



Instituto Superior Universitario Tecnológico del Azuay
Tecnología Superior en Big Data

Taller de ejercicios - Límites

Alumno:

Eduardo Mendieta

Materia:

Matemática

Docente:

Lcda. Vilma Duchi, Mgtr.

Ciclo:

Primer ciclo

Fecha:

05/08/2024

Periodo Académico:

Abril 2024 - Agosto 2024

Taller de ejercicios - Límites

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Estime el valor del límite haciendo una tabla de valores, compruebe su trabajo con una gráfica:

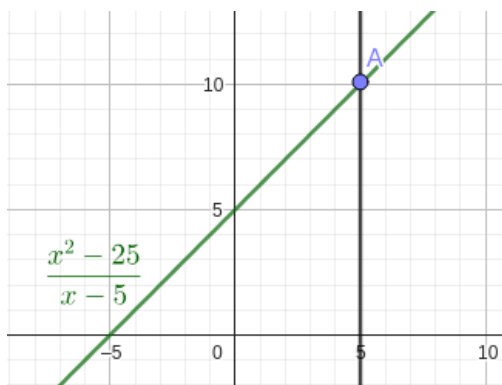
1)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} \approx 10$$

■ $\frac{4,9^2 - 25}{4,9 - 5} = 9,9$ $\frac{4,99^2 - 25}{4,99 - 5} = 9,99$ $\frac{4,999^2 - 25}{4,999 - 5} = 9,999$

■ $\frac{5,001^2 - 25}{5,001 - 5} = 10,001$ $\frac{5,01^2 - 25}{5,01 - 5} = 10,01$ $\frac{5,1^2 - 25}{5,1 - 5} = 10,1$

x	4.9	4.99	4.999	5	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	9.9	9.99	9.999	10	10.001	10.01	10.1



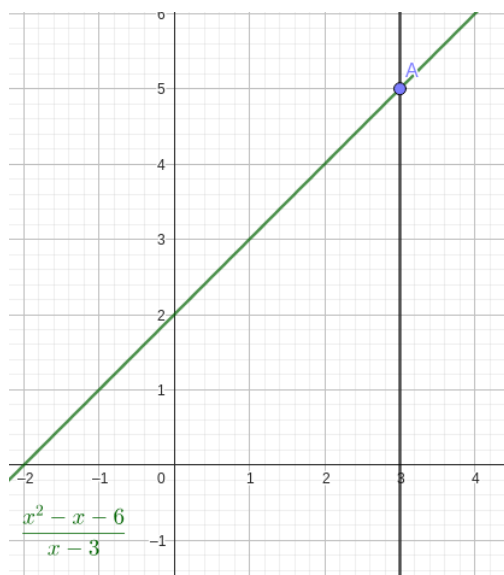
2)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \approx 5$$

■ $\frac{2,9^2 - 2,9 - 6}{2,9 - 3} = 4,9$ $\frac{2,99^2 - 2,99 - 6}{2,99 - 3} = 4,99$ $\frac{2,999^2 - 2,999 - 6}{2,999 - 3} = 4,999$

■ $\frac{3,001^2 - 3,001 - 6}{3,001 - 3} = 5,001$ $\frac{3,01^2 - 3,01 - 6}{3,01 - 3} = 5,01$ $\frac{3,1^2 - 3,1 - 6}{3,1 - 3} = 5,1$

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	4.9	4.99	4.999	5	5.001	5.01	5.1



2. Complete la tabla de valores (a cinco lugares decimales), y use la tabla para estimar el valor del límite:

1)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \approx 0,25$$

$$\begin{array}{lll} \blacksquare \frac{\sqrt{3,9}-2}{3,9-4} = 0,252 & \frac{\sqrt{3,99}-2}{3,99-4} = 0,25 & \frac{\sqrt{3,999}-2}{3,999-4} = 0,25 \\ \frac{\sqrt{3,9999}-2}{3,9999-4} = 0,25 & \frac{\sqrt{3,99999}-2}{3,99999-4} = 0,25 & \\ \blacksquare \frac{\sqrt{4,00001}-2}{4,00001-4} = 0,25 & \frac{\sqrt{4,0001}-2}{4,0001-4} = 0,25 & \frac{\sqrt{4,001}-2}{4,001-4} = 0,25 \\ \frac{\sqrt{4,01}-2}{4,01-4} = 0,25 & \frac{\sqrt{4,1}-2}{4,1-4} = 0,248 & \end{array}$$

x	3.9	3.99	3.999	3.9999	3.99999	4	4.00001	4.0001	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	0.252	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.248

2)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} \approx 0,2$$

$$\begin{array}{lll} \blacksquare \frac{1,9-2}{1,9^2+1,9-6} = 0,204 & \frac{1,99-2}{1,99^2+1,99-6} = 0,2 & \frac{1,999-2}{1,999^2+1,999-6} = 0,2 \\ \frac{1,9999-2}{1,9999^2+1,9999-6} = 0,2 & \frac{1,99999-2}{1,99999^2+1,99999-6} = 0,2 & \\ \blacksquare \frac{2,00001-2}{2,00001^2+2,00001-6} = 0,2 & \frac{2,0001-2}{2,0001^2+2,0001-6} = 0,2 & \frac{2,001-2}{2,001^2+2,001-6} = 0,2 \\ \frac{2,01-2}{2,01^2+2,01-6} = 0,2 & \frac{2,1-2}{2,1^2+2,1-6} = 0,196 & \end{array}$$

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.204	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.196

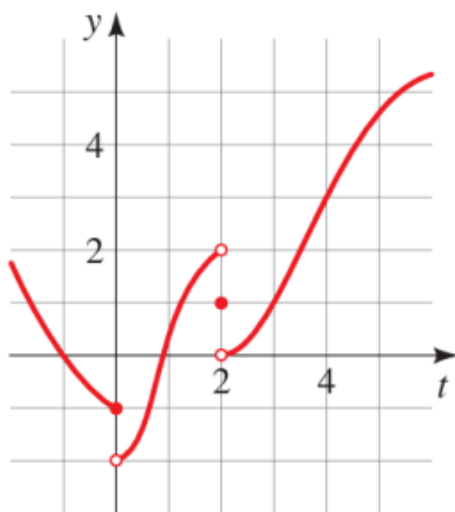
3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1} \approx 0,333$$

$$\begin{array}{lll} \blacksquare \frac{0,9-1}{0,9^3-1} = 0,369 & \frac{0,99-1}{0,99^3-1} = 0,337 & \frac{0,999-1}{0,999^3-1} = 0,334 \\ \frac{0,9999-1}{0,9999^3-1} = 0,333 & \frac{0,99999-1}{0,99999^3-1} = 0,333 & \\ \blacksquare \frac{1,00001-1}{1,00001^3-1} = 0,333 & \frac{1,0001-1}{1,0001^3-1} = 0,333 & \frac{1,001-1}{1,001^3-1} = 0,333 \\ \frac{1,01-1}{1,01^3-1} = 0,33 & \frac{1,1-1}{1,1^3-1} = 0,302 & \end{array}$$

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.369	0.337	0.334	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.333	0.33	0.302

3. Para la función f cuya gráfica nos dan, exprese el valor de la cantidad dada si existe; si no existe, explique por qué:



a.

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) \approx -1$$

b.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) \approx -2$$

c.

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$$

El límite no existe porque

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$$

d.

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) \approx 2$$

e.

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) \approx 0$$

f.

$$\lim_{t \rightarrow 2} g(t)$$

El límite no existe porque

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow 2^+} g(t)$$

g.

$$g(2) = 1$$

h.

$$\lim_{t \rightarrow 4} g(t) \approx 3$$

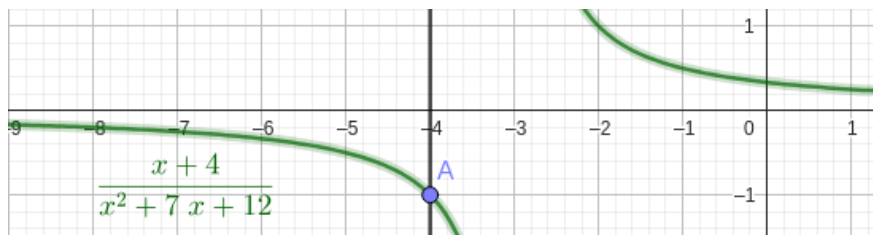
4. Use la tabla de valores para estimar el valor del límite. A continuación, use una calculadora gráfica para confirmar gráficamente sus resultados:

1)

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{x^2 + 7x + 12} \approx -1$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \frac{-4,1+4}{(-4,1)^2+7(-4,1)+12} = -0,909 & \frac{-4,01+4}{(-4,01)^2+7(-4,01)+12} = -0,99 \\ & \frac{-4,001+4}{(-4,001)^2+7(-4,001)+12} = -0,999 \\ \blacksquare \quad & \frac{-3,999+4}{(-3,999)^2+7(-3,999)+12} = -1,001 & \frac{-3,99+4}{(-3,99)^2+7(-3,99)+12} = -1,01 \\ & \frac{-3,9+4}{(-3,9)^2+7(-3,9)+12} = -1,111 \end{aligned}$$

x	-4.1	-4.01	-4.001	-4	-3.999	-3.99	-3.9
$f(x)$	-0.909	-0.99	-0.999	<i>-1</i>	-1.001	-1.01	-1.111

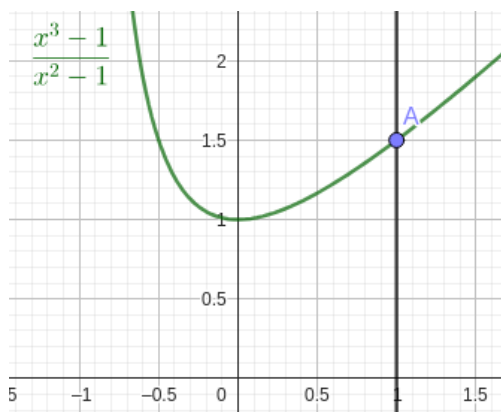


2)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \approx 1,5$$

- $\frac{0,9^3 - 1}{0,9^2 - 1} = 1,426$ $\frac{0,99^3 - 1}{0,99^2 - 1} = 1,493$ $\frac{0,999^3 - 1}{0,999^2 - 1} = 1,499$
- $\frac{1,001^3 - 1}{1,001^2 - 1} = 1,501$ $\frac{1,01^3 - 1}{1,01^2 - 1} = 1,508$ $\frac{1,1^3 - 1}{1,1^2 - 1} = 1,576$

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.426	1.493	1.499	<i>1.5</i>	1.501	1.508	1.576

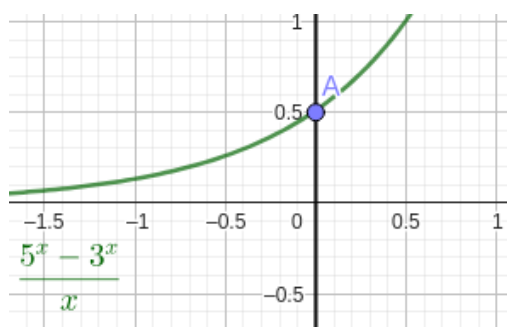


3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^x}{x} \approx 0,5$$

- $\frac{5^{-0,1} - 3^{-0,1}}{-0,1} = 0,446$ $\frac{5^{-0,01} - 3^{-0,01}}{-0,01} = 0,504$ $\frac{5^{-0,001} - 3^{-0,001}}{-0,001} = 0,51$
- $\frac{5^0,001 - 3^0,001}{0,001} = 0,512$ $\frac{5^0,01 - 3^0,01}{0,01} = 0,518$ $\frac{5^0,1 - 3^0,1}{0,1} = 0,585$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.446	0.504	0.51	0.5	0.512	0.518	0.585

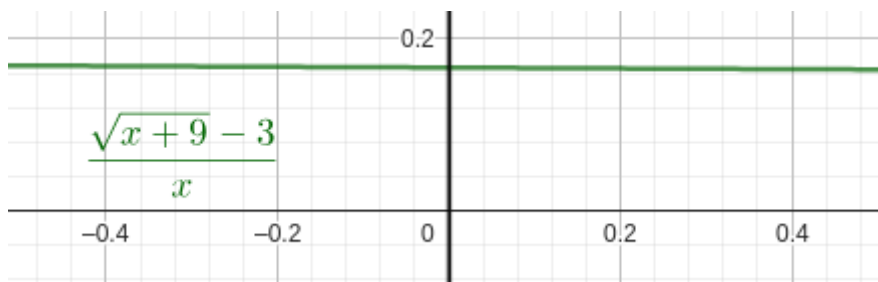


4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} \approx 0,17$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{\sqrt{-0,1+9}-3}{-0,1} &= 0,167 & \frac{\sqrt{-0,01+9}-3}{-0,01} &= 0,167 & \frac{\sqrt{-0,001+9}-3}{-0,001} &= 0,167 \\ \blacksquare \frac{\sqrt{0,001+9}-3}{0,001} &= 0,167 & \frac{\sqrt{0,01+9}-3}{0,01} &= 0,167 & \frac{\sqrt{0,1+9}-3}{0,1} &= 0,166 \end{aligned}$$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.167	0.167	0.167	0.17	0.167	0.167	0.166



5. Evalúe el límite y justifique cada paso al indicar las leyes de límites apropiadas:

1)

$$\lim_{x \rightarrow 4} (5x^2 - 2x + 3)$$

Por la ley de la suma/resta:

$$\lim_{x \rightarrow 4} 5x^2 - \lim_{x \rightarrow 4} 2x + \lim_{x \rightarrow 4} 3$$

Evaluando los límites:

$$= 5(4)^2 - 2(4) + 3 = 75$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + 2)(x^2 - 5x)$$

Por la ley del producto:

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^3 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 5x$$

Por la ley de la suma/resta:

$$\left(\lim_{x \rightarrow 3} x^3 + \lim_{x \rightarrow 3} 2 \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 5x \right)$$

Evaluando los límites:

$$= ((3)^3 + 2) \cdot ((3)^2 - 5(3)) = -174$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$$

Por la ley del cociente:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow -1} x - 2}{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 4x - 3}$$

Por la ley de la suma/resta:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow -1} x - \lim_{x \rightarrow -1} 2}{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 4x - \lim_{x \rightarrow -1} 3}$$

Evaluando los límites:

$$= \frac{(-1) - 2}{(-1)^2 + 4(-1) - 3} = 0,5$$

4)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3} \right)^2$$

Por la ley de la potencia:

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3} \right)^2$$

Por la ley del cociente:

$$\left(\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^4 + \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 6}{\lim_{x \rightarrow 1} x^4 + \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 3} \right)^2$$

Por la ley de la suma/resta:

$$\left(\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^4 + \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 6}{\lim_{x \rightarrow 1} x^4 + \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 3} \right)^2$$

Evaluando los límites:

$$= \left(\frac{(1)^4 + (1)^2 - 6}{(1)^4 + 2(1) + 3} \right)^2 \approx 0,4444$$

6. Evalúe el límite si existe:

1)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = (2) + 3 = 5$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x+1)}{(x+4)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+1}{x-1} = \frac{(-4)+1}{(-4)-1} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 6}{x + 2} = \frac{(2)^2 - (2) + 6}{(2) + 2} = \frac{8}{4} = 2$$

4)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{(1)^2 + (1) + 1}{(1) + 1} = \frac{3}{2}$$

5)

$$\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3} = \lim_{t \rightarrow -3} \frac{(t-3)(t+3)}{(2t+1)(t+3)} = \lim_{t \rightarrow -3} \frac{t-3}{2t+1} = \frac{(-3)-3}{2(-3)+1} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}$$

6)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h} + 1}{\sqrt{1+h} + 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+(0)} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^3 + 3(2^2)(h) + 3(2)(h^2) + h^3 - 8}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 6h + 12 = (0)^2 + 6(0) + 12 = 12 \end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4)(x+2)(x-2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4)(x+2) = ((2)^2 + 4) \cdot ((2) + 2) = 32 \end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 3}{\sqrt{x+2} + 3} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x + 2 - 9}{(x - 7)(\sqrt{x+2} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{(x - 7)(\sqrt{x+2} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 3} = \frac{1}{\sqrt{7+2} + 3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^{-1} - 3^{-1}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^{-1}}{h} - \frac{3^{-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h(3+h)} - \frac{1}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3h+h^2} - \frac{1}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h - (3h+h^2)}{(3h+h^2)(3h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2}{9h^2+3h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2}{3h^2(3+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{9+3h} = \frac{-1}{9+3(0)} = -\frac{1}{9}\end{aligned}$$

11)

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{x+4}{4x}}{4 + x} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{4x(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{4x} = \frac{1}{4(-4)} = -\frac{1}{16}$$

12)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + t - t}{t(t^2 + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t+1} = \frac{1}{(0)+1} = 1$$

7. Encuentre el límite, si existe. Si el límite no existe, explique por qué:

1)

$$\lim_{x \rightarrow -4} |x + 4|$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{|x + 4|}{x + 4}$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

4)

$$\lim_{x \rightarrow 1,5} \frac{2x^2 - 3x}{|2x - 3|}$$

5)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

8. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & , \text{ si } x < 2 \\ x^2 - 4x + 6 & , \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

9. Sea:

$$h(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } x < 0 \\ x^2 & , \text{ si } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

10. Resuelva los siguientes límites al infinito:

1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x - 1} - \frac{x}{4} \right)$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x^2 - \sqrt{x^4 + 1} \right)$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 1} \right)$$

4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 8}{-5x + 2}$$

5)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x^4 - x - 6}$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^7 - 4x^3}}{x^2 + 5x}$$