Estrutura de Dados 1

Prof. Igor Calebe Zadi
igor.zadi@ifsp.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo
Campus Catanduva

Design de algoritmos recursivos

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo
Campus Catanduva

O que esperar

- Conceito de indução matemática
- Aplicação da indução na computação
- Relação entre indução e recursão

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo
Campus Catanduva

Verificação exaustiva de um teorema

Seja **T** um teorema que nós queremos verificar a validade para **n**, inteiro, $1 \leq n \leq m$. Uma verificação exaustiva consiste em verificar a validade do teorema para:

- T (1);
- T (2);
- ...
- T (m).

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo
Campus Catanduva

Quais as limitações desta abordagem?

Princípio da indução matemática

- Seja *T* um teorema que nós queremos provar a validade para *n*, inteiro, $n \geq 1$. Para provar que T vale para todo *n*:

Base

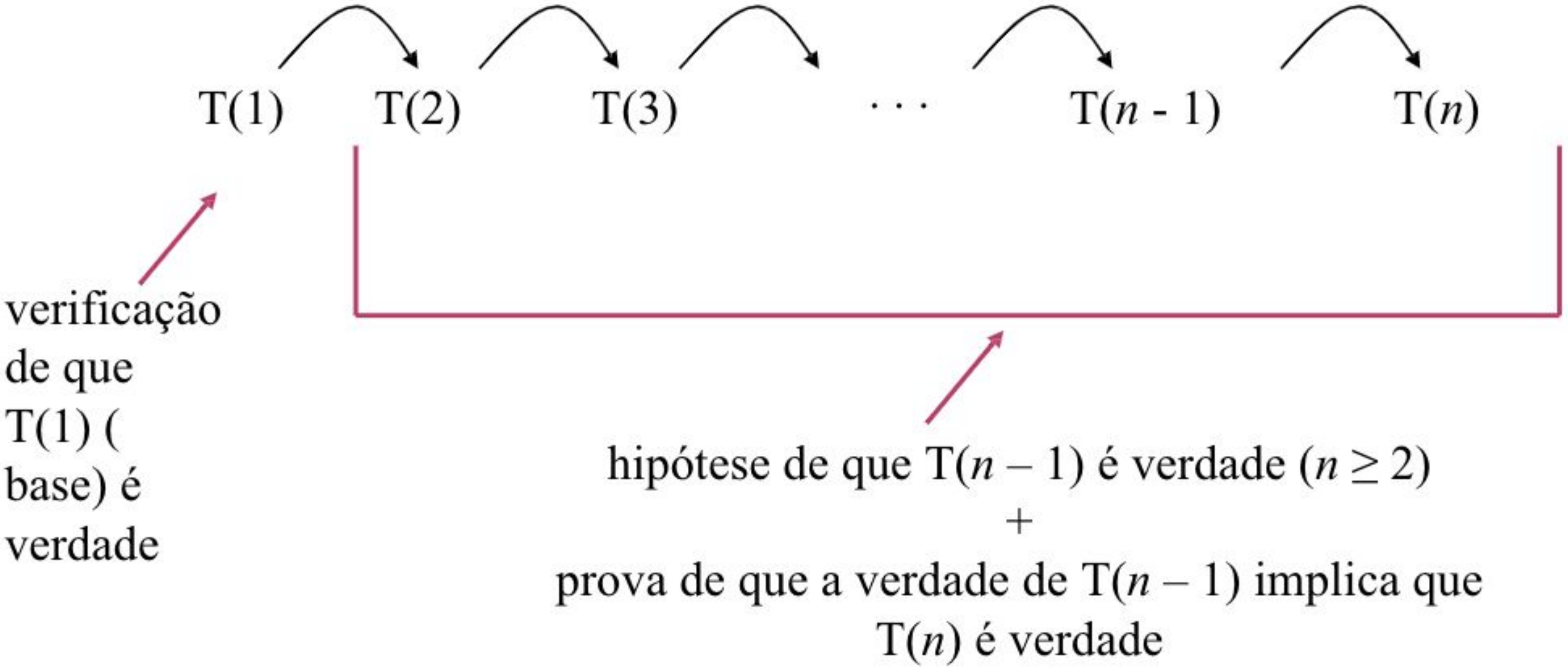
Hipótese de Indução

1. Nós verificamos se T(1) é verdadeiro;

2. Admitindo, por hipótese, que T (n– 1) é verdadeiro ($n \geq 2$), nós provamos que a validade de T(n - 1) implica que T(n) é verdadeiro

Prova do “motor de indução” que permite admitir que o fato do teorema valer para *n* - 1 implica que ele vale para *n*.

Efeito dominó



Soma dos *n* primeiros naturais

Exemplo, prova do seguinte:

Teorema

A soma 1 + 2 + 3 + ... + n (n ≥ 1, inteiro) é:

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solução

i) Base

Para $n = 1$ a soma é igual a 1.
Pela fórmula $S(1) = 1 \cdot (1 + 1) / 2 = 1$. Logo, o Teorema é verdade para $n = 1$.

ii) Hipótese de indução

O Teorema afirma que $S(n) = n\,(n + 1) / 2$.

Admitimos, por hipótese, que $S(n - 1) = (n - 1)\, n / 2$ é verdade.

Solução

iii) Relação entre S(n) e S(n – 1)

S(n) = 1 + 2 + ... + n - 1 + n.

S(n - 1) = 1 + 2 + ... + n - 1.

Logo, S(n) = S(n - 1) + n.

iv) Prova de que S(n – 1) implica em S(n)

S(n) = S(n - 1) + n.

Usando a hipótese de indução, S(n) = (n - 1) n / 2 + n.

Logo, S(n) = (n^2 - n + 2n) / 2 = (n^2 + n) / 2 Ou seja, S(n) = n (n + 1) / 2.

Solução

iii) Relação entre S(n) e S(n – 1)

S(n) = 1 + 2 + ... + n - 1 + n.

S(n - 1) = 1 + 2 + ... + n - 1.

Logo, S(n) = S(n - 1) + n.

iv) Prova de que S(n – 1) implica em S(n)

S(n) = S(n - 1) + n.

Usando a hipótese de indução, S(n) = (n - 1) n / 2 + n.

Logo, S(n) = (n^2 - n + 2n) / 2 = (n^2 + n) / 2 Ou seja, S(n) = n (n + 1) / 2.

Variantes do princípio de indução descrito

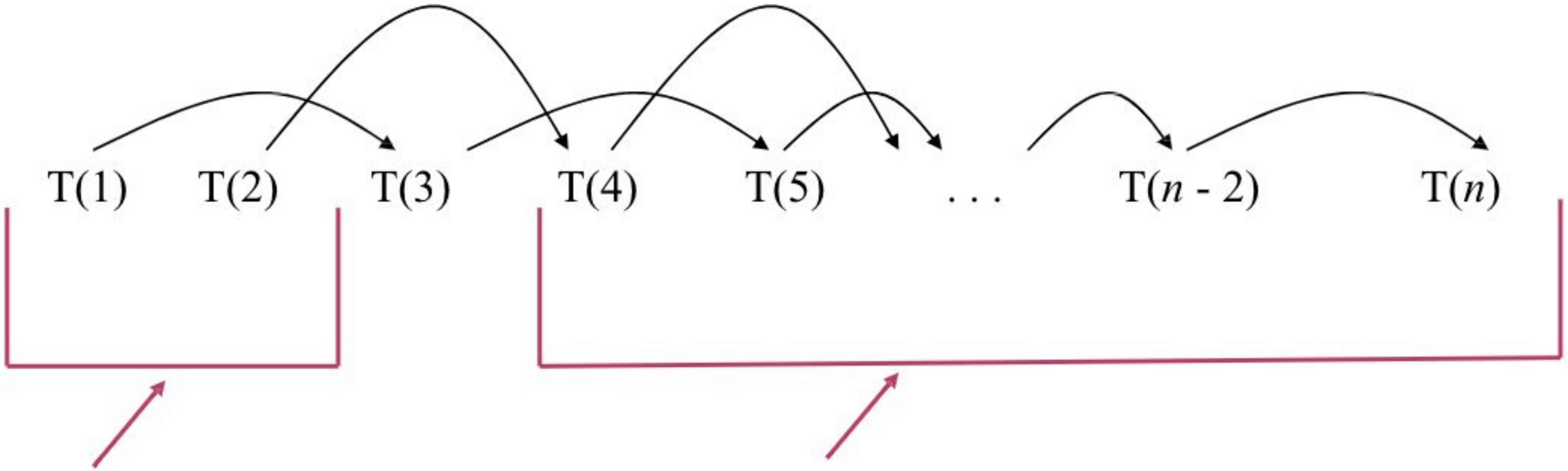
Base não necessariamente para n = 1

T(0) T(1) T(2) . . . T(n - 1) T(n)

verificação
de que
T(0) (base)
é verdade

hipótese de que T(n – 1) é verdade ($n \geq 1$)
+
prova de que a verdade de T(n – 1) implica que
T(n) é verdade

Redução subtrativa não necessariamente de 1 em 1



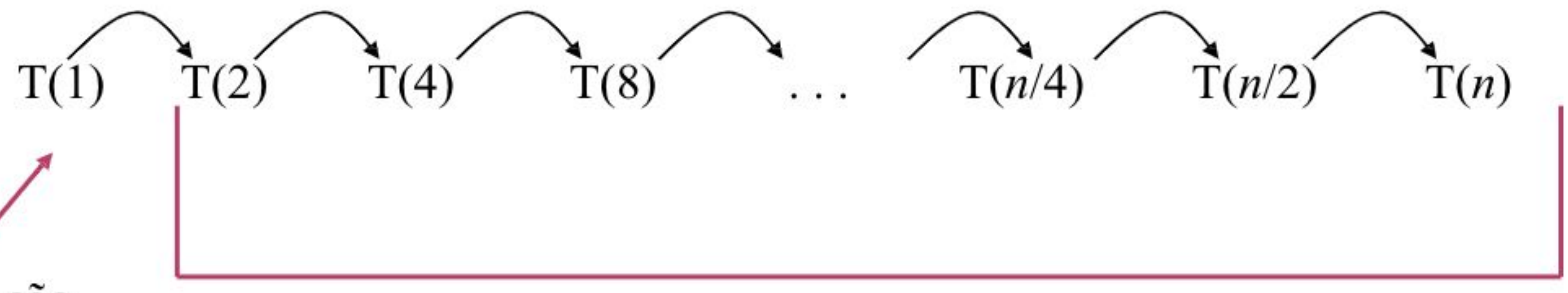
verificação de que T(1) e T(2) (bases) são verdade

hipótese de que $T(n-2)$ é verdade ($n \geq 3$)

+

prova de que a verdade de $T(n-2)$ implica que $T(n)$ é verdade

Redução não necessariamente subtrativa



verificação de que T(1) é verdade

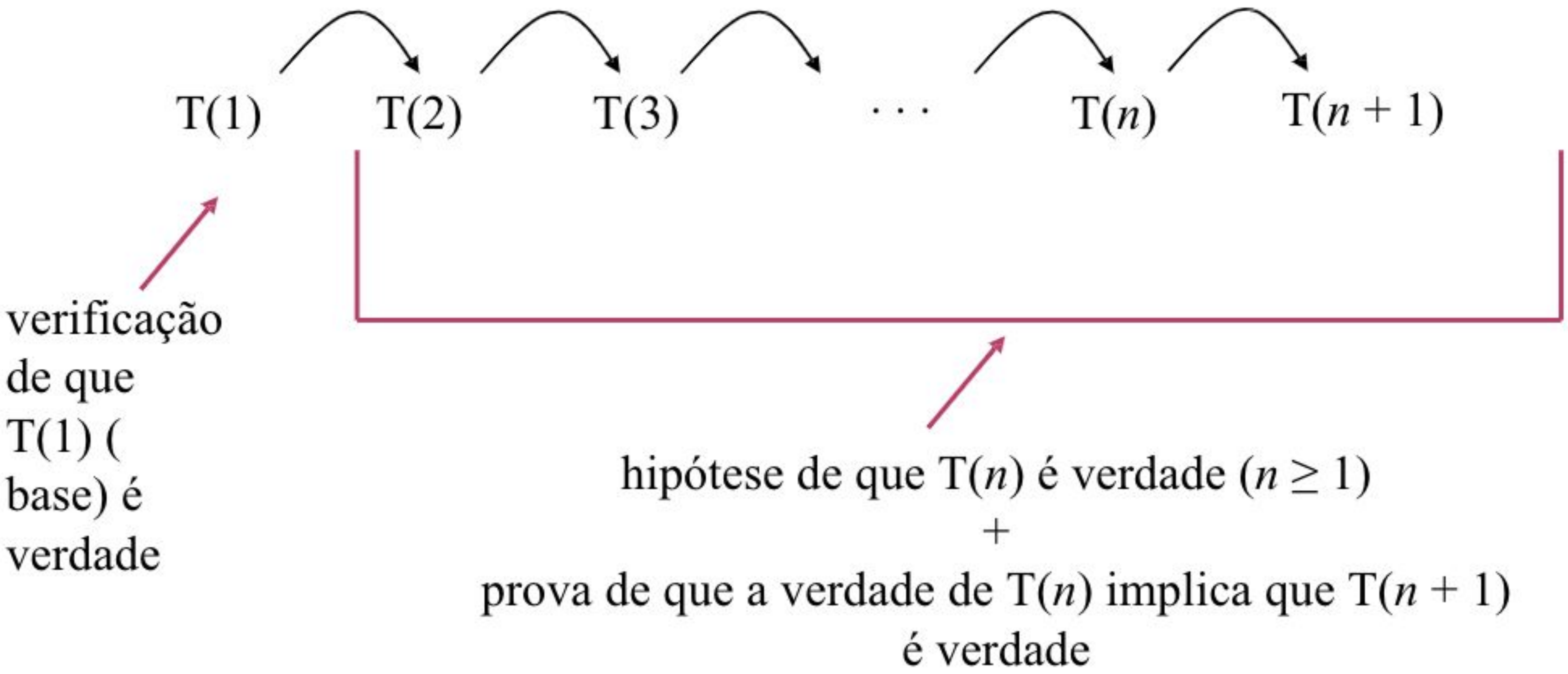
hipótese de que T(n/2) é verdade ($n \geq 2$)

+

prova de que a verdade de T(n/2) implica que T(n) é verdade

Obs.: nesta variante, a prova não valeria para todos os números naturais mas para 1, 2, 4, 8, ...

Término não necessariamente em T(n)



Partes de uma prova indutiva

Base ou bases

Hipótese de indução T(α)

Redução de T(β) para T(α)
(ou ampliação T(α) para T(β) ou relação indutiva entre T(α) e T(β))

Prova de que T(α) implicaem T(β).

Não importa a ordem!

Triângulo de Pascal

Ache uma expressão para a soma de uma linha do triângulo de Pascal e prove que sua expressão está correta.

1					=	1
1	1				=	2
1	2	1			=	4
1	3	3	1		=	8
1	4	6	4	1	=	16

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo
Campus Catanduva

Relação entre prova indutiva e algoritmo recursivo

i) Base

Caracterizada por $n = 1$.

Para $n = 1$ a soma é igual a $\boxed{1.}$

Pela fórmula $S(1) = 1 \cdot (1 + 1) / 2 = 1$.

ii) Hipótese de indução

$S(n - 1) = (n - 1)\, n / 2$

iii) Relação entre S(*n*) e S(*n* – 1)

$S(n) = 1 + 2 + ... + n - 1 + n$

$S(n - 1) = 1 + 2 + ... + n - 1$

Logo,

$\boxed{S(n) = S(n - 1) + n.}$

iv) Prova de que S(*n* – 1) implica em S(*n*)

$S(n) = S(n - 1) + n$

Usando a hipótese de indução, $S(n) = (n - 1)\, n/2 + n$.

Logo,

$S(n) = n\,(n + 1) / 2$,

como queríamos provar.

Algoritmo S (*n*)

Entrada: *n*, inteiro, $n \geq 1$.

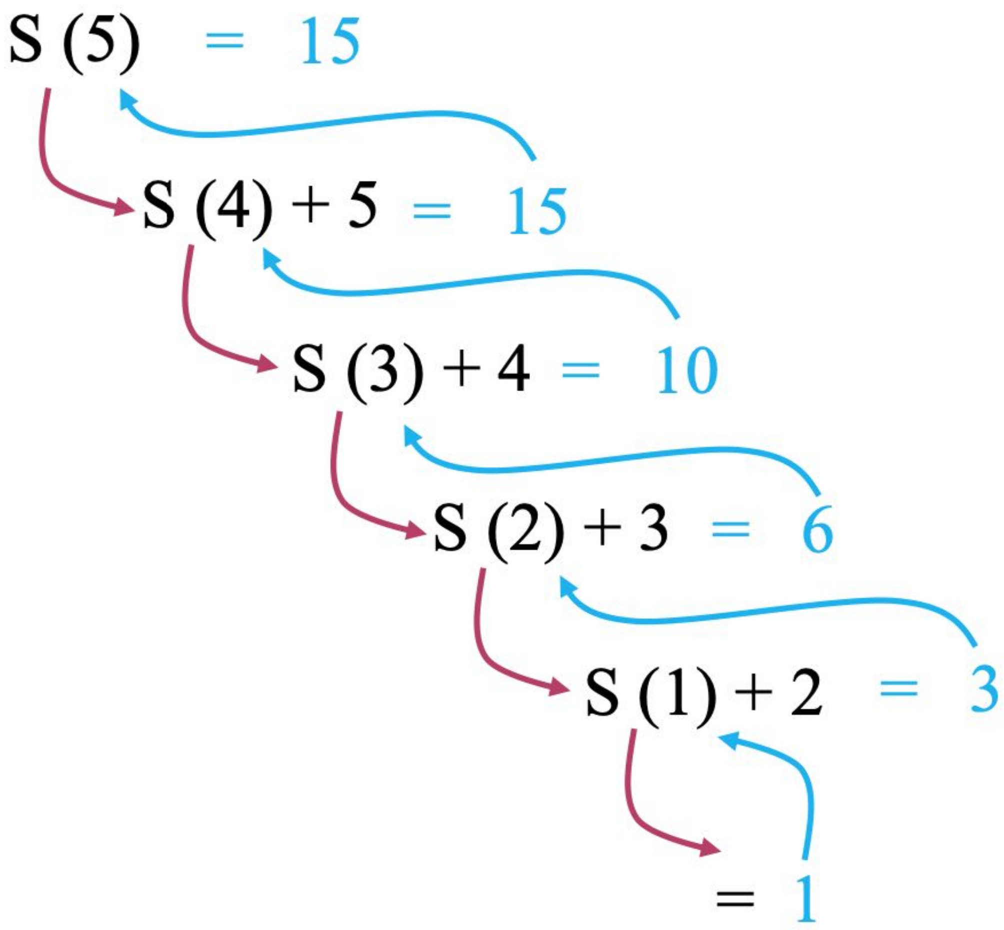
Saída: a soma $1 + 2 + 3 + ... + n$.

```
{
    se ( n = 1 )
        retornar 1
    senão
        retornar S(n - 1) + n
}
```

O cálculo de S(5)

Algoritmo S (n)
Entrada: n, inteiro, $n \geq 1$.
Saída: a soma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

```
{
   se ( n = 1 )
      retornar 1
   senão
      retornar S(n - 1) + n
}
```



Uma técnica de design de algoritmos por indução

1. Proponha uma **interface** para o algoritmo.
2. Descreva o **significado** da interface proposta.
    a. A sentença que descreve o significado deve especificar os parâmetros de entrada e saída.
3. Desenvolva uma **redução** de tamanho da solução do problema.
4. Tendo como referência a dinâmica das reduções, proponha **uma ou mais bases**.
5. Escreva o **algoritmo**

O algoritmo para o problema da soma dos n primeiros naturais obtido pela técnica descrita

I – **Interface**

S (n)

II – Significado

Retorna a soma dos n primeiros números naturais.

III – Redução

$S(n) = 1 + 2 + ... + n - 1 + n$

$S(n - 1) = 1 + 2 + ... + n - 1$

Logo, $S(n) = S(n - 1) + n$. $\longrightarrow$

Comandos (tendo como referência o significado):

retornar $S(n - 1) + n$

IV – Base

A redução ocorre de forma subtrativa de 1 em 1, i.e., $S(n) \rightarrow S(n - 1) \rightarrow ... \rightarrow S(2) \rightarrow S(1)$.

Propomos a base para $n = 1$. Para $n = 1$ o resultado da soma é igual a 1. $\longrightarrow$

Comandos (tendo como referência o significado):

retornar 1

O algoritmo para o problema da soma dos n primeiros naturais obtido pela técnica descrita

V – Algoritmo

Algoritmo S (n)
Entrada: n, inteiro, $n \geq 1$.
Saída: a soma $1 + 2 + 3 + ... + n$.
{
    se ($n = 1$)
        retornar 1
    senão
        retornar $S(n - 1) + n$
}

Aplicando a técnica para outros problemas...

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo
Campus Catanduva

Cálculo do maior elemento de um conjunto

I – Interface

Maior (A, n)

II – Significado

Retorna o índice do maior elemento do vetor A que possui n elementos.

III – Redução

	1	**2**	**3**	**4**	**5**		**6**	$= n$
A	**5**	**3**	**7**	**2**	**5**		**8**	

m := Maior (A, n – 1);

m recebe o índice do maior elemento entre os n - 1 primeiros

Comandos:

m := Maior (A, n – 1);

se (A[n] > A[m]) **retornar** n

senão **retornar** m

IV – Base

A redução ocorre de forma subtrativa de 1 em 1, assim propomos base para n = 1. Um vetor com um único elemento tem o maior elemento na posição 1.

Comandos:

retornar 1

Cálculo do maior elemento de um conjunto

V – Algoritmo

Algoritmo Maior (A, n)

Entrada: A, vetor, de n elementos, $n \geq 1$.

Saída: o índice do maior elemento do vetor A.

```
{
    se ( n = 1 )
        retornar 1
    senão
    {
        m := Maior (A, n – 1);
        se ( A[n] > A[m] ) retornar n
        senão retornar m
    }
}
```

Exercício

1. Aplique a técnica utilizada em sala para escrever um algoritmo para encontrar o menor número de um conjunto de dados.

Observações sobre o material eletrônico

- O material ficará disponível na pasta compartilhada que é acessada sob convite
- O material foi elaborado a partir de diversas fontes (livros, internet, colegas, alunos etc.)
- Alguns trechos podem ter sido inteiramente transcritos a partir dessas fontes
- Outros trechos são de autoria própria
- Esta observação deve estar presente em qualquer utilização do material fora do ambiente de aulas do IFSP - Catanduva