junta revolucionaria declaraba la nacionalización del Colegio Baldor y la expropiación de la casa del director, que sirvió durante años como escuela revolucionaria para formar a los célebres "pioneros". La suerte del colegio fue distinta. Hoy se llama

Colegio Español y en él estudian 500 estudiantes pertenecientes a la Unión Europea. Ningún niño nacido en Cuba puede pisar la escuela que Baldor había construido para sus compatriotas.

Lejos de la patria

Aurelio Baldor trató en vano de recuperar su vida. Fue a clases de inglés junto a sus hijos a la Universidad de Nueva York y al poco tiempo ya dictaba una cátedra en Saint Peters College, en Nueva Jersey. Se esforzó para terminar la educación de sus hijos y cada uno encontró la profesión con que soñaba: un profesor de literatura, dos ingenieros, un inversionista, dos administradores y una secretaria. Ninguno siguió el camino de las matemáticas, aunque todos continuaron aceptando los desafíos mentales y los juegos con que los retaba su padre todos los días.

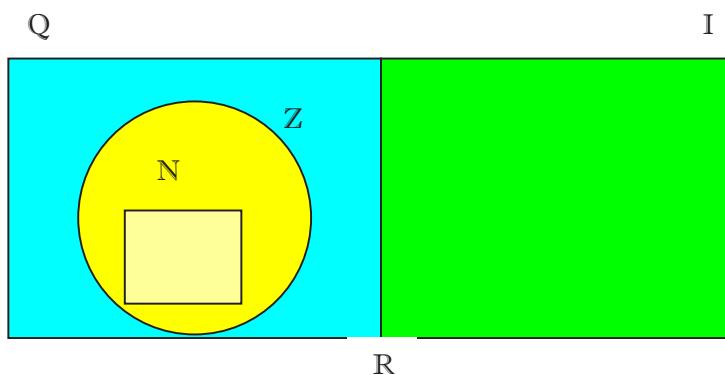
Con los años, Baldor se había forjado un importante prestigio intelectual en los Estados Unidos y había dejado atrás las dificultades de la pobreza. Sin embargo, el maestro no pudo ser feliz fuera de Cuba. No lo fue en Nueva York como profesor, ni en Miami donde vivió su retiro acompañado de Moraima, su mujer, quien hoy tiene 89 años y recuerda a su marido como el hombre más valiente de todos cuantos nacieron en el planeta. Baldor jamás recuperó sus fantásticos cien kilos de peso y se encorvó poco a poco como una palmera monumental que no puede soportar el peso del cielo sobre sí. "El exilio le supo a jugo de piña verde. Mi padre se murió con la esperanza de volver", asegura su hijo Daniel.

El autor del Algebra de Baldor se fumó su último cigarrillo el 2 de abril de 1978. A la mañana siguiente cerró los ojos, murmuró la palabra Cuba por última vez y se durmió para siempre. Un enfisema pulmonar, dijeron los médicos, había terminado con su salud. Pero sus siete hijos, quince nietos y diez biznietos, siempre supieron y sabrán que a Aurelio Baldor lo mataron la nostalgia y el destierro. (*Revista Diners, Colombia-2000*).

2.2. NÚMEROS REALES Y ECUACIONES DE PRIMER GRADO

➤ Conjuntos numéricos:

- $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (Conjunto de los números naturales)
- $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (Conjunto de los números enteros)
- $Q = \left\{ x / x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in Z - \{0\} \right\}$ (Conjunto de los números racionales)
- $I = \{\text{Números que se representan por decimales no repetidos que no terminan}\}$
(Conjunto de los números irracionales)
- $R = Q \cup I$ (Conjunto de los números reales)



Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones:

1) -5 es un número entero ()	2) $3.152984136\dots$ es un número racional ()
3) 9 es un número racional ()	4) $\frac{7}{0}$ es un número real ()
5) $\sqrt{16}$ no es un número entero ()	6) $\Pi = 3.1416\dots$ es un número real ()
7) $\frac{0}{3}$ es un número racional ()	8) $\frac{4}{-3}$ es un número irracional ()

➤ Propiedades de los números reales

- 1) Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$

- 2) $a+b=b+a$ y $ab=ba$
- 3) $a+(b+c)=(b+a)+c$
- 4) $a+(-a)=0$
- 5) $\frac{a}{a}=a \cdot a^{-1}=1$
- 6) $a(b+c)=ab+ac$ y $(a+b)c=ac+bc.$

➤ Operaciones con números reales

1. $-(a+b)=-a-b$	7. $-(a-b)=-a+b$
2. $-(-a)=a$	8. $(-a)b=-ab=a(-b)$
3. $(-a)(-b)=ab$	9. $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$
4. $\frac{0}{a}=0,$ $a \neq 0$	10. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
5. $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$	11. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$
6. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$	

Ejemplos:

$$1. 5\frac{7}{9}-3\frac{1}{3}-\frac{11}{36}+\frac{1}{4}$$

Solución:

Convertimos la expresión a fracción

$$5\frac{7}{9}-3\frac{1}{3}-\frac{11}{36}+\frac{1}{4}$$

Sacamos m.c.m. y operamos

$$\frac{52}{9} - \frac{10}{3} - \frac{11}{36} + \frac{1}{4} = \frac{208 - 120 - 11 + 9}{36} = \frac{43}{18}$$

$$2. \left(0,45 - \frac{1}{5}\right)^2 - 5^{-1} \times 4 + \left(7 + 5^{-1}\right) \div 9$$

Solución:

Expresamos 0,45 como fracción y operamos.

$$\left(\frac{45}{100} - \frac{1}{5}\right)^2 - 5^{-1} \times 4 + \left(7 + 5^{-1}\right) \div 9$$

$$\left(\frac{9}{20} - \frac{1}{5}\right)^2 - 5^{-1} \times 4 + \left(7 + 5^{-1}\right) \div 9 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{4}{5} + \left(7 + \frac{1}{5}\right) \div 9$$

$$\frac{1}{16} - \frac{4}{5} + \frac{36}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

Resuelve los ejercicios	Solución
$\left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} - \frac{2 + \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right]^2$	
$1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{1 - \frac{3}{5 + \frac{1}{3}}}}$	
$\frac{\left(0,244\dots + \frac{1}{3} + 0,22\dots \right) \times 1\frac{1}{4}}{3 + 0,153153\dots}$	
$\frac{\left(0,3636\dots + \frac{1}{22} + 1\frac{1}{2} \right) \div 0,3}{0,333\dots}$	
$\frac{\left(2^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right)^2}{3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2}$	

2.3. EXPONENTES Y RADICALES

➤ Exponentes

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ factores}}, \quad \text{Donde } n \text{ es el exponente y } a \text{ la base.}$$

➤ Propiedades

1. $a^n a^m = a^{m+n}$	2. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
3. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	4. $a^0 = 1, \quad a \neq 0$
5. $(a^m)^n = a^{mn}$	6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$
7. $(ab)^n = a^n b^n$	

➤ Radicales

$$b^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b,$$

Donde: $\sqrt[n]{}$: radical, a : radicando, n : índice, b : raíz

Observación: Si a es negativo y n par, entonces no existe la raíz para tal caso (en los reales).

➤ **Signos de radicación**

$$1) \sqrt[n]{+A} = + r$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{+27} = + 3$

$$2) \sqrt[n]{-A} = - r$$

Ejemplo: $\sqrt[5]{-32} = -2$

$$3) \sqrt[n]{+A} = + r$$

Ejemplo: $\sqrt{+81} = 9$

$$4) \sqrt[n]{-A} = \notin \mathbb{R}$$

➤ **Propiedades**

1. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	2. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
3. $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$	4. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$
5. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	6. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
7. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

Ejemplos:

1. Reducir: $R = \frac{36 \cdot 10^2 \cdot 27}{6^4 \cdot 5}$

Solución:

Descomponiendo en factores y simplificando tenemos:

$$R = \frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 3^3}{3^4 \cdot 2^4 \cdot 5} = 15$$

2. Calcular: $A = \frac{4^{x+3} + 4^{x+2} + 4^{x+1}}{2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3}}$

Solución:

Descomponemos en factores y operamos

$$A = \frac{4^x \cdot 4^3 + 4^x \cdot 4^2 + 4^x \cdot 4}{\frac{(2^2)^x}{2} + \frac{(2^2)^x}{2^2} + \frac{(2^2)^x}{2^3}} = \frac{64 + 16 + 4}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{84}{\frac{7}{8}} = \frac{672}{7} = 96$$

3. Calcular: $M = \sqrt[3]{2^{-2}} \sqrt[4]{2^3} \sqrt[3]{2^7} \sqrt[5]{2^{40}}$

Solución:

Aplicando propiedades tenemos:

$$M = \sqrt[3]{2^{-2}} \sqrt[4]{2^3} \sqrt[3]{2^7} \sqrt[5]{2^{40}} = \sqrt[3]{2^{-2}} \sqrt[4]{2^3} \sqrt[3]{2^7} \sqrt[5]{2^8} = \sqrt[3]{2^{-2}} \sqrt[4]{2^3 2^5} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^2} \cdot 2^2} = 1$$

Ejercicio 01

$$R = \left(-\frac{8}{27} \right)^{\frac{4}{3}}$$

$$N = \sqrt[3]{x^4}$$

$$R = \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{-1} - \left(\frac{2}{7} \right)^{-2} + \left(\frac{3}{4} \right)^0 + 3^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$G = \frac{5^{3x+2} + 5^{3x+4} + 5^{3x+3}}{5^{x+1} 5^x 5^{x+1}}$$

$$M = \left\{ \left[(2x^2)^3 \right]^{-4} \right\}^{-1}$$

$$N = \sqrt[5]{xy^{-3}} x^{-1} y^{-2}$$

$$J = \left(x^{-2} y^2 \right)^{-2}$$

$$P = \left(2^{3n+3} \right)^{3^{2-n}} \times 2^{-242}$$

$$R = \left(1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \div 2$$

$$A = \frac{3}{5} \div \left[2 - \frac{\frac{3}{2} + 1}{3 - \frac{2}{3} \times \frac{9}{4}} \right] + 1$$

$$M = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{8} \right) + \left(1 - \frac{4}{7} \right) + \frac{3}{5} \div \frac{6}{4}$$

$$P = \left(\frac{-3}{4} + \frac{-2}{5} \right) \div \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{4} \right)$$

$$N = \frac{-\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - 21}{\frac{3}{2} + 6 + \frac{1}{4}}$$

$$D = \frac{5000d}{d^2 + 36},$$

$$B = \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} \right) \left(\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} \right)$$

$$H = 1 - \frac{1}{1 - \frac{3}{5}}$$

$$G = \frac{a^{-1}b^{-2} + a^{-2}b^{-1}}{b^{-2} - a^{-2}}$$

$$C = \sqrt[16]{1 + 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)}$$

$$D = \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} \right) \left(\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} \right)$$

$$O = \frac{\frac{m+n}{m-1} + n}{\frac{m+n}{m-1} - 1}$$

$$\tilde{N} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}}}$$

2.4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

➤ ÁLGEBRA

Es una rama de la Matemática, que estudia la relación entre la parte constante y la parte literal y las operaciones que con ella se realizan en los diferentes campos numéricos.

❖ VARIABLE

Aquello que varía, es decir que admite cualquier valor dependiendo de la expresión de la que forma parte. Generalmente se representa por las últimas letras del abecedario: x, y, z. La idea de variable nos da por ejemplo:

- La edad de una persona.
- La temperatura del aire en el aula.

❖ CONSTANTE

Aquello que no varía, es decir que admite un solo valor conocido. Se representa a través de un numeral 4, -5, π , etc. La idea de constante nos da por ejemplo:

- Las dimensiones de una silla, una mesa, etc.

❖ TÉRMINO ALGEBRAICO

CONCEPTO.- Es aquella expresión que relaciona dos partes contrarias, por medio de la multiplicación, dichas partes son:

Parte Constante: Es aquella magnitud que permanece invariable y se representa generalmente mediante números reales.

Ejemplo:

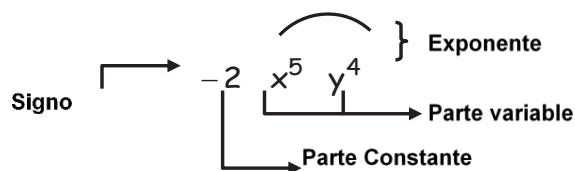
$$4, 5, -2, \frac{4}{3}$$

Parte Variable: Es aquella que varía y se representa generalmente por letras (x, y, z,...).

Ejemplo: x^2, xyz, x^5y^7 .

La unión de dichas partes origina el **Término Algebraico**.

Así:



❖ CARACTERÍSTICAS

1. Los exponentes no pueden ser variables.

Ejemplo:

- $4x^y$ no es T.A.
- $6x^4$ si es T.A.

2. Los exponentes no deben ser números irracionales.

Ejemplo:

- $2x^{\sqrt{2}}$ no es T.A.
- $4x^{\frac{2}{3}}$ si es T.A.

➤ EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es aquel conjunto finito de términos algebraicos que se encuentran ligados entre sí a través de las operaciones de adición y sustracción.

Ejemplos:

$$3x^3 + 2x^2y^4 + \sqrt{x} \quad \text{Sí es E.A.}$$

$$1 + x + x^2 + \dots \quad \text{No es E.A.}$$

❖ TÉRMINOS SEMEJANTES

Si dos o más términos tienen la misma parte literal y sus variables tienen los mismos exponentes, entonces son términos semejantes.

Ejemplos:

- $4x^2$; $0,5x^2$; $\frac{1}{3}x^2$
- $5m$; $4m$; $-6m$; $3m$

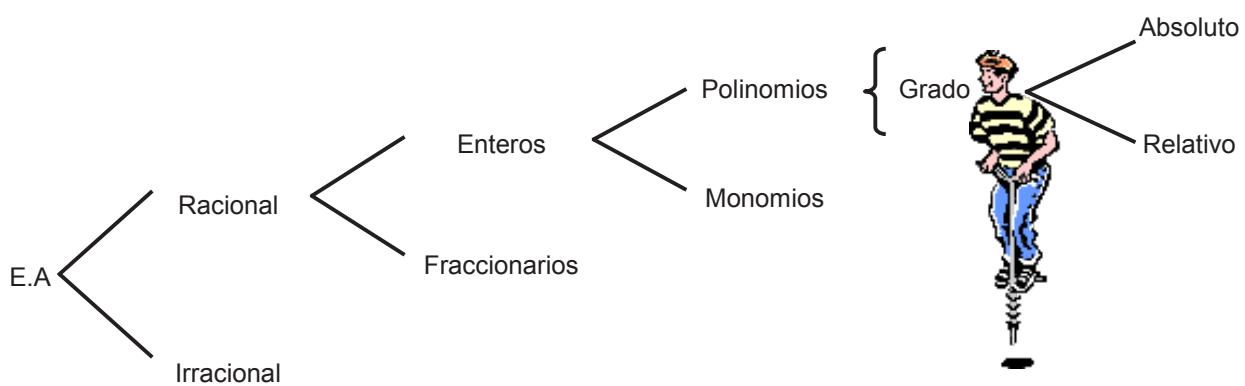
❖ REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Si dos o más términos son semejantes estos pueden sumarse o restarse atendiendo a sus coeficientes.

Ejemplos:

- $14x^2 + 6x^2 - 10x^2 = (14 + 6 - 10)x^2 = 10x^2$
- $22xy^2 - 7xy^2 = (22 - 7)xy^2 = 15xy^2$

❖ CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS



Ejercicio 02

1. Completar el siguiente cuadro:

Término Algebraico	Signo	Coeficiente (constante)	Parte literal (variables)	Exponente(s)
$-12x^3$				
$\sqrt{35}x^2y^5$				
$-ax^3y^5z^4$				
$\frac{3}{5}xy^6z^3$				

2. Indique dentro del paréntesis si los enunciados son V o F.

- I) $\sqrt{3}x^2$ es una E.A. racional entera ()
- II) $\frac{4}{3}x^3y^5$ es una E.A. racional fraccionaria ()
- III) $x^x + 3x$ no es una E.A. ()

3. Relacione las afirmaciones de la columna A con las proporciones de la columna B.

- | A | B |
|---------------------------|-----------------------|
| I. Término Algebraico | () -4 |
| II. Parte literal | () $6xy + 4x^3$ |
| III. Expresión Algebraica | () x^3y^2 |
| IV. Constante | () $2mn + 4mn$ |
| V. Términos Semejantes | () $12xyz$ |

4. Si: $ab = b^b = 2$

Hallar el equivalente de: $E = ab^{ab^{ab}}$

- a) 16 b) 16a c) 4 d) 4a e) 8^a

5. Si se cumple que: $2^{22} + 1024 = 1024a$

$$\text{Calcular: } M = 2^{2^2} - ((2^2)^4)^{0.5}a$$

- a) 1 b) a c) a^2 d) -16 e) -4^a

6. Si: $x^x = 3^{-1}$ entonces $x^{x^{1-x}}$ es equivalente a:

- a) 3^{x-1} b) 27^{-1} c) $3^{-1/3}$ d) 3^{-1} e) $\sqrt[3]{3}$

7. Calcular: $A = \frac{4^{x+3} + 4^{x+2} + 4^{x+1}}{2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3}}$

- a) 96 b) 6 c) $3/2$ d) 48 e) 56

8. Simplificar:

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + (-1)^{2003}$$

- a) 15 b) 20 c) 25 d) 30 e) 32

9. Si: $x^x = 2$ entonces: $s = x^{x^2} + x^{x+x^2}$ es igual a:

- a) 81 b) 6^x c) 12 d) $2^x(3)$ e) 2^{1+x^2}

10. Al reducir los términos semejantes: $(a+b)x^{a+b} + ax^{a+b} + bx^{a+b} + 4x^4$, resulta:

- a) $16x^4$ b) $12x^4$ c) $17x^4$ d) $20x^4$ e) $15x$

11. Al efectuar la expresión: $mx^m + nx^n + px^p + qx^q + x^7$, queda:

- a) $29x^7$ b) $30x^7$ c) $28x^7$ d) $26x^7$ e) $25x$

12. Luego de reducir los términos semejantes: $(a+1)x^ay^b + (b+1)x^3y^4 + 2x^3y^4$, resulta:

- a) $5x^3y^4$ b) $3x^3y^4$ c) $7x^3y^4$ d) $6x^3y^4$ e) $5xy$

2.5. ECUACIONES

La expresión:

$$2x + 8 = 24$$

Es una igualdad o ecuación que es correcta cuando x toma el valor de 8. y 8 es la **solución** de la ecuación; x es la incógnita.

Si reemplazamos la **solución** tendremos:

$$2(8) + 8 = 24$$

$$16 = 16$$

Esto nos indica que la igualdad es correcta para cuando x toma el valor de 8.

ECUACIÓN

Es una igualdad que se verifica solo para determinados valores de sus incógnitas.
¿Qué pasaría si “ x ” toma otro valor?

Veamos:

Si: $x = 6$ tendremos:

$$4(6) + 6 = 34$$

$$24 + 6 = 34$$

$$30 = 34$$



Esto significa que 6 no es solución de la ecuación.

Ejemplos:

$$4x + 1 = 5 \quad \rightarrow \quad x =$$

$$2x - 4 = 8 \quad \rightarrow \quad x =$$

$$x + 7 = 20 \quad \rightarrow \quad x =$$

$$6x - 2 = 73 \quad \rightarrow \quad x =$$

OBSERVACIONES

- Resolver una ecuación significa, hallar los valores de "x" que la satisfacen.
- Los valores de "x" que satisfacen a una ecuación reciben el nombre de **soluciones** o **raíces**.

Además:

En toda ecuación se distingue:

$$\underbrace{3x + 5}_{\begin{array}{l} \text{Primer} \\ \text{Miembro} \end{array}} = \underbrace{2x + 7}_{\begin{array}{l} \text{Segundo} \\ \text{Miembro} \end{array}}$$

↓
Signo (=)



El valor que satisface a la ecuación es 2.

Entonces: si $x = 2$ es la solución o raíz de la ecuación.

COMPROBACIÓN

Reemplazamos $x = 2$, en la ecuación dada:

$$3(2) + 5 = 2(2) + 7$$

$$6 + 5 = 4 + 7$$

$$11 = 11$$

Afirmación Correcta

❖ CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES:

Estas se pueden clasificar:

DE ACUERDO A SUS COEFICIENTES		
Ecuaciones numéricas Sus coeficientes son números $5x + 16 = 46$		Ecuaciones lineales Sus coeficientes son letras. $ax^2 + b = 0$
DE ACUERDO A SU FORMA		
Ecuación Racional Entera Sus incógnitas no están afectadas de radical y sus exponentes son enteros positivos $9x^2 + x = 10$	Ecuación Racional Fraccionaria Sus incógnitas no están afectadas de radical y sus exponentes son enteros negativos $\frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 2$	Ecuaciones Irracionales La incógnita se encuentra dentro del radical $\sqrt{2x + 5} = 1$
DE ACUERDO AL NUMERO DE INCOGNITAS		
Ecuación con una variable $2x^2 + 6x = 7(x + 4)$	Ecuación con dos variables $3x + y = 12$	Ecuación con tres variables $2x + y - z = 3$
DE ACUERDO AL GRADO DE LA INCÓGNITA		
Ecuación de primer grado El mayor exponente de la incógnita es uno (1) $3x + 21 = 36$	Ecuación de segundo grado El mayor exponente de la incógnita es dos (2) $x^2 - 15x + 56 = 0$	Ecuación de "n" grado El grado depende del mayor exponente (n) de la incógnita "X" $ax^n + b = 0$
DE ACUERDO A SUS SOLUCIONES		
Compatibles: admiten solución Determinadas Tienen un número limitado de soluciones. a) $2x - 7 = x + 8$ b) $x^2 - 3 = 6$ Tienen una y dos soluciones respectivamente.	Indeterminadas Tienen un número ilimitado de soluciones. a) $3x - (x - 1) = 2x + 1$ Tiene infinitas soluciones, la igualdad se verifica para cualquier valor de "x"	Incompatibles o absurdas No admiten solución. a) $2x = 2x + 8$ b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5x}{6} + 1$ c) $\sqrt{x} = -1$

Son ecuaciones equivalentes:

$$\begin{aligned} 24x + 12 &= 8 \\ 18x + 9 &= 6 \\ 12x + 6 &= 4 \\ 6x + 3 &= 2 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} 6x + 3 &= 2 \\ 6x &= 2 - 3 \\ x &= -\frac{1}{6} \Rightarrow C.S. = \left\{-\frac{1}{6}\right\} \end{aligned}$$

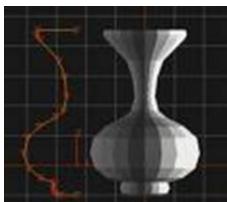
Generalmente, para resolver ecuaciones, elaboramos una lista de ecuaciones equivalentes (cada una más sencilla que la precedente), terminando una ecuación cuya solución podemos hallar con facilidad.

ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos o más ecuaciones con la misma incógnita son equivalentes si las soluciones de cualquiera de esas ecuaciones son soluciones para las otras ecuaciones.

- 1) La ecuación $3x - 8 = 10$ y la ecuación $x - 2 = 4$ son equivalentes ya que ambas se satisfacen para $x = 6$.
- 2) La ecuación $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$ y la ecuación $3x - 5 = 3 - x$ son equivalentes ya que ambas se satisfacen para $x = 2$.

❖ PROPIEDADES GENERALES DE LAS ECUACIONES



La traslación de términos consiste en pasar los términos de un miembro a otro miembro, pero realizando la operación contraria a la que inicialmente tenía, más no consiste en trasladar los términos con el signo contrario que tiene cada término inicialmente.

Ejemplo:

Correcto	Incorrecto
$-14x = 28$ $x = \frac{28}{-14}$ $x = -2$ $C.S. = \{-2\}$	$-14 = 28$ $x = 28 + 14$ $x = 42$ Incorrecto

- 1) Si sumamos o restamos una misma expresión a los miembros de una ecuación esta no altera su conjunto solución.
- 2) Si multiplicamos o dividimos una misma expresión diferente de cero a los miembros de una ecuación esta no altera su conjunto solución.

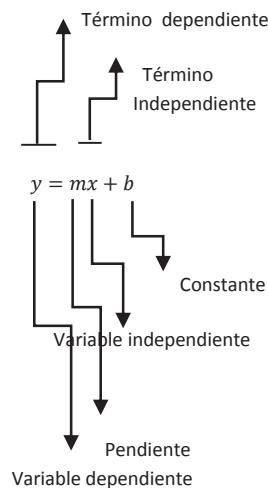
Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 &\text{Dada la ecuación : } 24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 + 14x - 3 \\
 &\text{sumamos a ambos miembros } -24x^2 : \quad 24x^2 - 24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 - 24x^2 + 14x - 3 \\
 &\text{sumamos a ambos miembros } -14x : \quad 26x - 14x - 8 = 14x - 14x - 3 \\
 &\text{sumamos a ambos miembros } +8 : \quad 12x - 8 = -3 + 8 \\
 &\text{dividimos a ambos miembros : } \frac{12x}{12} = \frac{5}{12} \\
 &\quad x = \frac{5}{12} \\
 &\quad C.S. = \left\{ \frac{5}{12} \right\}
 \end{aligned}$$

- 3) A los dos miembros de una ecuación se le puede elevar a un mismo exponente o extraer la raíz del mismo índice, pero la ecuación resultante es parcialmente equivalente a la inicial. Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 &\text{dada la ecuación : } \sqrt{x - 8} = 3 \\
 &\text{elevamos ambos miembros al cuadrado: } (\sqrt{x - 8})^2 = (3)^2 \\
 &\text{por propiedad } [a^2 = \sqrt{a^2}], \text{ tenemos : } x - 8 = 9 \\
 &\text{trasponiendo el término } -8 : \quad x = 9 + 8 \\
 &\text{obtenemos : } \quad x = 17 \\
 &\quad C.S. = \{17\}
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de primer grado con dos variables nos permitirán analizar la formación de funciones lineales.
Se llama función lineal a una ecuación de tipo:



Cuando le asignamos valores a "x" en la expresión $y = 2x + 1$, obtenemos los valores de "y", podemos obtener una gráfica como:

- 4) En toda ecuación, el término que está sumando, restando, multiplicando o dividiendo en un miembro, pasa restando, sumando, dividiendo o multiplicando respectivamente al otro miembro.

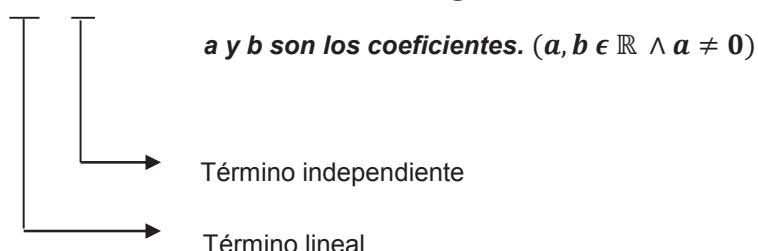
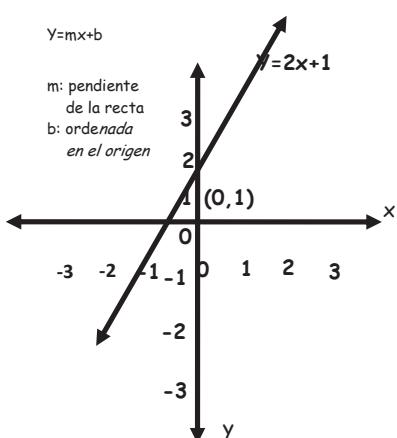
Ejemplo:

Dada la ecuación: $24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 + 14x - 3$
como el término $24x^2$ esta sumando, se traslada restando al segundo miembro como $-24x^2$: $26x - 8 = 24x^2 - 24x^2 + 14x - 3$
reducimos términos : $26x - 8 = 14x - 3$
como los términos
 -8 y $14x$ están restando y sumando respectivamente a miembros opuestos como $+8$ y $-14x$: $26x - 8 = 14x - 3$
reducimos términos : $12x = 5$
como el término 12 está multiplicando, trasladamos al segundo miembro dividiendo como $\frac{1}{12}$: $x = \frac{5}{12}$
obtenemos el Conjunto Solución: $C.S. = \left\{ \frac{5}{12} \right\}$

➤ ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA VARIABLE

Una ecuación de primer grado es aquella que puede reducirse a la **forma**:

$$ax + b = 0; \text{ donde: } x \text{ es la incógnita}$$



Despejando x tenemos:

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

❖ DISCUSIÓN DE LA RAÍZ:

El valor de x es decir; la raíz o solución de la ecuación, depende de los valores de a y b , veamos:

CONDICIÓN	CLASE DE ECUACIÓN	RAÍZ
$Si: a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$	Compatible determinada	Única
$Si: a \neq 0 \wedge b = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{a} = 0$	Compatible Determinada	Nula
$Si: a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow 0x = 0$	Compatible Indeterminada	Varias raíces
$Si: a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow 0x = -b$	Incompatible o absurda	No tiene solución

PASOS PARA RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

- 1º Eliminar todos los signos de agrupación que aparezcan $\{()\}$, comenzando por el más interno resolviendo las operaciones indicadas.
- 2º Se reduce la ecuación al m.c.m. si es fraccionaria.
- 3º Se reduce términos semejantes y cada miembro si hubieran.
- 4º Se agrupan términos lineales trasladándolos a un miembro (generalmente al primero), y los términos independientes al otro miembro de la ecuación para luego reducir nuevamente término semejantes.
- 5º Despejamos la incógnita, obteniendo así la solución.
- 6º Comprobamos si la solución satisface la ecuación propuesta, es decir si se verifica la igualdad.

❖ LEY DE SIGNOS

OPERACIÓN	SIGNOS DE NÚMEROS	ACCIÓN	SIGNO DEL RESULTADO
ADICIÓN SUSTRACCIÓN	IGUALES DIFERENTES	SUMAR RESTAR	EL MISMO EL SIGNO DEL NÚMERO QUE TIENE EL MAYOR VALOR ABSOLUTO
MULTIPLICACIÓN	IGUALES	MULTIPLICAR	POSITIVO (+)
	DIFERENTES		NEGATIVO (-)
DIVISIÓN	IGUALES	DIVIDIR	POSITIVO (+)
	DIFERENTES		NEGATIVO (-)

Ejemplos:

$$1) \frac{3x+1}{12} = \frac{5(x-1)}{6} - 2 \text{ efectuamos}$$

$$\frac{3x+1}{12} = \frac{5x-5-12}{6}$$

$$\frac{3x+1}{12} = \frac{5x-17}{6}$$

$$(3x+1) = 2(5x-17)$$

$$3x+1 = 10x-34$$

$$3x-10x = -34-1$$

$$x = \frac{-35}{-7}$$

$$x = 5$$

$$C.S. = \{5\}$$

$$2) \frac{2x+3}{5} - \frac{5x+2}{8} - \frac{13x-3}{6} = \frac{3(3-2x)}{2}$$

$$\frac{2x+3}{5} - \frac{5x+2}{8} - \frac{13x-3}{6} = \frac{9-6x}{2}$$

$$48x + 72 - 75x - 30 - 260x + 60$$

$$= 540 - 360x$$

$$-287x + 102 = 540 - 360x$$

$$-287x + 360x = 540 - 102$$

$$73x = 438$$

$$x = \frac{438}{73}$$

$$x = 6$$

$$C.S. = \{6\}$$

Comprobación:

$$\frac{3(5)+1}{12} = \frac{5(5-1)}{6} - 2$$

$$\frac{16}{12} = \frac{20-12}{6}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{8}{6}$$

Por lo tanto el C.S. = {5} le corresponde a la ecuación.

Por lo tanto el C.S. = {6} le corresponde a la ecuación.

Comprobación:

$$\frac{2x+3}{5} - \frac{5x+2}{8} - \frac{13x-3}{6} = \frac{3(3-2x)}{2}$$

$$\frac{2(6)+3}{5} - \frac{5(6)+2}{8} - \frac{13(6)-3}{6} = \frac{3[3-2(6)]}{2}$$

$$\frac{15}{5} - \frac{32}{8} - \frac{75}{6} = \frac{-27}{2}$$

$$3 - 4 - \frac{25}{2} = -\frac{27}{2}$$

$$-\frac{27}{2} = -\frac{27}{2}$$

$$3) \quad \frac{3}{2x-4} - \frac{5}{x+3} = \frac{2}{x-2}$$

$$3(x+3) - 5(2x-4) = 2(2x+6)$$

$$3x + 9 - 10x + 20 = 4x + 12$$

$$-11x = -17$$

$$x = \frac{17}{11}$$

$$x = \left\{ \frac{17}{11} \right\}$$

El m.c.m. es: $2(x-2)(x+3)$, si los números 2 y -3 aparecieran en la solución, no serían válidos. Pero no es el caso.

Ejercicio 03

1. Resolver:

a) $2(x+4) = 7x + 2$

b) $2(x-1) - 3(x-4) = 4x$

c) $(3x-1)^2 - (5x-3)^2 = -(4x-2)^2$

d) $\frac{x}{3} - 4 = \frac{x}{5}$

e) $\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4} = 6$

f) $\frac{x+2}{3} - \frac{2-x}{6} = x-2$

g) $\frac{2y-7}{3} + \frac{8y-9}{14} = \frac{3y-5}{21}$

2. Despejar las variables indicadas.

a) $a = \frac{x - xr^2}{1-r}; x = ?$

b) $r = \frac{2mI}{B(n+1)}; m = ?$

c) $\frac{x-a}{b-x} = \frac{x-b}{a-x}; \quad x=?$

d) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}; \quad q=? \quad S=P+Prt; \quad P=?$

e) $(a+c)x + x^2 = (x+a)^2; \quad x=?$

f) $S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}; \quad R=?$

g) $S = \frac{u}{au+c}; \quad u=?$

3. Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias:

a) $\frac{x}{x+2} = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 4}$

b) $\frac{x}{x-3} + \frac{2x-1}{x+3} = \frac{14}{x^2 - 9} + 3$

c) $\frac{1}{x} + \frac{11}{10} = \frac{2}{x} - \frac{2}{5}$

d) $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

e) $\frac{x+3}{x} - \frac{x+4}{x+6} = \frac{13}{x^2 + 6x}$

f) $\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4} = \frac{12}{x^2 - 2x - 8}$

g) $\frac{x^2 + 1}{7x+3} + \frac{x+8}{7} = \frac{4x+11}{14}$

h) $\frac{x+1}{x} - \frac{x+4}{x+5} = \frac{3x+5}{x^2 + 5x}$

i) $\frac{y-6}{y} - \frac{6}{y} = \frac{y+6}{y-6}$

j) $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-2} = \frac{4}{1-2x}$

k) $\frac{2}{x^2 - 2x - 8} + \frac{1}{x^2 - x - 12} = \frac{13}{x^2 + 5x + 6}$

4. Resolver las siguientes ecuaciones con radicales

a) $6 - \sqrt{2x+5} = 0$

b) $\sqrt{5+2x} = \sqrt{4x-2}$

c) $\sqrt{y^2 - 9} = 9 - y$

d) $\sqrt{5x-14} = 2\sqrt{x-1}$

e) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} = 1$

f) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 1$

❖ APPLICACIONES DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Necesitaremos las siguientes fórmulas para resolver algunos ejercicios de aplicación.

Si: p = precio, q = cantidades, c_v = costo variable, c_f = costo fijo, I = ingreso,
 U = utilidad

Entonces:

■ $I = p \times q$	■ $C_T = c_v + c_f$	■ $U = I - C_T$
--------------------	---------------------	-----------------

Ejercicio 04

1. Un padre es tres veces mayor que su hijo. En 12 años él tendrá el doble de la edad de su hijo. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo ahora?
2. El ingreso mensual total de una guardería por el cuidado de x niños está dado por $I = 450x$, y sus costos mensuales totales están dados por $C = 380x + 3500$. ¿Cuántos niños se necesitan inscribir mensualmente para llegar al punto de equilibrio? En otras palabras, ¿cuándo los ingresos igualan a los costos?
3. Una compañía de refinación de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de \$ 76 por tonelada. Si los costos fijos son \$ 110 000 por mes y el alimento se vende en \$ 126 por tonelada, ¿cuántas toneladas deben venderse para que la compañía tenga una utilidad mensual de \$ 540 000?

4. Un fabricante de cartuchos para juegos de video, vende cada cartucho en \$ 20. El costo de fabricación de cada cartucho es de \$ 12. Los costos fijos mensuales son de \$ 8 000. Durante el primer mes de ventas de un nuevo juego, ¿cuántos cartuchos debe vender el fabricante para llegar al punto de equilibrio?
5. Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios, el costo combinado de mano de obra y material es de \$ 21 por calentador. Los costos fijos son \$ 70 000. Si el precio de venta de un calentador es \$ 35.
 - a) ¿Cuántos calentadores debe vender para que la compañía tenga una utilidad de \$ 140 000?
 - b) ¿Cuál será el ingreso máximo?
6. Suponga que los consumidores comprarán q unidades de un producto al precio de $\frac{1000}{q} + 2$ dólares por unidad. ¿Cuántas unidades deberá vender para obtener un ingreso de \$ 5 000?
7. Una persona desea invertir S/. 20 000 en dos empresas, de modo que el ingreso total por año sea de S/. 1 440. Una empresa paga el 6% anual; la otra tiene mayor riesgo y paga 7,5 % anual. ¿Cuánto debe invertir en cada empresa?
8. Un colegio destina \$. 60 000 a un fondo a fin de obtener ingresos anuales de \$ 5 000 para becas. Parte de esto se destinará a inversiones en fondos del gobierno a un 8% y el resto a depósitos a largo plazo a un 10,5%. ¿Cuánto deberá invertir en cada opción con objeto de obtener el ingreso requerido?

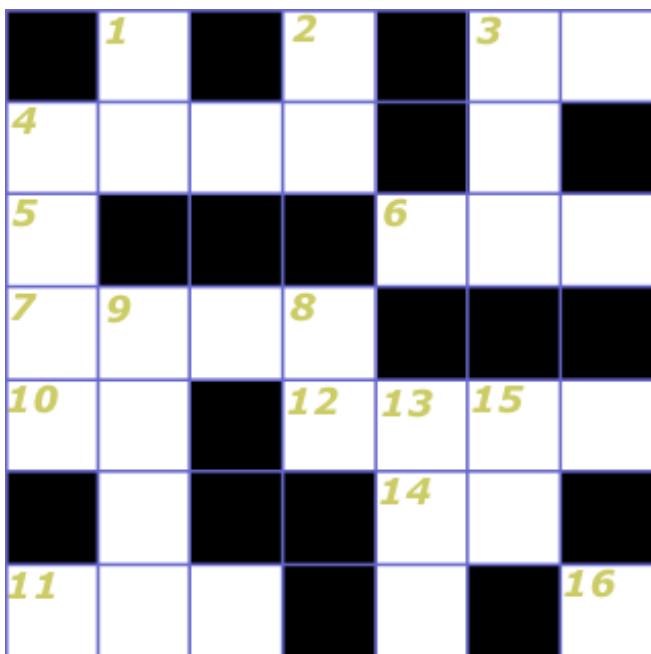
¿Sabías qué?

Un papiro encontrado hace mucho tiempo, llamado papiro Rhind ó de Ahmes es uno de los documentos escritos más antiguos que poseemos, pues tiene cerca de 4 000 años. Se considera el primer tratado de matemática.



Aquí encontrarás un crucigrama muy divertido. Para llenarlo tendrás que resolver 17 ecuaciones de primer grado.

¡Anímate!



1) Verticales

- 1) $3x + 2 = 32$
- 2) $x/5 = 16$
- 3) $2x + 8 = 440$
- 5) $2x - 9 = x + 18$
- 8) $9x + 9 = 900$
- 9) $\frac{1}{4}x - 2 = 250$
- 13) $x/3 - 11 = x - 233$
- 15) $x + 5 = 2x - 80$

2) Horizontales

- 3) $7x - 4 = 171$
- 4) $8x - 920 = 7,080$
- 6) $\frac{1}{2}x + 8 = 88$
- 7) $5x = 35,745$
- 10) $4x - 4 = 3x + 6$
- 11) $\frac{5}{2}x + 40 = 500$
- 12) $x/9 - 43 = 1,000$
- 14) $x/7 - 5 = 0$
- 16) $5x - 4x + 3x + 8 =$

¿Qué tal, resultó divertido?

➤ ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA VARIABLE

Una ecuación es de segundo grado o cuadrática cuando después de quitar denominadores, reducir términos semejantes y pasar todos sus términos al primer miembro, adopta la forma típica:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ Donde } a, b \text{ y } c \in R, a \neq 0$$

Una ecuación de segundo grado con una incógnita se convierte en una función, si a la igualdad de dicha ecuación sustituimos el "0" por "y". Es decir:

$$0 = ax^2 + bx + c$$

Por

$$y = ax^2 + bx + c$$

Ejemplo:

Cambiando en el segundo miembro el términos: "0" por "y", tenemos que:

$$3x^2 - 5x + 6 = 0$$

Esto es una ecuación de segundo grado, se convierte en:

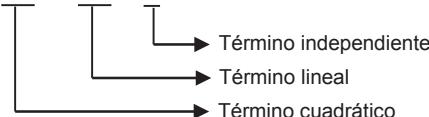
$$3x^2 - 5x + 6 = y$$

Esto es una función cuadrática.

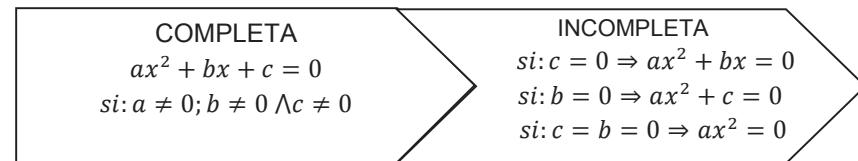
Al darle valores a "x" e "y", reemplazando en dicha función:

x	-5	-4	<u>-3</u>	1	2
y	6	0	<u>-25</u>	0	6

Obtenemos una función cuadrática, la cual se gráfica:

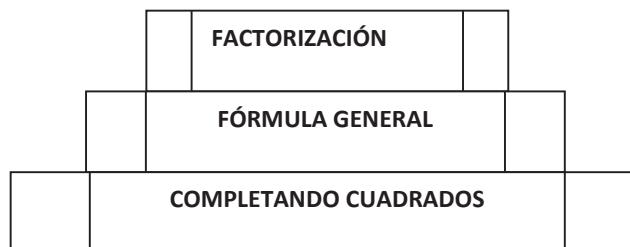


Una ecuación de segundo grado o cuadrática puede adoptar las siguientes formas:



❖ MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

ECUACIONES COMPLETAS: Se puede resolver a través de los siguientes métodos:

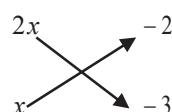


❖ **MÉTODO DE FACTORIZACIÓN:** Se realiza a través del aspa simple:

Ejemplo: Hallar el conjunto solución de la ecuación $2x^2 - 8x + 6 = 0$

Factorizando por aspa simple tenemos:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$



Los factores son:

$$(2x - 2)(x - 3) = 0$$

Igualando a cero cada factor: $2x - 2 = 0 \vee x - 3 = 0$

Resolviendo tenemos: $x = 1 \vee x = 3$

Por lo tanto: $C.S. = \{1, 3\}$

❖ **MÉTODO DE FORMULA GENERAL:** Si una ecuación de segundo grado no puede ser

factorizada por el aspa simple, entonces se emplea la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Donde: } a, b \text{ y } c \text{ son los coeficientes de la ecuación.}$$

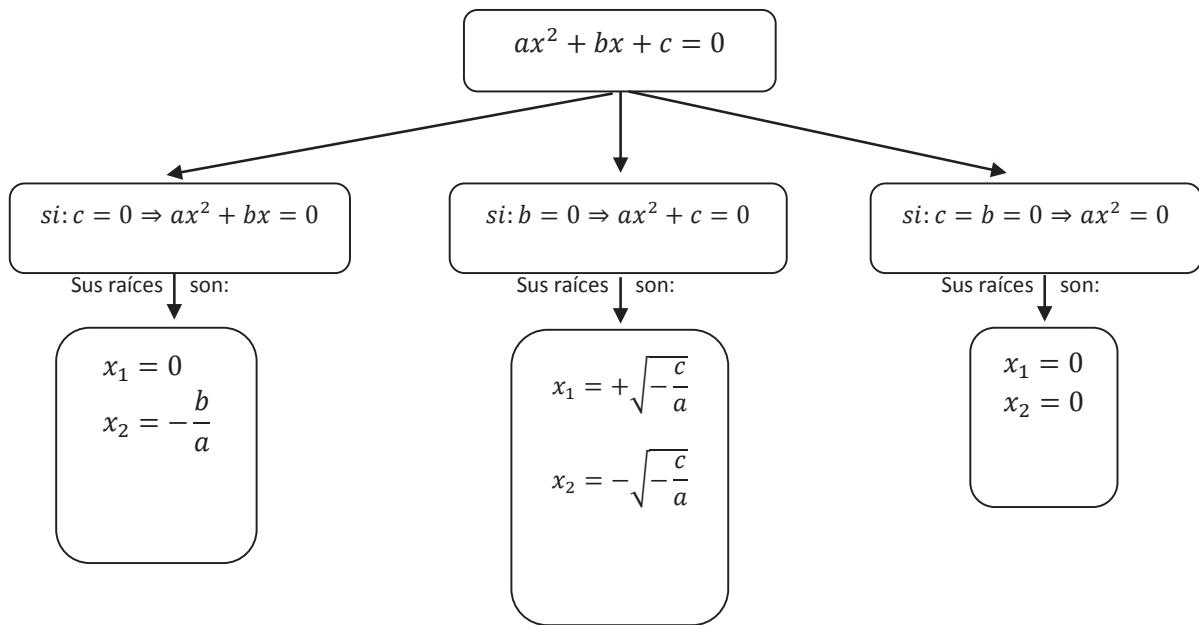
Ejemplo: Hallar el conjunto solución de la ecuación: $x^2 - 3x - 2 = 0$	
Procedimiento utilizado	Proceso
Identificamos el valor de los coeficientes: a, b y c	$a = 1, \quad b = -3$ y $c = -2$
Reemplazamos en la formula general:	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$
Se obtiene:	$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$
Desdoblamos la ecuación para obtener sus raíces " x_1 " y " x_2 "	$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$
Se forma el conjunto solución.	$C.S. = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \right\}$

- ❖ **3º MÉTODO DE COMPLETAMIENTO DE CUADRADOS:** Se realiza en base al desarrollo del cuadrado de un binomio.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ejemplo: Hallar el conjunto solución de la ecuación: $(2x - 2)^2 = x(2x + 4)$	
Procedimiento utilizado	Proceso
Primero se debe llegar a la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ Nótese que el valor de "a" siempre debe ser uno	$4x^2 - 8x + 4 = 2x^2 + 4x$ $2x^2 - 12x + 4 = 0$ $x^2 - 6x + 2 = 0$
Se traslada el término independiente al segundo miembro	$x^2 - 6x = -2$
Se suma a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal $\left[\frac{6}{2}\right]^2 = (3)^2$	$x^2 - 6x + 3^2 = -2 + 3^2$
Con el primer miembro se forma el cuadrado de un binomio	$(x - 3)^2 = 7$
Extraemos raíz cuadrada a ambos miembros	$\sqrt{(x - 3)^2} = \pm\sqrt{7}$ $x - 3 = \pm\sqrt{7}$
Desdoblamos la ecuación para obtener sus raíces " x_1 " y " x_2 "	$x - 3 = +\sqrt{7} \quad v \quad x - 3 = -\sqrt{7}$ $x_1 = 3 + \sqrt{7} \quad v \quad x_2 = 3 - \sqrt{7}$
Se forma el conjunto solución	$C.S. = \{3 + \sqrt{7}; 3 - \sqrt{7}\}$

- ❖ **ECUACIÓN INCOMPLETA:** las ecuaciones de segundo grado pueden tomar formas incompletas de acuerdo al valor nulo de sus coeficientes. Así tenemos:



Para su solución se pueden utilizar los métodos de factorización o despejando la variable “x”, según lo requiera el caso.

Ejemplos:

$$1) \quad 4x^2 - 12x = 0$$

$$4x(x - 3) = 0$$

$$4x = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 3$$

$$C.S. = \{0; 3\}$$

$$2) \quad 3x^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = \frac{27}{3}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 = -3$$

$$C.S. = \{3; -3\}$$

$$3) \quad 18x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{18}$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$C.S. = \{0\}$$

❖ NATURALEZA DE LAS SOLUCIONES

Sea la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$, definimos su discriminante por: $D = b^2 - 4ac$

Entonces las raíces son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

y

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

El uso del discriminante nos permite conocer el número y tipo de raíces reales que se pueden obtener de una ecuación de segundo grado sin necesidad de resolverla. Así tenemos:

Ejemplos:

DISCRIMINANTE	SI	RAICES	FORMA	C.S.
Cero	$D = 0$	Iguales y reales	$x_1 = x_2$	Posee solución única
Positivo	$D > 0$	Diferentes y reales	$x_1 \neq x_2$	Posee dos soluciones
negativo	$D < 0$	Complejas (no reales y conjugadas)	$x_1 = a + bi$ $\wedge x_2 = a - bi$	Posee dos soluciones

Hallar el discriminante de las siguientes ecuaciones y su respectivo conjunto solución:

1. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

donde: $a = 4, b = -12, c = 9$

si: $D = b^2 - 4ac$

$\Rightarrow D = (-12)^2 - 4(4)(9)$

$D = 0$

∴ esta ecuación tiene raíces iguales y reales.

$x_1 = x_2$

2. $x^2 - 5x + 4 = 0$

donde: $a = \underline{\quad}, b = \underline{\quad}, c = \underline{\quad}$

si: $D = b^2 - 4ac$

$\Rightarrow D = (\)^2 - 4(\)()$

$D = 9$

el discriminante es positivo, es decir: $D > 0$

∴ esta ecuación tiene dos raíces diferentes y reales.

$x_1 \neq x_2$

Hallar el C.S. de esta ecuación, si:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

_____ _____
 _____ _____
 _____ _____
 _____ _____

C.S. = { }

Hallar el C.S. de esta ecuación, si:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

_____ _____
 _____ _____
 _____ _____
 _____ _____

C.S. = { ; }

$$3. \quad 3x^2 + x + 4 = 0$$

donde: $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$

$$si: D = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow D = (\underline{\hspace{1cm}})^2 - 4(\underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}})$$

$$D = \underline{\hspace{1cm}}$$

la discriminante es $\underline{\hspace{1cm}}$, es decir:

$$\boxed{D < 0}$$

\therefore Esta ecuación tiene dos raíces no reales y conjugadas.

$$\boxed{x_1 \neq x_2}$$

Hallar el C.S. de esta ecuación, si:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$\begin{array}{c} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{array}$$

$$C.S. = \{ \quad ; \quad \}$$

Recuerda que: $\sqrt{-m} = \sim \exists$ y $\sqrt{-1} = i$

❖ PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Estas propiedades se utilizan, evitando resolver la ecuación:

PROPIEDADES	FORMA
Suma de raíces	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

PROPIEDADES	FORMA
Producto de raíces	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Ejemplos:

1. Calcular la suma de las raíces: $3x^2 - 9x + 4 = 0$	2. Calcular el producto de las raíces de: $3x^2 - 6x + 12 = 0$

❖ FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Consiste en calcular la suma “S” y el producto “P” de las raíces, luego se reemplazan estos dos valores en la siguiente fórmula:

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad \text{ó} \quad x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

Ejemplo: Formar una ecuación de segundo grado, considerando que sus raíces son: -7 y 15

$$\begin{aligned} Si: \quad x_1 &= -7 \quad \wedge \quad x_2 = 15 \Rightarrow \\ S &= x_1 + x_2 \quad \wedge \quad P = x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

$$S = (-7) + (15) \quad P = (-7)(15)$$

$$S = 8 \quad P = -105$$

$$\begin{aligned} Luego: \quad x^2 - Sx + P &= 0 \\ x^2 - 8x + (-105) &= 0 \\ \therefore x^2 - 8x - 105 &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo: Hallar las raíces de una ecuación de segundo grado, considerando que la suma de estas es: 12 y su producto 35.

Recuerda la forma:
 $x^2 - Sx + P = 0$

$$si: \quad S = 12 \quad \wedge \quad P = 35$$

$$Entonces \ la \ ecuacion \ que \ se \ forma \ es: \ x^2 - 12x + 35 = 0$$

Por el metodo del aspa:

$$\begin{array}{r} x \cancel{-} 7 \\ x \cancel{-} 5 \end{array}$$

Obtenemos los factores:

$$(x - 7)(x - 5) = 0$$

luego:

$$x - 7 = 0 \quad \wedge \quad x - 5 = 0$$

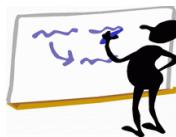
Sus raíces son:

$$x_1 = 7 \quad \wedge \quad x_2 = 5$$

$$\Rightarrow C.S. = \{5, 7\}$$



Practiquemos en el aula



1. En las siguientes ecuaciones determinar:

Nº	Ecuaciones de segundo grado	Valores de los coeficientes			Discriminante $D = b^2 - 4ac$	Nº de Soluciones
		a	b	c		
1	$x^2 - 9x = 10$					
2	$5x^2 = 125$					
3	$4x^2 - 12x + 9 = 0$					
4	$15x^2 + 8x - 12 = 0$					
5	$x(x - 5) = -4$					
6	$5(x^2 + 2) = 7(x + 3)$					
7	$x - 5 = \frac{7}{x}$					
8	$9x + 1 = 3(x^2 - 5) - (x - 3)(x + 2)$					

Ejercicio 05

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $(x + 6)(x - 6) = 13$
2. $(2x - 5)(2x + 5) - 119 = 0$
3. $0.02w^2 - 0.3w = 20$
4. $2x^2 - 6x = 6x^2 - 8x$
5. $x^2 = 81$
6. $13x^2 - 12x = 0$
7. $0.5x^2 + 1.2x = 0$
8. $\frac{5}{3}x^2 - \frac{2}{7}x = 0$
9. $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} = 2$
10. $\frac{x}{6} + \frac{x^2}{2} = \frac{2x}{3}$
11. $x^2 - 196 = 0$
12. $25z^2 - 121 = 0$
13. $\frac{4}{9}x^2 - 225 = 0$
14. $\frac{16}{81}x^4 - 64 = 0$
15. $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = -16$
16. $5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = -8$
17. $x^2 + 3x - 2 = x + 4$
18. $(2x + 1)^2 = x(3x + 2)$
19. $(x - 3)(x + 2) = x^2 + 4x + 3$
20. $(x - 4)(x + 4) = x - 4$
21. $(x - 2)(2x + 1) = (x - 1)(x + 1)$
22. $x(3x - 2) = (2x - 3)^2$
23. $\frac{2}{x - 1} - \frac{6}{2x + 1} = 5$

$$24. \quad \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} = 1$$

$$25. \quad \frac{x}{3} = \frac{3}{x} - \frac{3}{2}$$

$$26. \quad \sqrt{x+1} = x - 1$$

$$27. \quad \sqrt{x} = \sqrt{x^2 + 8x}$$

$$28. \quad 2\sqrt{x^2 - 3} = x$$

$$29. \quad 3\sqrt{x+4} = x - 6$$

$$30. \quad (x+2)^2 = 1 - x(x+3)$$

Ejercicio 06

APLICACIONES DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. El área de una pintura rectangular con ancho 4cm. menor que el largo: es de 60cm^2 . ¿Cuáles son las dimensiones de la pintura?
2. Hallar la suma de dos números consecutivos tales que su producto sea igual al producto de los dos consecutivos siguientes disminuidos en 30.
3. Si la suma de un número con 3 se multiplica por la diferencia de dicho número con 2, se obtiene el cuadrado de dicho número menos 2. Hallar el número.
4. La ecuación de ingresos de cierta compañía es: $I = 340p - 4p^2$; donde p es el precio en dólares del producto que fabrica esa compañía. ¿Cuál será el precio para que el ingreso sea de \$ 6 000, si el precio debe ser mayor de \$ 40?
5. Una malla de alambre se colocará alrededor de un terreno rectangular de modo que el área cercada sea de 800 m^2 y el largo sea el doble de su ancho. ¿Cuántos pies de malla se utilizarán?
6. Una compañía determina que si produce y vende q unidades de un producto, el ingreso total por las ventas será $100\sqrt{q}$. Si el costo variable por unidad es de S/. 2 y el costo fijo es S/. 1 200, determine los valores de q para que la utilidad sea cero.
7. La ecuación de ingresos de cierta compañía es: $I = 340p - 4p^2$; donde p es el precio en dólares del producto que fabrica esa compañía. ¿Cuál será el precio para que el ingreso sea de \$ 6 000, si el precio debe ser mayor de \$ 40?
8. El ingreso mensual de cierta compañía está dado por $R = 800p - 7p^2$, donde p es el precio en nuevos soles del producto que fabrica esa compañía. ¿A qué precio el ingreso será de S/. 10 000, si el precio debe ser mayor de S/. 50?
9. Suponga que los clientes compraron q unidades de un producto cuando el precio es de $(80 - q)$ dólares cada uno. ¿Cuántas unidades deben venderse a fin de que el ingreso por ventas sea de 1 500 dólares, si deben venderse más de 30 unidades?
10. El propietario de un edificio de departamentos tiene 60 habitaciones. Él puede alquilar todas las habitaciones si fija un alquiler de S/.180 al mes. Al subir el alquiler en S/. 5, una habitación quedará vacía sin posibilidad alguna de alquilarse. Halle el alquiler que debe cobrar con el fin de obtener un ingreso mensual de S/. 11 475.

2.6. INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Son desigualdades de la forma:

$$\begin{aligned} ax + b &\leq 0, \quad a \neq 0 \\ &\geq 0 \\ &< 0 \\ &> 0 \end{aligned}$$

INTERVALO

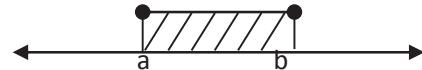
Es un conjunto infinito de números reales.

Se clasifican en:

INTERVALO ACOTADO: Si los extremos son números reales (finitos) que a su vez son:

INTERVALO CERRADOS

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



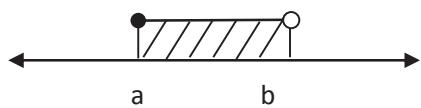
- **INTERVALO ABIERTO**

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

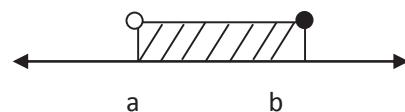


- **INTERVALOS SEMIABIERTOS Y SEMICERRADOS**

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

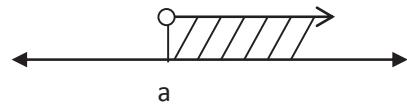


$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

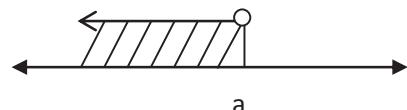


INTERVALO NO ACOTADO: Si uno de sus extremos es el $-\infty$ ó $+\infty$.

$$\langle a, +\infty \rangle = \{x \in R / x > a\}$$



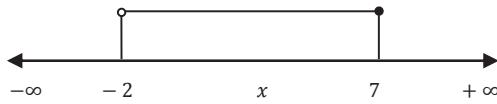
$$\langle -\infty, a \rangle = \{x \in R / x < a\}$$



Ejemplos:

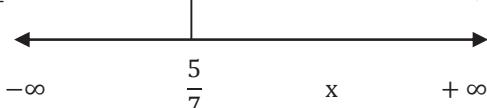
Grafica los siguientes intervalos:

1) $]-2; 7]$



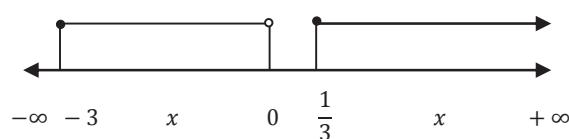
$$x \in]-2; 7] \Leftrightarrow -2 < x \leq 7$$

2) $\left] \frac{5}{7}; +\infty \right[$



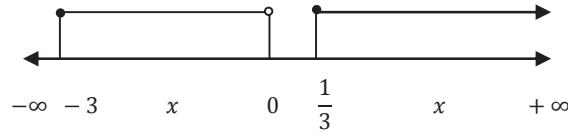
$$x > \frac{5}{7} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{5}{7}; +\infty \right[$$

3) $[-3; 0[\cup \left[\frac{1}{3}; +\infty \right[$



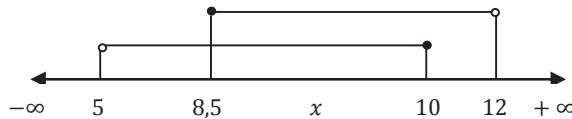
$$x \in [-3; 0[\cup \left[\frac{1}{3}; +\infty \right[$$

4) $[-3,0[\cap \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$



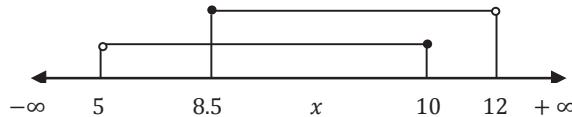
$$x \in [-3; 0[\cap \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[= \emptyset$$

5) $]5; 10] \cup [8,5; 12[$



$$x \in]5; 12[$$

6) $]5; 10] \cap [8,5; 12[$



$$x \in [8,5; 10]$$

➤ PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

- 1) Si $a < b \rightarrow a+c < b+c$
- 2) Si $a < b$ y $c > 0 \rightarrow ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- 3) Si $a < b$ y $c < 0 \rightarrow ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- 4) Si $a < b$ y $a=c \rightarrow c < b$
- 5) $0 < a < b \rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
- 6) $a < b < 0 \rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$
- 7) $0 < a < b$ y $n > 0 \rightarrow a^n < b^n$ y $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ (en la última desigualdad $n \in \mathbb{Z}^+$)

Ejemplo:

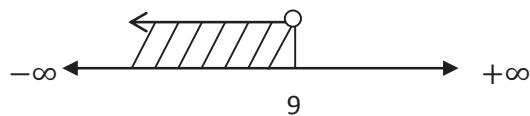
Resolver: $4x + 5 > 6x - 13$

Pasando las variables al primer miembro: $4x - 6x > -13 - 5$

Reduciendo términos semejantes: $-2x > -18$

Aplicando propiedad: $2x < 18$

Dividiendo entre 2: $x < 9$



El conjunto solución es: $C.S = < -\infty, 9 >$

Ejemplo:

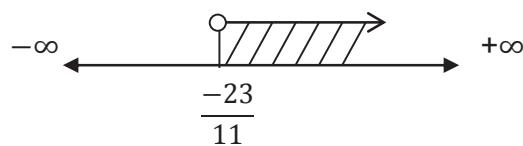
Resolver: $\frac{5x-1}{-3} > \frac{7(x+1)}{-2}$

Eliminando los denominadores tenemos: $-10x + 2 > -21x - 21$

Pasando las variables al primer miembro: $-10x + 21x > -2 - 21$

Reduciendo términos semejantes: $11x > -23$

Dividiendo entre 11: $x > \frac{-23}{11}$



El conjunto solución es: $C.S = < -\frac{23}{11}, +\infty >$

Ejercicio 07

Resolver:

1) $3x - 5 > 5x + 1$

2) $\frac{6x - 3}{2} - (2x - 6) \geq \frac{x - 3}{4}$

3) $\frac{2x - 15}{2} < \frac{5}{3}(2 - x) > \frac{2}{3}(8 - 5x)$

4) $\frac{x - 3}{3} + \frac{5}{4} < \frac{x}{12} + \frac{2x + 9}{15}$

5) $4x + 5 > 6x - 13$

6) $\frac{5x - 1}{-3} < \frac{7(x + 1)}{-2}$

7) $\frac{\frac{6}{-x - 3}}{2} - \left(\frac{\frac{2}{-x - 3}}{5} - 6 \right) < \frac{\frac{5}{-x - 3}}{4}$

8) $\frac{2x - 4}{-2} < \frac{5}{3}(2 - x) + \frac{1}{2}$

9) $4x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}x$

10) $\frac{7}{4}t > \frac{-8}{3}t$

11) $\frac{3(2t - 2)}{2} > \frac{6t - 3}{5} + \frac{t}{10}$

12) $\frac{2}{3}(4x + 2) - (x - 2) \leq \frac{4}{13}(4x + 5)$

13) $\frac{x}{2} + \frac{6}{5} < \frac{3x}{4} + \frac{11}{5} > 2x - \frac{14}{5}$

14) $11 - \frac{3}{2}x < \frac{1}{3}(5x + 14) \geq \frac{9}{5}(2 + x)$

15) Determinar el valor de verdad de la siguiente afirmación si $(2x - 1) \in]-7, 12[$ entonces

$$(-3x + 2) \in \left] -\frac{35}{2}, 11 \right[$$

16) Determinar el valor de verdad de la afirmación si $(5x + 11) \in]-3, 2[$ entonces

$$\frac{1}{2x - 1} \in \left] -\frac{5}{8}, -\frac{5}{18} \right[$$

Ejercicio 08

➤ APPLICACIONES DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Necesitamos recordar que significa:

Obtener ganancia: $U > 0$; $I_t - C_t > 0$ **No obtener pérdida:** $U \geq 0$; $I_t - C_t \geq 0$

- 1) Si al doble de la edad de Juan se resta 17 años resulta menor que 35, pero mayor que 31.
¿Cuál es la edad de Juan?
- 2) Miguel tiene \$ 520 para gastar en ropa. Si compra un terno que cuesta \$ 250 y el precio de unas camisas es de \$ 30 cada una, determine el mayor número de camisas que él puede comprar.
- 3) Una compañía fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de S/. 20 y un costo unitario de S/ 15. Si los costos fijos son de 600 000, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la compañía tenga utilidades.
- 4) Una empresa produce jarras de vidrio. Las mencionadas jarras tienen un precio unitario de venta de \$ 18 y un costo unitario de \$ 13. Si los costos fijos son \$ 300 000, determine el número mínimo de jarras que deben venderse para que la empresa tenga utilidades.
- 5) Si un comerciante vende su producto al precio \$ 20 la unidad. Los costos por unidad son de \$ 12 y el costo general sin importar el número de ventas es de \$ 250 semanal. Si el comerciante tiene una utilidad de por lo menos \$ 350 y a lo más \$ 470 semanal.
 - a) Determinar qué cantidad produce semanalmente.
 - b) ¿Cuál es la cantidad mínima y máxima?
- 6) Ricardo se dedica a la venta de sándwich de pollo. El precio de venta al público es de \$ 1,50 cada uno. Tiene un costo unitario de \$ 0,80 y costo fijo de \$ 20 determine el número de sándwich de pollo que deben venderse para que Ricardo no tenga pérdidas.
- 7) Los niños de una escuela compran q unidades de galletas “Dulces” al precio de $\frac{10}{q} + 2$ por unidad. ¿Cuál es el número mínimo de unidades de galletas que deben venderse para que el ingreso sea mayor que \$ 130?

2.7. INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son desigualdades de la forma:

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \quad a \neq 0$$

$$\geq 0$$

$$< 0$$

$$> 0$$

Ejemplos:

Encuentre el conjunto solución de:

1) $x^2 - 5x + 4 < 0$

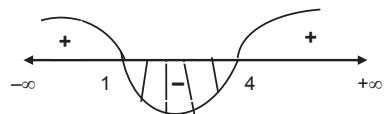
Solución:

Factorizando tenemos:

$$(x - 4)(x - 1) < 0$$

Los puntos críticos son $x = 1, \quad x = 4$

Luego graficamos:



Como la desigualdad es menor, el conjunto solución se encuentra en la parte negativa

$$C.S = \langle 1, 4 \rangle$$

+

$$2) \quad x(x+4) \leq (2x-2)^2$$

Solución:

Resolviendo el binomio, ordenando y

completando cuadrado tenemos:

$$x(x+4) \geq (2x-2)^2$$

$$x^2 + 4x \leq 4x^2 - 8x + 4$$

$$0 \leq 3x^2 - 12x + 4$$

$$0 \leq x^2 - 4x + \frac{4}{3}$$

$$0 \leq x^2 - 4x + 4 - 4 + \frac{4}{3}$$

$$0 \leq (x-2)^2 - \frac{8}{3}$$

$$0 \leq \left(x-2 + \sqrt{\frac{8}{3}} \right) \left(x-2 - \sqrt{\frac{8}{3}} \right)$$

Graficando los puntos críticos.

$$x = 2 - \sqrt{\frac{8}{3}}, \quad x = 2 + \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Luego graficamos los puntos críticos:



$$2 - \sqrt{\frac{8}{3}} \quad 2 + \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$c.s = \left\langle -\infty, 2 - \sqrt{\frac{8}{3}} \right\rangle \cup \left\langle 2 + \sqrt{\frac{8}{3}}, +\infty \right\rangle$$

$$3) \quad x(2x-7) \geq (2x-2)^2$$

Solución: Desarrollando el binomio, ordenando y completando cuadrado, tenemos:

$$2x^2 - 7x \geq 4x^2 - 8x + 4$$

$$0 \geq 2x^2 - x + 4$$

$$0 \geq x^2 - \frac{1}{2}x + 2$$

$$0 \geq x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2$$

$$0 \geq \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + 2$$

$$0 \geq \underbrace{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2}_{+} + \frac{31}{16}$$

La cantidad en el segundo miembro de la desigualdad siempre será mayor que cero, por lo tanto:

$$C.S = \{ \}$$

Otra forma de resolver una desigualdad de segundo grado sin completar cuadrado es

Analizando el discriminante $(\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac})$

Casos:

1) Para la inecuación $ax^2 + bx + c \geq 0$,

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow c.s. = \left[-\infty, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right] \cup \left[\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty \right]$

- Si $\Delta \leq 0 \Rightarrow c.s. = R$

2) Para la inecuación $ax^2 + bx + c > 0$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow c.s. = \left[-\infty, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right] \cup \left[\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty \right]$

- Si $\Delta = 0 \Rightarrow c.s. = R - \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$

- Si $\Delta < 0 \Rightarrow c.s. = R$

3) Para la inecuación $ax^2 + bx + c \leq 0$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow c.s. = \left[\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right]$

- Si $\Delta = 0 \Rightarrow c.s. = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$

- Si $\Delta < 0 \Rightarrow c.s. = \emptyset$

4) Para la inecuación $ax^2 + bx + c < 0$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow c.s. = \left[\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right]$

- Si $\Delta \leq 0 \Rightarrow c.s. = \emptyset$

Ejercicio 09

1) Hallar el conjunto solución de:

1. $x^2 - 4x - 5 < 0$
2. $3x^2 - 10x + 3 < 0$
3. $4 - x^2 \geq 0$
4. $4x^2 - x - 5 \leq 0$
5. $x(2x - 7) \geq (2x - 2)^2$
6. $12 + x - x^2 \geq 0$

7. $x(x + 4) \leq (2x - 2)^2$
8. $x(3x + 2) \leq (x + 2)^2$
9. $4x^2 - 8x + 1 \geq 0$
10. $x^2 + 3x - 5 \leq 0$
11. $3x^2 - 8x + 4 > 0$
12. $x^2 - 6x + 9 > 0$

2) Resolver las siguientes desigualdades:

1. $\frac{13x + 3}{x - 3} > 7 - 2x$
2. $\frac{3x + 8}{x - 1} \geq -2$
3. $\frac{x - 1}{x + 3} > x$
4. $\frac{2x + 3}{x - 4} \leq 1$
5. $\frac{2}{3} < \frac{x - 1}{x + 3} < \frac{7}{9}$
6. $\frac{2x + 4}{x - 2} \geq -2$

7. $\frac{2x + 8}{x - 2} \geq -2$
8. $\frac{2x - 4}{x - 2} \geq -2$
9. ¿Cuántos números impares satisfacen la inecuación $x^2 - 20 < 9x - 34$?
10. Hallar el mayor número entero que cumple con $(x - 4)(x + 5) < (x - 3)(x - 2)$

➤ APLICACIONES

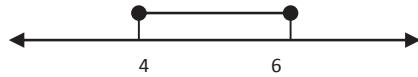
Ejemplo:

1. Un estilista cobra \$ 20 por cortar el cabello, con ese precio tiene 120 clientes por semana, sabe que por un dólar que aumente el precio, perderá 4 clientes. Cuántos clientes como máximo tiene que tener el estilista para tener un ingreso no menor a \$ 2 496 semanales?

Solución:

Como $I \geq 2496$, entonces:

$$\begin{aligned}
 & (20 + n)(120 - 4n) \geq 2496 \\
 & 2400 - 80n + 120n - 4n^2 \geq 2496 \\
 & -4n^2 + 40n - 96 \geq 0 \\
 & n^2 - 10n + 24 \leq 0 \\
 & (n - 6)(n - 4) \leq 0
 \end{aligned}$$



Para calcular el número máximo de clientes remplazamos el valor de n en las cantidades:

$$\text{Si } n = 4 \Rightarrow q = 104$$

$$\text{Si } n = 6 \Rightarrow q = 96$$

Por tanto la cantidad máxima de clientes que tiene que tener en estilista es 104.

Ejercicio 10

- 1) Se tiene tres números enteros consecutivos, el cuadrado del número mayor es menor que la suma de los otros cuadrados de los otros dos números. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar el número menor?
- 2) El ingreso mensual obtenido por la venta de “x” relojes es $x(40 - 0,20x)$ soles. El costo al por mayor de cada uno es de S/. 28. ¿Cuántos relojes deben venderse cada mes para obtener una utilidad de por lo menos S/. 100?
- 3) El ingreso mensual de cierta compañía está dado por $R = 800p - 7p^2$, donde p es el precio en nuevos soles del producto que fabrica esa compañía. ¿A qué precio el ingreso será por lo menos S/. 10 000?
- 4) Avon vende 300 unidades de un cosmético cuando su precio unitario es de \$ 60, por cada disminución de \$ 5 en el precio se venderán 45 unidades más. Qué precio deberá fijar para que los ingresos totales sean a lo más \$ 19 500?
- 5) La densidad de la población “D” (en persona por milla cuadrada) en una gran ciudad se relaciona con la distancia, “d” (en millas), al centro de la ciudad mediante: $D = \frac{5000d}{d^2 + 36}$, ¿a qué distancia del centro de la ciudad la densidad de la población es mayor a 400 personas por milla cuadrada?

2.8. ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real “ x ”, denotado por $|x|$, se define como:

$$|x| = \begin{cases} x; & \text{si } x \geq 0 \\ -x; & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades:

$$|-x| = |x|; \quad \forall x \in R$$

$$|x \cdot y| = |x||y|; \quad \forall x, y \in R$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}; \quad \forall x, y \in R, \quad y \neq 0$$

$$|x|^2 = x^2; \quad \forall x \in R$$

$$\sqrt{x^2} = |x|; \quad \forall x \in R$$

Teoremas

1) $ x \geq 0; \quad \forall x \in R$	5) $ x \leq a \Leftrightarrow a \geq 0 \quad \wedge \quad -a \leq x \leq a$
2) $ x = 0 \Leftrightarrow x = 0$	6) $ x \geq a \Leftrightarrow x \geq a \quad \vee \quad x \leq -a$
3) $ x = a \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge (x = a \vee x = -a)]$	7) $ x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$
4) $ x = y \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$	8) $ x \geq y \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$

Ejemplos:

1) Resolver $|x^2 - 2x| = 3x$

Solución:

- $3x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
- $x^2 - 2x = 3x \quad \vee \quad x^2 - 2x = -3x$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 5$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -1$$

$$\therefore C.S = \{0, 5\}$$

2) Resolver $|2x + 5| \leq 4$

Solución:

- $-4 \leq 2x + 5 \leq 4$
- $-9 \leq 2x \leq -1$
- $-\frac{9}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$

$$\therefore C.S = \left[-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2} \right]$$

Ejercicios 11

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $|x - 2| = 4$

2. $|2x - 1| = -5$

3. $3|x - 2| = \frac{1}{4}$

4. $|x| + 3 = 15 - |x|$

5. $|3x - 2| + 4 = 5x - 1$

6. $|3x - 2| - x = 4$

7. $|4x + 1| = |2x - 5|$

8. $|2 + |x - 2|| = 1$

9. $\|x - 1| - |x + 2\| = 0$

10. $|x^2 - 2x| = 0$

11. $|x^2 - 4x| = |5 - 4x|$

12. $|x^2 - 2x| = 3$

13. $\|x^2 - 4| - 9\| = 0$

14. $\left| \frac{1-x}{x+1} \right| = 2$

15. $\left| \frac{x-3}{2x-1} \right| - 1 = x$

16. $\left| \frac{2x^2 - 5}{x - 2} \right| - 2 = 0$

17. $\left| \frac{x-2}{3-2x} \right| = |x - 2|$

18. $\left| \frac{x^2 - 5x}{x^2 + 3} \right| + 7 = 0$

2) Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $|2x + 1| < 1$

11. $|1 - x| > |x|$

2. $|x + 2| > 2$

12. $|3 - x| \geq |1 + 3x|$

3. $|3 - 2x| \leq 5$

13. $|2x - 1| \geq |1 + x|$

4. $\left| \frac{2x - 4}{3} \right| \geq 4$

14. $|x^2 - x + 2| \leq x + 2$

5. $\left| \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2}$

15. $|x^2 - 2x + 1| < x + 1$

6. $|x + 5| \leq x$

16. $|3 - 2x| + 6 \geq 0$

7. $|2x + 3| > x - 1$

17. $|2x^2 + 4x| > x - 2$

$$8. \quad 3 < |x - 2| \leq 5$$

$$9. \quad |x - 1| + 4 \geq 2$$

$$10. \quad \left| \frac{3}{4} - x \right| \geq \frac{1}{2} + \frac{5x - 2}{3}$$

$$18. \quad \left| \frac{x+8}{x-1} \right| \leq 2$$

$$19. \quad \left| \frac{2x+1}{x-2} \right| > x - 3$$

$$20. \quad x \leq \left| \frac{2-3x}{x+1} \right| < x - 2$$

UNIDAD III

MATRICES

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICES Y DETERMINANTES

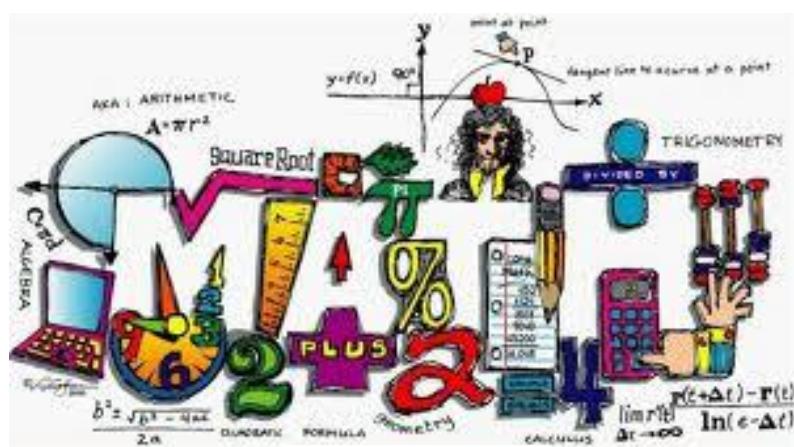
MATRIZ INVERSA.

OPERACIONES

ELEMENTALES

SISTEMAS DE ECUACIONES

LINEALES



Uniandesmatematicas.tumblr.com

3.1. MATRICES

El origen de las matrices es muy antiguo. Un cuadrado mágico, 3 por 3, se registra en la literatura china hacia el 650 a. C.

Es larga la historia del uso de las matrices para resolver ecuaciones lineales. Un importante texto matemático chino que proviene del año 300 a. C. a 200 a. C., *Nueve capítulos sobre el Arte de las matemáticas* (*Jiu Zhang Suan Shu*), es el primer ejemplo conocido de uso del método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas.² En el capítulo séptimo, "Ni mucho ni poco", el concepto de determinante apareció por primera vez, dos mil años antes de su publicación por el matemático japonés Seki Kowa en 1683 y el matemático alemán Gottfried Leibniz en 1693.

Los "cuadrados mágicos" eran conocidos por los matemáticos árabes, posiblemente desde comienzos del siglo VII, quienes a su vez pudieron tomarlos de los matemáticos y astrónomos de la India, junto con otros aspectos de las matemáticas combinatorias. Todo esto sugiere que la idea provino de China. Los primeros "cuadrados mágicos" de orden 5 y 6 aparecieron en Bagdad en el 983, en la *Enciclopedia de la Hermandad de Pureza* (*Rasa'il Ihkwan al-Safa*).¹

Después del desarrollo de la teoría de determinantes por Seki Kowa y Leibniz, a finales del siglo XVII, Cramer presentó en 1750 la ahora denominada regla de Cramer. Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan desarrollaron la eliminación de Gauss-Jordan en el siglo XIX.

El término "**matriz**" fue acuñado en 1848, por J. J. Sylvester. En 1853, Hamilton hizo algunos aportes a la teoría de matrices. Cayley introdujo en 1858 la **notación matricial**, como forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Grassmann, Frobenius y von Neumann están entre los matemáticos famosos que trabajaron sobre la teoría de matrices.

Olga Taussky-Todd (1906-1995), durante la II Guerra Mundial, usó la teoría de matrices para investigar el fenómeno de aeroelasticidad llamado *fluttering*.

➤ MATRICES

❖ DEFINICIÓN

Una **matriz** es una tabla rectangular de números (llamados **elementos** o **entradas** de la matriz) ordenada en **filas** y **columnas**, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. A una matriz con m filas y n columnas se le denomina matriz m -por- n (escrito $m \times n$). Comúnmente se dice que una matriz m -por- n tiene un **orden** de $m \times n$ ("orden" tiene el significado de tamaño).

Al elemento de una matriz que se encuentra en la fila i -ésima y la columna j -ésima se le llama elemento i,j o elemento (i,j) -ésimo de la matriz. Se vuelve a poner primero las filas y después las columnas.

❖ REPRESENTACIÓN GENERAL DE UNA MATRIZ DE ORDEN $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Donde: a_{ij} es el elemento o entrada general ubicado en la fila “i”, columna j

❖ REPRESENTACIÓN ABREVIADA DE UNA MATRIZ DE ORDEN $m \times n$

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Donde:

a_{ij} es el elemento o entrada general

$$i = 1, 2, 3, \dots, m \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Matriz fila o Vector fila

Es una matriz de orden $1 \times n$

Ejemplo: $A = [1 \ 0 \ 2 \ 4 \ -3]_{1 \times 5}$

Matriz columna o Vector columna

Es una matriz de orden $m \times 1$

Ejemplo: $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

Construcción de una Matriz

Ejemplo:

Construir una matriz de 2x3 con la siguiente información:

$$a_{21} = -6, \quad a_{12} = 4, \quad a_{11} = 0, \quad a_{23} = 1, \quad a_{13} = -2 \quad y \quad a_{22} = 5$$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} \text{Col. 1} & \text{Col. 2} & \text{Col. 3} \\ 0 & 4 & -2 \\ -6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Fila 1} \\ \text{Fila 2} \end{array}$$

Taller 01

Si la matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ tal que

Completar:

$$a_{ij} = \begin{cases} |i - 2j|, & Si \quad i = j \\ \frac{i+j}{2}, & Si \quad i \neq j \end{cases}$$

$a_{11} =$

$a_{12} =$

$a_{13} =$

$a_{21} =$

$a_{22} =$

$a_{23} =$

$$A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

3.2. IGUALDAD DE MATRICES

Definición.- Las matrices $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$ son iguales si y sólo si tienen el mismo orden, además $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y cada j (esto es, entradas correspondientes iguales)

Ejemplo:

$$\text{Si } \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow x = -3 \wedge y = 2$$

3.3. TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

- ❖ **Definición.**- La transpuesta de una matriz de orden $m \times n$ se denota A^T , es la matriz de orden $n \times m$ cuya i -ésima columna es la i -ésima fila de A .

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

- ❖ **PROPIEDAD:** $(A^T)^T = A$

3.4. MATRICES ESPECIALES

- ❖ **Matriz Nula o Matriz Cero.**- Es una matriz que tiene todos sus elementos iguales a cero.

Se denota por O.

Ejemplo: $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$ es una matriz de orden 3x4

- ❖ **Matriz Cuadrada.**- Es una matriz que tiene el mismo número de filas y columnas

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3

- ❖ **Matriz Diagonal.**- Una matriz cuadrada A es llamada *matriz diagonal* si todos los elementos que se encuentran fuera de la diagonal principal son cero, es decir: $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Es una matriz diagonal de orden 3

Es una matriz diagonal de orden 4

- ❖ **Matriz Triangular superior.**- Una matriz cuadrada A es llamada *matriz triangular superior* si todos los elementos que se encuentran debajo de la diagonal principal son cero, es decir: $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- ❖ **Matriz Triangular inferior.**- Una matriz cuadrada A es llamada *matriz triangular inferior* si todos los elementos que se encuentran arriba de la diagonal principal son cero, es decir:
 $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

- ❖ **Matriz simétrica.**- A es una matriz simétrica si y sólo si $A = A^T$.
- ❖ **Matriz anti simétrica.**- A es una matriz anti simétrica si y sólo si $A = -A^T$.

3.5. OPERACIONES CON MATRICES

❖ SUMA DE MATRICES

Definición.- Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de orden $m \times n$, entonces la **suma $A+B$** es la matriz de orden $m \times n$ que se obtiene sumando los correspondientes elementos de A y B, es decir: $A+B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

Ejemplos:

$$1. \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 2} + \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 2 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 2 & 0 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$2. \quad \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} + \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -3 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{No está definida ya que las matrices son de diferente orden.}$$

❖ PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

Si A, B y C son matrices del mismo orden, entonces:

1. $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (propiedad asociativa)
3. $A + O = O + A = A$ (propiedad del neutro aditivo)

❖ MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Definición.- Si A es una matriz de orden $m \times n$ y k es un número real (también llamado escalar), entonces kA es una matriz de orden $m \times n$ que se obtiene multiplicando cada elemento de A por k , es decir: $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$

Ejemplo:

$$-3 \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -12 & -3 \\ -6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

❖ PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

1. $k(A + B) = kA + kB$
2. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
3. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$
4. $0A = \mathbf{O}$
5. $k\mathbf{O} = \mathbf{O}$

❖ PROPIEDADES DE LA MATRIZ TRANSPUESTA

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(kA)^T = kA^T$

❖ MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Dadas las matrices $A_{m \times n}$ y $B_{n \times p}$, entonces el producto AB resulta ser una matriz C de orden $m \times p$ cuyos elementos c_{ij} se obtienen de la siguiente forma:

1. Se multiplican respectivamente los elementos de la **fila i** de la matriz A con los elementos de la **columna j** de la matriz B .
2. Se suman todos los productos realizados, el resultado de esta suma es el elemento buscado.

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 9 \\ -4 & 7 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{hallar: } A \times B$$

Solución:

$$A_{2 \times 3} B_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 9 \\ -4 & 7 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$c_{11} = 2(3) + (-1)(-2) + 4(-4) = -8$$

$$c_{21} = 5(3) + 3(-2) + 0(-4) = 9$$

$$c_{12} = 2(2) + (-1)(3) + 4(7) = 29$$

$$c_{22} = 5(2) + 3(3) + 0(7) = 19$$

$$c_{13} = 2(1) + (-1)(5) + 4(-2) = -11$$

$$c_{23} = 5(1) + 3(5) + 0(-2) = 20$$

$$c_{14} = 2(0) + (-1)(9) + 4(1) = -5$$

$$c_{24} = 5(0) + 3(9) + 0(1) = 27$$

Por lo tanto:

$$A_{2 \times 3} B_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 9 \\ -4 & 7 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 & -5 \\ 9 & 19 & 20 & 27 \end{bmatrix}$$

Taller 02

Si $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

Completar:

El orden de la matriz A es: _____ El orden de la matriz B es: _____ El orden de A x B es: _____ $A \times B = \left[\quad \right]$	$c_{11} =$ $c_{12} =$ $c_{21} =$ $c_{22} =$ $c_{31} =$ $c_{32} =$
--	--

❖ PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

1. Propiedad asociativa: $A(BC) = (AB)C$
2. Propiedad distributiva: $A(B+C) = AB + AC$
3. Transpuesta de un producto: $(AB)^T = B^T A^T$

OBSERVACIONES

- El producto de dos matrices no siempre es commutativo

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow AB = \begin{bmatrix} -3 & 27 \\ 2 & -16 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -1 & -19 \end{bmatrix}$

Luego: $AB \neq BA$

- $AB = 0$, no implica $A = 0 \vee B = 0$
- $AB = AC$, no implica $B = C$

3.6. MATRIZ IDENTIDAD

Es una matriz diagonal, cuya diagonal son todos 1

Ejemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

❖ PROPIEDADES DE LA MATRIZ IDENTIDAD

- $I^T = I$
- $AI = IA = A$

❖ POTENCIA DE UNA MATRIZ

Si A es una matriz cuadrada y “ k ” un entero positivo, entonces la k -ésima potencia de A denotada A^k es el producto de k factores de A

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{K \text{ factores}}$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcular A^3

Solución:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Taller 03

1. Si $A = [a_{i,j}]_{3 \times 3}$ tal que: $a_{i,j} = \begin{cases} 0, & i < j \\ i + j, & i \geq j \end{cases}$ y $B = [b_{i,j}]_{3 \times 2}$ con $b_{i,j} = |i - j|$,

Entonces:

$$A = \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right] \quad B = \left[\begin{array}{cc} & \\ & \\ & \end{array} \right] \quad A \times B = \left[\begin{array}{cc} & \\ & \\ & \end{array} \right]$$

2. Si $A = B$, $B = 3I_{3 \times 3}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Usando propiedades de matrices despejar X de la siguiente ecuación

$$(AC)^T + B - (X - A)^T = 2AI_{3 \times 3}$$

Hallar X

3. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x+y \\ x^2-1 & 2 & 3 \\ 2 & y^2+2y & 5 \end{bmatrix}$ es simétrica

Entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x+y \\ x^2-1 & 2 & 3 \\ 2 & y^2+2y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Luego:

$$x^2 - 1 = \quad x + y = \quad y^2 + 2y =$$

Por lo tanto: $x =$ $y =$

4. Suponga que un contratista ha aceptado pedidos para 7 casas con estilo Rústico, 3 con estilo Moderno y 5 con estilo Colonial. Además las materias primas que se utilizan en cada tipo de casas está dada en la tabla siguiente:

	Acero	Madera	Vidrio	Pintura	Mano de obra
Rústico	5	20	16	7	17
Moderno	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

Si los costos de acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra por unidad son de \$ 2 500, \$ 1 200, \$ 800, \$ 150 y \$ 1 500

Completar:

a) Cantidad de casas:

$$A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

b) Cantidad de Materia prima por cada casa:

$$B = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

c) Costos por unidad:

$$C = [\quad]$$

d) Determinar la cantidad de cada materia prima para satisfacer todos sus pedidos.

e) Calcular el costo total de la materia prima.

3.7. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Asociamos con cada matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ un número llamado determinante y denotamos por $\text{Det}(A) = |A|$

Definición:

$$\text{Si } A = [a_{11}] \Rightarrow |A| = a_{11}$$

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Si A es una matriz de orden n, entonces

$$\text{Det}(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}$$

Donde M_{in} es el determinante de la submatriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ de la matriz A que se obtiene omitiendo su i - éSIMA fila y n - éSIMA columna. El determinante M_{in} se llama el menor del elemento

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces, considerando la fila 1, se tiene:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-3 - 4) - 0(6 + 8) - 3(2 - 2) \\ &= -14 \end{aligned}$$

Por lo tanto $|A| = -14$

❖ REGLA DE SARRUS

Dada una matriz de orden 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Su determinante se obtiene multiplicando y sumando algebraicamente sus elementos de la siguiente forma:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}a_{33} + a_{22}a_{31}a_{33}$$

Ejemplo (2)

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-4) \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \cdot 3 - (-3) \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -2 - 16 - 18 - 3 + 12 - 16 = -43$$

❖ PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. Si cada una de las entradas de una fila (o columna) de A es 0, entonces $|A| = 0$
2. Si dos filas o columnas son idénticas, entonces $|A| = 0$
3. Si en un determinante se permutan dos filas o dos columnas continuas, el valor del determinante cambia de signo.
4. Si se multiplica por una constante a todos los elementos de una fila o columna, el valor del determinante queda multiplicado por dicha constante.
5. Si k es una constante y A es de orden n, entonces $|kA| = k^n |A|$
6. Si una matriz es triangular, su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.
7. $|AB| = |A||B|$
8. $|A| = |A^T|$

Ejercicio 01

1. Un colegio universitario está comparando sus datos de admisión para los últimos dos años. Tiene interés en la distribución de estudiantes locales en relación con los extranjeros y en la matrícula por sexo. Las matrices A y B resumen el número de estudiantes admitidos en los últimos dos años.

$$A = \begin{matrix} & M & F \\ \begin{matrix} Locales \\ Extranjeros \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 360 & 290 \\ 85 & 60 \end{matrix} \right) \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & M & F \\ \begin{matrix} Locales \\ Extranjeros \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 400 & 310 \\ 80 & 90 \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

Halla la admisión total para cada categoría durante los pasados dos años.

2. Suponga que el colegio universitario del problema anterior está esperando un aumento de un 20% en las admisiones para cada categoría de estudiantes para el tercer año. ¿Cuál será la nueva matrícula en el colegio?

3. Una compañía manufacturera de televisores LCD HDTV fabricó tres modelos de diferente calidad en tres tamaños distintos. La capacidad de producción (en miles) en la fábrica de Nueva York está dada por la matriz A.

	Modelo I	Modelo II	Modelo III
Tamaño 32"	5	3	2
Tamaño 37"	7	4	5
Tamaño 40"	10	8	4

La capacidad de producción en la fábrica de California está dada por la matriz B.

	Modelo I	Modelo II	Modelo III
Tamaño 32"	4	5	3
Tamaño 37"	9	6	4
Tamaño 40"	8	12	2

- a) ¿Cuál es el total de capacidad de producción en las dos fábricas?
- b) ¿Cuál será la nueva producción en la fábrica de Nueva York si se decide aumentar la producción en un 20%?

4. Si $A = B$, $B = 3I_{3 \times 3}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Resolver: $(AC)^T + B - (x - A)^T = 2AI_{3 \times 3}$

5. Resolver:

$$\begin{cases} A - Y = 2(X + B) \\ 3X + 5B = 3A - Y \end{cases}, \quad \text{donde: } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Sean $A = [a_{i,j}]_{3 \times 3}$ tal que: $a_{i,j} = \begin{cases} \min\{i, j\} & , \quad i > j \\ -1 & , \quad i = j \\ \max\{i, j\} & , \quad i < j \end{cases}$, $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y

$C = [1 \quad -2 \quad 3]$. Si $B^T A = C$, hallar el valor de $M = x + y + z$.

7. Suponga que un contratista ha aceptado pedidos para 5 casas con estilo Rústico, 7 con estilo Moderno y 9 con estilo Colonial. demás las materias primas que se utilizan en cada tipo de casas está dada en la tabla siguiente:

	Acero	Madera	Vidrio	Pintura	Mano de obra
Rústico	5	20	16	7	17
Moderno	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

Y los costos de compra y de transporte son:

	Compra	Transporte
Acero	2 500	45
Madera	1 200	20
Vidrio	800	30
Pintura	150	5
Mano de obra	1 500	0

- Calcular la cantidad de cada materia prima para satisfacer todos sus pedidos.
- Calcular el costo total de la materia prima y de transporte.

8. Resolver:

$$a) \begin{vmatrix} 5 & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & z-1 & 0 \\ -z & 7 & -z \end{vmatrix} < 0$$

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & -2 & 2x \end{vmatrix} = 6x + 12$$

$$d) \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \geq 0$$

3.8. INVERSA DE UNA MATRIZ

➤ **Definición:**

Si A y B son dos matrices cuadradas tal que $AB = BA = I$, entonces A y B se denominan matrices inversas, es decir, A es la inversa de B, y B es la inversa de A.

La inversa de la matriz A se simboliza como: A^{-1}

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, hallar la inversa de A.

Solución:

Multiplicamos la matriz A por una matriz B del mismo orden e igualamos a la identidad:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{array}{l} 2a+3c=1 \\ -a+c=0 \\ \hline 5c=1 \\ c=\frac{1}{5} \\ \Rightarrow a=\frac{1}{5} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2b+3d=0 \\ -b+d=1 \\ \hline 5d=2 \\ d=\frac{2}{5} \\ \Rightarrow b=-\frac{3}{5} \end{array}$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

OBSERVACIÓN

- Una matriz A que posee inversa se llama matriz no singular o inversible
- Una matriz A que no posee inversa se llama matriz singular o no inversible
- A es una matriz no singular si y sólo si $|A| \neq 0$.

➤ PROPIEDADES

- a) $(I)^{-1} = I$
- b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- c) $(A^{-1})^{-1} = A$
- d) $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$
- e) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

➤ MATRIZ DE COFACTORES

Sea A una matriz cuadrada de orden n , la matriz de cofactores de A está dada por

$$A = [c_{ij}]_{n \times n}, \text{ donde } c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Ejemplo:

Determinar la matriz de cofactores de A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \quad c_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 0) = 1 \quad c_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 8) = 5 \quad c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \quad c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 6) = 2$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \quad c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 2) = -2 \quad c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

Por lo tanto: $A_C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 5 & -3 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Taller 04

Dada la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ Completar:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} =$$

$$c_{31} =$$

$$c_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$c_{22} = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} =$$

$$c_{32} =$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$c_{23} = -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} =$$

$$c_{33} =$$

Por lo tanto:

$$A_C = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

3.9. MATRIZ ADJUNTA

Si A es una matriz cuadrada, entonces la adjunta de A es la transpuesta de la matriz de cofactores de A , esto es:

$$Adj A = A_C^T$$

Ejemplo:

Hallar la matriz adjunta de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Del ejemplo (2) tenemos la matriz de cofactores, que es:

$$A_C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 5 & -3 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$Adj A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Taller 05

Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces su matriz de cofactores es:

$$A_C = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la adjunta de A es::

$$AdjA = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

➤ CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR EL MÉTODO DE LA ADJUNTA

Si A es una matriz no singular, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA$$

Ejemplo:

Hallar la inversa de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Del ejemplo anterior tenemos:

$$AdjA = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

Además $|A| = -11$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{4}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{8}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \end{bmatrix}$$

Taller 06

Hallar la inversa de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$AdjA = \left[\quad \quad \quad \right] \quad \text{y} \quad |A| =$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{[]}} \left[\quad \quad \quad \right] = \left[\quad \quad \quad \right]$$

Hallar la inversa de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$Adj A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad |A| =$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

3.10. TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE FILAS Y COLUMNAS DE UNA MATRIZ

➤ **Definición:**

Una transformación elemental es un conjunto de operaciones o procesos con matrices que no modifican su orden ni su característica y que permite obtener una segunda matriz a partir de la matriz dada en una de las formas siguientes:

Notación	Transformaciones elementales de filas
$F_i \leftrightarrow F_j$	Intercambiar las filas F_i y F_j
KF_i	Multiplicar la fila F_i por la constante K
$KF_i + F_j$	Sumar K veces la fila F_i a la fila F_j

➤ **MATRICES EQUIVALENTES**

Dos matrices A y B se denominan equivalentes, si una de ellas se deduce de la otra mediante las transformaciones elementales de filas o columnas y se denota por $A \approx B$.

➤ **CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR EL MÉTODO DE GAUSS JORDAN**
(Operaciones elementales)

Sea A, una matriz cuadrada de orden n. Para calcular la matriz inversa de A, se sigue los siguientes pasos:

1. Se construye una matriz de la forma $M = (A | I)$; es decir, por la matriz de la cual se desea hallar su inversa y por la matriz identidad. A esta matriz se le denomina matriz aumentada.
2. Utilizando las operaciones elementales de filas (método Gauss), se transforma la matriz A, en la matriz identidad: $M = (I | A^{-1})$. La matriz que resulta en el lado derecho, será la matriz inversa de A.

Esto es:

$$[A : I] \xrightarrow{\text{O.E.}} [I : A^{-1}]$$

Ejemplo:

Hallar la inversa de la siguiente matriz, por el método de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) - F_1 + F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) - F_2 \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) - F_2 + F_1 \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) - F_3 + F_1 \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Luego la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Taller 07

Hallar la inversa de la siguiente matriz, por el método de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & : & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & : & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[-4F_1+F_2]{-2F_1+F_3} \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -15 & : & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & : & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] F_2 \leftrightarrow F_3$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & : & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -15 & : & -4 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[-2F_2+F_1]{5F_2+F} \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 35 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{35}F_3}$$

Luego:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right]$$

Ejercicio 02

1. Dadas las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

- a) AB y BA. ¿Se puede decir que A y B son inversas?
 - b) CD y DC. ¿Se puede decir que C y D son inversas?
2. Calcular la inversa de las siguientes matrices si existe por el método de la adjunta:

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

3. Hallar la inversa de las siguientes matrices si existe, por el método de Gauss

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

3.11. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Dado el siguiente sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones en su forma matricial está dado por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Matriz de los coeficientes

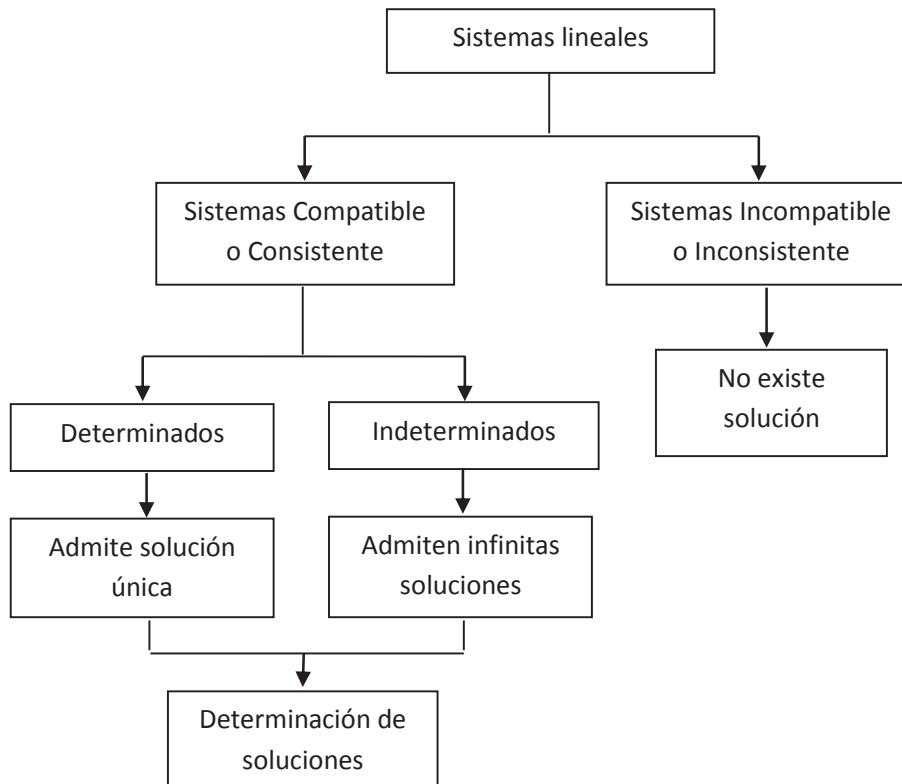
Matriz columna de las variables

Matriz columna de las constantes

En forma abreviada se tiene:

$$AX = B$$

Según su tipo de solución un sistema de ecuaciones lineales se clasifica de la siguiente forma:



Observación

- Si $B = \theta$ es una matriz nula, $AX = \theta$ se llama sistema homogéneo.
- Si $B \neq \theta$ es una matriz no nula, $AX = B$ se llama sistema no homogéneo.

➤ RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

Este método sólo es posible para aquellos sistemas de n ecuaciones y n incógnitas, siempre y cuando exista la inversa de la matriz de coeficientes.

Dado el siguiente sistema en su forma matricial:

$$AX = B$$

Multiplicando por la inversa de A ambos miembros se tiene:

$$\underbrace{A^{-1}AX}_{IX} = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 5y = 23 \\ 2x + 11y = 49 \end{cases}$$

Solución:

Como:

$$X = A^{-1}B$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 23 \\ 49 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$X = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 49 \end{bmatrix} \implies X = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Entones: $x = 8$ $y = 3$

Taller 08

Completar:

Si:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 15 \\ -2x + y + z = 10 \\ x - y + 2z = 16 \end{cases}$$

Entonces:

$$A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego: $X = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Entonces: $x =$ $y =$ $z =$

3.12. RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR LA REGLA DE CRAMER

Al igual que el método de la inversa, aplicar la regla de Cramer solo es posible para aquellos sistemas de n ecuaciones y n incógnitas, siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea diferente de cero.

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

En su forma matricial se tiene: $AX = B$

Si $|A| \neq 0$, entonces:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

Donde A_i es la matriz que se obtiene de A al remplazar la i -ésima columna de A por B

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -2x - 10y - z = -64 \\ 3x + 2y - 2z = -4 \\ -x + y + z = 13 \end{cases}$$

Solución:

Se forman y encuentran las determinantes: Principal y de variables.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -10 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -64 & -10 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 13 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -2 & -64 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 13 & 1 \end{vmatrix} = -15 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-15}{-3} = 5$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -2 & -10 & -64 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 13 \end{vmatrix} = -30 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-30}{-3} = 10$$

Taller 09

Si:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -2 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

Entonces:

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right| =$$

$ A_1 = \left \begin{array}{cc} & \\ & \end{array} \right =$	$ A_2 = \left \begin{array}{cc} & \\ & \end{array} \right =$	$ A_3 = \left \begin{array}{cc} & \\ & \end{array} \right =$
$x =$	$y =$	$z =$

3.13. RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE GAUSS

Por este método es posible resolver un sistema de m ecuaciones y n incógnitas

Para resolver un sistema por el método de Gauss, reducimos mediante operaciones elementales la matriz de coeficiente a la que se le aumenta la matriz de constantes.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 4y - z = 3 \\ x + 2y + 3z = -5 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-4F_2+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{7F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 3 & -6 \end{array} \right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{11}F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{-7F_3+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Por lo tanto:

$$x = 1 \quad y = 0 \quad z = -2$$

El sistema es compatible determinado,
es decir tiene solución única.

Ejemplo:

Resolver $\begin{cases} z + x - 2y = 0 \\ -3x + 2z + 4y = 0 \end{cases}$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & : 0 \\ -3 & 4 & 2 & : 0 \end{array} \right] 3F_1 + F_2 \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & : 0 \\ 0 & -2 & 5 & : 0 \end{array} \right] -\frac{1}{2}F_2$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & : 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & : 0 \end{array} \right] 2F_2 + F_1 \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & : 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & : 0 \end{array} \right]$$

Entonces:

$$x - 4z = 0 \Rightarrow x = 4z$$

$$y - \frac{5}{2}z = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}z$$

Sea $z = t$

Por lo tanto

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{5}{2}t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

El sistema es compatible indeterminado,
es decir tiene infinitas soluciones.

Taller 10

Dado el siguiente sistema de ecuaciones resolver utilizando el método de Gauss

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2z = 5 \\ 2y - 4z = -6 \end{cases}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]$$

El sistema es _____

Dado el siguiente sistema de ecuaciones resolver utilizando el método de Gauss

$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + 6y + z = 12 \\ 5y + 2z = 6 \end{cases}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right]$$

El sistema es _____

Ejercicio 03

1. Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz X tal que:

$$2A + 3B = (B - A)X$$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, por el método de la inversa.

a)

$$\begin{cases} x - y + 3z = 10 \\ 2x - y + 4z = 20 \\ 3x + 2y - 2z = 28 \end{cases}, \quad \text{Sabiendo que } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -16 & 11 & -2 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} -2x - 10y - z = -64 \\ 3x + 2y - 2z = -4 \\ -x + y + z = 13 \end{cases}$, Sabiendo que

$$\begin{pmatrix} -2 & -10 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4/3 & -3 & -22/3 \\ 1/3 & 1 & 7/3 \\ -5/3 & -4 & -26/3 \end{pmatrix}$$

4. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, por el método de la inversa.

$$\begin{cases} 6x - 5y = 2 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, por el método de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x - y + 5z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

6. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, por el método de Gauss e indicar el tipo de sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ 3x + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

7. Dadas las siguientes informaciones. Hallar las corrientes i_1, i_2, i_3

Malla1 $11i_1 - 8i_2 = 42$

Súper malla $i_1 + 5i_2 - 4i_3 = 10$

Malla2 $-8i_1 + 18i_2 - 6i_3 = 0$

Malla 1 $-i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 0$

Malla3 $-6i_2 + 18i_3 = 0$

Fuente de $i_1 - i_2 = 5$

Corriente

8. Resolver el siguiente problema utilizando la regla de Cramer

Una compañía produce tres artículos A, B y C que requiere se procesen en tres máquinas I, II y III. El tiempo en horas requerido para el procesamiento de cada producto por las tres máquinas está dado en la siguiente tabla:

	I	II	III
A	3	1	2
B	1	2	1
C	2	4	1

La máquina I está disponible 850 horas, la II durante 1 200 horas y la III durante 550 horas. Encuentre cuántas unidades del artículo B deben producirse para utilizar todo el tiempo disponible de las máquinas.

9. Resolver el siguiente problema usando el método de la inversa

Un fabricante elabora dos productos A y B. Por cada unidad que vende de A la ganancia es de \$ 8 y por cada unidad que vende de B la ganancia es de \$ 11. De la experiencia se ha encontrado que puede venderse 25% más de A que de B. Si el fabricante desea una ganancia total de \$ 42 000. ¿Cuántas unidades de cada producto debe venderse?

10. Resolver el siguiente problema por el método de Gauss

Una fábrica de automóviles produce dos modelos A y B. Suponga que cada modelo A requiere 10 partes de tipo I y 14 de tipo II, mientras que cada modelo B requiere 7 partes de tipo I y 10 de tipo II. La fábrica puede obtener 800 partes de tipo I y 1 130 de tipo II. ¿Cuántos automóviles de cada modelo se producen, si se utilizan todas las partes disponibles.

UNIDAD IV

PROPORCIONALIDAD NUMÉRICA

$$\begin{aligned}
 25\% \text{ de } p + p &= \\
 = \frac{25}{100} \cdot p + p &= \\
 = \frac{p}{4} + p &= \\
 = \frac{p + 4p}{4} &= \\
 = \frac{5p}{4} &
 \end{aligned}$$

RAZÓN:

RAZÓN ARITMÉTICA

RAZÓN GEOMÉTRICA

PROPORCIÓN:

PROPORCIÓN ARITMÉTICA

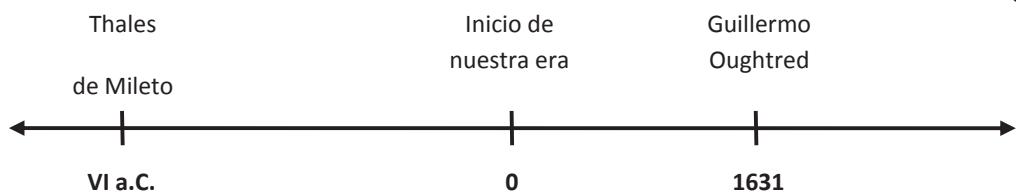
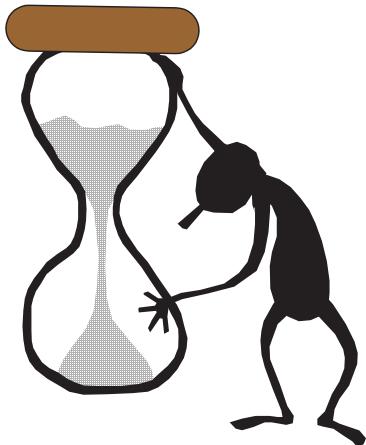
PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

REPARTO PROPORCIONAL

REGLA DE TRES SIMPLE Y
COMPUESTA

TANTO POR CIENTO E INTERÉS
SIMPLE

Línea de Tiempo



AÑO	ACONTECIMIENTOS
VI a.C.	Thales de Mileto (639 – 538 a.C.) su aporte más importante está en el campo de la geometría (Teorema de Thales) de ahí nace el nombre de razón geométrica y proporción geométrica.
1631	<p>Los signos de razón: , y de proporción ::</p> <p>Fueron introducidos por Guillermo Oughtred.</p>

INTRODUCCIÓN

Entre los años 550 a 450 a.C. se establece la era pitagórica. Pitágoras de Samos, personaje semilegendario creador de un gran movimiento metafísico, moral, religioso y científico. El saber geométrico de los pitagóricos estaba en la geometría elemental, donde destaca el famoso Teorema de Pitágoras, el cual fue establecido por su escuela y donde la tradición de los pitagóricos llevó a atribuírselo a su maestro. Con respecto a la aritmética actual el saber de los pitagóricos era enorme. Fueron los primeros en analizar la noción de número y establecer las relaciones de correspondencia entre la aritmética y la geometría. Definieron los números primos, algunas progresiones y precisaron la teoría de las proporciones. Los pitagóricos propagaban que todo podía expresarse por medio de números, pero luego tuvieron que aceptar que la diagonal de un cuadrado era incommensurable con el lado del cuadrado.

APLICACIÓN

Las razones y proporciones, tienen una gran aplicación en diversas disciplinas; por ejemplo: en ingeniería se emplean las escalas para realizar pequeñas maquetas; en el área contable para realizar movimientos financieros y en la vida diaria para efectuar ciertas operaciones aritméticas.

4.1. RAZONES Y PROPORCIONES

Las razones y proporciones tienen una gran aplicación en diversas disciplinas; por ejemplo, en ingeniería se emplean las escalas para realizar maquetas, en el área contable, para realizar movimientos financieros y, en la vida diaria, para efectuar ciertas operaciones aritméticas.

➤ RAZÓN

Se llama **razón** al resultado de comparar dos cantidades.

Dos cantidades pueden compararse de dos maneras:

1. Por **diferencia**, hallando en cuánto excede una a la otra, es decir, **restándolas**.
2. Por **cociente**, hallando cuántas veces contiene una a la otra, es decir, **dividiéndolas**.

➤ TIPOS DE RAZONES

Hay dos clases de razones:

1. Razón aritmética o por diferencia.
2. Razón geométrica o por cociente.

➤ RAZONES ARITMÉTICAS

La **razón aritmética** de dos cantidades es la **diferencia indicada** de dichas cantidades.

Ejemplo:

En el II ciclo de la carrera de Administración asisten 25 varones y 18 mujeres. ¿Cuál es la razón aritmética?

Comparando:

$$25 \text{ varones} - 18 \text{ mujeres} = 7 \text{ varones}$$

_____ _____ _____

Antecedente consecuente valor de la razón

Ejemplo:

Juan tiene 12 años más que Pedro

En forma general: $a - b = r$ Donde: r = razón; a : antecedente; b : consecuente

El valor de la **razón aritmética**, puede ser mayor, menor o igual a cero.

Ejemplo: R.A. (15:6) = $15 - 6 = 9$ $r > 0$

R.A. (8:12) = $8 - 12 = -4$ $r < 0$

R.A. (17:7) = $17 - 17 = 0$ $r = 0$

➤ RAZONES GEOMÉTRICAS

La **razón geométrica** es la comparación de dos cantidades por su **cociente**.

Las razones geométricas se pueden escribir de dos maneras:

1. En forma de fracción.
2. Separando ambas cantidades con 2 puntos.

Ejemplo:

La razón geométrica de 7 a 3 se puede escribir:

7 / 3 o bien 7: 3

Ejemplo:

La edad de un padre y su hijo son 40 y 5 años respectivamente.

Comparando:

$$\frac{\text{Padre}}{\text{Hijo}} : \frac{40 \text{ años}}{5 \text{ años}} = 8$$

Interpretación:

- La edad del padre es 8 veces la edad del hijo.
- La edad del hijo es la octava parte de la edad del padre.

En forma general: $\frac{a}{b} = r$ Donde a : antecedente; b : consecuente; r = razón.

El valor de la **razón geométrica**, puede ser: mayor, menor o igual a la unidad.

Ejemplo:

R.G. (12:5) = $\frac{12}{5} = 2,4$ ($r > 1$)

R.G. (1:4) = $\frac{1}{4} = 0,25$ ($r < 1$)

R.G. (7:7) = $\frac{7}{7} = 1$ ($r = 1$)

➤ PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LA RAZÓN GEOMÉTRICA

Si a los dos términos de una razón geométrica se les multiplica o divide por una misma cantidad, el valor de la razón no cambia, pero la suma o diferencia de sus términos quedará multiplicada o dividida respectivamente por dicha cantidad.

Ejemplo:

Sea la razón geométrica: $2/5$ cuyo valor es 0,4.

Se cumple:

RAZÓN	SUMA	DIFERENCIA
-------	------	------------

$$2/5 = 0,4 \quad 2+5=7 \quad 5-2=3$$

Multiplicando ambos términos por "n"

$$2n/5n=0,4 \quad 2n+5n=7n \quad 5n-2n=3n$$

Dividiendo ambos términos por "n"

$$\frac{2/n}{5/n} = 0,4 \quad \frac{2}{n} + \frac{5}{n} = \frac{7}{n} \quad \frac{5}{n} - \frac{2}{n} = \frac{3}{n}$$

➤ PROPORCIÓN

Es el resultado de igualar dos razones.

Dados cuatro números diferentes de cero, en un cierto orden, constituyen una proporción si la razón de los dos primeros es igual a la razón de los dos segundos.

Hay dos clases de proporciones:

1. Proporción aritmética.
2. Proporción geométrica.

➤ PROPORCIÓN ARITMÉTICA

Es la equivalencia de dos razones aritméticas.

Ejemplo:

$$18 - 15 = 28 - 25$$

En forma general

$$a - b = c - d \text{ donde: } b \text{ y } c \text{ medios; } a \text{ y } d \text{ extremos.}$$

➤ PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Es la equivalencia de dos razones geométricas.

Ejemplo:

La edad de Pedro es a la edad de Juan como 2 es a 3.

$$\frac{EP}{EJ} = \frac{2}{3}$$

En forma general: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ donde: a y d son términos extremos; b y c términos medios

➤ TIPOS DE PROPORCIONES

	PROPORCIÓN ARITMÉTICA	PROPORCIÓN GEOMÉTRICA
DISCRETA	$a - b = c - d$ d: es cuarta diferencial de a, b y c	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ d: es cuarta proporcional de a, b y c
CONTINUA	$a - b = b - c$ c: tercera diferencial de a y b b: media diferencial de a y c	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ c: tercera proporcional de a y b b: media proporcional de a y c

➤ PROPIEDADES DE LA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Dada la proporción geométrica:

Si: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ se cumple:

$$1. \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$2. \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} \quad o \quad \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bd}} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$3. \frac{a^m + c^m}{b^m + d^m} = \frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m} \quad o \quad \frac{\sqrt[m]{a^m + c^m}}{\sqrt[m]{b^m + d^m}} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$4. \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad o \quad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

$$5. \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad o \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

$$6. \frac{a}{b} = \frac{m}{n} = k \rightarrow \begin{cases} a = mk \\ b = nk \end{cases} \quad k \in Z - \{0\}$$

Ejemplos:

SITUACIÓN	RESOLUCIÓN
1. La suma de dos números es 91 y están en la razón 4:3. Calcule el valor de cada número.	<p>Solución:</p> <ul style="list-style-type: none"> Supongamos que los números son x e y Formemos la proporción. $\frac{x}{y} = \frac{4}{3} = k$ <ul style="list-style-type: none"> Luego por propiedad: $x = 4k$ $y = 3k$ <p>Entonces:</p> $4k + 3k = 91 \rightarrow k = 13$ <p>Reemplazamos:</p> $x = 4k \rightarrow 4(13) = 52$ $y = 3k \rightarrow 3(13) = 39$ <p>Respuesta: Los números son: 52 y 39.</p>
2. La razón entre la velocidad de un carro y una persona es $25 : 2$. Si la velocidad del carro es 80 Km./h, calcula la velocidad de la persona en m/s.	<p>Solución:</p> <ul style="list-style-type: none"> Supongamos que VC es la velocidad del carro y VP velocidad de la persona Formemos la proporción y reemplacemos datos: $\frac{80}{VP} = \frac{25}{2}$ <ul style="list-style-type: none"> Luego: $VP = 6,4 \text{ km/h}$ <ul style="list-style-type: none"> Nos piden la velocidad de la persona en m/s: $\frac{6,4 \text{ km}}{h} = \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = \frac{1 \text{ h}}{36000 \text{ s}}$ <p>Simplificando tenemos:</p> $\frac{6,4 \times 10 \text{ m}}{36 \text{ s}} = 1,7\bar{7} \text{ m/s}$ <p>Respuesta: La velocidad de la persona es $1,7\bar{7} \text{ m/s}$</p>

3. Un gerente reparte S/. 2 695 de bonificación a cuatro empleados por su puntualidad. Si tuvieron 2; 3; 4; 5 faltas respectivamente. ¿Cuánto le toca al más puntual?

Solución:

- Supongamos que los empleados son x, y, z y w
- Como es una relación inversamente proporcional tenemos:

$$x \cdot 2 = y \cdot 3 = z \cdot 4 = w \cdot 5 = k$$

- Entonces:

$$x = \frac{k}{2} \rightarrow \frac{2 \cdot 100}{2} = 1\,050$$

$$y = \frac{k}{3} \rightarrow \frac{2 \cdot 100}{3} = 700$$

$$z = \frac{k}{4} \rightarrow \frac{2 \cdot 100}{4} = 525$$

$$w = \frac{k}{5} \rightarrow \frac{2 \cdot 100}{5} = 420$$

- Luego:

$$\frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{5} = 2\,695$$

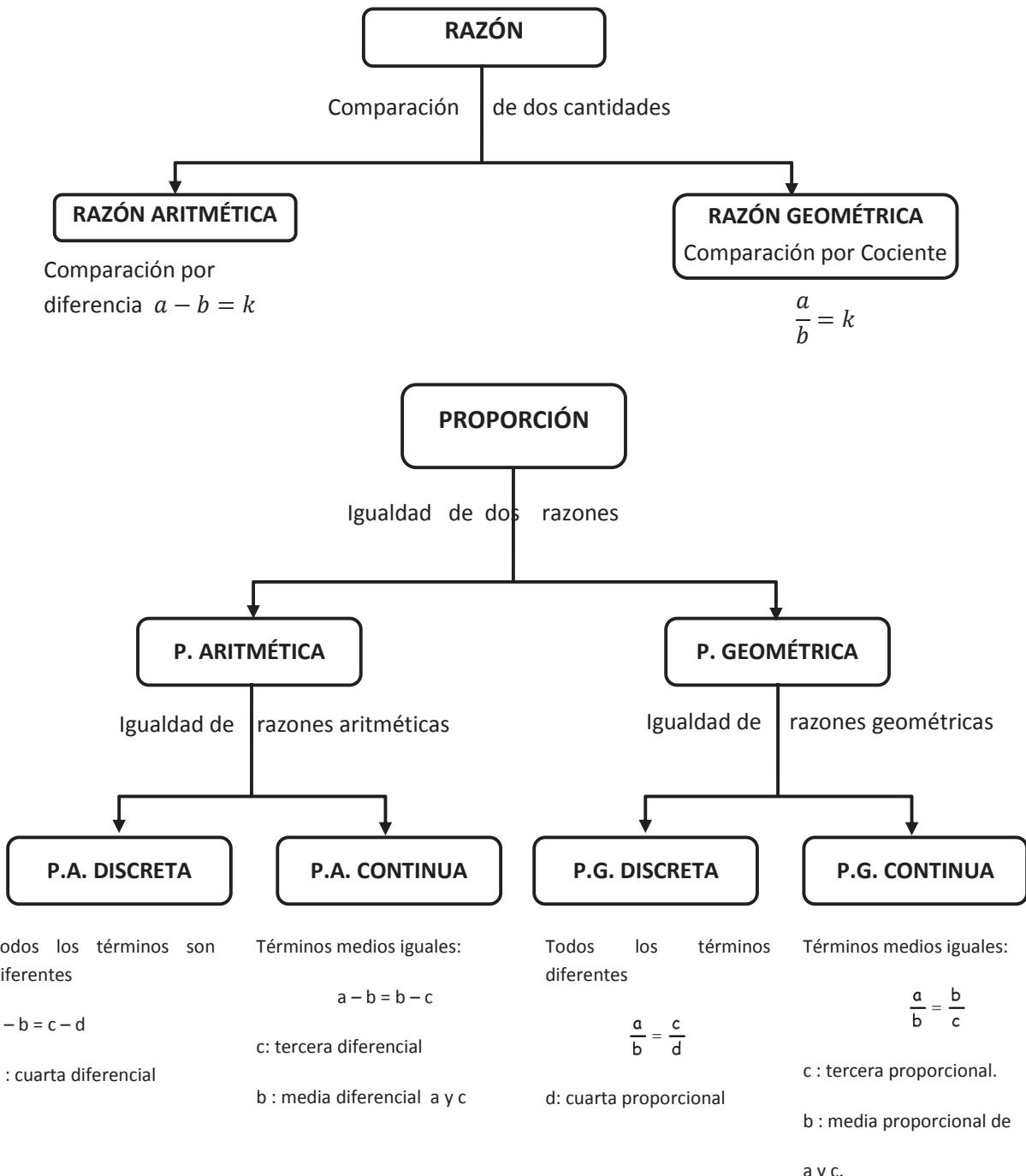
$$k = 2\,100$$

Ahora reemplazamos k para obtener el monto que le corresponde al más puntual..

Respuesta:

El empleado más puntual recibe S/. 1 050.

RESUMEN



Ejercicio 01

I. Determina el valor de x en cada una de las siguientes proporciones:

$$1. \frac{x+4}{3} = \frac{x+3}{4}$$

$$2. \frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{18}, \text{ si } x + y + z = 24$$

3. Sabiendo que $a = 12$; $b = 4x$; $c = 5a - 6$ y $d = 20x - 18$, hallar el valor de x si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

II. Resuelve los siguientes problemas sobre proporciones

1. La razón entre dos números es $3/7$. Si el menor es 378, halla el mayor de los números.

2. La razón entre los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es $13/5$. Hallar la medida de dichos ángulos.

3. El valor de una razón es 3 y el antecedente es 3,4. ¿Cuál es el valor del consecuente?

4. En un salón hay 45 alumnos de los cuales 24 son varones. ¿Cuál es la razón entre el número de varones y el número de mujeres?

5. Halla la tercera proporcional entre:

a) 4 y 8

b) 0,3 y 0,12

c) 9 y $1/3$

6. En cada grupo de valores halla la cuarta proporcional:

a) 5; 40 y 15

b) 8 ; 14 y 32

c) 3 ; 7 y 39

$$7. \frac{a}{b} = \frac{m}{n}, \text{ si } a + m = 45; b + n = 40 \text{ y } m = 5 \quad \text{¿Cuánto vale } n?$$

$$8. \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{si } a + b = 40; \quad \text{si } a - b = 30, \quad c + d = 50. \quad \text{¿Cuánto vale } c - d?$$

9. La relación entre 2 números es de 5 a 2. Encuentra los números sabiendo que su suma es 49.

10. La razón de dos números es $8/3$ y su diferencia es 55. Encuentra los números.

11. La razón aritmética y la razón geométrica de dos números son 20 y $7/3$ respectivamente hallar el valor del antecedente de dichas razones

12. Hallar la suma de dos números que están en la relación de 12 a 7 si su diferencia es 45.

13. La edad de un hijo es a la de su padre como 3 es a 5. Dentro de 20 años, la relación de sus edades será como 5 es a 7 ¿Cuántos años tiene el padre?
14. Si a^2 es a b^2 como 64 es a 81, ¿Cuánto valdrá "a" cuando "b" sea 27?
15. Luz tiene 49 años y Eva 13. ¿En cuántos años más la relación entre sus edades será de 16 a 7?
16. Los términos de una razón geométrica suman 80. ¿Calcular su diferencia si la razón es igual a 2,333...-?

4.2. REPARTO PROPORCIONAL

El repartimiento proporcional es una regla que tiene por objeto dividir un número propuesto en partes proporcionales a otros dados.

➤ CLASIFICACIÓN DE LOS REPARTOS PROPORCIONALES (VARIACIÓN PROPORCIONAL)

- En un reparto proporcional tenemos una cantidad a repartir en proporción a determinados elementos dados.
- Para repartir puede ser que se tome en cuenta solo un elemento, en este caso el reparto es **simple**.
- Si se toman más elementos se dice que el reparto es **compuesto**.
- En ambos casos los elementos pueden estar en proporción **directa o inversa** a la cantidad que se va a repartir. Esta relación es muy importante para hacer los cálculos relativos.
- Pueden existir repartos **mixtos** esto quiere decir que tienen elementos directos o inversos.

➤ REPARTOS DIRECTOS

Se presenta este caso cuando los elementos están en forma directa en relación con la cantidad a repartir. Por ejemplo, cuando se desea repartir un premio en proporción a calificaciones obtenidas, repartir según el lugar en que quedaste en una prueba deportiva, la depreciación proporcional a valor de los activos, una gratificación en proporción a la venta de un producto.

Ejemplo:

Se desea repartir la cantidad de \$ 12 000 de gratificación entre departamentos de una tienda, en proporción a la productividad. El primer departamento (M) produjo \$ 20 000, el segundo (N) \$ 40 000 y el tercero (O) \$ 60 000.

Solución:

Sea: M = gratificación al primer departamento
 N = gratificación al segundo departamento
 O = gratificación al tercer departamento

$$M + N + O = 12\,000$$

Como las gratificaciones son directamente proporcionales a la productividad

$$\frac{M}{20\,000} = \frac{N}{40\,000} = \frac{O}{60\,000} = \text{constante} = k \rightarrow M = K(20\,000) \\ N = K(40\,000) \\ O = K(60\,000)$$

$$20\,000K + 40\,000K + 60\,000K = 12\,000$$

$$120\,000K = 12\,000$$

$$K = \frac{1}{10}$$

$$M = K(20\,000) = \$2\,000$$

$$\text{Lo que nos da: } N = K(40\,000) = \$4\,000$$

$$O = K(60\,000) = \$6\,000$$

Ejemplo:

Repartir 200 en partes directamente proporcionales a 2, 3 y 5

Solución:

Sean A, B y C las partes

Tenemos: $A + B + C = 200$

$$\text{Además: } \frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} = K$$

Despejando cada parte:

$$A = 2K; B = 3K \text{ y } C = 5K$$

La suma de las partes es 200

$$2K + 3K + 5K = 200$$

$$10K = 200$$

$$K = 20$$

Luego:

$$A = 2K \Rightarrow 2(20) = 40$$

$$B = 3K \Rightarrow 3(20) = 60$$

$$C = 5K \Rightarrow 5(20) = 100$$

Ejemplo:

Repartir 3 600 en partes directamente proporcionales a 5, 6 y 7.

Solución:

Sean X, Y y Z

Tenemos: $X + Y + Z = 3\ 600$

Despejando cada parte:

$$X=5K, \quad Y=6K \quad y \quad Z=7K$$

La suma de las partes es 3600

$$5K + 6K + 7K = 3\ 600$$

$$18K = 3\ 600$$

$$K = 200$$

Por lo tanto:

$$X = 5K \Rightarrow X = 5(200) \Rightarrow X = 1\ 000$$

$$Y = 6K \Rightarrow Y = 6(200) \Rightarrow Y = 1\ 200$$

$$Z = 7K \Rightarrow Z = 7(200) \Rightarrow Z = 1\ 400$$

Ejemplo:

Dividir 4 800 en partes directamente proporcionales a 3, 4 y 5.

Solución:

Sean A, B y C las partes.

Tenemos: $A + B + C = 4\ 800$

$$\text{Además: } \frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = K$$

Despejando cada parte:

$$A = 3K; B = 4K \text{ y } C = 5K$$

La suma de las partes es 4 800

$$3K + 4K + 5K = 4\ 800$$

$$12K = 4\ 800$$

$$K = 400$$

$$A = 3K \Rightarrow A = 3(400) \Rightarrow A = 1\ 200$$

$$B = 4K \Rightarrow B = 4(400) \Rightarrow B = 1\ 600$$

$$C = 5K \Rightarrow C = 5(400) \Rightarrow C = 2\ 000$$

Ejemplo:

Se desea repartir la cantidad de \$ 12 000 de gratificación entre departamentos de una tienda, en proporción a la productividad. El primer departamento A produjo \$ 20 000, el segundo B \$ 40 000 y el tercero C \$ 60 000.

Solución:

Sean A, B y C las partes.

Tenemos: $A + B + C = 12\ 000$

Además:

$$\frac{A}{20\ 000} = \frac{B}{40\ 000} = \frac{C}{60\ 000} = K$$

Despejando cada parte:

$$A = 20\ 000K, B = 40\ 000K, C = 60\ 000K$$

La suma de las partes es 12 000

$$20\ 000K + 40\ 000K + 60\ 000K = 12\ 000$$

$$120000K = 12000$$

$$K = 1/10$$

Ahora:

$$A = 20\ 000K \Rightarrow A = 20\ 000 \left(\frac{1}{10} \right) \Rightarrow A = 2\ 000$$

$$B = 40\ 000K \Rightarrow B = 40\ 000 \left(\frac{1}{10} \right) \Rightarrow B = 4\ 000$$

$$C = 60\ 000K \Rightarrow C = 60\ 000 \left(\frac{1}{10} \right) \Rightarrow C = 6\ 000$$

➤ **REPARTOS INVERSOS**

En cada caso las partes son inversamente proporcionales a los índices del reparto.

Recordando la propiedad de magnitudes proporcionales:

$$\text{Si } A \text{ es IP con } B \Rightarrow A \text{ es DP con } \frac{1}{B}$$

Interpretando las propiedades y aplicando a los problemas, significa que si una parte es I.P. al número dado, entonces dicha parte será D.P. a la inversa del número.

Ejemplo:

Un despacho de contadores repartió \$ 35 500 a sus 3 secretarias, con la finalidad de incentivarlas, otorgando un bono en proporción inversa a los días faltados en el año: Alicia faltó 5 días, Carmen faltó 3 días y Nidia 7 días. ¿Cuánto recibió cada una de ellas?

Solución:

Sea: A = gratificación a Alicia

C = gratificación a Carmen

N = gratificación a Nidia

$$A + C + N = 35\ 500$$

Como las gratificaciones son inversamente proporcionales a la productividad

$$A(5) = C(3) = N(7) = CONSTANTE = K \rightarrow \begin{cases} A = \frac{K}{5} \\ C = \frac{K}{3} \\ N = \frac{K}{7} \end{cases}$$

$$\frac{K}{5} + \frac{K}{3} + \frac{K}{7} = 35\ 500$$

$$\frac{71K}{105} = 35\ 500$$

$$K = 52\,500$$

$$A = \frac{K}{5} = \$\,10\,500$$

Luego encontramos: $C = \frac{K}{3} = \$ 17\,500$

$$N = \frac{K}{j} = \$\,7\,500$$

Ejemplo:

Dividir 183 en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{7}$.

Solución:

$$IP \quad DP \quad M.C.M (3, 4, 7) = 84$$

$$183 \left\{ \begin{array}{lll} A: 3 & \frac{1}{3} \cdot 84 = 28K & \Rightarrow A = 28(3) = 84 \\ B: 4 & \frac{1}{4} \cdot 84 = 21K & \Rightarrow B = 21(3) = 63 \\ C: 7 & \frac{1}{7} \cdot 84 = \underline{12K} & \Rightarrow C = 12(3) = 36 \\ & & 61K \end{array} \right.$$

Luego:

$$61K = 183$$

K = 3

Ejemplo:

Repartir 780 en 3 partes que sean inversamente proporcionales a los números 6, 9 y 12.

Solución:

$$\begin{array}{rccccc}
 & \text{IP} & \text{DP} & \text{M.C.M. (6, 9, 12)} = 36 \\
 \\
 780 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{A: } 6 \quad \frac{1}{6} \cdot 36 = 6K \Rightarrow A = 6(60) = 360 \\
 \text{B: } 9 \quad \frac{1}{9} \cdot 36 = 4K \Rightarrow B = 4(60) = 240 \\
 \text{C: } 12 \quad \frac{1}{12} \cdot 36 = \frac{3K}{13K} \Rightarrow C = 3(60) = 180
 \end{array} \right. \\
 & & & & & \hline
 & & & & & 780
 \end{array}$$

$$\text{Luego: } 13K = 780$$

$$K = 60$$

Ejemplo:

Repartir 154 en partes directamente proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$.

Solución:

$$\begin{array}{rccccc}
 & \text{IP} & \text{DP} & \text{M.C.M. (3, 4, 5, 6)} = 60 \\
 \\
 154 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{A: } \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \cdot 60 = 40K \Rightarrow A = 40K \Rightarrow A = 40(2) = 80 \\
 \text{B: } 4 \quad \frac{1}{4} \cdot 60 = 15K \Rightarrow B = 15K \Rightarrow B = 15(2) = 30 \\
 \text{C: } 5 \quad \frac{1}{5} \cdot 60 = 12K \Rightarrow C = 12K \Rightarrow C = 12(2) = 24 \\
 \text{D: } 6 \quad \frac{1}{6} \cdot 60 = \frac{10K}{77K} \Rightarrow D = 10K \Rightarrow D = 10(2) = 20
 \end{array} \right. \\
 & & & & & \hline
 & & & & & 77K
 \end{array}$$

$$\text{Luego: } 77K = 154$$

$$K = 2$$

➤ **REPARTOS MIXTOS**

En algunos casos se presentan elementos inversos con elementos directos, en cuyos casos se nos indicarán las condiciones del reparto y lo haremos por separado para las partes directas y las partes inversas.

Ejemplo:

Se incendió una fábrica ocasionando pérdidas por \$ 1 000 000 en proporción directa a los metros cuadrados ocupados por tres áreas departamentales y en proporción inversa a las mercancías salvadas. A la superficie se le aplica un 35% del total de las pérdidas y a las mercancías un 65%.

Departamento	Superficie en metros	Mercancía salvada
M	240	\$ 40 000
N	180	\$ 60 000
O	320	\$ 50 000

Solución:

Pérdidas por superficie: \$ 350 000

Pérdidas por mercancía: \$ 650 000

Superficie: proporción directa $M + N + O = 350\ 000$ $240K + 180K + 320K = 350\ 000$ $740K = 35\ 000$ $K = \frac{350\ 000}{740} = 472,972973$	Mercancía recuperada: proporción inversa $M + N + O = 650\ 000$ $\frac{y}{40\ 000} + \frac{y}{60\ 000} + \frac{y}{50\ 000} = 650\ 000$ $\frac{37y}{600\ 000} = 650\ 000$ $y = 1.0540540540 \times 10^{10}$
--	--

Departamento	Superficie	Mercancía	Total
M	$240k = \$ 113\ 513.51$	$\frac{y}{40\ 000} = \$ 263\ 513.51$	\$ 377 027.02
N	$180k = \$ 85\ 135.14$	$\frac{y}{60\ 000} = \$ 175\ 675.68$	\$ 260 810.82
O	$320k = \$ 151\ 351.35$	$\frac{y}{50\ 000} = \$ 210\ 810.81$	\$ 362 162.16
Total de las pérdidas	\$ 350 000	\$ 650 000	\$ 1 000 000.00

Ejemplo:

Repartir 2 225 en 3 partes que sean D.P. a los números: 3, 5 y 8 es I.P a los números 4, 6 y 9.

Solución:

PARTES	DP	IP	DP
--------	----	----	----

2 225	$\begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases}$	3	4	1/4
		5	6	1/6
		8	9	1/9

DP	M.C.M. (4, 6, 9)	
A: $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$36 = 27K$	
B: $5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$	$36 = 30K$	
C: $8 \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$	$36 = 32K$	

$$\Rightarrow K = \frac{2\ 225}{89} = 25$$

∴ Luego las partes son: A = 27 x 25 = 675

$$B = 30 x 25 = 750$$

$$C = 32 x 25 = 800$$

Ejemplo:

Repartir 411 en 3 partes que sean a la vez directamente proporcionales a 4, 5 y 6 y a 8, 9 y 10.

Solución:

PARTES	DP	DP
--------	----	----

411	$\begin{cases} A: \\ B: \\ C: \end{cases}$	4	8, A = 32K \Rightarrow 32(3) \Rightarrow A = 96	411
		5	9, B = 45K \Rightarrow 45(3) \Rightarrow B = 135	
		6	10, C = 60K \Rightarrow 60(3) \Rightarrow C = 180	411

$$137k = 411k \quad \rightarrow k = 3$$

Ejemplo:

Repartir 69 en 2 partes que sean a la vez directamente proporcionales a $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ e inversamente proporcionales a $\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{2}$.

Solución:

PARTES	DP	IP	
69	$\left\{ \begin{array}{l} A: \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \Rightarrow A = \frac{4}{5}K \\ B: \quad \frac{3}{4} \cdot 2 \Rightarrow B = \frac{3}{2}K \end{array} \right.$	$\Rightarrow A = \frac{4}{5}(30) \Rightarrow A = 24$ $\Rightarrow B = \frac{3}{2}(30) \Rightarrow B = 45$	
		$\frac{23}{10}k$	

$$\frac{23}{10}K = 69 \rightarrow k = 30$$

Ejercicio 02

1. La suma de 3 números es 36 y son directamente proporcionales a 2; 3; y 4. Hallar los números.
2. Dos números son directamente proporcionales a 8 y 3. Si su diferencia es 55, los números son:
3. Se reparten S/. 2 695 de bonificación a cuatro empleados por su puntualidad. Si tuvieron 2; 3; 4 y 5 faltas respectivamente, ¿Cuánto le toca al más puntual?
4. Los Números a, b, c y d son directamente proporcionales a 3; 4; 5 y 6 respectivamente, si $b - a = d - c$ y $b + c = 27$, los números son:
5. Tres familias se reúnen para pasar el año nuevo juntas. Gastaron en la cena S/. 460 y pagará cada familia de acuerdo al número de sus miembros. Una familia tiene 6 miembros, otra 8 y la última 9 miembros. ¿Cuánto gastó cada familia?
6. José repartió cierta cantidad de dinero entre 3 misioneros en partes proporcionales a los años de servicio 4; 5 y 7. Si el tercero recibió \$ 42 más que el primero, ¿Qué cantidad de dinero repartió?
7. La suma de dos números es 180. Si son directamente proporcionales a 2 y 3, la diferencia de los números es:

8. Josefa debe repartir S/. 609 entre Pablo, Ruth y Rafael, de tal manera que lo que corresponda a Pablo sea a lo que le corresponda a Ruth como 3 es a 4 y lo que le corresponda a Ruth sea a lo que le corresponda a Rafael como 8 es a 7. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
9. Se reparte S/. 6 500 entre 3 personas en forma directamente proporcional a los números x , x^2 , x^3 si la menor cantidad recibida fue S/. 500. ¿Cuál fue la mayor?
10. Un padre reparte S/. 1 240 entre sus dos hijos en forma inversamente proporcional a las edades de 16 y 4 años. Hallar cuánto le toca a cada uno.
11. A una reunión concurrieron cierto número de personas entre hombres y mujeres. Luego llegan 40 parejas y se cumple que por cada 7 hombres hay 5 mujeres haciendo un total de 132 personas. ¿Cuántos hombres y mujeres habían al inicio?
12. Tres personas forman un negocio aportando cada una un capital que es el triple del aportado por el socio anterior. El primero está en el negocio 6 meses, el segundo está 3 meses y el último está 45 días, si se obtiene una utilidad de S/. 7 600 ¿Cuánto le toca al segundo?
13. Dividir 94 500 proporcionalmente a las velocidades de 3 corredores, el primero llega a la meta en 3 horas, el segundo en 5 horas y el tercero en 6 horas. ¿Cuánto le toca al más veloz?
14. Un automovilista recorre un camino en tres etapas. La primera a 80 Km. /h, la segunda a 100 Km. /h y la tercera a 90 Km. /h. Si el tiempo total empleado es de 24 horas 12 minutos, ¿Qué tiempo empleo en cada etapa?
15. En un restaurante de Trujillo la tarifa diaria de los mozos Alberto y Felipe es 5/6. Si la tarifa de Alberto es S/. 20. ¿Cuál es la tarifa de Felipe? Si ambos trabajaron durante 5 días, ¿Cuánto recibirá cada uno por los días trabajados?
16. El Sr. Dueñas gerente de la empresa “Estaquitas S.A.” va a repartir un premio de \$ 40 000 entre sus empleados en proporción a su productividad sobre la siguiente base:

EMPLEADO	Productividad (lotes)	
Juan Pérez	310	¿Cuánto le corresponde a cada uno?
Luis Sánchez	415	
Carlos Flores	250	
Paola Santos	125	

17. Una empresa establece un premio de \$ 16 600 entre cinco empleados sobre la siguiente base: Al empleado que más faltas tenga le debe corresponder la menor parte del premio.

EMPLEADO	Faltas de asistencia	
Juan Pérez	6	¿Cuánto le corresponde a cada uno?
Luis Sánchez	3	
Carlos Flores	5	
Josefina Ríos	2	
Paola Santos	1	

18. Una constructora va a repartir un premio de \$ 6 000 en proporción inversa al trabajo defectuoso que tenga cada uno de ellos durante un mes, con los datos que se presentan a continuación:

OBRERO	Trabajo defectuoso (piezas)	
Juan Pérez	700	¿Cuánto le corresponde a cada uno?
Luis Sánchez	350	
Carlos Flores	140	

4.3. REGLA DE TRES

Una de las aplicaciones más importantes de las magnitudes proporcionales, es la regla de tres.

$$\text{Regla de tres} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Simple} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Directa} \\ \text{Inversa} \end{array} \right. \\ \text{Compuesta} \end{array} \right.$$

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

Si las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales.

Magnitud A	Magnitud B
a_1 x	b_1 b_2

$$\Rightarrow \frac{x}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \Rightarrow x = \frac{a_1 b_2}{b_1}$$

Ejemplo:

Para alimentar a los 40 caballos que tengo necesito 25 kg. de pasto. ¿Cuántos caballos debería tener para alimentarlos con 15 kg. Si la ración por caballo no varía?

Solución:

- Si 25 kg. de pasto alimentan \longrightarrow 40 caballos
15 kg. de pasto alimentarán \longrightarrow X caballos
- Utilizando el método de las proporciones y como se trata de magnitudes directamente proporcionales, se escribe:

$$\frac{X}{40} = \frac{15}{25} \rightarrow X = \frac{15 \times 40}{25} \rightarrow \text{Donde } X = 24 \text{ Caballos}$$

Respuesta: Debería tener 24 caballos para alimentarlos con solo 15 kg. de pasto.

➤ REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

Si las magnitudes que intervienen son inversamente proporcionales.

Magnitud A	Magnitud B
a_1 x	b_1 b_2

$$\Rightarrow a_1 b_1 = x b_2 \Rightarrow x = \frac{a_1 b_1}{b_2}$$

Ejemplo:

Una cuadrilla de 15 obreros puede levantar un muro en 12 días. ¿Cuántos días tardarán en levantar el mismo muro 20 obreros?

Solución:

- 15 obreros levantan un muro en \longrightarrow 12 días
 20 obreros levantarán un muro en \longrightarrow X días

- Utilizando el método de las proporciones y como se trata de magnitudes inversamente proporcionales, se verifica que:

$$15 \cdot 12 = 20 \cdot X \rightarrow X = \frac{15 \cdot 12}{20} \rightarrow \text{Donde } X = 9 \text{ días}$$

Respuesta: 20 obreros levantarán el mismo muro en 9 días.

➤ **REGLA DE TRES COMPUESTA**

Si las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales e inversamente proporcionales.

Mag A	Mag B	Mag C	Mag D	Mag E	
a_1 a_2 (D)	b_1 b_2 (I)	c_1 x (D)	d_1 d_2 (D)	e_1 e_2 (I)	$x = c_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{b_1}{b_2} \times \frac{d_2}{d_1} \times \frac{e_1}{e_2}$

Nota: La magnitud C se llama magnitud de comparación.

Ejemplo:

Cuatro operarios producen 320 piezas de un producto en 10 días. ¿Cuántas piezas de ese mismo producto producirán 10 operarios en 16 días?

Solución:

- Si aumentamos el número de operarios, aumenta la producción de piezas. Por tanto la relación de proporcionalidad es directa.
- Si los días de producción aumentan, tendremos más piezas producidas. Por lo tanto la relación de proporcionalidad también es directa.

Operarios	piezas	días
4	320	10
10	X	16
DP	DP	
$\frac{X}{320} = \frac{10}{4} \cdot \frac{16}{10}$	\rightarrow Donde $X = 1\,280$ piezas	

Respuesta: 10 operarios en 16 días producirán 1 280 piezas.

Ejercicio 03

- 1) Si 2,5 m de tela cuestan S/. 80. ¿Cuántos soles costarán 18 m de tela?
- 2) 10 barriles iguales contienen 800 litros de vino, ¿cuántos barriles son necesarios para almacenar 32 000 litros de vino?
- 3) Doce leones tienen alimentos para 3 semanas. Si el número de leones aumenta en 2, ¿para cuántos días alcanza la ración anterior?
- 4) Una bomba extrae de una piscina 378 litros de agua en 9 minutos. ¿Cuántos minutos tardará en extraer 2 100 litros?
- 5) Un barco tiene provisiones para alimentar a 400 pasajeros durante 6 meses. ¿Cuántos meses durarían estas provisiones si los pasajeros fuesen 1 600?
- 6) Para una fiesta de matrimonio se preparan 14 mesas para 9 invitados cada una. ¿Cuántas mesas se deben preparar si éstas son para 6 invitados cada una?
- 7) Una pieza de tela tiene 32 m. por 75 cm. ¿Cuál será la longitud de otra pieza de la misma superficie, cuyo ancho es 80 cm?
- 8) 13 hombres tienen víveres para un viaje de 4 meses. Si se quiere que los víveres duren 10 días más. ¿Cuántos hombres no podrán viajar?
- 9) Un hombre tarda $12\frac{3}{5}$ días en hacer $\frac{7}{12}$ de una obra, ¿cuántos días necesitará para terminar la obra?
- 10) Para hacer 600 m. de una obra 30 obreros han trabajado 12 días a razón de 10 horas diarias. ¿Cuántos días necesitarán 36 obreros de igual rendimiento para hacer 900 m. de la misma obra trabajando 6 horas?

- 11) 10 obreros que trabajan en la construcción de un puente hacen $\frac{3}{5}$ de la obra en 9 días. Si se retiran 6 hombres, ¿cuántos días emplearán los restantes para terminar la obra?
- 12) Pedro inventa 50 problemas de geometría en 4 días, dedicándose 5 horas diarias. ¿Cuántos días necesita para inventar 80 problemas, si pretende trabajar en ellos 2 horas por día?
- 13) Un grupo de albañiles pueden hacer una casa en 40 días. ¿En cuántos meses, la mitad de albañiles del grupo anterior, podrán hacer 3 casas?
- 14) Se contrata 25 obreros para construir una obra en 16 días. Al cabo de 6 días solo han hecho la cuarta parte de la obra. ¿Cuántos obreros, de igual eficiencia que los anteriores deberán de ser contratados para terminar la obra en el plazo fijado?
- 15) Si 10 pintores trabajando 6 horas diarias durante 20 días han pintado la tercera parte de una pared. ¿Cuántos pintores se necesitarán para que trabajando 4 horas diarias durante un mes puedan pintar la mitad de lo que falta?
- 16) Un equipo formado por 5 estudiantes demora 4 horas en resolver 65 problemas. ¿Qué tiempo demora otro equipo formado por 4 estudiantes en resolver 78 problemas?
- 17) 10 hombres trabajando 4 horas diarias durante 5 días hacen una zanja de 10 m. de largo, 6 m. de profundidad y 4 m. de ancho. ¿Cuántos días necesitarán 6 hombres, trabajando 3 horas diarias, para hacer una zanja de 15 m. de largo, 3 m. de profundidad y 8 m. de ancho, en un terreno de doble dureza?
- 18) Una cuadrilla de 10 obreros se compromete a construir en 24 días cierta obra. Al cabo de 18 días solo han hecho $\frac{5}{11}$ de la obra. ¿Cuántos obreros tendrán que reforzar la cuadrilla para terminar la obra en el tiempo fijado?

4.4. TANTO POR CIENTO

El tanto por ciento de una cantidad es el número de partes que se toma de ella considerándola equivalente a 100.

NOTACIÓN: $A\% = \frac{A}{100}$

PORCENTAJE: Es el resultado de aplicar el tanto por ciento a una cantidad.

Ejemplo:

$$40\% \text{ de } 800 = \frac{40}{100} (800) = 320 \quad \leftarrow \quad \text{porcentaje.}$$

OPERACIONES CON TANTO POR CIENTO

1. $40\% M + 20\% M = 60\% M$
2. $N - 20\% N = 80\% N$
4. $N + 30\% N = 130\% N$
5. $4(20\% N) = 80\% N$
6. $60\% (A + B) = 60\% A + 60\% B$

APLICACIONES DEL TANTO POR CIENTO

Pv: Precio de venta

Pc: Precio de compra

D: Descuento

G: Ganancia

P: Pérdida

PL: Precio de lista

$$Pv = Pc + G$$

$$Pv = Pc - p$$

$$Pv = PL - D$$

En el tanto por ciento se presentan los siguientes casos:

1^{er} CASO: HALLAR EL TANTO POR CIENTO DE UN NÚMERO.

Ejemplos:

Hallar el 12% de 50

Solución:

$$\begin{array}{rcl} 100\% & \text{_____} & 50 \\ 12\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{50 \times 12}{100} \Rightarrow X = 6$$

Hallar el $16\frac{2}{3}\%$ de 42

Solución:

$$\begin{array}{rcl} 100\% & \text{_____} & 42 \\ 16\frac{2}{3}\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{42 \times \frac{50}{3}}{100} \Rightarrow X = 7$$

Hallar el 75% de 48

Solución:

$$\begin{array}{rcl} 100\% & \text{_____} & 48 \\ 75\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{75 \times 48}{100} \Rightarrow X = 36$$

Hallar el 35% de 180

Solución:

$$\begin{array}{l} 100\% \text{ ——— } 180 \\ 35\% \text{ ——— } X \end{array} ; \quad X = \frac{35 \times 180}{100} \Rightarrow X = 63$$

2^{do} CASO: HALLAR EL NÚMERO CUANDO SE CONOCE UN TANTO POR CIENTO DE EL.

Ejemplos:

¿De qué número es 48 el $3\frac{1}{5}\%$?

Solución:

El $3\frac{1}{5}\%$ del número que se busca es 48; el 100% o sea el número que se busca será X.

$$\begin{array}{l} 3,2\% \text{ ——— } 48 \\ 100\% \text{ ——— } X \end{array} ; \quad X = \frac{48 \times 100}{3,2} \Rightarrow X = 1\,500$$

¿De qué número es 82 el $5\frac{1}{8}\%$?

Solución:

$$\begin{array}{l} 5\frac{1}{8}\% \text{ ——— } 82 \\ 100\% \text{ ——— } X \end{array} ; \quad X = \frac{82 \times 100}{\frac{41}{8}} \Rightarrow X = 1\,600$$

¿De qué número es 46 el 23%?

Solución:

$$\begin{array}{l} 23\% \text{ ——— } 46 \\ 100\% \text{ ——— } X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 46}{23} \Rightarrow X = 200$$

¿De qué número es 70 el $3\frac{1}{2}\%$?

Solución:

$$\begin{array}{l} 3\frac{1}{2}\% \text{ ——— } 70 \\ 100\% \text{ ——— } X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 70}{\frac{7}{2}} \Rightarrow X = 2\,000$$

3^{er} CASO: DADO DOS NÚMEROS, AVERIGUAR QUE POR CIENTO ES UNO DEL OTRO.

Ejemplos:

¿Qué por ciento de 1 250 es 75?

Solución:

$$\begin{array}{rcl} 1\,250 & \text{_____} & 100\% \\ 75 & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{75 \times 100}{1\,250} \Rightarrow X = 6\%$$

¿Qué por ciento de 512 es 0,64?

Solución:

$$\begin{array}{rcl} 512 & \text{_____} & 100\% \\ 0,64 & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{0,64 \times 100}{512} \Rightarrow X = \frac{1}{8}\%$$

¿Qué por ciento de 86 es 172?

Solución:

$$\begin{array}{rcl} 86 & \text{_____} & 100\% \\ 172 & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{172 \times 100}{86} \Rightarrow X = 200\%$$

¿Qué por ciento de 16 es $6\frac{2}{5}$?

Solución:

$$\begin{array}{rcl} 16 & \text{_____} & 100\% \\ 6\frac{2}{5} & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{\frac{32}{5} \times 100}{16} \Rightarrow X = 40\%$$

4^{to} CASO: TANTO POR CIENTO MÁS.

Ejemplos:

¿De qué número es 208 el 4% más?

Solución:

Al número que se busca se le representa por su 100%. Como 208 es el 4% más que el número que se busca. Entonces 208 será el 100% + 4% = 104% del número que se busca.

$$\begin{array}{rcl} 104\% & \text{_____} & 208 \\ 100\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{208 \times 100}{104} \Rightarrow X = 200$$

¿De qué número es 918 el $12\frac{1}{2}\%$ más?

Solución:

918 será el 100% + 12.5% = 112,5%

$$\begin{array}{rcl} 112,5\% & \text{_____} & 918 \\ 100\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 918}{112,5} \Rightarrow X = 816$$

¿De qué número es 402 el 34% más?

Solución:

402 será el 100% + 34% = 134%

$$\begin{array}{rcl} 134\% & \text{_____} & 402 \\ 100\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 402}{134} \Rightarrow X = 300$$

¿De qué número es 258 el 20% más?

Solución:

258 será el 100% + 20% = 120%

$$\begin{array}{rcl} 120\% & \text{_____} & 258 \\ 100\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 258}{120} \Rightarrow X = 215$$

5to CASO: TANTO POR CIENTO MENOS.

Ejemplos:

¿De qué número es 276 el 8% menos?

Solución:

276 será el 100% - 8% = 92%

$$\begin{array}{rcl} 92\% & \text{_____} & 276 \\ 100\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 276}{92} \Rightarrow X = 300$$

¿De qué número es 514,71 el ¼% menos?

Solución:

514,71 será el 100% - 0,25% = 99,75%

$$\begin{array}{rcl} 99,75\% & \text{_____} & 514,71 \\ 100\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 514,71}{99,75} \Rightarrow X = 516$$

¿De qué número es 41 el 18% menos?

Solución:

41 será el 100% - 18% = 82%

$$\begin{array}{rcl} 82\% & \text{_____} & 41 \\ 100\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 41}{82} \Rightarrow X = 50$$

¿De qué número es 168 el 4% menos?

Solución:

168 será el 100% - 4% = 96%

$$X = \frac{100 \times 168}{96} \Rightarrow X = 175$$

5to CASO: TANTO POR CIENTO MENOS.

Ejemplos:

¿De qué número es 276 el 8% menos?

Solución:

276 será el 100% - 8% = 92%

$$\begin{array}{rcl} 92\% & \text{_____} & 276 \\ 100\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 276}{92} \Rightarrow X = 300$$

¿De qué número es 514,71 el ¼% menos?

Solución:

514,71 será el 100% - 0,25% = 99,75%

$$\begin{array}{rcl} 99,75\% & \text{_____} & 514,71 \\ 100\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 514,71}{99,75} \Rightarrow X = 516$$

¿De qué número es 41 el 18% menos?

Solución:

41 será el 100% - 18% = 82%

$$\begin{array}{rcl} 82\% & \text{_____} & 41 \\ 100\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 41}{82} \Rightarrow X = 50$$

¿De qué número es 168 el 4% menos?

Solución:

168 será el 100% - 4% = 96%

$$\begin{array}{rcl} 96\% & \text{_____} & 168 \\ 100\% & \text{_____} & X \end{array} ; \quad X = \frac{100 \times 168}{96} \Rightarrow X = 175$$

Ejercicio 04

1. Hallar el porcentaje que representa 18 de 20.
2. ¿Qué porcentaje representa la fracción $\frac{3}{4}$?
3. Una bicicleta cuesta S/. 250, si se compra con el 20% de rebaja, ¿Cuántos soles se paga por ella?
4. Miguel compró un terreno de 160 m^2 de área, Carlos otro terreno 25% más grande que el de Miguel. ¿Cuál es el área del terreno de Carlos?
5. En un examen de 120 preguntas, se resolvió el 80%. ¿Cuántas preguntas faltó resolver?
6. En las olimpiadas del cachimbo de la UA Contabilidad ganó en 16 competencias, que es el 80% de las que participó. ¿En cuántas competencias participó?
7. Compré un refrigerador en S/. 1 200. ¿En cuánto debo venderlo para ganar el 40% más?
8. ¿Qué porcentaje representa el aumento de S/. 180 a un artículo que tenía un precio de S/. 3 000?
9. Lucy recibió un dinero. De esta cantidad entregó el 25 % a sus padres y se quedó con S/. 1 650. ¿Cuántos soles recibió?
10. Al vender un auto en \$ 6 000 estoy perdiendo el 20%. ¿Cuánto me costó?
11. Felipe compró un reloj que estaba rebajado en 30%. El precio normal es de S/. 180. ¿Cuánto dinero ahorró?
12. Por un pantalón que estaba en oferta con el 12% de descuento he pagado 61,6 soles. ¿Cuánto costaba el pantalón antes de ponerlo en oferta?
13. Si Juan gastara el 30% del dinero que tiene y ganara el 28% de lo que le queda, aún perdería S/. 1 560. ¿Cuánto tiene Juan?
14. El costo de un taladro es S/. 300. si se vende perdiendo el 20% del precio de venta, ¿Qué cantidad se pierde?

4.5. INTERÉS

INTERÉS.- Es la ganancia que se obtiene al depositar o prestar una cantidad llamada **CAPITAL**, por un **TIEMPO** determinado, a una tasa o **PORCENTAJE** fijado.

INTERÉS SIMPLE: Cuando el capital prestado permanece invariable en el tiempo que dura el préstamo.

INTERÉS COMPLEJO: Cuando el capital prestado se incrementa periódicamente con los intereses que produce.

CALCULO DEL INTERÉS SIMPLE:

El interés simple se calcula mediante las siguientes fórmulas:

$$I = \frac{C \times \% \times t}{100}$$

Cuando el tiempo está dado en años el denominador es 100.

$$I = \frac{C \times \% \times t}{1200}$$

Cuando el tiempo está dado en meses el denominador es:

$$100 \times 12 = 1200$$

$$I = \frac{C \times \% \times t}{36000}$$

Cuando el tiempo está dado en días el denominador es:

$$100 \times 360 = 36000$$

Para calcular el capital, el tanto por ciento y el tiempo, se despeja la letra que convenga de la primera fórmula, así:

$$C = \frac{I \times 100}{\% \times t}$$

$$\% = \frac{I \times 100}{C \times t}$$

$$t = \frac{I \times 100}{C \times \%}$$

En estas fórmulas también reemplazan 100 por 1200 y 36000 según que el tiempo esté dado en meses o días respectivamente.

En estas fórmulas el % es anual, salvo una especificación.

MONTO: es la suma del capital más los intereses, es decir:

$$M = C + I$$

Cuando se quiere determinar el capital, conociendo el monto, el % y el tiempo, se utiliza la siguiente fórmula:

$$C = \frac{100 \times M}{100 + t \times \%}$$

En esta fórmula también se reemplaza 100 por 1 200 y 36 000 según que el tiempo este dado en meses o días respectivamente

NOTA:

El año comercial es de 360 días y el mes comercial es de 30 días.

Las fórmulas que se han deducido sólo son aplicables cuando la tasa es anual.

Si la tasa de interés no es anual, hay dos opciones para calcular el interés: mediante la fórmula (1) o las tasas equivalentes para la tasa y el tiempo.

Ejemplos:

¿Cuál es el interés que ha producido un capital de S/. 50 000 prestados al 54% durante un año?

Solución:

$$\begin{aligned} C &= 50\,000 & I &= \frac{C \times \% \times t}{100} = \frac{50\,000 \times 54 \times 1}{100} \\ \% &= 54 & I &= 27\,000 \\ t &= 1 \text{ año} & I &=? \end{aligned}$$

¿Cuánto se pagará de interés mensual por un capital de S/. 360 000 al $55\frac{3}{4}\%$ de interés anual?

Solución:

$$\begin{aligned} C &= 360\,000 & I &= \frac{C \times \% \times t}{1\,200} = \frac{360\,000 \times 55,75 \times 1}{1\,200} \\ \% &= 55,75 & I &=? \\ t &= 1 \text{ mes} & I &= S/. 16\,725 \end{aligned}$$

La caja municipal de Lima paga el 64% de interés. Si una persona deposita S/.750 000 el 11 de octubre. ¿Cuál es el interés producido hasta el 28 de diciembre del mismo año?

Solución:

Calculo del tiempo del 11 de octubre al 28 de diciembre.

$$\text{Octubre} = 20 \text{ días} \quad C = S/. 750\,000$$

$$\text{Noviembre} = 30 \text{ días} \quad \% = 64\%$$

$$\text{Diciembre} = \underline{28 \text{ días}} \quad I = ?$$

$$\text{Total : } 78 \text{ días}$$

$$I = \frac{750\,000 \times 64 \times 78}{360\,000}$$

$$I = S/. 10\,400$$

¿Cuál es el capital que ha producido un interés de S/. 104 340 en 8 meses?

Solución:

$$I = 104\,340$$

$$\% = 55 \frac{1}{2} \quad C = \frac{I \times 1\,200}{\% \times t} = \frac{104\,340 \times 1\,200}{55,5 \times 8}$$

$$T = 8 \text{ meses}$$

$$C = S/. 282\,000$$

$$C = ?$$

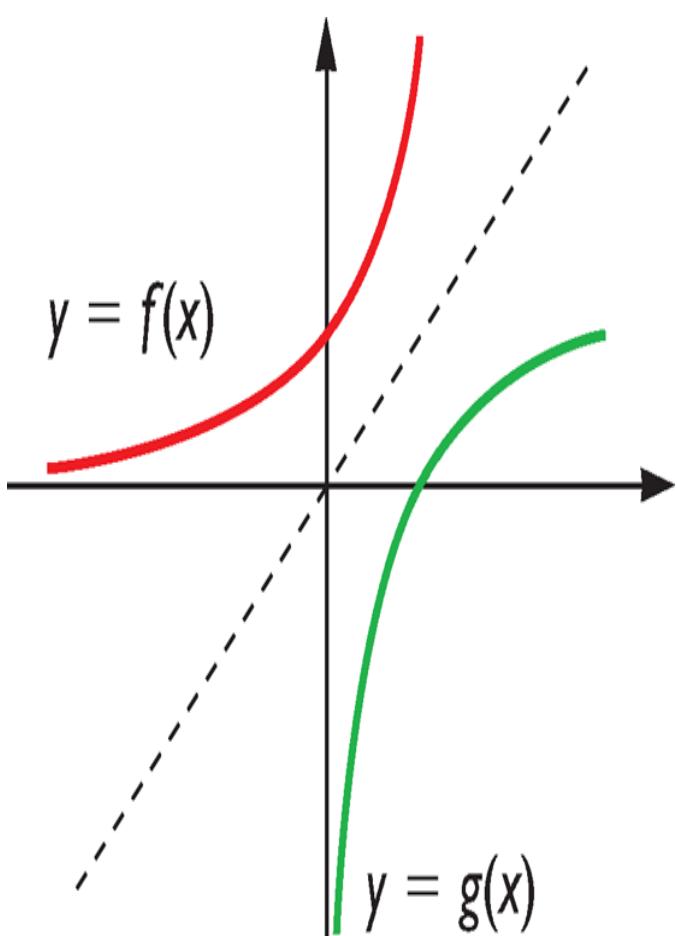
Ejercicio 05

1. ¿Qué tasa de interés anual se aplica a un capital de S/. 125 000 para producir un interés de 50 000 en 5 años?
2. Un señor presta S/. 850 y al cabo de 4 meses le devuelven en total S/. 1 003. ¿Cuál fue la tasa de interés mensual que cobró?
3. Si el capital y los intereses producidos en tres años al 5% ascienden a S/. 1 150, ¿Cuánto fue el capital?
4. Un señor deposita en un banco S/. 5 000 y le pagan un interés de 4% anual. Si retira todo el dinero a los 45 días, ¿cuánto dinero tiene?
5. ¿A cuánto asciende el interés que paga un banco si depositamos S/. 1 200 durante 2 años a una tasa de interés de 16%?
6. ¿Cuál es el capital que al 6% anual produce una utilidad de S/. 640 en 8 meses?

7. ¿Al cabo de cuántos meses un capital colocado al 5% anual producirá un interés equivalente a 1/8 del capital?
8. ¿Cuál es el interés que genera un capital de S/. 960 durante 15 meses si la tasa de interés mensual es de 1,5 %?
9. ¿Cuál es mi capital si los 2/5 de éste, puestos al 4% producen un interés anual de S/. 64?
10. ¿A qué porcentaje se prestan \$ 12 500, si al cabo de 2 años y medio el capital se ha duplicado?
11. ¿Cuánto producen \$ 1 500 si se prestan al 3/4 % mensual durante 72 días?
12. Halla el interés de \$ 400 al 9 % del 1 de febrero al 30 de julio del mismo año.
13. A qué % hay que colocar S/. 51 000 para obtener S/. 4 930 de interés después del año, 7 meses y 10 días.
14. Durante cuánto tiempo hay que colocar S/. 24 000 al 5% para obtener 11 180 de interés
15. ¿Qué ganancia produce un capital de S/.12 000 al 18% de interés anual durante 2 años?
16. Por un préstamo al 8% mensual se pagó S/. 14 000 de interés a los 5 meses. ¿Cuál fue la cantidad prestada?

UNIDAD V

FUNCIONES



RELACIONES Y FUNCIONES

FUNCIONES ESPECIALES

GRÁFICA FUNCIONES
ESPACIALES

OPERACIONES CON
FUNCIONES

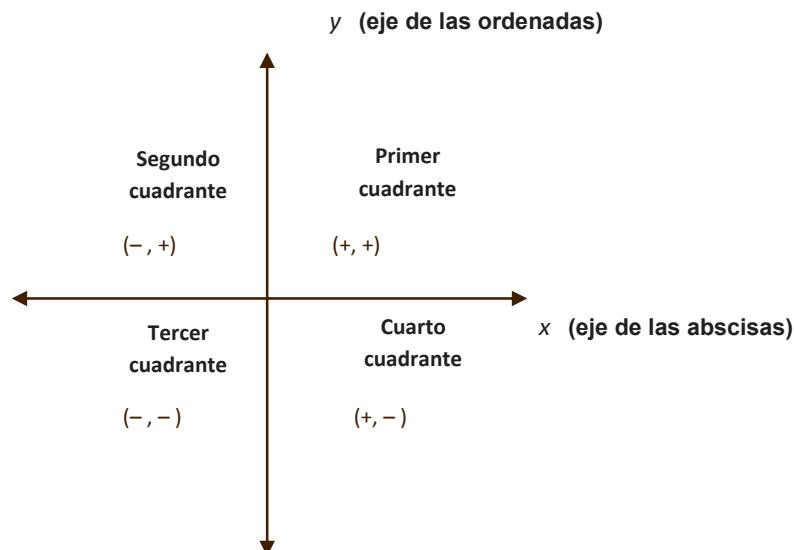
5.1. FUNCIONES

SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES

A continuación se indica como asignar un par ordenado, (a, b) de números reales a cada punto de un plano.

Se representa un sistema de coordenadas rectangulares, o cartesiano, en un plano mediante dos rectas perpendiculares, llamadas ejes de coordenadas, que se intersectan en el origen, O. A la línea horizontal se le llama eje x (eje de abscisas), y a la línea vertical, eje y (eje de las ordenadas).

Cada punto p en un plano xy debe tener asignado un par ordenado (a, b) , a se llama abscisa de p y b ordenada de p . Se dice que p tiene las coordenadas (a, b) .



➤ PRODUCTO CARTESIANO

Dados dos conjuntos A y B , el producto cartesiano se define así:

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

Ejemplo:

Sea $A = \{0; 1; 2\}$ y $B = \{2; 4\}$. Hallar: $A \times B$

Solución:

$$A \times B = \{(0, 2); (0, 4); (1, 2); (1, 4); (2, 2); (2, 4)\}$$

➤ **Propiedad**

$$A \times B \neq B \times A$$

5.2. RELACIONES

Sean los conjuntos A y B , se define la **RELACIÓN** como un subconjunto del producto cartesiano:

Simbólicamente “ R es una relación de A en B sí y sólo si $R \subset A \times B$

Ejemplo

Dados: $A = \{2,3,5\}$ y $B = \{5,7\}$, se tiene que $A \times B = \{(2,5); (2,7); (3,5); (3,7); (5,5); (5,7)\}$ tres relaciones de A en B son las siguientes:

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B / y > x\}$$

$$R_1 = \{(2,5); (2,7); (3,5); (3,7); (5,7)\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in A \times B / y = x + 2\}$$

$$R_2 = \{(3,5); (5,7)\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in A \times B / y = x\}$$

$$R_2 = \{(5,5)\}$$

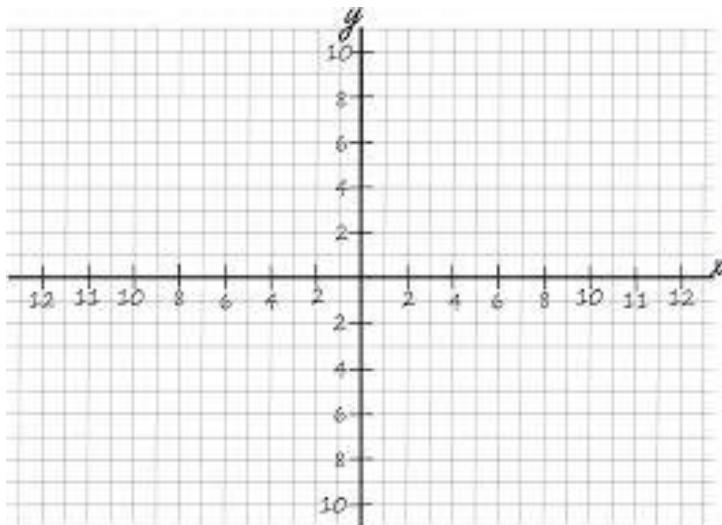
$$R_3 = \{(x, y) \in A \times B / y = 2x + 1\}$$

$$R_3 = \{(2,5); (3,7)\}$$

Taller 01

Ubicar los puntos en el sistema de coordenadas rectangulares e indique el cuadrante al que pertenece cada punto.

$$(-2,3) \quad (0,-1) \quad (4,7) \quad (2,-3)$$



Si $A = \{-1; 0; 1; 2\}$ y $B = \{-2; 0; -1; 1\}$. Hallar las relaciones siguientes. Determinar:

$$R = \{(x, y) \in A \times B / x - y \geq 2\}$$

$$R =$$

$$R = \{(x, y) \in A \times B / x \cdot y = -1\}$$

$$R =$$

Observación:

Si $A \times B$ tiene n elementos entonces existen 2^n relaciones de A en B .

FUNCIONES

Definición de Función

Una función de A en B , es una relación $f \subset A \times B$ que hace corresponder a cada elemento " x " del conjunto A a lo más un elemento " y " del conjunto B .

La notación de una función es $y = f(x)$ que se lee " y es igual a f de x ", donde " x " es la variable independiente e " y " la variable dependiente.

El conjunto de valores que puede tomar " x " se denomina **dominio** de una función, y al conjunto de valores que puede tomar " y " se le denomina **rango** de la función.

Formas de Representar una Función

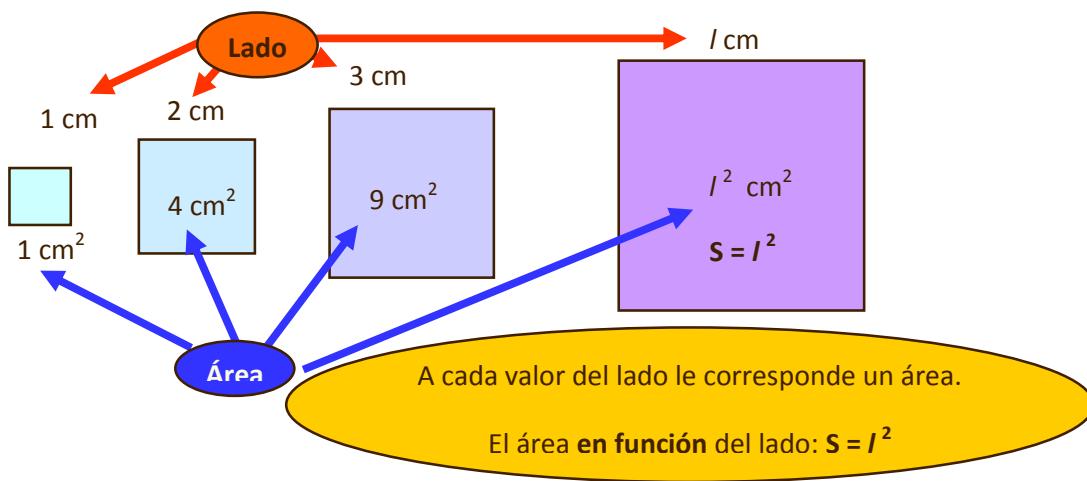
Con el fin de describir una función específica podemos usar las siguientes formas:

Verbal (mediante una descripción con palabras).

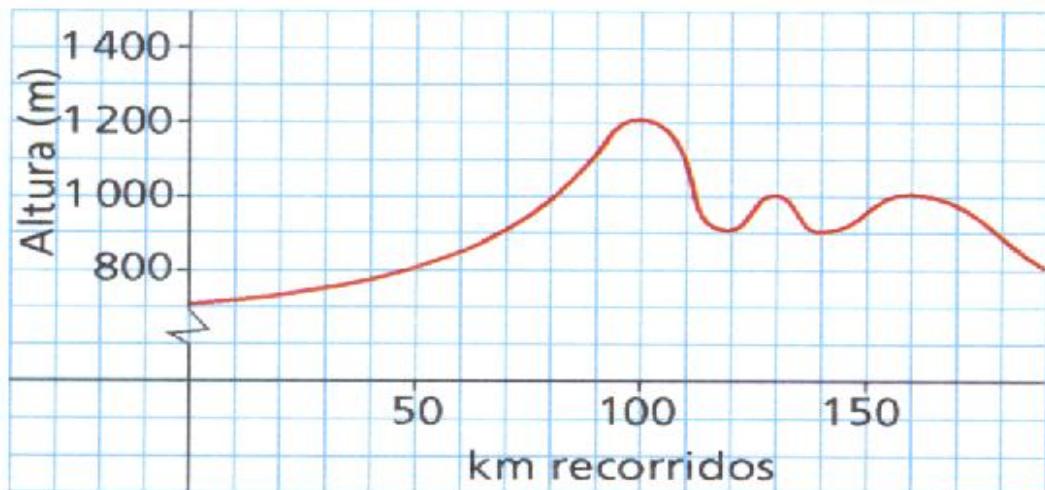
El interés bancario producido por un capital, **está en función** del tiempo que esté depositado.

Algebraica (por medio de una fórmula explícita).

Si conoces el lado de un cuadrado puedes hallar su área.



Visual (con una gráfica).

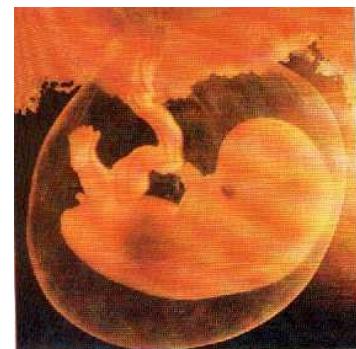


1) Numérica (a través de una tabla de valores).

Ejemplo:

En la tabla siguiente se da la medida de un feto (en cm) dependiendo del tiempo de gestación (en meses).

Edad (meses)	Longitud (cm)
2	4
3	8
4	15
6	29
7	34
8	38
9	42



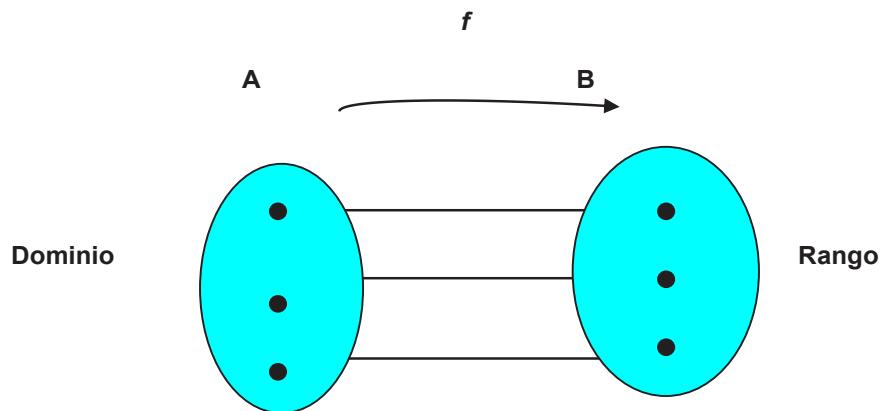
La longitud del feto **está en función** de su tiempo de gestación.

A cada mes de gestación le corresponde una longitud determinada.

(2, 4) significa que cuando el feto tiene 2 meses, mide 4 cm.

(6, 29) indica que a los 6 meses el feto mide 29 cm.

2) Diagrama Sagital



3) Conjunto de Pares Ordenados

$$f = \{(0,3); (-1,1); (-4,1); (-6,3); (5,-5)\}$$

Taller 02

1. Considerando las siguientes relaciones

- a) $f = \{(2;-3), (3;4), (-3;1), (4;5)\}$
- b) $g = \{(1;2), (2;2), (3;3)\}$
- c) $h = \{(-2;1), (6;-2); (3; \sqrt{16}), (4;1), (3,-4)\}$

Determinar:

Relaciones	Funciones	Elementos del Dominio	Elementos del Rango
f	sí	{2; 3; -3; 4}	{-3; 4; 1; 5}
g			
h			

2. Sabiendo que f es una función

a) $f_1 = \{(3;4), (7;8), (3;b), (7;a)\}$

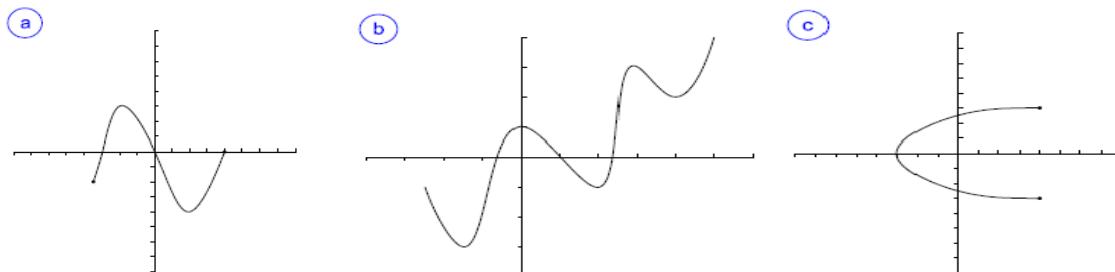
b) $f_2 = \{(a;a+b), (a;14), (b;b-a), (b;4)\}$

c) $f_3 = \{(3;-1), (2;b), (3;a^2 - b), (2;2)\}$

Determinar:

Función	Valores de a	Valores de b	Elementos del dominio	Elementos del rango
f_1				
f_2				
f_3				

3. Considerando los siguientes gráficos. Luego complete los espacios en blanco.



La gráfica que corresponde a una función es _____

Porque, _____

4. Evalúa las siguientes funciones considerando los valores indicados:

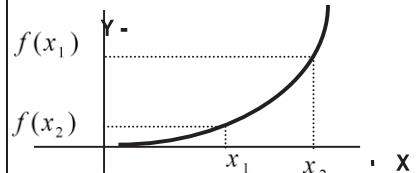
Función	$f(-4)$	$f(-2/3)$	$f(1)$	$f(a)$	$f(a+2)$
$f(x) = 3x - 5$					
$f(x) = 1/x$					

5. El perímetro de un campo rectangular es 320 m.

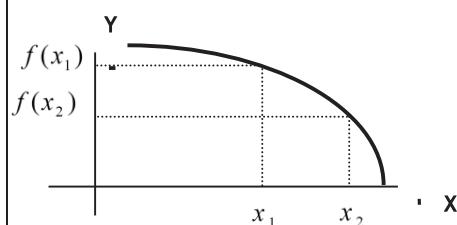
- Interprete su gráfica.
 - La representación del área como función de la longitud de uno de sus lados es:
-

➤ CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

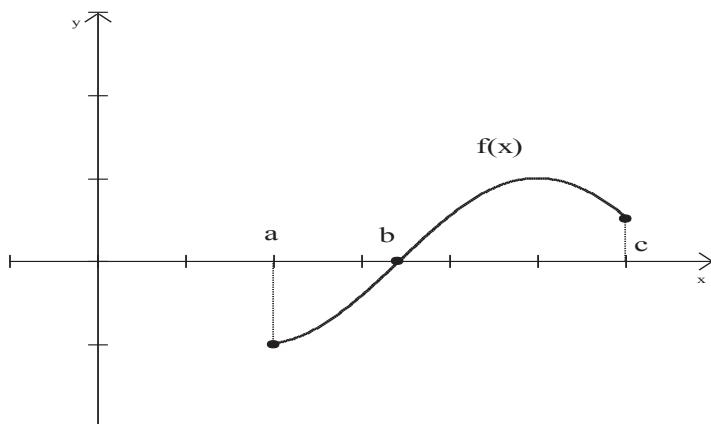
- Función creciente:** Una función f es estrictamente creciente en el intervalo I ,
si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$
La gráfica está creciendo o subiendo de izquierda a derecha conforme el valor de x aumenta.



- Función decreciente:** Una función f es estrictamente decreciente en el intervalo I ,
si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$
La gráfica está decreciendo o bajando de izquierda a derecha conforme el valor de x aumenta.



- **Signos de la función**



- i. $f(x) < 0$ $f(x)$ es negativa $\Leftrightarrow x \in [a; b[$
ii. $f(x) > 0$ $f(x)$ es positiva $\Leftrightarrow x \in]b, c]$

- **Funciones pares e impares**

Definición		Ejemplo	Característica
Función par	$f(-x) = f(x)$ para todo x del dominio	$f(x) = x^2$	Su gráfica es simétrica con respecto al eje y
Función impar	$f(-x) = -f(x)$ para todo x del dominio	$f(x) = x^3$	Su gráfica es simétrica con respecto al origen

- **Intersecciones con los ejes coordenados**

- **Intersección con el eje X**

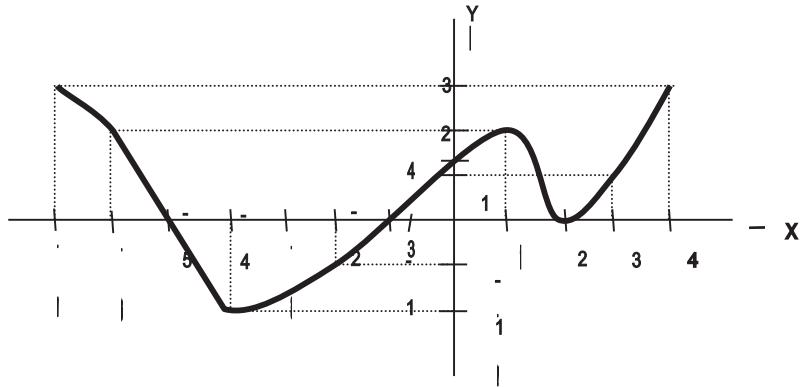
Hacemos $y = f(x) = 0$, y hallamos el valor de x

- **Intersección con el eje y**

Hacemos $x = 0$, y hallamos el valor de y

Ejemplo:

Dada la siguiente gráfica $y = f(x)$



Tenemos:

<ul style="list-style-type: none"> ■ Dominio: $domf = [-7, 4]$ ■ Rango: $Ranf = [-2, 3]$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Intervalos de crecimiento: $\langle -4, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle$ ■ Intervalos de decrecimiento: $\langle -7, -4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ $f(x)$ es positiva en $[-7, -5],]-1, 2[,]2, 4]$ ■ $f(x)$ es negativa en $] -5, -1[$
<ul style="list-style-type: none"> ■ $f(-5) = 0$ ■ $f(0) = 4/3$ ■ $f(1) = 2$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Puntos de intersección con el eje x $(-5, 0) \quad (-1, 0) \quad (2, 0)$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Punto de intersección con el eje y $(0, 4/3)$

- **Funciones según tipo de aplicación**

Dados dos conjuntos X e Y , podemos clasificar a todas las funciones $f : X \rightarrow Y$

definidas entre ellos, en:

- **Función inyectiva (uno a uno)**

Es aquella que a cada elemento del dominio le hace corresponder un elemento diferente en el rango.

f es **inyectiva** sí y sólo sí

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ o lo que es lo mismo,}$$

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- **Función sobreyectiva (suryectiva)**

Cada elemento del conjunto de llegada tiene preimagen; es decir, el conjunto de llegada es a su vez el rango de la función.

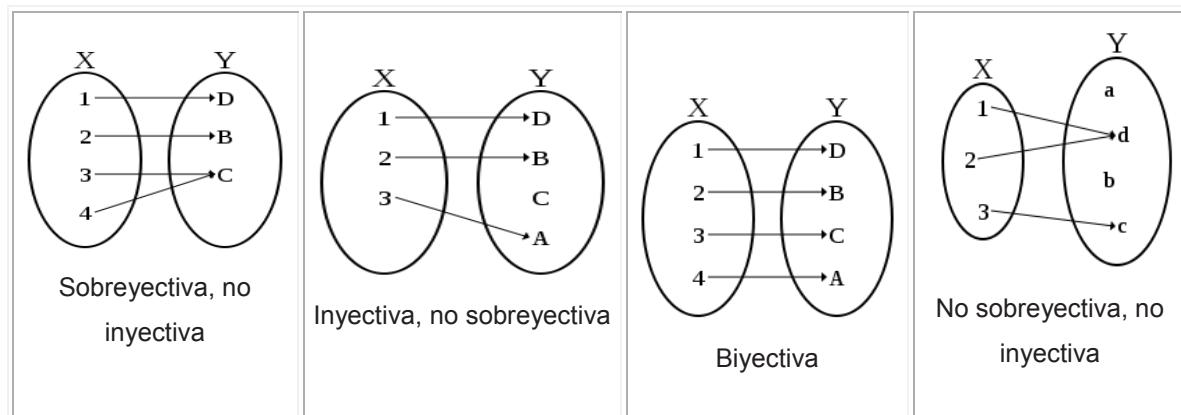
$$f \text{ es sobreyectiva sí y sólo sí } \text{Im}(f) = Y ; \quad \forall y \in Y : \exists x \in X, f(x) = y$$

Estas funciones también se conocen como **exhaustivas** o **epiyectivas**.

- **Función biyectiva (biyección)**

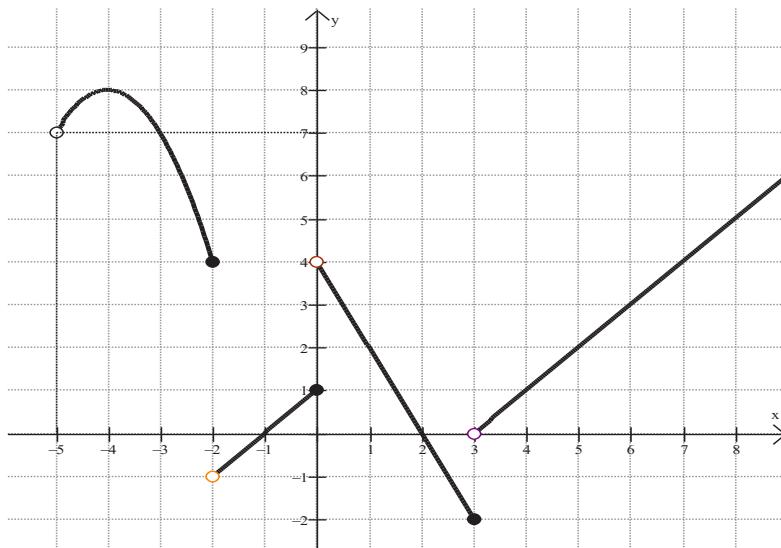
f es biyectiva sí y sólo sí es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo:



Taller 03

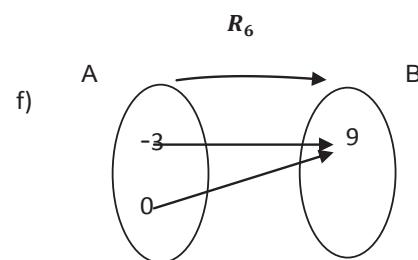
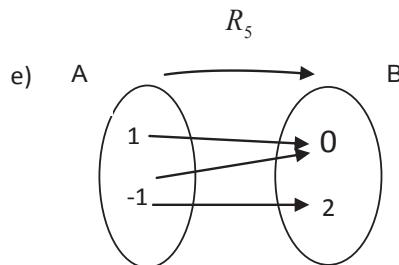
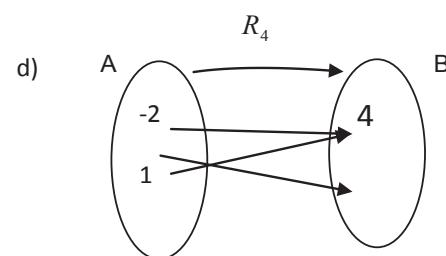
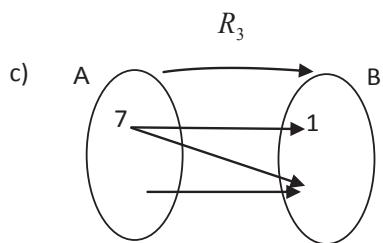
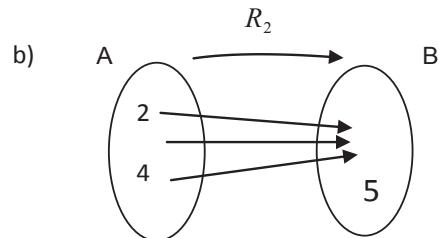
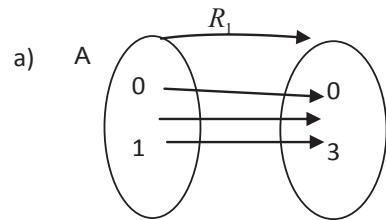
1. Dada la siguiente gráfica $y = f(x)$



Determinar:

▪ Dominio:	▪ Intervalos de crecimiento:	▪ $f(x)$ es positiva en:
▪ Rango:	▪ Intervalos de decrecimiento	▪ $f(x)$ es negativa en:
▪ Puntos de intersección con el eje x	▪ Puntos de intersección con el eje y	▪ $f(2) =$ ▪ $f(5) =$ ▪ $f(-1) =$

2. Dadas las siguientes relaciones:



3. Completar el siguiente cuadro:

Relaciones	Funciones	Clases de funciones (inyectiva, sobreyectiva y biyectiva)	Elementos del Dominio	Elementos del Rango	Regla de Correspon- dencia

Taller 03

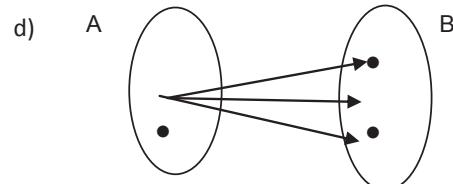
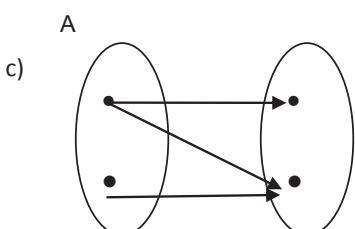
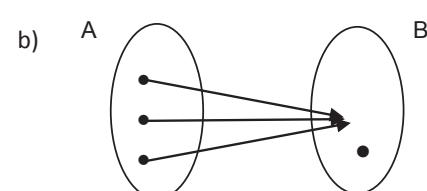
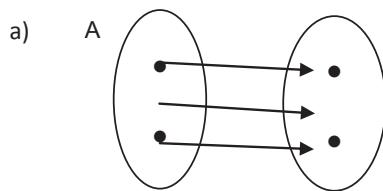
1) Si $A = \{-1; 0; 1; 2\}$ y $B = \{-2; 0; -1; 1\}$ determinar las siguientes relaciones:

- a) $R = \{(x, y) \in A \times B / x \cdot y \text{ es un número par positivo}\}$
- b) $R = \{(x, y) \in A \times B / x + y = 0\}$

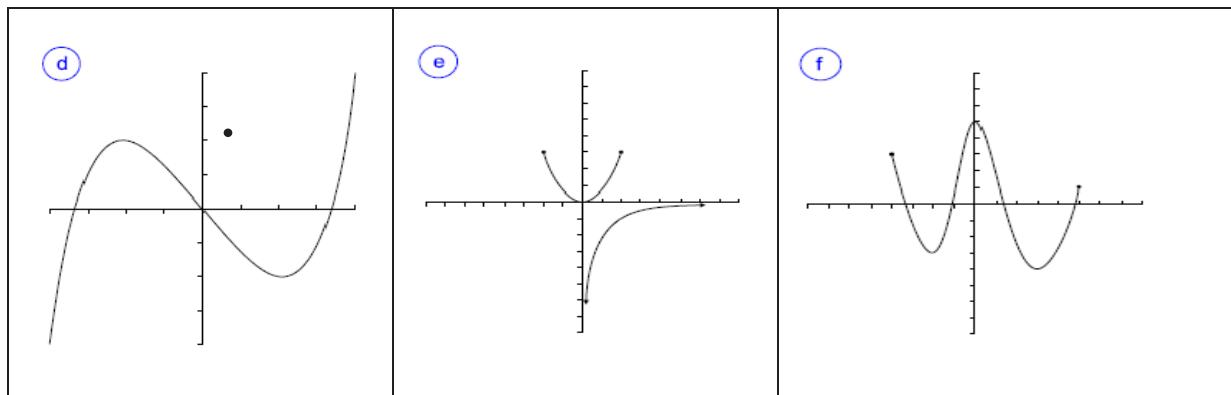
2) Determine si la correspondencia dada por el conjunto de pares ordenados es una función.

- a) $\{(1;1), (2;7), (1;4), (-2;7)\}$
- b) $\{(1;2), (5;2), (3;a), (a;-2), (a,5)\}$
- c) $\{(3;2), (-3^2;7), (-1;2^2), (0;2), (9;7)\}$
- 3) Sabiendo que f es una función determinar los valores de a , b . También indicar dominio y rango.

 - a) $f = \{(a; a+b), (a; 14), (b; b-a), (b; 4)\}$
 - b) $f = \{(1; a+b), (-3; 2), (1; 5-a), (1, 6)\}$
 - c) $f = \{(-1; 2^{2a+b}), (2; 5^{a-3b}), (3; 5), (2, \sqrt{625}), (-1; 64)\}$
 - 4) ¿Cuál de los siguientes diagramas representan a una función?



- 5) De los siguientes gráficos: determinar cuáles son funciones.



- 6) En una tienda de videos hay dos modalidades para alquilar películas:

- Socios: inscripción de S/. 36 y por cada película S/. 4
- No socios: pagan S/. 8 por película

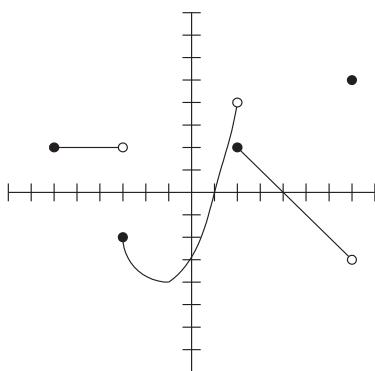
Determine para cada modalidad la regla de correspondencia, el gráfico, el dominio y el rango. ¿Cuándo la modalidad "socios" será más ventajosa?

- 7) Determinar el valor de la función, para cada una de las siguientes funciones:

- $f(x) = 9$, $f(4)$; $f(h)$; $f(-5)$
- $f(x) = 3x^2 - 5$, $f(-1)$; $f(a)$; $f(x+h)$
- $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 6 \right|$, $(\frac{g}{f})(x)$
- $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{7x+3}$, $f(\frac{1}{3})$; $f(t)$; $f(3)$

- 8) Dada la gráfica de la función:

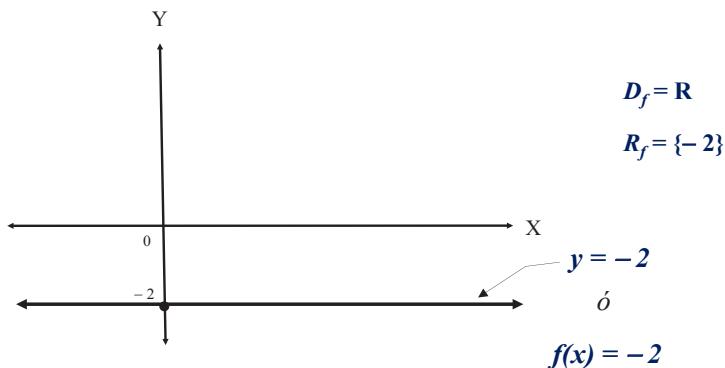
- Hallar $\frac{f(7)+f(-3)}{f(2)+f(-6)+f(0)}$
- Hallar los " x " para los cuales se cumple que $f(x) = 0$.
- Halle el dominio y el rango.
- Indique los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Indique los intervalos en que la función es constante.
- ¿En qué intervalos la función es negativa?
- Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados.



5.3. FUNCIONES ESPECIALES

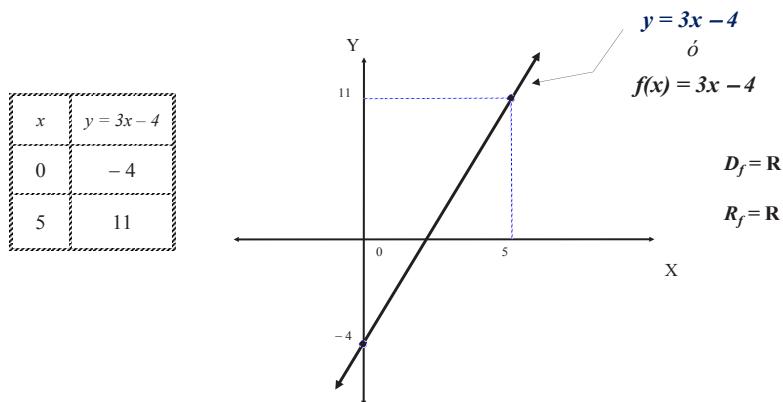
➤ Función constante

$f(x) = c$, donde c es una constante. Ejemplo: $f(x) = -2$



➤ Función Lineal

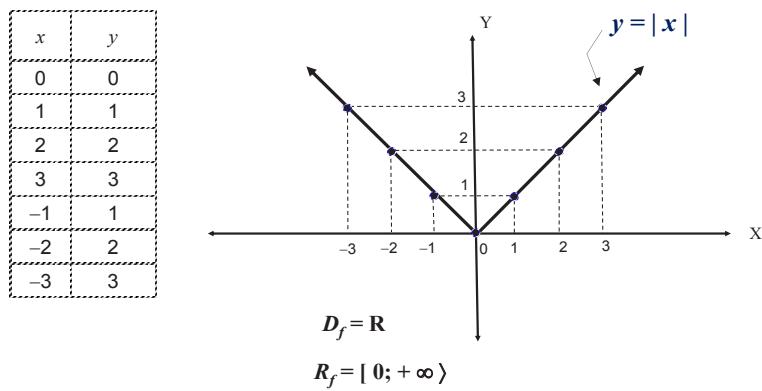
Es una función cuya regla de correspondencia es: $f(x) = mx + b$. Ejemplo: $f(x) = 3x - 4$



➤ Función Valor Absoluto

Es una función cuya regla de correspondencia es: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

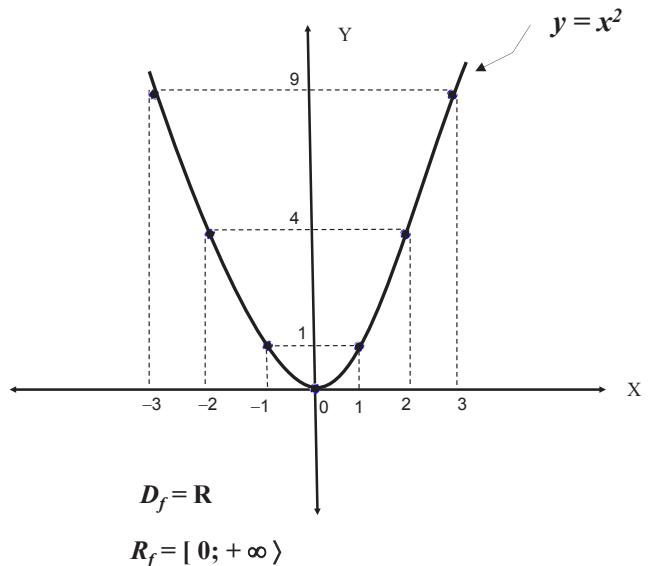
Ejemplo: $f(x) = |x|$



➤ **Función cuadrática**

Es una función cuya regla de correspondencia es: $f(x) = x^2$, Ejemplo: $f(x) = x^2$

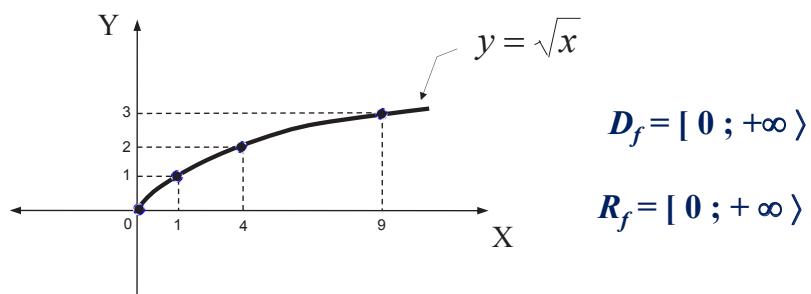
x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
-1	1
-2	4
-3	9



➤ **Función Raíz cuadrada**

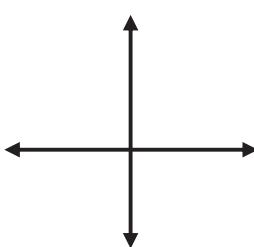
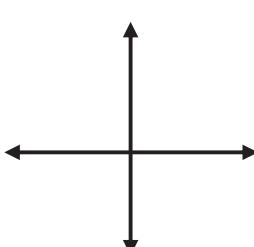
Es una función cuya regla de correspondencia es: $f(x) = \sqrt{x}$, Ejemplo: $f(x) = \sqrt{x}$

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3

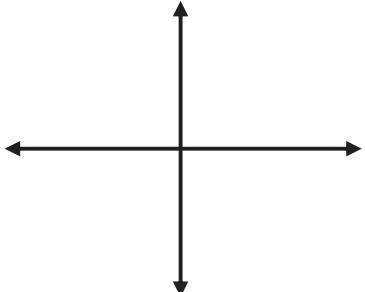


Taller 04

1. Completar la siguiente tabla:

Funciones	Tipo de función	Gráfica	Dominio y rango
$f(x) = x + 5$			
$f(x) = x - 3 + 1$			

2. Para reducir el inventario, una tienda departamental cobra tres precios. Si compra de 0 a 5 pares de medias, el precio es de \$3,50 por par. Si compra de 6 a 10 pares de medias, el precio es de \$3,00 por par. Si compra más de 10 pares el precio es de \$2,75 por par.

Regla de correspondencia	Gráfica	Dominio y rango
x : Número de pares de medias $f(x) = \begin{cases} & \end{cases}$		

➤ **Dominio de funciones**

Hallar el dominio de las siguientes funciones:

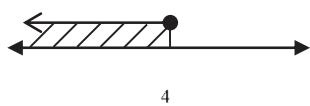
$$1. \quad f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2 - x}$$

- $4 - x \geq 0$
- $x^2 - x \neq 0$

$$4 \geq x$$

$$x(x-1) \neq 0$$

$$x \neq 0 \quad x \neq 1$$



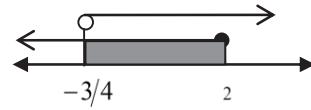
$$\therefore Dom(f) =]-\infty, 4] - \{0, 1\}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{\sqrt{6-3x}-3}{\sqrt{3+4x}}$$

- $6 - 3x \geq 0$
- $3 + 4x > 0$

$$2 \geq x$$

$$x > -3/4$$



$$\therefore Dom(f) = \left[-\frac{3}{4}, 2 \right]$$

Taller 05

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

Funciones	Restricciones	Dominio
$f(x) = 9$		
$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 5}$		
$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$		
$f(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 1}}$		

5.4. OPERACIONES CON FUNCIONES

➤ **Suma de funciones**

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

➤ **Diferencia de funciones**

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad \text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

➤ **Multiplicación de funciones**

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

➤ **División de funciones**

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x / g(x) = 0\}$$

➤ **Composición de funciones**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad \text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)\}$$

Observación

Las operaciones entre funciones están definidas siempre y cuando el dominio de las nuevas funciones sea distinto al vacío.

Ejemplos:

1. Si $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = x+2$, hallar $(f+g)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Solución:

Como $\text{Dom}(f) =]-\infty, 1]$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, entonces:

$$\text{Dom}(f+g) =]-\infty, 1], \quad \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) =]-\infty, 1] - \{-2\}$$

Luego:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + x + 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1-x}}{x+2}$$

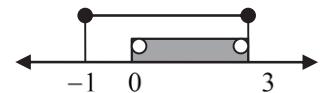
2. Si $f(x) = 2 - x$, $x \in [3, 7]$ y $g(x) = x + 4$, $x \in \langle 0, 3 \rangle$. Hallar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

Solución:

a) $\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) \wedge g(x) \in \text{Dom}(f)\}$

$$x \in \langle 0, 3 \rangle \wedge (x + 4) \in [3, 7]$$

$$\begin{aligned} 3 &\leq x + 4 \leq 7 \\ -1 &\leq x \leq 3 \end{aligned}$$



$$\text{Dom}(f \circ g) = \langle 0, 3 \rangle$$

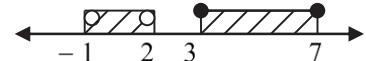
Por lo tanto:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 4) = 2 - (x + 4) = -2 - x$$

b) $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)\}$

$$x \in [3, 7] \wedge (2 - x) \in \langle 0, 3 \rangle$$

$$\begin{aligned} 0 &< 2 - x < 3 \\ -2 &< -x < 1 \\ -1 &< x < 2 \end{aligned}$$



$$\text{Dom}(g \circ f) = \emptyset$$

Por lo tanto:

$$(g \circ f)(x) \text{ no está definido.}$$

Taller 06

Completar:

Funciones	$f(x) = 3x - 1$ $g(x) = 4x + 2,$	$f(x) = 4 - x, \quad x \in [-1, 4]$ $g(x) = 2x - 1, \quad x \in (0, 5]$
Dominios	$Dom(f) =$ $Dom(g) =$	$Dom(f \circ g) =$
	$Dom(f) \cap dom(g) =$	$Dom(g \circ f) =$
Operaciones	$(f + g)(x) =$ $(f \cdot g)(x) =$ $(\frac{f}{g})(x) =$	$(f \circ g)(x) =$ $(g \circ f)(x) =$

Ejercicio 02

- 1) Determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 2x$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

b) $f(x) = \sqrt{8x - 1} + 5x^2$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x + 4}$

c) $f(x) = \frac{2 + \sqrt{x - 2}}{x^2 - 16}$

e) $f(x) = \frac{9x + 4}{\sqrt{2 - 3x}} + 5x$

- 2) Determinar las intersecciones con los ejes coordinados, dominio, rango y gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 5$

7. $f(x) = \frac{1}{2x}$

2. $f(x) = 2x + 3$

8. $f(x) = \frac{3}{x - 1}$

3. $f(x) = 1 - 4x$

4. $f(x) = |x - 5|$

9. $f(x) = \sqrt{2 - 3x}$

5. $f(x) = |2x + 6| + 2$

10. $f(x) = \begin{cases} 4x - 3; & x < 1 \\ 1; & 1 \leq x < 6 \\ 1 - \sqrt{x - 6}; & x \geq 6 \end{cases}$

6. $f(x) = \sqrt{x - 3}$

- 3) Para alentar la venta en grupos grandes, un teatro cobra dos precios. Si su grupo es menor que 10, cada boleto cuesta \$ 8,50. Si su grupo es de 10 o más. Cada boleto cuesta \$ 8,00. Escriba una función para representar el costo de comprar n boletos.

- 4) La tarifa residencial (uso doméstico) de agua potable está en función al consumo, según dos casos;

Caso 1: si se consume de 0 a 20 m^3 , la tarifa es de 0,90 soles

Caso 2: si se consume de 21 a más m^3 , la tarifa es de 1,90 soles

a) Determine los costos en función al consumo (en m^3) para ambos casos

b) Calcular los costos para 19 m^3 y 22 m^3 .

5) Dada las funciones:

- $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 4x + 2$, hallar las operaciones siguientes:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & (f+g)(x) & \text{b)} & (f-g)(x) \\ & & & \text{c)} & (f \cdot g)(x) & \text{d)} & \left(\frac{f}{g}\right)(x) \end{array}$$

- $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$, hallar las operaciones siguientes

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & (f+g)(x) & \text{b)} & (f-g)(x) \\ & & & \text{c)} & (f \cdot g)(x) & \text{d)} & \left(\frac{g}{f}\right)(x) \end{array}$$

- $f(x) = 2x + 3$, $x \in \langle 2, 7 \rangle$ y $g(x) = 3 - 2x$, $x \in [-3, 5]$ Hallar:

$$\text{a)} (f \circ g)(x) \quad \text{b)} (g \circ f)(x)$$

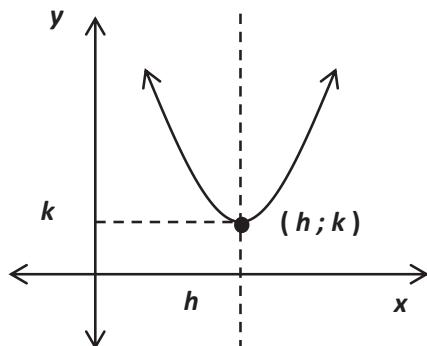
5.5. FUNCIÓN CUADRÁTICA

f es una función cuadrática si y sólo si puede escribirse en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; donde a , b y c son constantes, $a \neq 0$

Representación gráfica de una función cuadrática.

Su gráfica es una curva, llamada **parábola**, y es simétrica respecto a la recta vertical $x = h$, llamada eje de simetría y con vértice $V(h, k)$.

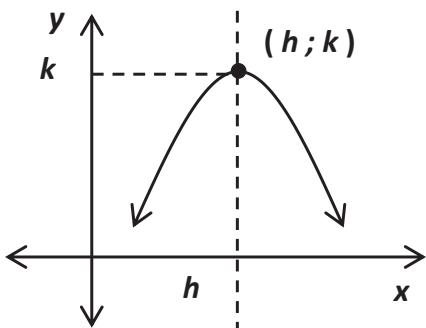
Si $a > 0$, $y = ax^2 + bx + c$, la parábola se abre hacia arriba.



$$Dom(f) = \mathbb{R} ; \quad Ran(f) = [k, \infty[$$

k = valor mínimo de la función

Si $a < 0$; $y = ax^2 + bx + c$, la parábola se abre hacia abajo.



$$Dom(f) = \mathbb{R}; \quad Ran(f) =]-\infty, k]$$

k = valor máximo de la función

Coordenadas del vértice

Las coordenadas del vértice son: $V(h, k) = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$

Ejemplo: Determinar dominio, rango y gráfica de $y = f(x) = 2x^2 - 8x + 9$

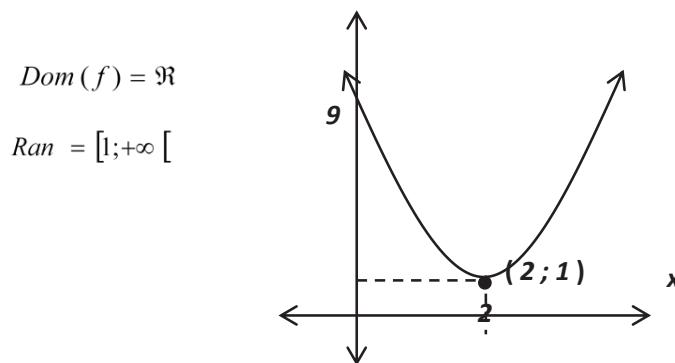
Solución:

Primero hallamos el vértice Como $a = 2$, $b = -8$, Luego $\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2(2)} = 2$ y

$$f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 9 = 1 \text{ Entonces el vértice es: } V = (2, 1)$$

Como $a = 2 > 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba

Gráfica



Ejemplo:

Determinar dominio, rango y gráfica de $y = f(x) = 2 - 6x - 3x^2$

Solución:

Primero hallamos el vértice

$$\text{Como } a = -3, b = -6, \text{ Luego } -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(-3)} = -1 \text{ y } f(-1) = 2 - 6(-1) - 3(-1)^2 = 5$$

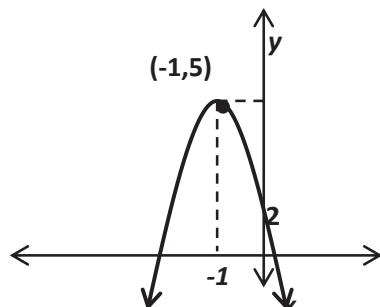
Entonces el vértice es: $V = (-1, 5)$

Como $a = -3 < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo

Gráfica

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

$$Ran(f) = \langle -\infty ; 5 \rangle$$



Aplicaciones

Ejemplo:

La función de demanda para un producto es $p = 600 - 2q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad, y q la cantidad demandada (por semana). Encontrar el nivel de producción que maximice el ingreso total del productor, y determinar ese ingreso. Graficar.

Solución:

Para maximizar el ingreso, debemos hallar la función de ingreso,

$$I(q) = p \cdot q$$

Gráfica

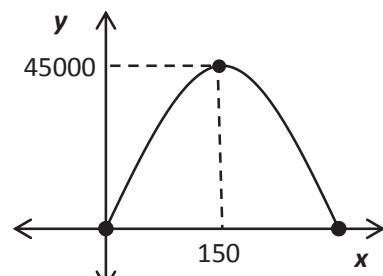
$$I(q) = (600 - 2q)q$$

$$I(q) = 600q - 2q^2$$

Como $a = -2 < 0$, la parábola se abre hacia abajo, por lo tanto en el vértice se obtiene el punto máximo.

Hallemos el vértice:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-600}{2(-2)} = 150 \quad y$$



$$I(150) = 600(150) - 2(150)^2 = 45000$$

Por lo tanto el nivel de producción que maximiza el ingreso es 150 unidades y el

ingreso máximo es \$ 45 000

Taller 07

1. Completar:

Funciones	Características	Gráfica
$y = f(x) = x^2 - 4x + 1$	<p>Vértice = _____</p> <p>Se abre hacia _____</p> <p>$Dom(f) =$ _____</p> <p>$Ran(f) =$ _____</p>	
$y = f(x) = 2 - 3x - 2x^2$	<p>Vértice = _____</p> <p>Se abre hacia _____</p> <p>$Dom(f) =$ _____</p> <p>$Ran(f) =$ _____</p>	

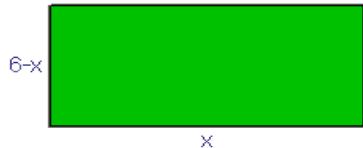
2. Si la función de demanda para un determinado producto es $p = 5q - 200 + \frac{2060}{q}$, donde

p es el precio por unidad cuando se demandan q unidades. Determine el nivel de producción que minimiza el ingreso y determine este ingreso.

Función de ingreso	Característica	Gráfica	Respuesta
	<p>Vértice =</p> <p>Se abre hacia</p> <hr/>		

Ejercicio 03

- 1) Determinar dominio, rango, intersecciones con los ejes coordinados y graficar las siguientes funciones:
 - a) $y = k(x) = 3x^2 + 4$
 - b) $y = h(x) = -2x^2 - 8x$
 - c) $f(x) = x(x+3) - 14$
- 2) Suponga que la altura s de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por $s = -4.9t^2 + 58.8t$, donde s está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos. ¿Después de cuántos segundos la pelota alcanza su altura máxima?. ¿Cuál es la altura máxima?
- 3) Exprese el área del rectángulo mostrado en la figura como una función cuadrática de x . ¿Para qué valor de x el área será máxima?

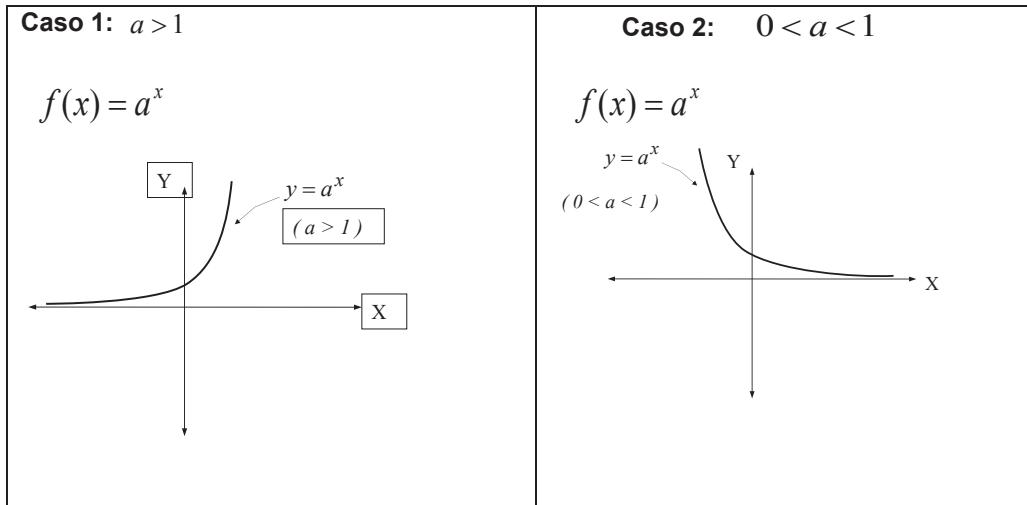


- 4) Una compañía de investigación de mercados estima que n meses después de la introducción de un nuevo producto, $f(n)$ miles de familias lo usarán, en donde $f(n) = \frac{10}{9}n(12-n)$, $0 \leq n \leq 12$. Estime el número máximo de familias que usarán el producto.
- 5) Si la función de demanda para un determinado producto es $p = 5q - 200 + \frac{2060}{q}$, donde p es el precio por unidad cuando se demandan q unidades.
- Determine el nivel de producción que minimiza el ingreso y determine este ingreso.
 - Graficar la función de ingreso.
- 6) **(Ingreso)** La función de demanda para el fabricante de un producto es $p = f(q) = 1400 - 7q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan q unidades (por semana). Encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.
- 7) **(Ingreso)** La función de demanda para la línea de Laptops de una compañía electrónica es $p = 2600 - 13q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan q unidades (semanales). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.
- 8) **(Utilidad)** La utilidad diaria por la venta de árboles de jardinería de un almacén, está dada por $P(x) = 169 + 16x - x^2$, en donde x es el número de árboles vendidos. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la función, y haga la gráfica de la función.

5.6. FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función f definida por: $f(x) = a^x$

Donde: $a > 0$, $a \neq 1$, y el exponente x es cualquier número real, se llama **función exponencial con base a**



Teorema: Para todo $a \neq 0$ se tiene

$a^m a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(ab)^n = a^n b^n$	$a^0 = 1$ $a^1 = a$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ Si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ Si $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$
--	--

Observación: En particular si $a = e = 2.71828\dots$ la función $f(x) = e^x$ se denomina función exponencial natural.

Ejemplo:

Graficar las siguientes funciones:

$$f(x) = 2^{x+1} - 3$$

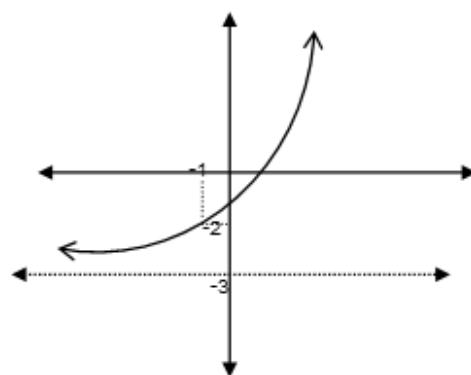
Punto de paso: $x + 1 = 0$

$$x = -1$$

$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow y = -2 \quad (-1, -2)$$

Asíntota horizontal: $y = -3$

Como $2 > 1$, entonces la gráfica es creciente.



$$Dom(f) = R \quad Ran(f) = \langle -3, +\infty \rangle$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + 4$$

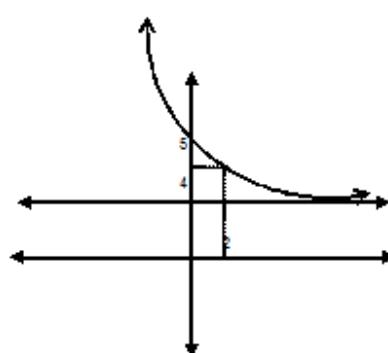
Punto de paso: $x - 1 = 0$

$$x = 2$$

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow y = 5 \quad (2, 5)$$

Asíntota horizontal: $y = 4$

Como $\frac{1}{2} < 1$, entonces la gráfica es decreciente.



$$Dom(f) = R \quad Ran(f) = \langle 4, +\infty \rangle$$

Aplicación de funciones exponenciales

Ley de crecimiento y decrecimiento

Supongamos que t sea el tiempo, $y(t)$ una función de t que representa cierto fenómeno físico. Por ejemplo, si $y(t)$ representa la radiación de una sustancia radioactiva en el tiempo entonces a medida que t se incrementa $y(t)$ decrece, el comportamiento de la sustancia la siguiente ecuación.

$$y(t) = y_0 e^{ct},$$

Donde c es una constante positiva, y_0 es la cantidad de sustancia radiactiva.

Otros fenómenos similares son el crecimiento poblacional, enfriamiento de los cuerpos, etc.

Ejemplo:

El número de bacterias presentes en un cultivo después de t minutos está dado por

$$N(t) = 300 \left(\frac{4}{3} \right)^t$$

¿Cuántas bacterias están presentes inicialmente?

¿Cuántas bacterias están presentes después de 3 minutos?

Solución:

Determinaremos $N(t)$ cuando $t = 0$

Entonces:

$$N(t) = 300 \left(\frac{4}{3} \right)^0 = 300(1) = 300$$

Inicialmente están presentes 300 bacterias

Determinaremos $N(t)$ cuando $t = 3$

Entonces:

$$N(t) = 300 \left(\frac{4}{3} \right)^3 = 300 \left(\frac{64}{27} \right) = \frac{6400}{9} \approx 711$$

Aproximadamente están presentes 711 bacterias después de 3 minutos.

Decaimiento radioactivo

Por su naturaleza los elementos radioactivos tienden a disminuir hasta agotarse completamente conforme transcurre el tiempo. Sea t el tiempo en periodos (medido en años, meses, días) y $N(t)$ la cantidad (medida en gramos, miligramos, etc.) del elemento radioactivo.

Entonces:

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

Representa la ley de decrecimiento exponencial del elemento radioactivo según transcurre el tiempo, donde $N(0) = N_0$, es la cantidad inicial, k es la constante de decrecimiento.

Interés compuesto

Las funciones exponenciales están implicadas en el interés compuesto, en el cual el interés que genera una cantidad de dinero invertida (capital), se invierte nuevamente de modo que también genere intereses. Es decir, el interés se convierte en capital, y por lo tanto hay interés sobre interés.

El monto compuesto M del capital C al final de t años a una tasa de r compuesto anualmente, está dado por:

$$M = C(1+r)^t$$

Ejemplo:

Suponga que se invierten \$1 000 durante 10 años al 6% compuesto anualmente. Determinar el monto y el interés compuesto.

Solución:

$$C = 1000, \quad t = 10 \text{ anual} \quad y \quad r = 0.06 \text{ anual}$$

Entonces:

$$M = 1000(1+0.06)^{10}$$

$$I = M - C$$

$$M = 1000(1.06)^{10}$$

$$I = 1790.85 - 1000$$

$$M = 1790.85$$

$$I = 790.85$$

El monto es de \$1 790,85

El interés es \$790,85

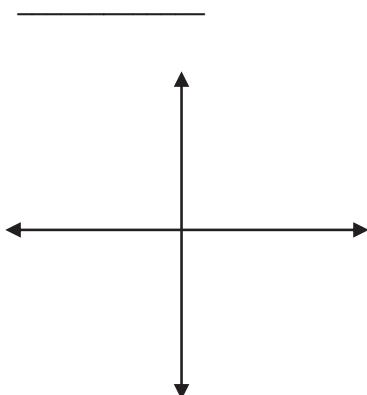
Taller 8

1. Completar el siguiente cuadro:

a) $f(x) = e^{x-3} - 1$

- Puntos de paso:

- Asíntota horizontal: _____
- Como $e > 1$ entonces la gráfica _____

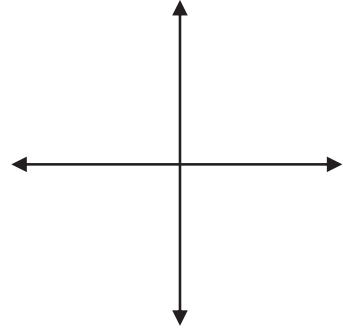


$$Dom(f) = \quad Ran(f) =$$

b) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{2x-1} + 2$

- Puntos de paso:

- Asíntota horizontal: _____
- Como ____, entonces la gráfica es _____



$$Dom(f) = \quad Ran(f) =$$

2. Un elemento radioactivo decae de modo que después de t días el número de miligramos

presentes está dado por $N(t) = 100e^{-0.062t}$

Responder:

a) Si $t = 0$, entonces $N(0) =$ <hr/>	b) ¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días? <hr/>
Por lo tanto inicialmente están presentes <hr/>	

3. En el siguiente cuadro determine el monto y el interés compuesto para la inversión y tasa anual dada.

a) \$ 5000 durante 20 años al 5% compuesto anualmente	b) \$ 4 000 durante 12 años a 7,5% compuesto semestralmente.
---	--

5.7. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La función f definida por

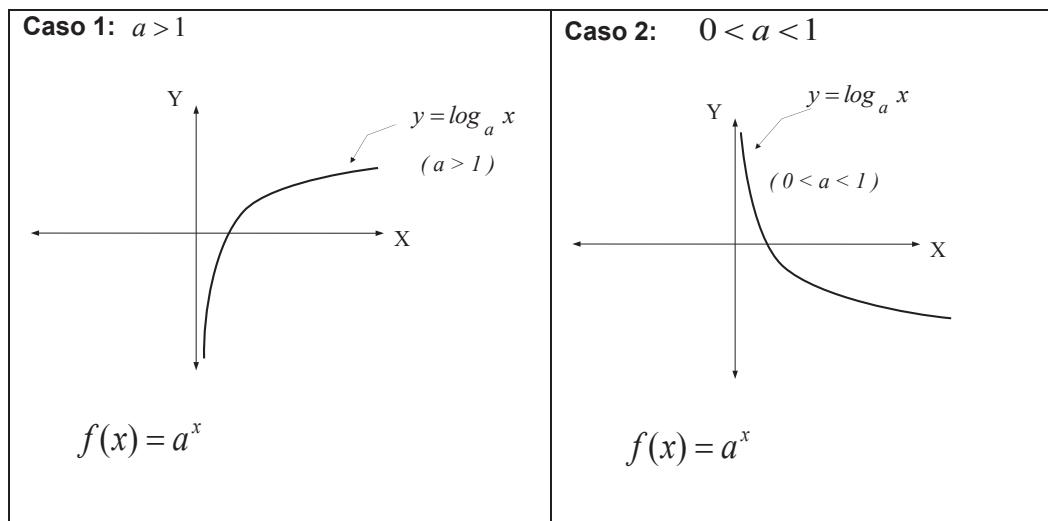
$$f(x) = \log_a x \quad x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Donde:

x es el argumento

a es la base

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial.



Propiedades de los logaritmos

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$
$\log_a [MN] = \log_a M + \log_a N$	$\log_a [M/N] = \log_a M - \log_a N$
$\log_a [M^n] = n \log_a M$	$\log_a [1/N] = \log_a N$
$\log_e M = \ln M$	$\log_{10} M = \log M$

Ejemplo:

Graficar las siguientes funciones:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+1) - 3$$

$$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

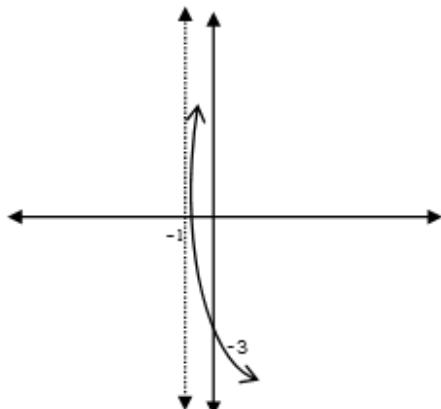
$$\text{Asíntota Vertical } x = -1$$

$$\text{Punto de paso: } x+1=1$$

$$x=0$$

$$\Rightarrow y=3 \quad (0, -3)$$

Como $\frac{1}{3} < 1$ entonces la gráfica es decreciente.



$$\text{Dom}(f) = \langle -1, +\infty \rangle \quad \text{Ran}(f) = R$$

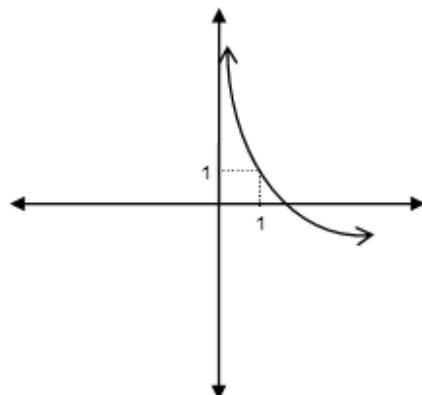
$$f(x) = 1 - \ln x$$

$$x > 0$$

$$\text{Asíntota Vertical } x = 0$$

$$\text{Punto de paso: } x=1 \Rightarrow y=1 \quad (1,1)$$

Como $e > 1$ entonces la gráfica sería creciente, pero por el negativo que acompaña al logaritmo; la gráfica es creciente.



$$\text{Dom}(f) = \langle 0, +\infty \rangle \quad \text{Ran}(f) = R$$

Aplicaciones de funciones logarítmicas

Ejemplo:

El número de bacterias en cierto cultivo crece de 5 000 a 15 000 en 10 horas. Suponiendo que la tasa o rapidez de crecimiento es proporcional al número de bacterias.

Calcule el número a cabo de 20 horas.

En qué tiempo llegará a 50 000 el número de bacterias.

Solución:

Sean t : tiempo en horas

$N(t)$: Población de las bacterias en un tiempo t

Para $t = 0 \Rightarrow N(0) = 5000$, población inicial, entonces $N(t) = 5000e^{ct}$,

Para $t = 10 \Rightarrow N(10) = 15000$, luego

$$15000 = 5000e^{c10} \Rightarrow 3 = e^{c10} \Rightarrow \ln 3 = 10c \ln e \Rightarrow \frac{\ln 3}{10} = c$$

Por lo tanto: $N(t) = 5000e^{\frac{\ln 3}{10}t} \Rightarrow N(t) = 5000(3)^{\frac{t}{10}}$

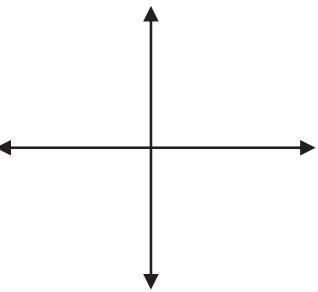
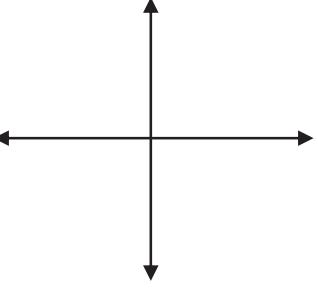
Si $t = 20$ se tiene $N(20) = 5000(3)^{\frac{20}{10}} = 5000(3)^2 = 45000$

Si $N(t) = 50000$, entonces:

$$50000 = 5000(3)^{\frac{t}{10}} \Rightarrow 10 = (3)^{\frac{t}{10}} \Rightarrow \ln 10 = \frac{t}{10} \ln 3 \Rightarrow \frac{10 \ln 10}{\ln 3} = t \Rightarrow t = 20.96 \text{ horas.}$$

Taller 09

1. Completar el siguiente cuadro:

<p>1) $f(x) = \log(x + 4) + 1$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dominio: <p>• Asíntota vertical: _____</p> <p>• Puntos de paso:</p> <p>• Como _____ entonces la gráfica _____</p> <p>_____</p> 	<p>2) $f(x) = \log_3(2-x) + 2$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Dominio: <p>• Asíntota vertical: _____</p> <p>• Puntos de paso:</p> <p>• Como _____, entonces la gráfica es _____</p> 
---	---

Ejercicio 04

- 1) Graficar las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas, indicando dominio, rango y asíntota.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	b) $f(x) = e^{4-2x} - 5$	c) $f(x) = \log_{\frac{5}{2}}(1-x) - 1$
b) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} - 2$	c) $f(x) = 2 - e^{3-x}$	d) $f(x) = \ln(4-x)$
c) $f(x) = 5^{2x+1} + 1$	d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$	e) $f(x) = \ln(1-x) - 2$
	e) $f(x) = \log(2x+1) - 1$	f) $f(x) = 2 - \ln(x+3)$

Resolver los siguientes problemas

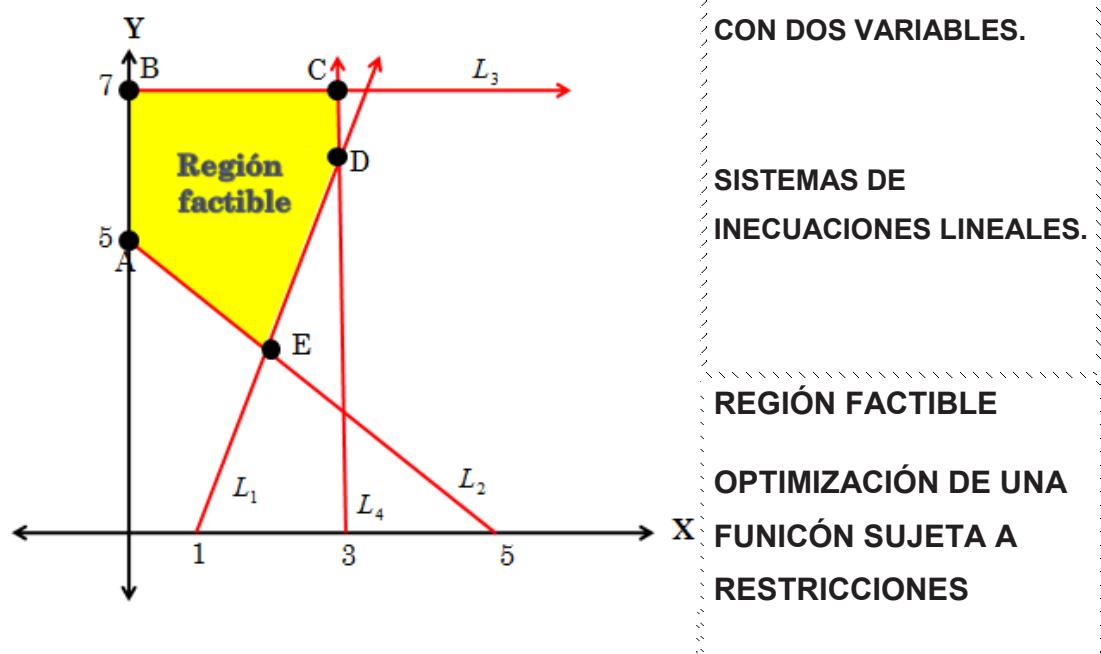
- La tasa de crecimiento de una bacteria común es proporcional a su tamaño. Cuando esta bacteria crece en un medio con nutrientes abundantes, la cantidad de especímenes se duplica cada 20 minutos.
 - Si la población inicial es 100, determine la función que exprese el crecimiento exponencial de la cantidad $Q(t)$ de bacterias como función del tiempo t .
 - Si la población inicial fuera 3 500, ¿cómo se vería afectado el modelo?
- La población mundial al inicio de 1 990 era de 5,3 mil millones de personas. Si la población continúa creciendo con la razón actual de aproximadamente 2% por año:
 - Encuentre la función $Q(t)$ que expresa la población mundial (en miles de millones) como función del tiempo t (en año), donde $t = 0$ corresponde al inicio de 1 990.
 - Según este modelo, ¿cuál sería la población mundial al inicio de 2 010?
- Cierta región minera tiene una población que está decreciendo según la función:

$$P = 27500e^{-0.03t}$$
, donde t son los años después de 1 995.
 - Encuentre la población del 2 006.
 - En cuantos años la población será de 15 092 habitantes.
- Una máquina se compra en \$10 000 y se deprecia de manera continua desde la fecha de compra. Su valor después de t años está dado por la fórmula: $V = 10000e^{-0.2t}$. Determina el valor de la máquina después de 8 años.

5. La ecuación de la demanda para el producto de un fabricante es $p = 2,500e^{-x}$, donde x es el número de unidades demandadas a un precio p por unidad. Evalúa el precio para una demanda de 6 unidades.
6. Si \$ 2 000 se invierten a un interés compuesto anual del 6%, encuentre el valor de la inversión después de 12 años.
7. La ecuación de oferta de un fabricante es $p = 28 + \log [5 + (x / 100)]$ donde x es el número de unidades y p es el precio por unidad. ¿A qué precio el fabricante ofrecerá 700 unidades?
8. Una compañía encuentra que los gastos semanales en publicidad (en dólares) están dados por: $y = 1250 \ln\left(\frac{800}{1000 - x}\right)$ donde $x \geq 200$. Calcula el gasto en publicidad para vender 800 unidades.
9. ¿En cuánto tiempo se cuadriplica un capital con un interés del 20% capitalizable continuamente?
10. Arturo deposita \$ 50 000 en un banco que le paga el 10% capitalizable mensualmente. ¿Cuánto tiempo deberá dejar la inversión para que el monto sea \$ 74 467,70?
11. La población en una ciudad en el año 2 000 era de 83 750 personas. ¿Cuándo alcanzará esta ciudad una población de 100 000 habitantes, suponiendo que continúe con una tasa de crecimiento del 3% anual?
12. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital si se invierte a una tasa del 15% compuesto anual?

UNIDAD VI

PROGRAMACIÓN LINEAL



INTRODUCCIÓN

El problema de la resolución de un sistema lineal de inecuaciones se remonta, al menos, a Joseph Fourier, después de quien nace el método de eliminación de Fourier - Motzkin. La programación lineal se plantea como un modelo matemático desarrollado durante la Segunda Guerra Mundial para planificar los gastos y los retornos, a fin de reducir los costos al ejército y aumentar las pérdidas del enemigo. Se mantuvo en secreto hasta 1947. En la posguerra, muchas industrias lo usaron en su planificación diaria.

Los fundadores de la técnica son George Dantzig, quien publicó el algoritmo simplex, en 1947, John von Neumann, que desarrolló la teoría de la dualidad en el mismo año, y Leonid Kantorovich, un matemático ruso, que utiliza técnicas similares en la economía antes de Dantzig y ganó el premio Nobel en economía en 1975. En 1979, otro matemático ruso, Leonid Khachiyan, diseñó el llamado Algoritmo del elipsoide, a través del cual demostró que el problema de la programación lineal es resoluble de manera eficiente, es decir, en tiempo polinomial.² Más tarde, en 1984, Narendra Karmarkar introduce un nuevo método del punto interior para resolver problemas de programación lineal, lo que constituiría un enorme avance en los principios teóricos y prácticos en el área.

El ejemplo original de Dantzig de la búsqueda de la mejor asignación de 70 personas a 70 puestos de trabajo es un ejemplo de la utilidad de la programación lineal. La potencia de computación necesaria para examinar todas las permutaciones a fin de seleccionar la mejor asignación es inmensa (factorial de 70, 70!) ; el número de posibles configuraciones excede al número de partículas en el universo. Sin embargo, toma sólo un momento encontrar la solución óptima mediante el planteamiento del problema como una programación lineal y la aplicación del algoritmo simplex. La teoría de la programación lineal reduce drásticamente el número de posibles soluciones factibles que deben ser revisadas.

En este capítulo nos centraremos en aquellos problemas simples de programación lineal, los que tienen 2 variables, problemas bidimensionales. Para el cual usaremos el método gráfico.

Empezaremos graficando inecuaciones lineales con dos variables así como también desigualdades lineales.

6.1. INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Una inecuación lineal con 2 variables es una expresión de la forma:

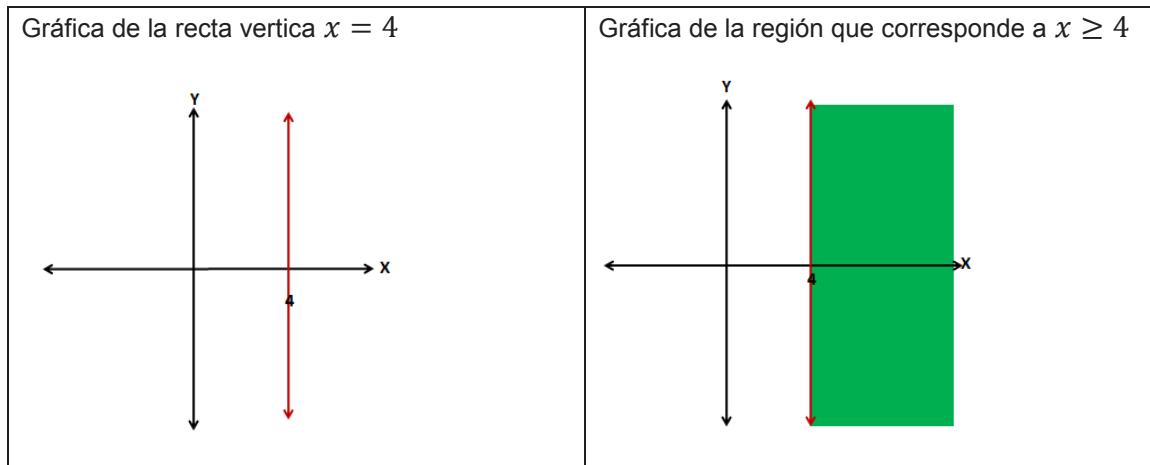
$$ax + by \leq c$$

Donde el símbolo \leq puede ser también \geq , $<$ o bien $>$; donde a , b y c son números reales x e y las incógnitas.

Para resolver estas inecuaciones, hay que representar gráficamente en el plano la recta dada por la correspondiente ecuación lineal y marcar una de las dos regiones en la que dicha recta divide al plano.

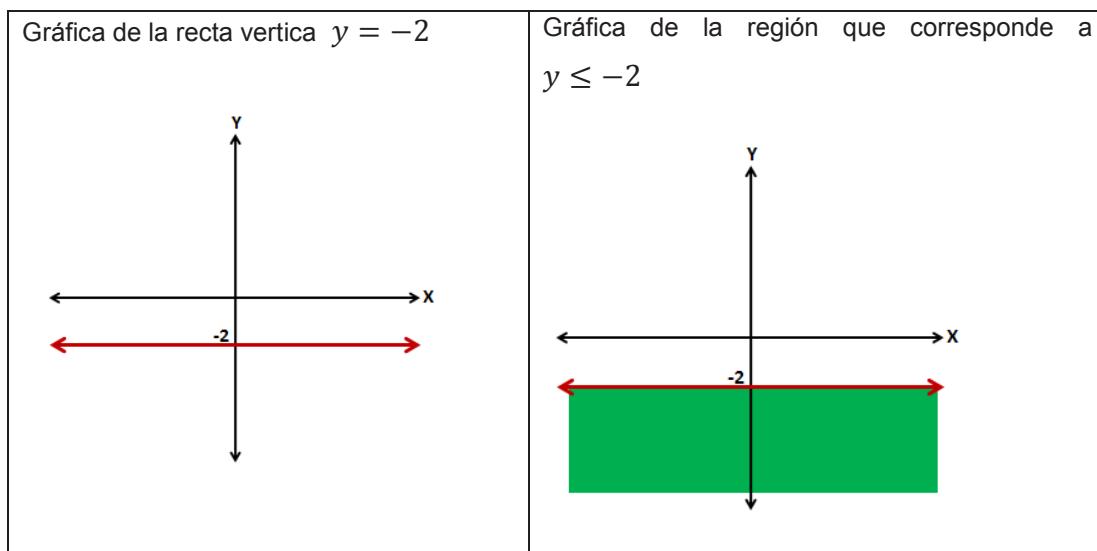
Ejemplo:

Para resolver la inecuación $x \geq 4$, en primer lugar graficaremos la recta vertical $x = 4$ y luego sombrearemos la región que corresponde a la desigualdad.



Ejemplo:

Para resolver la inecuación $y \leq -2$, en primer lugar graficaremos la recta horizontal $y = -2$ y luego sombrearemos la región que corresponde a la desigualdad.



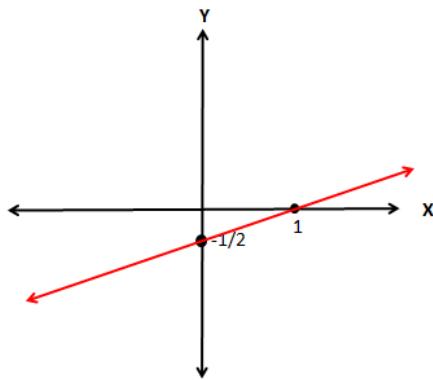
Ejemplo:

Para resolver la inecuación $x - 2y \leq 1$, en primer lugar graficaremos la recta oblicua $x - 2y = 1$ y luego sombrearemos la región que corresponde a la desigualdad.

Observación:

Una forma de sombrear estos tipos de regiones, es considerar un punto del plano que no pertenece a la recta y remplazar en la desigualdad. Si la desigualdad resulta ser verdadera, significa que el punto que se ha considerado pertenece a la región a sombrear; en caso de ser falso, el punto no pertenece a la región a sombrear.

Gráfica de la recta vertical $x - 2y = 1$

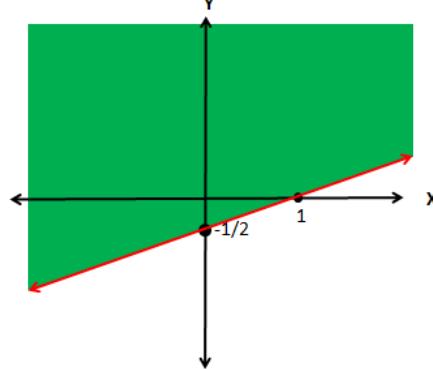


Gráfica de la región que corresponde a $x - 2y \leq 1$

Considerando el punto $(0,0)$, tenemos

$$0 - 2(0) \leq 1 \text{ (verdadero)}$$

Significa que el punto $(0,0)$ se encuentra en la región a sombrear.



Ejemplo:

Para resolver la inecuación $3x + y \geq 6$, en primer lugar graficaremos la recta oblicua $3x + y = 6$ y luego sombrearemos la región que corresponde a la desigualdad.

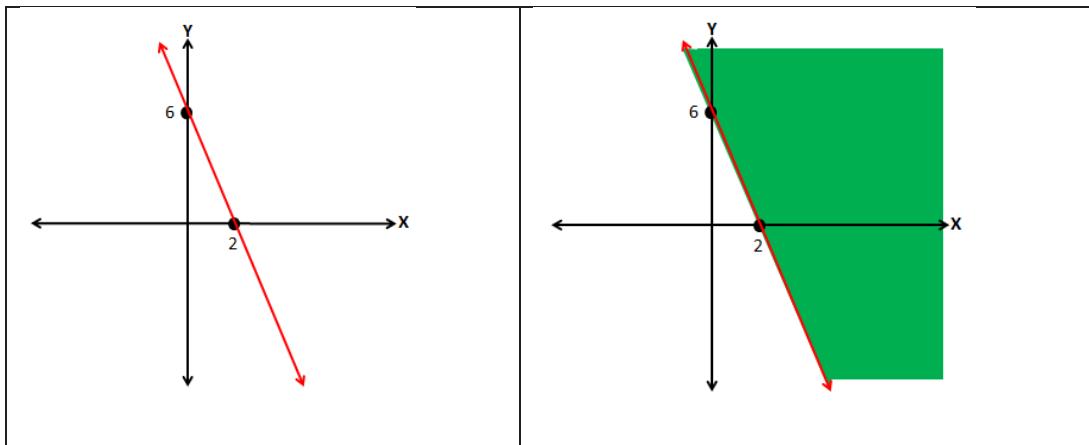
Gráfica de la recta vertical $3x + y = 6$

Gráfica de la región que corresponde a $3x + y \geq 6$

Considerando el punto $(0,0)$, tenemos

$$3(0) + 0 \geq 6 \text{ (Falso)}$$

Significa que el punto $(0,0)$ **no** se encuentra en la región a sombrear.



6.2. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES

Un Sistema de inecuaciones lineales, es un conjunto de inecuaciones del tipo anterior, y resolverlo consistirá en resolver gráficamente cada inecuación, representar la solución en un mismo plano y la solución será la intersección de todas las regiones sombreadas.

A la intersección de todas las regiones sombreadas se le conoce con el nombre de **región factible**.

Ejemplo:

Graficar en un mismo sistema de coordenadas el conjunto formado por las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} x + y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Como las desigualdades deben satisfacerse simultáneamente, se debe graficar la intersección de las regiones correspondientes a cada una de ellas.

Primero graficamos la desigualdad $x \geq 0$:

Es decir: $x = 0$. Se observa que esta recta vertical la cual coincidente con el eje Y del sistema.

Su grafica es el semiplano ubicado a la derecha del eje Y (puesto que $x \geq 0$).

Segundo graficamos la desigualdad $y \geq 0$:

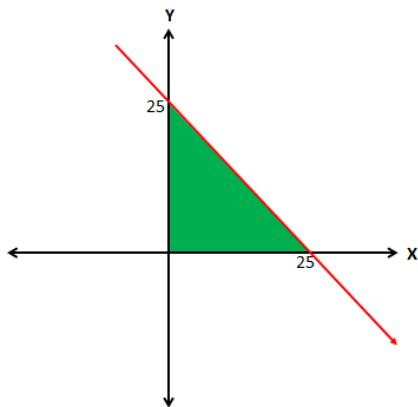
Es decir: $y = 0$. Se observa que esta recta es coincidente con el eje X del sistema.

Su grafica es el semiplano ubicado arriba del eje X (puesto que $y \geq 0$).

Tercero graficamos la desigualdad $x + y \leq 25$:

Es decir: $x + y = 25$

Su gráfica es el semiplano ubicado por debajo de la recta $x + y = 25$ (puesto que $x + y \leq 25$).



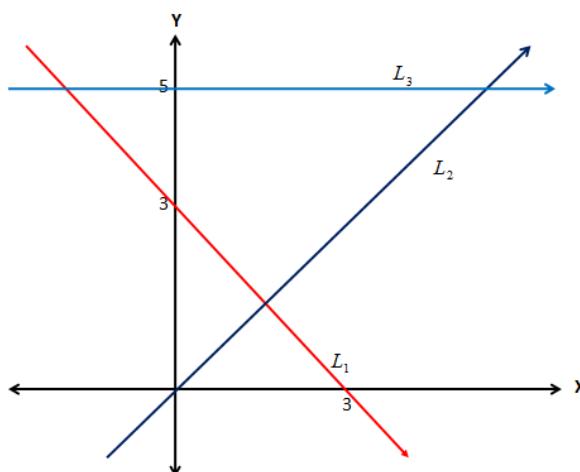
Ejemplo:

Para graficar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

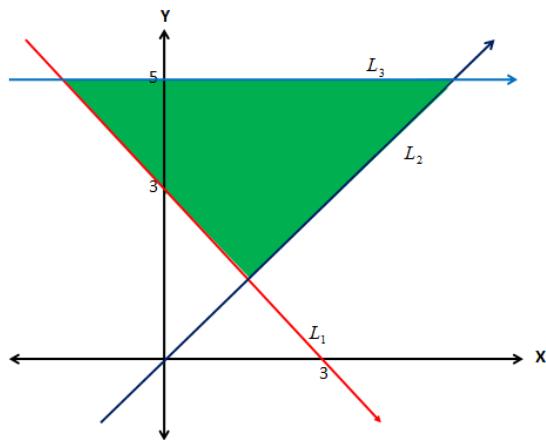
$$\begin{cases} x + y \geq 3 \\ y \geq x \\ y \leq 5 \end{cases}$$

Graficaremos cada una de las rectas identificando la región a sombrear

$$L_1: x + y = 3 \quad L_2: y = x \quad L_3: y = 5$$



Identificando la región de cada una de las desigualdades y considerando la intersección de las tres regiones tenemos:



A la región sombreada se le llama **región factible** y como se observa es la región factible está conformada por tres vértices.

Ejercicio 01

Graficar las siguientes desigualdades lineales.

a) $x < -2$

b) $x \geq 5$

c) $y \leq 6$

d) $y \geq -2$

e) $x + 2y \leq 1$

f) $4x - 3y \leq 0$

1. Graficar los siguientes sistemas de desigualdades lineales.

a)
$$\begin{cases} x - y < 5 \\ 2 + 2y < 14 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 3y \leq 9 \\ 2x + y \geq 8 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + 3y \geq 9 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ y - 2x \geq 1 \\ y \leq 4 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} x + 15y \leq 150 \\ 6x + 8y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

i)
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq -3 \\ 2x - y - 9 \leq 0 \\ 2x - 5y - 5 \geq 0 \end{cases}$$

j)
$$\begin{cases} x + 2y \leq 12 \\ 2x + y \geq 4 \\ x - 2y \leq 6 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$$

6.3. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN SUJETA A RESTRICCIONES

En un problema de programación lineal de dos variables x e y , se trata de optimizar una función; es decir hacer máxima o mínima según los casos.

La función objetivo tiene la forma

$$f(x, y) = Ax + By$$

Sujeta a una serie de restricciones dadas mediante un sistema de inecuaciones lineales del tipo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \vdots \\ a_3x + b_3y \leq c_3 \end{cases}$$

Los puntos del plano que cumplen el sistema de desigualdades forman un recinto convexo acotado (poligonal o no acotado, llamado **región factible** del problema).

Todos los puntos de dicha región cumplen el sistema de desigualdades. Se trata de buscar entre todos los puntos, aquel o aquellos que hagan el valor de $f(x, y)$ máximo o mínimo, según sea el problema.

Los puntos de la región factible se denominan soluciones factibles. De todas esas soluciones factibles, aquellas que hacen óptima (máxima o mínima) la función objetivo se llaman soluciones óptimas.

Propiedad:

Si hay una única solución óptima, ésta se encuentra en un vértice de la región factible, y si hay infinitas soluciones óptimas, se encuentran en un lado de la región factible.

Pasos para resolver un problema de programación lineal usando el método gráfico:

Identificar las variables dentro del problema.

Identificar la función objetivo con sus respectivas restricciones o condiciones.

Graficar las restricciones en el plano cartesiano, es hallar la región factible.

Hallar los vértices de la región factible.

Analizar cada vértice en la función objetivo para determinar el valor máximo o mínimo según sea el objetivo del problema.

Ejemplo:

Dado el siguiente problema de programación lineal

$$\text{Máx: } f(x, y) = 5x + 4y$$

Sujeta a las restricciones:

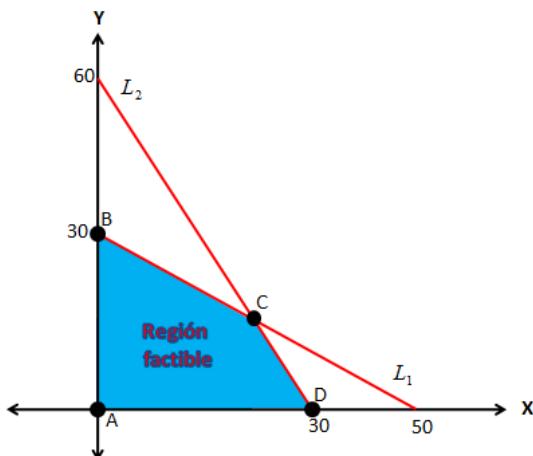
$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 150 \\ 2x + y \leq 60 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Determinar el valor máximo de la función.

Solución:

Las condiciones de no negatividad ($x \geq 0, y \geq 0$), representan en el plano cartesiano el primer cuadrante. Por ello nos centraremos en realizar la gráfica en dicho plano.

Graficaremos las siguientes rectas: $L_1: 3x + 5y = 150$ y $L_2: 2x + y = 60$ Luego identificando la región factible tenemos:



Ahora hallaremos cada uno de los vértices que se identifican en la región factible

Como C está tanto en la recta L_1 y L_2 resolveremos el siguiente sistema

$$\begin{array}{l} 3x + 5y = 150 \\ 2x + y = 60 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x + 5y = 150 \\ -10x - 5y = -300 \\ \hline -7x = -150 \\ x = 150 / 7 \end{array}$$

Luego los vértices son $A(0,0)$, $B(0,30)$, $C\left(\frac{150}{7}, \frac{120}{7}\right)$ y $D(30,0)$

Ahora remplazamos cada vértice en la función a maximizar

$$f(0,0) = 5(0) + 4(0) = 0$$

$$f(0,30) = 5(0) + 4(30) = 120$$

$$f\left(\frac{150}{7}, \frac{120}{7}\right) = 5\left(\frac{150}{7}\right) + 4\left(\frac{120}{7}\right) = 175.71$$

$$f(30,0) = 5(30) + 4(0) = 150$$



Máximo

Por lo tanto el valor máximo de la función es 175.71

Ejemplo:

Una fábrica quiere producir bicicletas de paseo y de montaña. La fábrica dispone de 80Kg. de acero y 120Kg. de aluminio. Para construir una bicicleta de paseo se necesitan 1Kg. de acero y 3Kg. de aluminio, y para construir una bicicleta de montaña se necesitan 2Kg. de acero y otros 2Kg. de aluminio. Si las utilidades para cada bicicleta es de 200 soles y 150 soles respectivamente ¿Cuántas bicicletas de cada tipo debe construir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuánto es la utilidad máxima?

Solución:

	Tipos de bicicletas		Máximo
	Paseo	Montaña	
Acero	1	2	80
Aluminio	3	2	120
Precio	200	150	---

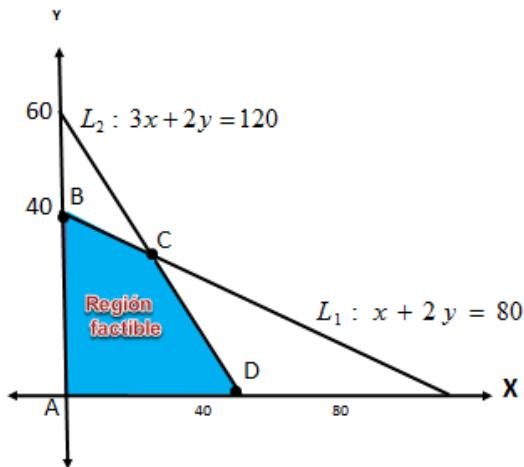
x : Cantidad de bicicletas de paseo

y : Cantidad de bicicletas de montaña

La función objetivo es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Máx: } U(x,y) = 200x + 150y \\ \text{Con las restricciones:} \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right.$$

Graficamos las rectas e identificamos la región factible:



Hallemos cada uno de los vértices de la región factible

Como C está tanto en la recta L_1 y L_2 resolveremos el siguiente sistema

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 80 \\ 3x + 2y & = & 120 \\ \hline -2x & = & -40 \\ x & = & 20 \\ \Rightarrow y & = & 30 \end{array}$$

Luego los vértices son $A = (0,0)$ $B = (0,40)$ $C = (20,30)$ $D = (40,0)$

Ahora remplazamos cada uno de los puntos en la función objetivo para determinar el valor máximo del beneficio

$$U(0,0) = 200(0) + 150(0) = 0$$

$$U(0,40) = 200(0) + 150(40) = 6000$$

$$U(20,30) = 200(20) + 150(30) = 8500 \quad \text{← Máximo}$$

$$U(40,0) = 200(40) + 150(0) = 8000$$

Por lo tanto: Para obtener la utilidad máxima deben producirse 20 bicicletas de paseo y 30 bicicletas de montaña. La utilidad máxima es de 8500 soles

Ejemplo:

Una compañía petrolera, que tiene dos refinerías, necesita al menos 800, 1400 y 500 barriles de petróleo de grados bajo, medio y alto, respectivamente. Cada día, la refinería I produce 200 barriles de grado bajo, 300 de medio y 100 de alto grado, mientras que la refinería II produce 100 barriles de grado alto, 100 de bajo y 200 de grado medio. Si los costos diarios son de \$2500 para operar la refinería I y de \$2000 para la refinería II, ¿cuantos días debe ser operada cada refinería para satisfacer los requerimientos de producción a un costo mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

Solución:

	Tipo de refinerías		Mínimo
	I	II	
Bajo	200	100	800
Medio	300	200	1400
Alto	100	100	500
Costoso	2500	2000	

x : Cantidad de días para la refinería I

y : Cantidad de días para la refinería II

La función objetivo es:

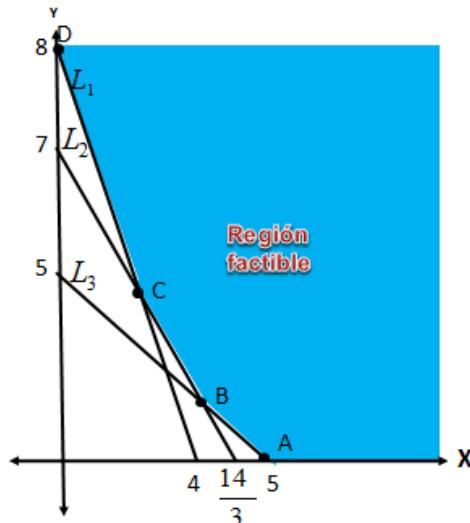
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min: } C(x, y) = 2500x + 2000y \\ \text{Con las restricciones:} \\ 200x + 100y \geq 800 \\ 300x + 200y \geq 1400 \\ 100x + 100y \geq 500 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right.$$

Graficamos las siguientes rectas e identificamos la región factible

$$L_1 : 200x + 100y = 800 \Rightarrow 2x + y = 8$$

$$L_2 : 300x + 200y = 1400 \Rightarrow 3x + 2y = 14$$

$$L_3 : 100x + 100y = 500 \Rightarrow x + y = 5$$



Como: $B \in L_1 \cap L_2$ y $C \in L_2 \cap L_3$ entonces resolveremos los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ 3x + 2y = 14 \\ \hline x = 2 \\ \Rightarrow y = 4 \\ B(2,4) \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x + 2y = 14 \\ x + y = 5 \\ \hline x = 4 \\ \Rightarrow y = 1 \\ C(4,1) \end{array}$$

Los vértices son $A = (5,0)$ $B = (2,4)$ $C = (4,1)$ $D = (0,8)$

Ahora remplazamos cada uno de los puntos en la función objetivo para determinar el valor mínimo del costo.

$$C(5,0) = 2500(5) + 2000(0) = 12500$$

$$C(2,4) = 2500(2) + 2000(4) = 13000$$

$$C(4,1) = 2500(4) + 2000(1) = 12000$$

$$C(0,8) = 2500(0) + 2000(8) = 16000$$

← Mínimo

Por lo tanto: Para obtener un costo mínimo debe ser operada 4 días la refinería I y 1 días la refinería II. El costo mínimo es \$12000.

Ejercicio 02

1. Una dieta debe contener al menos 16 unidades de carbohidratos y 20 de proteínas. El alimento A contiene 2 unidades de carbohidratos y 4 de proteínas; el alimento B contiene 2 unidades de carbohidratos y 1 de proteínas. Además no se debe comprar más de 12 unidades del alimento B. Si el alimento A cuesta \$1.20 por unidades y B \$0.80 por unidad.
 - a) ¿Cuántas unidades de cada alimento deben comprarse para minimizar el costo?
 - b) ¿Cuál es el costo mínimo?
2. Un fabricante produce un artículo en dos presentaciones: A y B, usando las materias primas m₁ y m₂. Diariamente se necesita por lo menos 18 kg. de m₁ y 12 kg. de m₂; y como máximo 34 horas de mano de obra. Se requiere 2 kg. de m₁ para cada artículo A y 1 kg. de m₁ para cada artículo B. Para cada artículo de A y B se requiere 1 kg. de m₂. Además en la fabricación de un artículo de A se emplean 3 horas y 2 horas en un artículo de B. Si la utilidad por artículo en el modelo A es de \$5 y \$3 por el artículo B, ¿cuántos artículos de cada modelo deben producirse para maximizar la utilidad y cuál es la utilidad máxima?
3. Disponemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 soles en las del tipo A y como mínimo 60.000 soles en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?
4. En una pastelería se hacen dos tipos de tartas: Vienesa y Real. Cada tarta Vienesa necesita un cuarto de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce un beneficio de 25 soles, mientras que una tarta Real necesita medio Kg. de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce 30 soles. de beneficio. En la pastelería se pueden hacer diariamente hasta 150 Kg. de bizcocho y 50 Kg. de relleno, aunque por problemas de maquinaria no pueden hacer más de 125 tartas de cada tipo. ¿Cuántas tartas Vienas y cuantas Reales deben vender al día para que sea máximo el beneficio?
5. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 euros y el de uno pequeño, 60 euros. Calcular cuántos de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.
6. Una compañía posee dos minas: la mina A produce cada día 1 tonelada de hierro de alta calidad, 3 toneladas de calidad media y 5 de baja calidad. La mina B produce cada día 2 toneladas de cada una de las tres calidades. La compañía necesita al menos 80 toneladas

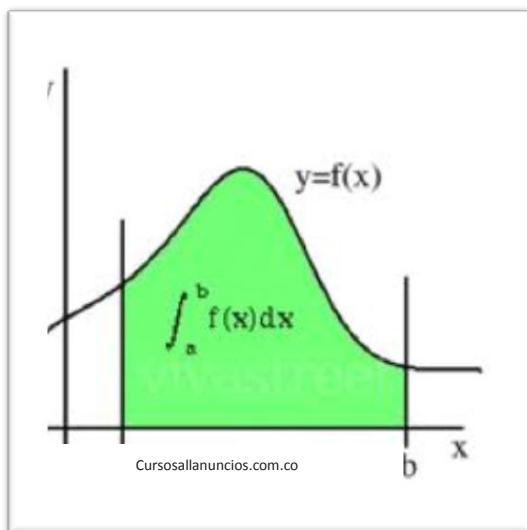
de mineral de alta calidad, 160 toneladas de calidad media y 200 de baja calidad. Sabiendo que el coste diario de la operación es de 2000 euros en cada mina ¿cuántos días debe trabajar cada mina para que el coste sea mínimo?

7. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 250 soles por electricista y 200 soles por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio y cual es este?
8. Para recorrer un determinado trayecto, una compañía aérea desea ofertar, a lo sumo, 5000 plazas de dos tipos: T (turista) y P(primer). La ganancia correspondiente a cada plaza de tipo T es de 30 soles, mientras que la ganancia del tipo P es de 40 soles. El número de plazas tipo T no puede exceder de 4500 y el del tipo P, debe ser, como máximo, la tercera parte de las del tipo T que se oferten. Calcular cuántas tienen que ofertarse de cada clase para que las ganancias sean máximas.
9. Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámpara L_1 y L_2 . Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L_1 y 30 minutos para el modelo L_2 ; y un trabajo de máquina de 30 minutos para L_1 y de 10 minutos para L_2 . Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 y 10 soles para L_1 y L_2 respectivamente. Determinar la cantidad de lámparas que debe fabricar y vender de cada modelo para obtener el máximo beneficio.
10. Una industria alimentaria produce alimentos de dos tipos, A y B. El alimento A cuesta 12 soles/kilo y el alimento B cuesta 8 soles/kilo. Se quiere minimizar el costo total de los alimentos, de manera que satisfagan tres condiciones vitamínicas. Se desea por lo menos, 30 unidades de vitamina P, 50 unidades de W y 60 unidades de vitamina Q. Cada kilo del alimento A proporciona dos unidades de vitamina P, cuatro unidades de vitamina W y siete unidades de vitamina Q. El alimento B proporciona tres unidades de P, tres unidades de W y seis unidades de Q por kilo, respectivamente. Formulé el problema de programación lineal. ¿Cuántos kilos de cada alimento deben comprar?

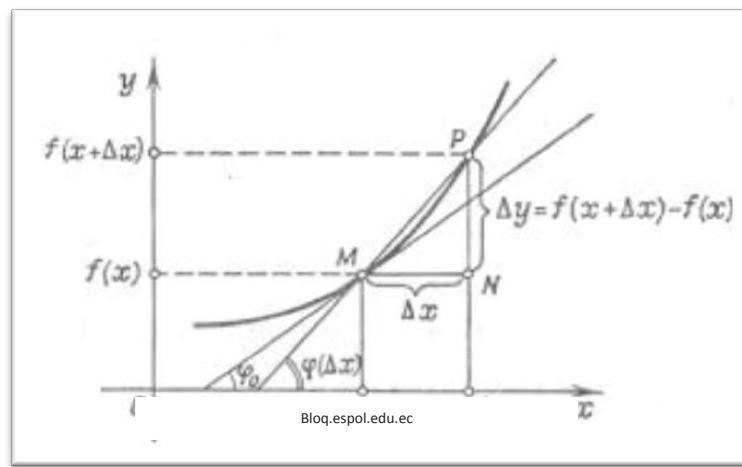
UNIDAD VII

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

DIFERENCIAL E INTEGRAL



- LÍMITES
 - CONTINUIDAD
 - DERIVADAS
 - APLICACIONES
 - MÁXIMOS Y MÍNIMOS
 - INTEGRALES INDEFINIDAS
 - INTEGRALES DEFINIDAS
 - APLICACIONES DE INTEGRALES
 - INDEFINIDAS



7.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Idea preliminar: Para la función: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ observamos que el punto $x = 1$ no está en el dominio de la función, sin embargo resulta importante conocer qué valores toma la función cuando la variable “ x ” se aproxima al número 1.

En la tabla adjunta se muestra algunos valores de la función cuando la variable “ x ” se aproxima a 1 por la izquierda o por la derecha:

$$x < 1$$

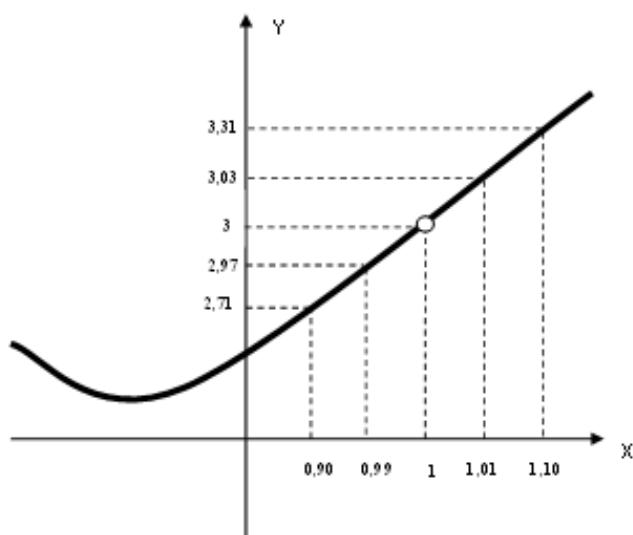
x	0,85	0,90	0,95	0,99
$f(x)$	2,57	2,71	2,85	2,97

$$x > 1$$

x	1,01	1,05	1,10	1,15
$f(x)$	3,03	3,15	3,31	3,47

De la tabla se deduce intuitivamente que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a 1, es 3,

esto se simboliza: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1} \right) = 3$



x	$f(x)$
0,85	2,57
0,90	2,71
0,95	2,85
0,99	2,97
1	No existe
1,01	3,03
1,05	3,15
1,10	3,31
1,15	3,47

7.2. DEFINICIÓN INTUITIVA DE LÍMITE

El límite de una función $f(x)$ cuando la variable x se aproxima a un valor dado “ a ” es el número real “ L ” (siempre que exista) al cual se aproxima la función, esto se simboliza:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \text{ se lee: "El límite de } f(x) \text{ cuando } x \text{ tiende a } "a" \text{ es el número real } "L"$$

➤ PROPIEDADES BÁSICAS DE LÍMITES

1. Límite de una constante: $\lim_{x \rightarrow a} k = k$

2. Límite de una función polinómica: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

3. Límite de una división: $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

➤ FORMA INDETERMINADA

Cuando en una función reemplazamos la variable por un valor dado “ a ” y nos da la forma indeterminada $0/0$, es posible calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, previamente se debe factorizar o racionalizar $f(x)$ con la finalidad de anular la indeterminación.

Ejemplo:

Resolver

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12} = \frac{0}{0}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12} = \frac{1}{7}$$

Ejemplo:

Resolver

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{-x - 2} = \frac{0}{0}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{-x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+2)}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} -(x+2) = 0$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{-x - 2} = 0$$

Ejemplo:

Resolver

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

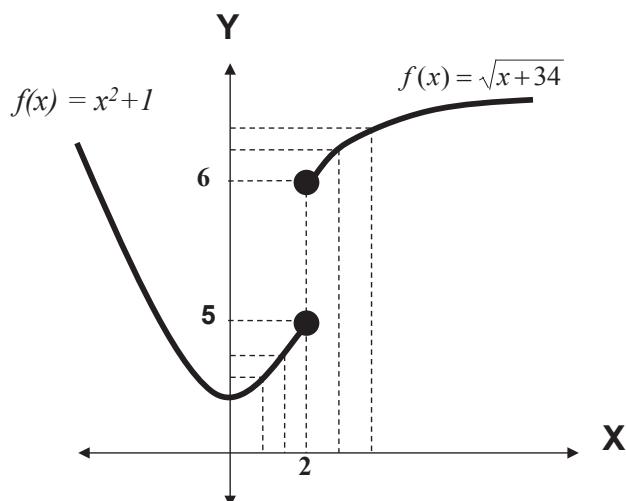
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \frac{1}{4}$$

➤ LIMITES LATERALES

Consideremos la función por tramos: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; \quad x < 2 \\ \sqrt{x+34} & ; \quad x > 2 \end{cases}$



$x < 2$ (Por la izquierda)

x	1,8	1,9	1,99
$f(x)$	4,24	4,61	4,96

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$$

$x > 2$ (Por la derecha)

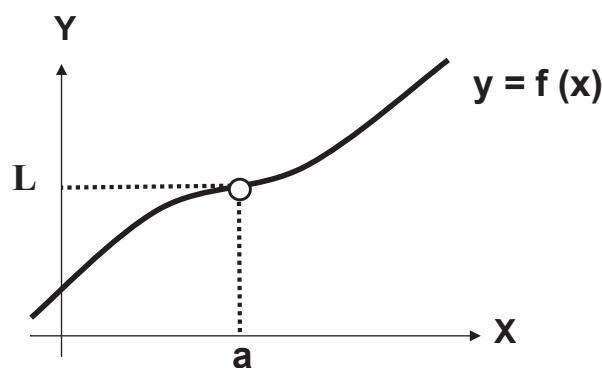
x	2,1	2,05	2,01
$f(x)$	6,0083	6,0041	6,0008

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6$$

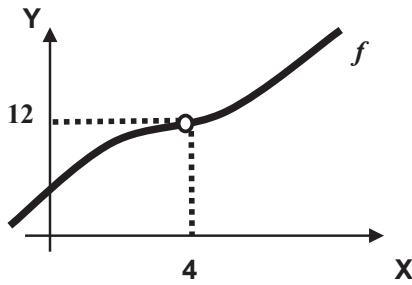
➤ DEFINICIÓN:

Una función $f(x)$ tiene límite en " a " si los límites laterales en " a " son iguales; esto es:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$



En los siguientes gráficos.

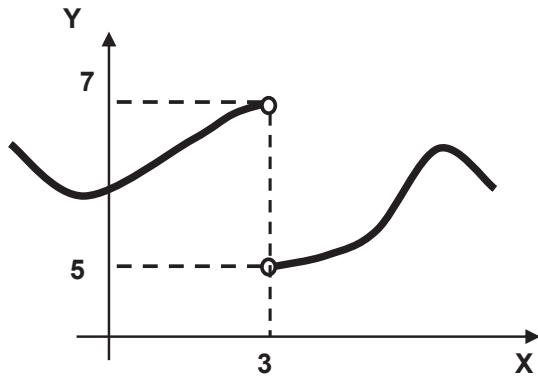


Se observa que:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 12$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 12$$



Se observa que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 5$$

$$\therefore \text{NO EXISTE } \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$$

Ejercicio 01

➤ Resolver los siguientes límites

1. $\lim_{x \rightarrow 2} 5$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} x^3$

3. $\lim_{x \rightarrow -2} (3+x-x^2)$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + x - 1)$

5. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (5x^2 \cdot x^4)$

6. $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{3y^2 + 1}{2y - 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{6-x}{3-x}}$

➤ Forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+16} - 4}$

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12}$

10. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{b^2 - x} - \sqrt{b^2 - a}}{x - a}$

3. $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t+2}{t^2 - 4}$

11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 2x - 3}$

4. $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{3x^2 - x - 1}{3x^2 - 4x - 4}$

12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 5x^6 + 4x}{5x + 2x^2 - 3}$

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{-x - 2}$

13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 7} + 2x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 3x - 4}$

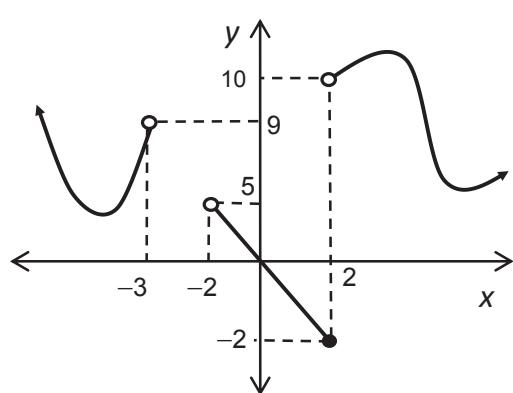
14. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 27} - 6}$

7. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

15. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3 + 125}{5x + x^2}$

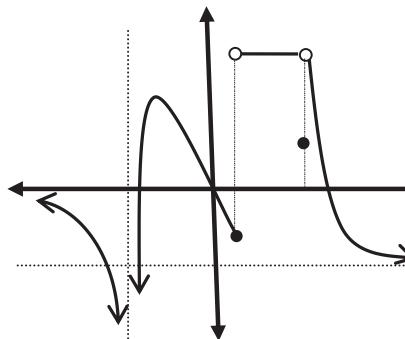
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$

➤ Dada la gráfica de la función $f(x)$, calcule si existen los siguientes límites:



- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) =$ | b) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) =$ | c) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) =$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$ | e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$ | f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$ | h) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$ | i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$ | k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$ | l) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ |

➤ A partir de la siguiente gráfica determine los siguientes límites:



a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

➤ Verifique si existen los siguientes límites:

1. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \leq 1 \\ 4x-1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x-2}, & \text{si } x < 2 \\ 3x-2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & \text{si } x > 2 \\ \frac{\sqrt{3x+3} - 3}{x-2}, & \text{si } x < 2 \end{cases}$ a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

➤ Calcule el valor de A si existe: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $f(x) = \begin{cases} Ax^2 + 1, & \text{si } x > 2 \\ x^2 + x, & \text{si } x < 2 \end{cases}$

➤ Calcule el valor de B si existe: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; $f(x) = \begin{cases} Bx^2 + 3x - 1, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3x+1} - 2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

➤ Calcule los valores de a y b si existen: los $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$;

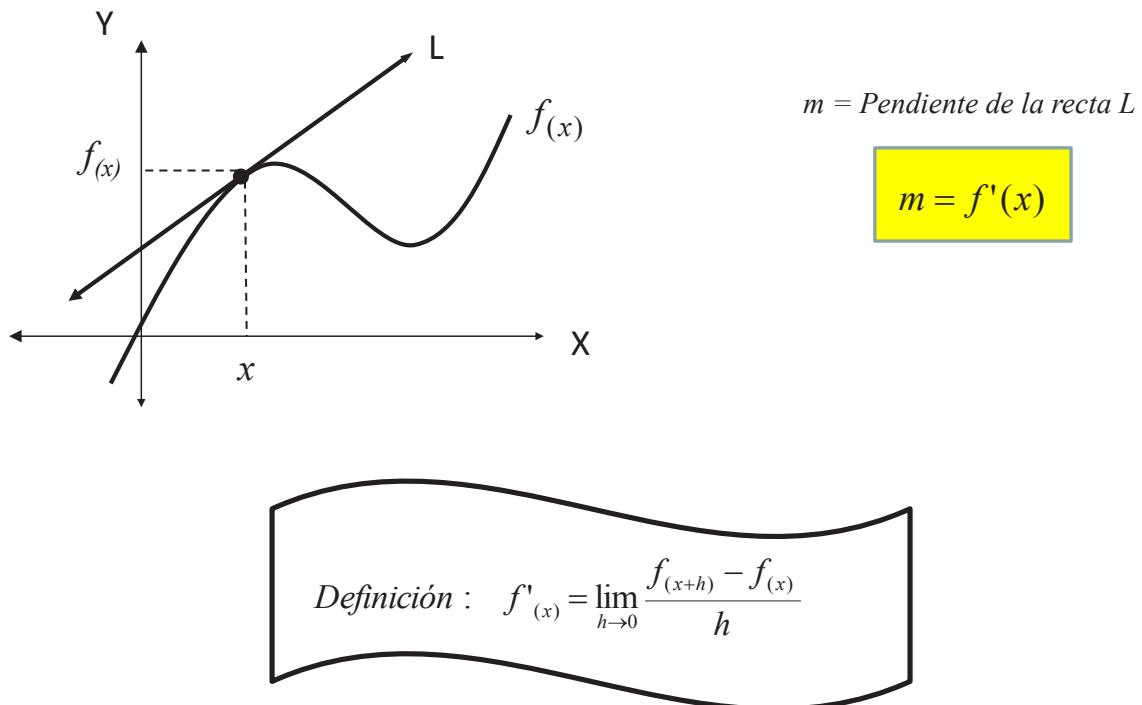
$$f(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{si } x \leq -1 \\ ax+b, & \text{si } -1 < x < 3 \\ 4-x, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

7.3. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La derivada de una función f en un punto $x \in Df$ se simboliza $f'(x)$ y se define como el número real (si es que existe) obtenido al calcular el siguiente límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Geométricamente se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de dicha función en el punto $(x, f(x))$.



Si $y = f(x)$ representa una función, su derivada puede representarse de las siguientes formas:

$f'(x)$ Se lee: "**f prima de x**"

$y'(x)$ Se lee: "**y prima de x**"

$\frac{dy}{dx}$ Se lee: "**Derivada de y, respecto a x**"

$\frac{df}{dx}$ Se lee: "**Derivada de f, respecto a x**"

EJEMPLO

Usando la definición, halle la derivada de la función $f(x) = 2x - 7$

Primero determinamos $f(x + h) = 2(x + h) - 7$

Por definición:

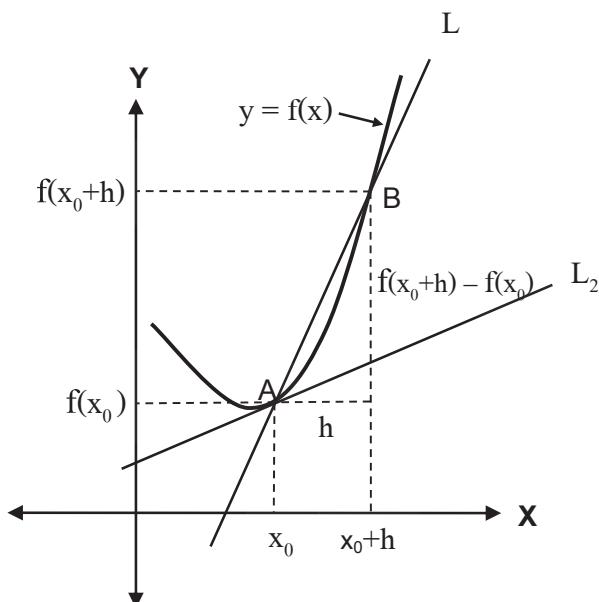
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Reemplazamos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(x+h) - 7] - (2x - 7)}{h} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \end{aligned}$$

Finalmente evaluamos, $\therefore f'(x) = 2$

7.4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA



La pendiente de la recta secante L_1 es:

$$m_1 = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Si tomamos el punto B cada vez más cerca del punto A, el valor de h tiende a cero y la recta secante L_1 tiende a la recta tangente L_2 , luego:

$$m_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Pero este límite es el que se deriva de $f(x)$ en el punto x_0

Por tanto: La derivada de una función en un punto, representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, en dicho punto.

➤ REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables en el intervalo $I \subset R$, entonces:

1. Derivada de una constante.

Si $f(x) = k$ entonces: $f'(x) = 0 \quad \forall k \in R$

Ejemplo:

Si $f(x) = -5 \Rightarrow$ **Derivando** $f'(x) = 0$

2. Derivada de la potencia de una variable.

Si $f(x) = kx^n$, entonces: $f'(x) = nkx^{n-1}$ $\forall k, n \in R$

Ejemplo:

Si $f(x) = x^6 \Rightarrow$ **Derivando** $f'(x) = 6x^5$

3. Derivada de una suma o resta de funciones.

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

Ejemplo:

$$f(x) = 5x^2 - 2\sqrt{x} + bx + 5$$

Derivando

$$f'(x) = 10x - x^{-\frac{1}{2}} + b$$

4. Derivada de la potencia de una función:

$$(kf^n(x))' = nkf^{n-1}(x) \cdot f'(x) \quad \forall k, n \in R$$

Ejemplo:

$$f(x) = (2x - 5x^3)^4$$

Derivando

$$f'(x) = 4(2x - 5x^3)^3(2x - 5x^3)'$$

$$f'(x) = 4(2x - 5x^3)^3(2 - 15x^2)$$

5. Derivada de un producto.

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = (2x^3 - 5)(x^5 + 2x^{-3} + 5)$$

Derivando

$$f'(x) = (2x^3 - 5)'(x^5 + 2x^{-3} + 5) + (2x^3 - 5)(x^5 + 2x^{-3} + 5)'$$

$$f'(x) = 6x(x^5 + 2x^{-3} + 5) + (2x^3 - 5)(5x^4 - 6x^{-4})$$

6. Derivada de un cociente:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^3}{x-7x^{-4}+5}$$

Derivando

$$f'(x) = \frac{(x^3)'(x-7x^{-4}+5)-(x^3)(x-7x^{-4}+5)'}{(x-7x^{-4}+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x-7x^{-4}+5)-(x^3)(1+28x^{-5})}{(x-7x^{-4}+5)^2}$$

➤ LA DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones diferenciables en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces:

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL

a. $y = a^{f(x)} \Rightarrow y'_{(x)} = a^{f(x)} \cdot f'_{(x)} \cdot \ln(a); \quad a > 0 \wedge a \neq 1$

b. $y = e^{f(x)} \Rightarrow y'_{(x)} = e^{f(x)} \cdot f'_{(x)}; \quad e: \text{base de logaritmo natural}$

Caso particular: $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

Ejemplo:

$$f(x) = 3x^{2x+1}$$

Derivando

$$f'(x) = 3^{2x+1} \cdot (2x+1)' \cdot \ln 3$$

$$f'(x) = 3^{2x+1} \cdot 2 \cdot \ln 3$$

Ejemplo:

$$f(x) = e^{3x^3+6x-2}$$

Derivando

$$f'(x) = e^{3x^3+6x-2} \cdot (3x^3 + 6x - 2)'$$

$$f'(x) = e^{3x^3+6x-2} \cdot 9x^2 + 6$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

a. $y = \log_a f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\ln a}; \quad a > 0 \wedge a \neq 1$

b. $y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Caso particular: $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

Ejemplo:

$$f(x) = \log_2(2x^3 - 5x^4 + 7)$$

Derivando

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{(2x^3 - 5x^4 + 7)'}{2x^3 - 5x^4 + 7}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{6x^2 - 20x^3}{2x^3 - 5x^4 + 7}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \ln(x - x^2 + 5)$$

Derivando

$$f'(x) = \frac{(x - x^2 + 5)'}{x - x^2 + 5}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2x}{x - x^2 + 5}$$

Ejercicio 02

I. Utilizando la definición encuentre la derivada de las siguientes funciones

$$1. f(x) = 3x - 6$$

$$2. f(x) = x^2 + 3$$

$$3. f(x) = \sqrt{5x - 3}$$

$$4. f(x) = \sqrt{6x + 5}$$

$$5. f(x) = 8x + 12$$

$$6. f(x) = \frac{3x+1}{4}$$

$$7. f(x) = \frac{7x-3}{5}$$

$$8. f(x) = 3x^2 - x$$

II. Utilizando las diferentes reglas de diferenciación encuentre la derivada de las siguientes funciones y evalúe en el punto dado:

$$1. f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 5x^3 - x, \text{ en } x = 1$$

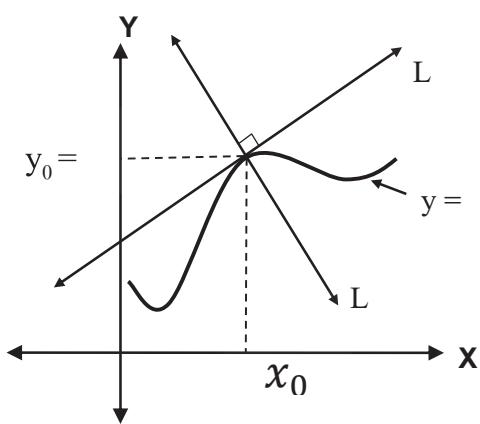
$$2. f(x) = 3\sqrt{x} - 2x^2 + 1; \text{ en } x = 4$$

$$3. f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}; \text{ en } x = -2$$

4. $f(x) = (2\sqrt{x} - 1)(x^2 + 3)$; en $x = 1$
5. $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)^3$; en $x = 8$
6. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2 + x + 2}}$; en $x = 2$
7. $f(x) = \sqrt[3]{(4x^2 + 3x - 2)^2}$; en $x = -2$
8. $f(x) = e^{4x^3 + 2x^2 + 5}$; en $x = -1$
9. $f(x) = (x - 3)^5 2^{x^3}$; en $x = 1$
10. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$; en $x = 1$
11. $f(x) = e^{3x^3 + 6x - 2}$; en $x = 2$
12. $f(x) = (7x + 8)^4 e^{3x^2 + 6}$; en $x = -2$

➤ RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL

En la gráfica:



Punto de paso = $(x_0 ; y_0)$

Pendiente de la Recta Tangente: $m = f'(x_0)$

Ecuación de la Recta Tangente: L_T

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ecuación de la Recta Normal: L_N

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

1. Halle las ecuaciones de la Recta Tangente y Normal a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ en el punto $(2 ; 9)$

Ejemplo:

Solución

Se sabe que: Punto de paso = $(2; 9)$

Además, $f'(x) = 6x - 5 \Rightarrow f'(2) = 7$

Luego:

Pendiente de la Recta Tangente: 7

Ecuación de la Recta Tangente: $L_T: y - 9 = 7(x - 2)$

Ecuación de la Recta Normal: $L_N: y - 9 = -\frac{1}{7}(x - 2)$

2. Halle las ecuaciones de la Recta Tangente y Normal a la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 3x^2 - 5$, en el punto donde $x = 1$

Solución

Se sabe que:

$$f(1) = 1^4 - 3(1)^2 - 5$$

$$f(1) = -7$$

Entonces, el punto de paso es: $(1, -7)$

$$\text{Además, } f'(x) = 4x^3 - 6x$$

Luego:

Pendiente de la Recta Tangente: -2

Ecuación de la Recta Tangente: $L_T: y + 7 = -2(x - 1)$

Ecuación de la Recta Normal: $L_N: y + 7 = \frac{1}{2}(x - 1)$

Ejercicio 03

Determine las ecuaciones de la recta tangente y normal a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos indicados.

1. $f(x) = (x^2 + 1) e^{x-2}$, en el punto $(2,5)$.
2. $f(x) = (x^3 - 2) e^{\ln(2x-3)}$, en el punto donde $x = 2$.
3. $f(x) = (x + 3) \cdot \ln(3x + 1) + 3$ en el punto $(0,3)$.
4. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7}$, en el punto $x = 1$.
5. $f(x) = e^{x^3-8}$, en el punto $x = 2$.
6. $f(x) = \sqrt{e^{x-3} + x}$, en el punto $x = 3$.

APLICACIONES

1. La relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos es $e(t) = 6t^2$. Calcular:
 - a. La velocidad media entre $t = 1$ y $t = 4$.
 - b. La velocidad instantánea en $t = 1$.
2. Una población bacteriana tiene un crecimiento dado por la función $p(t) = 5000 + 1000t^2$, siendo t el tiempo medido en horas. Se pide:
 - a. La velocidad media de crecimiento.
 - b. La velocidad instantánea de crecimiento.
 - c. La velocidad de crecimiento instantáneo para $t_0 = 10$ horas.
3. La ecuación de un movimiento rectilíneo es: $e(t) = t^3 - 27t$.
 - a. ¿En qué momento la velocidad es nula?
 - b. Hallar la aceleración en ese instante.
4. La ecuación de un movimiento circular es: $\theta(t) = 1/2 t^2$. ¿Cuál es la velocidad y la aceleración angulares al cabo de siete segundos?
5. Se bombea gas a un globo esférico a razón de $6m^3/min$. Si la presión se mantiene constante. ¿Cuál es la velocidad con la que cambia el radio del globo cuando el diámetro mide $120cm$?
6. ¿Cuál es la velocidad que lleva un vehículo si mueve según la ecuación $e(t) = 2 - 3t^2$, en el quinto segundo de su recorrido? El espacio se mide en metros y el tiempo en segundos.

7.5. LA ANTIDERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Una función $F(x)$ se denomina **antiderivada** de la función $f(x)$ en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de x en I .

Ejemplo:

$$F(x) = x^3 + x^2 \quad \text{es una antiderivada de} \quad f(x) = 3x^2 + 2x$$

$$F(x) = x^3 + x^2 + 5 \quad \text{es otra antiderivada} \quad f(x) = 3x^2 + 2x$$

$$F(x) = x^3 + x^2 + 7 \quad \text{es otra antiderivada} \quad f(x) = 3x^2 + 2x$$

DEFINICIÓN

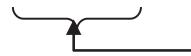
Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ sobre un intervalo I , es decir:

$F'(x) = f(x)$, entonces:

$$G(x) = F(x) + C$$

Se simboliza por:

$$G(x) = \int f(x)dx + C, \forall x \in R, \text{ donde } C \in R \text{ y se llama } \textbf{constante de integración}$$



Llamaremos integral indefinida de $f(x)$

Al término $f(x)$ se le llama integrando

Ejemplo:

$$\int (3x^2 + 2x)dx = x^3 + x^2 + C,$$

Reglas básicas de integración

1. Integral de una constante

$$\int kdx = k \cdot x + C \quad \text{Para todo } k \in R$$

Ejemplo:

$$\int 5dx = 5x + C$$

2. Integral de la potencia de una variable

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{Para todo } n \in R (n \neq -1)$$

Ejemplo:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

3. Integral de una constante por una función

$$\int kf(x)dx = k \cdot \int f(x)dx + C \quad \text{para todo } k \in R$$

Ejemplo:

$$\int 9\sqrt{x}dx = 9 \int x^{1/2}dx = 9 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right] + C = 6x^{3/2} + C$$

4. Integral de una suma o resta de funciones

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 & \int (2x^3 - 4\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^5}) dx \\
 &= \int 2x^3 dx - \int 4x^{1/3} dx - \int 2x^{-5} dx \\
 &= 2\left(\frac{x^4}{4}\right) - 4\left(\frac{x^{4/3}}{4/3}\right) - 2\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right) + C \\
 &= \frac{x^4}{2} - 3x^{4/3} + \frac{x^{-4}}{2} + C
 \end{aligned}$$

➤ TÉCNICAS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN FORMULAS DE INTEGRACION

CAMBIO DE VARIABLE (Método de Sustitución) Si: $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$

1. Integral que da como resultado una función logarítmica:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Ejemplo:

$$\int \frac{7x}{5x^2+8} dx$$

Solución

Cambio de variable

$$Si \ u = 5x^2 + 8 \Rightarrow du = 10xdx \Rightarrow \frac{du}{10} = xdx$$

$$\int \frac{7x}{5x^2+8} dx = 7 \int \frac{xdx}{5x^2+8} = 7 \int \frac{\frac{du}{10}}{u} = 7 \int \frac{du}{10u} = \frac{7}{10} \int \frac{du}{u} = \frac{7}{10} \ln|u| + C = \frac{7}{10} \ln|5x^2 + 8| + C$$

2. Integral que da como resultado una función exponencial

$$\text{Con base "e"} \quad \int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

Ejemplo:

$$\int e^{x^3-3x}(x^2-1)dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3-3x} 3 - (x^2-1)dx = \frac{1}{3} e^{x^3-3x} + C$$

Con base “e” $\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

Ejemplo:

$$\int 5^{x^4-2x^3}(2x^3-3x^2)dx = \frac{1}{2} \int 5^{x^4-2x^3} 2 - (2x^3-3x^2)dx = \frac{1}{2\ln 5} 5^{x^4-2x^3} + C$$

3. Integral que da como resultado la potencia de una función:

$$\int f^n(x) \cdot f'(x)dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}$$

Solución

Sea $F(x)$ la antiderivada de $f(x)$, entonces

$$F(x) = \int \frac{e^x}{4-e^x} dx = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^x}} \dots (1)$$

Sea $u = 4 - e^x \Rightarrow du = -e^x dx \Leftrightarrow e^x dx = -du \dots (2)$

Se sustituye (2) en (1).

$$F(x) = - \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{du}{u^{1/2}} = - \int u^{-1/2} du = - \frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = - \frac{u^{1/2}}{1/2} + C,$$

$$F(x) = 2u^{1/2} + C \Leftrightarrow F(x) = -2(4 - e^x)^{1/2} + C$$

$$F(x) = 2\sqrt{4 - e^x} + C$$

Ejercicio 03

Hallar las integrales indefinidas siguientes:

a) $\int (3x + 1)(x^3 - 2x)dx$

b) $\int (\sqrt{x} + 2)(\sqrt[3]{x} - x)dx$

c) $\int \left(\frac{3x^2 + 4x - 2}{\sqrt{x}} \right) dx$

d) $\int \left(\frac{x^3 + 4x^2 + 6x^4}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

e) $\int \frac{3x - 1}{\sqrt[5]{3x^2 - 2x + 5}} dx$

f) $\int \frac{2x + 2}{3x^2 + 6x - 1} dx$

g) $\int \frac{x + 2}{x + 4} dx$

h) $\int \frac{2x + 3}{x + 2} dx$

i) $\int \frac{5x + 1}{\sqrt[3]{5x^3 + 2x + 4}} dx$

j) $\int (30x + 30) \cdot 6^{5x^2+10x+1} dx$

k) $\int \frac{\ln^2(3x + 5)}{3x + 5} dx$

l) $\int \frac{3x \sqrt{5 + \ln(x^2 - 2)}}{3x^2 - 6} dx$

m) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x} \ln(x^2 + 2x) dx$

BIBLIOGRAFÍA

1. Copi, Irving. (1 990) Lógica Simbólica. México. Grijalbo.
2. Arrieta, G. (2 000) Introducción a la Lógica. México. Pearson Education.
3. Trelles, O., (2 00) et al. Introducción a la Lógica. 2da. Edición. Lima. Fondo Editorial de la Universidad Católica del Perú.
4. Allen, Ángel. (1 994) Álgebra elemental. 3ra. Edición. México. Prentice Hall.
5. Chávez, Salvador. (1 998). Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones Lineales. Lima. Fondo de desarrollo editorial (Universidad de Lima).
6. A., Venero. (1 995) Matemática Básica. Lima. Gemar.
7. Veiga, Alicia. et al. (2 000). Símbolos 5. Lima. Santillana.
8. M., Sullivan. (1 999) Precálculo. 4ta. Edición. México. Hispanoamericana S.A.
9. Charles, Miller. (1 999). Matemática: Razonamiento y Aplicaciones. 8va. Edición. México. Pearson.
10. Suvillan, Michael. (2 006). Algebre y Trigonometría. 7ma. Edición: México. Pearson.
11. Lázaro, Carlos. (2 003). Lógica y Razonamiento Lógico. 5ta. Edición. Perú. Líderes.
12. Biblioteca Santillana de consulta Imago (1 984). Matemáticas Comerciales. Volumen 13. España. Santillana S.A.

Direcciones electrónicas:

<http://www.matematicasypoiesia.com.es>

<http://www.vitutor.com>

<https://www.academia.edu>

<http://aula.tareasplus.com>