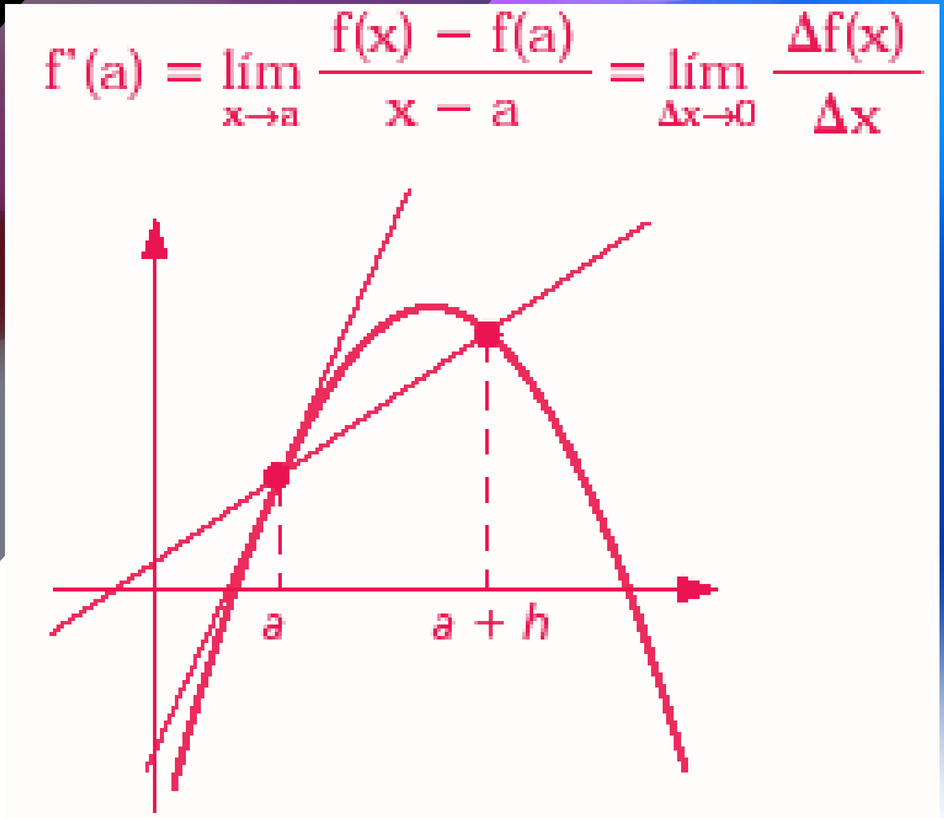
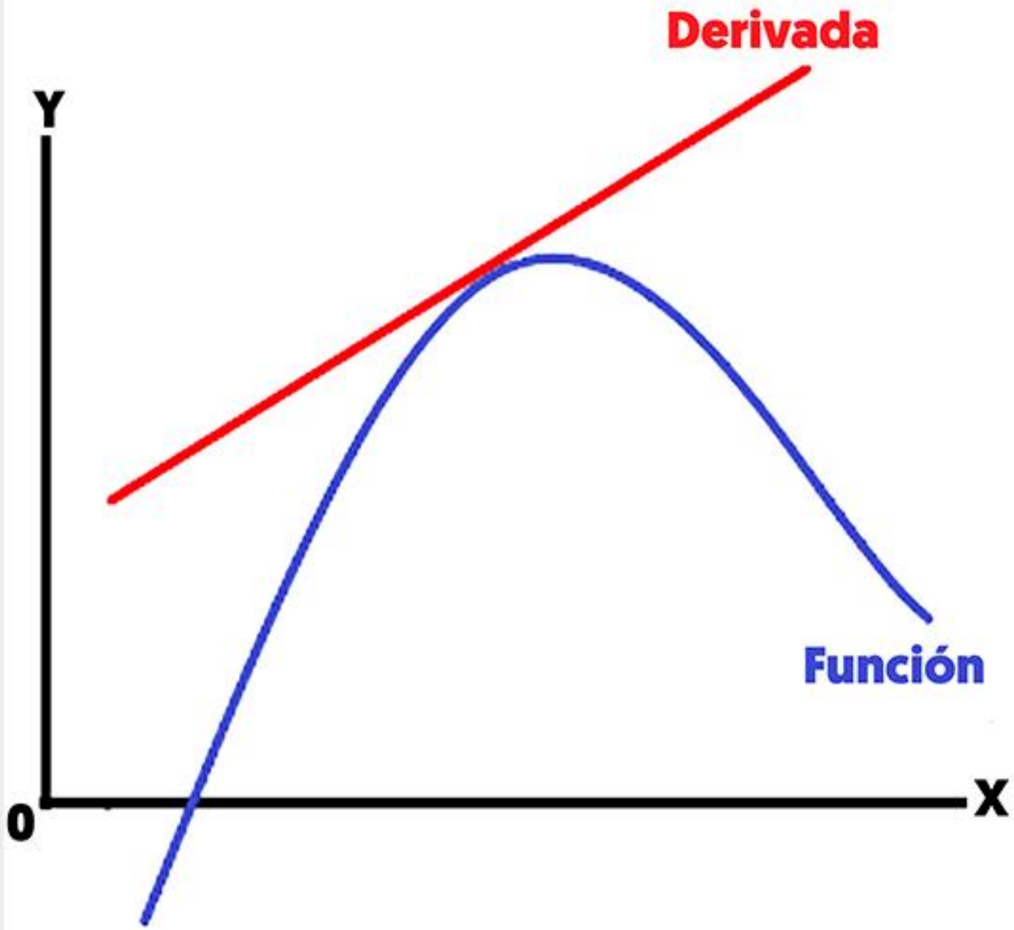
TEC.AZUAY
INSTITUTO UNIVERSITARIO

UNIDAD 6
DERIVADAS



Mgtr. Vilma Duchi F.



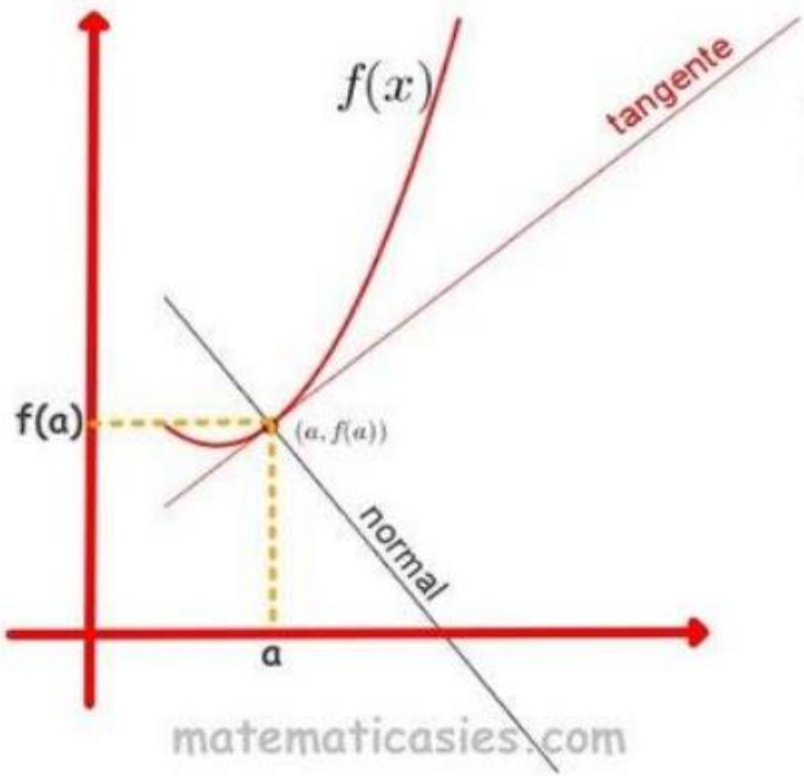
La derivada es un concepto fundamental en matemáticas que representa **la tasa de cambio instantáneo de una función en un punto específico.**

Es una **medida de la pendiente de la curva de la función en ese punto.**

La derivada se utiliza para analizar **cómo cambia una función en diferentes puntos y para encontrar extremos locales**, tasas de crecimiento, concavidad y otras propiedades de las funciones.

Se representa matemáticamente mediante el símbolo **"d/dx"** o **"f'(x)"**. La derivada juega un papel crucial en el cálculo y es fundamental en áreas como física, ingeniería y ciencias naturales.

INTERPRETACIÓN GEOMETRICA



f'(a) es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto a

Ecuación recta tangente

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Ecuación recta normal (perpendicular)

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

EJEMPLO DE DERIVADAS POR LIMITE

$$y = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

ACTIVIDAD

$$f(x) = -2x$$

$$f(x) = -2x + 2$$

$$f(x) = -2x^2 - 5$$

REGLAS DE LAS DERIVADAS

Regla	Función	Derivada
Constante	$y = c$	$y' = 0$
Identidad	$y = x$	$y' = 1$
Potencia	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
Constante por una función	$y = cf(x)$	$y' = cf'(x)$
Suma o resta	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
Producto	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
Cociente	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Regla de la cadena	$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1} \cdot u'$

Derivada de una constante

La **derivada de una constante** siempre es igual a cero, independientemente del valor de la constante.

$$\boxed{f(x) = k \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 0}$$

Por lo tanto, para hallar la derivada de una función constante no es necesario hacer ningún cálculo, simplemente la derivada es nula.

$$f(x) = 3 \qquad \longrightarrow \qquad f'(x) = 0$$

$$g(x) = -5 \qquad \longrightarrow \qquad g'(x) = 0$$

$$h(x) = 291 \qquad \longrightarrow \qquad h'(x) = 0$$

La **derivada de una función lineal** es el coeficiente del término de primer grado, es decir, la derivada de una función lineal *f(x)=Ax+B* es igual a *A*

$$\boxed{f(x) = Ax + B \quad \longrightarrow \quad f'(x) = A}$$

Fíjate en los siguientes ejemplos cómo se han derivado este tipo de funciones:

$$f(x) = 3x - 1 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 3$$

$$f(x) = 5x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 5$$

$$f(x) = -2x + 9 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = -2$$

La **derivada de una potencia**, o función potencial, es el producto del exponente de la potencia por la base elevada al exponente menos 1.

$$\boxed{f(x) = x^k \quad \longrightarrow \quad f'(x) = k \cdot x^{k-1}}$$

Por lo tanto, para derivar una potencia solamente tenemos que multiplicar la función por el exponente y restarle una unidad al exponente.

Por ejemplo, la derivada de la potencia x elevada al cubo es:

$$f(x) = x^3 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

Derivada de una raíz

La **derivada de una raíz,** o función irracional, es igual a uno partido por el producto del índice de la raíz por la misma raíz restándole 1 al exponente del radicando.

$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$$

A modo de ejemplo, seguidamente puedes ver resuelta la derivada de la raíz cuadrada de x:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^{2-1}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivada de una función exponencial

La **derivada de una función exponencial** depende de si la base es el número *e* o cualquier otro número. De manera que hay dos fórmulas para derivar este tipo de funciones y deberemos utilizar la que corresponda según la base de la potencia:

$$f(x) = a^x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

$$f(x) = e^x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = e^x$$

A continuación puedes ver dos derivadas resueltas de este tipo de funciones:

$$f(x) = 7^x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 7^x \cdot \ln(7)$$

$$f(x) = e^x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = e^x$$

Derivada de una función logarítmica

La **derivada de una función logarítmica** depende de la base del logaritmo, ya que si el logaritmo es natural se debe aplicar una fórmula para hallar la derivada y si el logaritmo tiene como base otro número se debe usar otra regla.

$$f(x) = \ln(x) \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \log_a(x) \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Por ejemplo, la derivada del logaritmo en base tres de x es:

$$f(x) = \log_3(x) \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(3)}$$

ACTIVIDAD

1 $f(x)=5$

2 $f(x)=-2x$

3 $f(x)=-2x+2$

4 $f(x)=-2x^2-5$

5 $f(x)=2x^4+x^2-x^2+4$

A) $f(x) = x^8$

B) $f(x) = 3x^5$

C) $f(x) = -2x^{-4}$

D) $f(x) = (3x^2 - 4x)^6$

E) $f(x) = 6(x^2 + 10)^3$

A) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

B) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

C) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$

D) $f(x) = \sqrt[4]{x^9 + 5x^4 - 2x}$

E) $f(x) = \sqrt[5]{3(x^2 - 1)^4}$

REGLA DE LA CADENA

Las reglas de derivación proporcionan la derivada de las operaciones entre funciones. Son las siguientes:

Derivada de la suma de dos funciones:

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$

Derivada de la resta de dos funciones:

$$\left(f(x)-g(x)\right)'=f'(x)-g'(x)$$

Derivada del producto de una constante, a, por una función:

$$\left(a\cdot f(x)\right)'=a\cdot f'(x)$$

Derivada del producto de dos funciones:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=$$

$$=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

Derivada del cociente de dos funciones:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=$$

$$=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Derivadas de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

ACTIVIDADES:

$f(x) = (x^3 + 2x)e^x$	$g(x) = \sqrt{x}\, e^x$
$y = \dfrac{x}{e^x}$	$y = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$
$g(x) = \dfrac{1 + 2x}{3 - 4x}$	$G(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1}$
$H(u) = (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})$	
$J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$	
$F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$	
$f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$	
$y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$	$y = \dfrac{x + 1}{x^3 + x - 2}$
$y = \dfrac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^2 + 1}$	$y = \dfrac{t}{(t - 1)^2}$
$y = e^p(p + p\sqrt{p})$	$y = \dfrac{1}{s + ke^s}$
$y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$	$z = w^{3/2}(w + ce^w)$
$f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$	$g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$
$f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$	$f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

ACTIVIDADES:

Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$
2. $f(x) = \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cot x$
4. $y = 2\sec x - \csc x$
5. $y = \sec\theta\,\tan\theta$
6. $g(\theta) = e^\theta(\tan\theta - \theta)$
7. $y = c\cos t + t^2\operatorname{sen} t$
8. $f(t) = \dfrac{\cot t}{e^t}$
9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$
10. $y = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$
11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$
12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$
13. $y = \dfrac{t\operatorname{sen} t}{1 + t}$
14. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\tan x}$
15. $f(x) = xe^x\csc x$
16. $y = x^2\operatorname{sen} x\tan x$

DERIVADAS IMPLICITAS

Al considerar la función con ecuación $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$, es posible determinar $f'(x)$ con los teoremas enunciados anteriormente, ya que f es una función dada implícitamente en términos de la variable independiente x.

Sin embargo, existen funciones que no están definidas en forma explícita, ejemplos de las cuales son las siguientes:

$3x^2y^2 - 5xy^3 + x = 5, \quad x^2 - x = 5xy^2 - y^4$

Estas ecuaciones no pueden ser resueltas explícitamente para "y" en términos de "x". Se dice que la función f está definida implícitamente por las ecuaciones: $3x^2[f(x)]^2 - 5x[f(x)]^3 + x = 5$ y $x^2 - x = 5x[f(x)]^2 - [f(x)]^4$, respectivamente.

Note que ambas expresiones son de la forma general $g(x, y) = 0$. Interesa ahora determinar la derivada de una función dada en forma implícita.

La derivada es utilizada en casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una magnitud o situación

Funciones implícitas

No aparece despejada la y

Sino que la relación entre X e Y viene dada por una ecuación de dos incógnitas cuyo segundo miembro es cero.

$$6X-2Y=0$$

FUNCIONES

EXPLÍCITAS

Son aquellas funciones donde la variable "y" está despejada.

Ejemplos:

$$y = 3x^2 - 2\sqrt[3]{x} + 5$$

$$y = \frac{3sen(x-4)}{1+\cos x}$$

IMPLÍCITAS

Una correspondencia o una función está definida en forma implícita; cuando no aparece despejada la «y» sino que la relación entre **x** e **y** viene dada por una ecuación de dos incógnitas cuyo segundo miembro es cero.

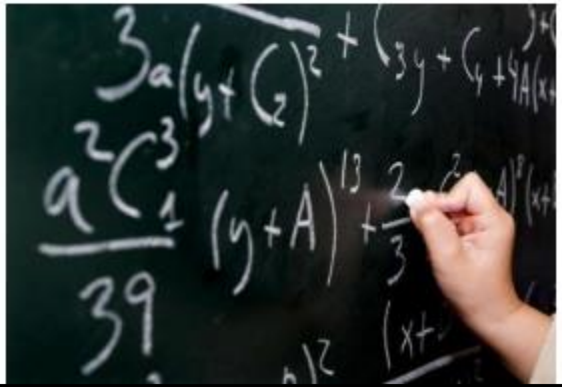
Ejemplos:

$$x^2 + \mathrm{y}^2 - 5 = 0$$

$$3x\mathrm{y}^2 - 5x + \sqrt{xy} = 4$$

Estrategias para la derivación implícita

1. Derivar ambos lados de la ecuación respecto de x
2. Agrupar todos los términos en que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación
3. Factorizar dy/dx del lado izquierdo de la ecuación
4. Despejar dy/dx



Derivación Implícita

Para derivar funciones implícitas, es decir, para hallar $f'(x)$ se debe aplicar la regla de la cadena.

$y = 2x + 5$ Función Explícita

Ejemplo 1

Determinar la primera derivada de la función $x^2 + y^2 = 5$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$2yy' = -2x$$

$$y' = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}y} ¿ \frac{-x}{y}$$

$$\therefore \quad y' = -\frac{x}{y}$$

Ejemplo 2

Determinar la derivada de la función $3x^2y + 4x = 2y^3 - 7x^4$

Aplicar la regla de la cadena cuando se deriva la variable "**y**"

$$3x^2y + 4x = 2y^3 - 7x^4$$

$$3 \cdot 2xy + 3x^2y' + 4 = 2 \cdot 3y^2y' - 7 \cdot 4x^3$$

$$6xy + 3x^2y' + 4 = 6y^2y' - 28x^3$$

$$3x^2y' - 6y^2y' = -28x^3 - 6xy - 4$$

$$y'(3x^2 - 6y^2) = -28x^3 - 6xy - 4$$

$$y = f(x).g(x)$$

$$y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$y' = \frac{-28x^3 - 6xy - 4}{3x^2 - 6y^2}$$

Ejemplo 3

Determinar la derivada de la función $y^5 - 2xy^3 = 7x^3 + 2.$

$$5y^4y' - \left(2y^3 + 2x(3)y^2y'\right) = 21x^2$$

$$5y^4y' - 2y^3 - 6xy^2y' = 21x^2$$

=

$$y'\left(5y^4 - 6xy^2\right) = 21x^2 + 2y^3$$

$$y' = \frac{21x^2 + 2y^3}{5y^4 - 6xy^2}$$

$$y = f(x).g(x)$$

$$y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Ejemplo 4

Determinar la derivada de la función $x^3 + 3x^2y + 5xy^2 + y^3 = 0$

$$3x^2 + 6xy + 3x^2(1)y' + 5y^2 + 5x(2)y\,y' + 3y^2y' = 0$$

$$3x^2 + 6xy + 3x^2y' + 5y^2 + 10xy\,y' + 3y^2y' = 0$$

$$y = f(x).g(x)$$

$$y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$y'(3x^2 + 10xy + 3y^2) = 3x^2 + 6xy - 5y^2$$

$$y' = \frac{3x^2 + 6xy - 5y^2}{3x^2 + 10xy + 3y^2}$$

Ejemplo 5

Determinar la derivada de la función $2xy - y^2 = 1 - 3y^3$

$$y = f(x).g(x)$$

$$y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$2y + 2x(1)y' - 2y\,y' = -9y^2y'$$

$$2x\,y' - 2y\,y' + 9y^2y' = -2y$$

$$y'(2x - 2y + 9y^2) = -2y$$

$$y' = \frac{-2y}{2x - 2y + 9y^2}$$

Derivadas de funciones implícitas

1. $x^2 + y^2 - 5 = 0$
2. $x^2 y - xy^2 + y^2 = 7$
3. $x^3 - y^5 + 3x^2 - 6y = 1$
4. $3xy^2 - 5x + \sqrt{xy} = 4$

Suponiendo que en los problemas del 1 al 12 cada ecuación define una función derivable de x, encuentre $D_x y$ por *medio de la derivación implícita.*

1. $y^2 - x^2 = 1$

2. $9x^2 + 4y^2 = 36$

3. $xy = 1$

4. $x^2 + \alpha^2 y^2 = 4\alpha^2$, donde α es una constante.

5. $xy^2 = x - 8$

6. $x^2 + 2x^2 y + 3xy = 0$

7. $4x^3 + 7xy^2 = 2y^3$

8. $x^2 y = 1 + y^2 x$

9. $\sqrt{5xy} + 2y = y^2 + xy^3$

10. $x\sqrt{y + 1} = xy + 1$

11. $xy + \operatorname{sen}(xy) = 1$

12. $\cos(xy^2) = y^2 + x$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

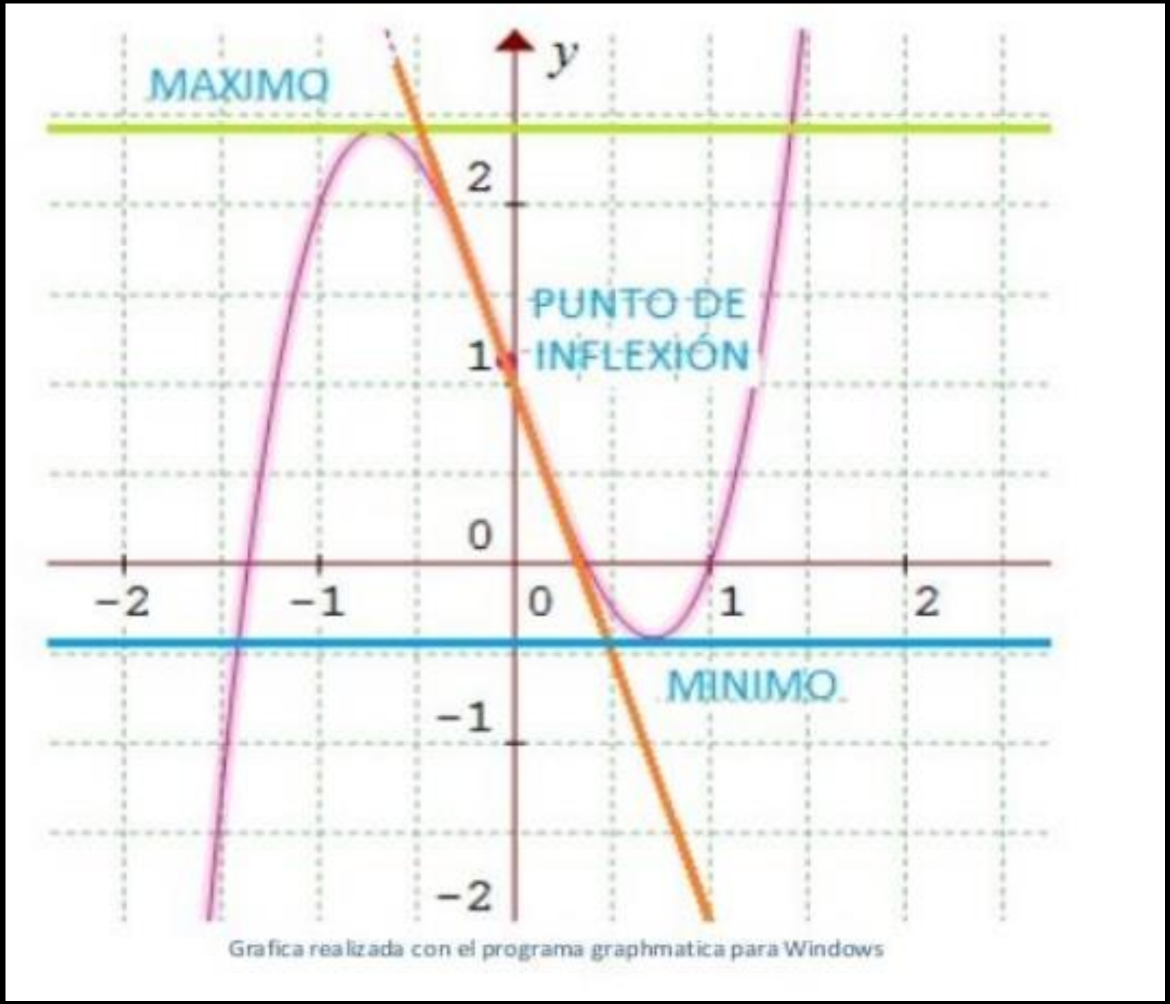
Se conoce como criterio de la primera derivada, a el principio matemático que permite determina cuando hay un mínimo o un máximo o un punto de inflexión en una función.

Sea c un punto de análisis de una función f continua y derivable en un intervalo abierto S, en donde c pertenece a S, puede darse que:

1. Si f´(x) cambia de signo (positiva a negativa) en c, entonces f tiene un máximo relativo en (c, f(c))

2. Si f´(x) cambia de signo (negativa a positiva) en c, entonces f tiene un mínimo relativo en (c, f(c))

3. Si f´(x) es positiva o negativa en ambos lados de c, entonces f(c) es un punto de inflexión. (ni máximo ni mínimo)


MAXIMO
PUNTO DE
INFLEXIÓN
MINIMO
y
2
1
0
−1
−2
−2
−1
0
1
2
Grafica realizada con el programa graphmatica para Windows

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Se conoce como criterio de la segunda derivada, a el principio matemático que permite realiza una prueba de verificación de los máximos y mínimos

Sea c un punto de análisis de una función f de tal forma que $f'(x)=0$ y $f''(x)$ exista en un intervalo abierto S, en donde c pertenece a S, puede darse que:

1. Si $f''(x) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en $(x, f(x))$

2. Si $f''(x) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en $(x, f(x))$

3. Si $f''(x) = 0$ entonces el criterio falla.

PASOS

Paso 1. Calcular la derivada de $f(x)$.
Paso 2. Igualar $f'(x)$ a cero para encontrar los valores críticos.
Paso 3. Elegir un número menor y un número mayor a cada valor crítico, estos puntos tienen que ser cercanos a los valores críticos.
Paso 4. Evaluar $f'(x)$ en los puntos elegidos.
Paso 5. Aplicar el criterio de la primera derivada.
Paso 6. Encontrar las coordenadas de los máximos y mínimos (si los hay).

Ejemplo

Determine los máximos y los mínimos para la función

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

Hallemos los puntos críticos.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0$$

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0\,, v, x^2 - 1 = 0$$

Los puntos críticos son entonces

$$x_1 = -1\,, x_2 = 0\,, x_3 = 1$$

Ahora aplicamos el criterio de la segunda derivada

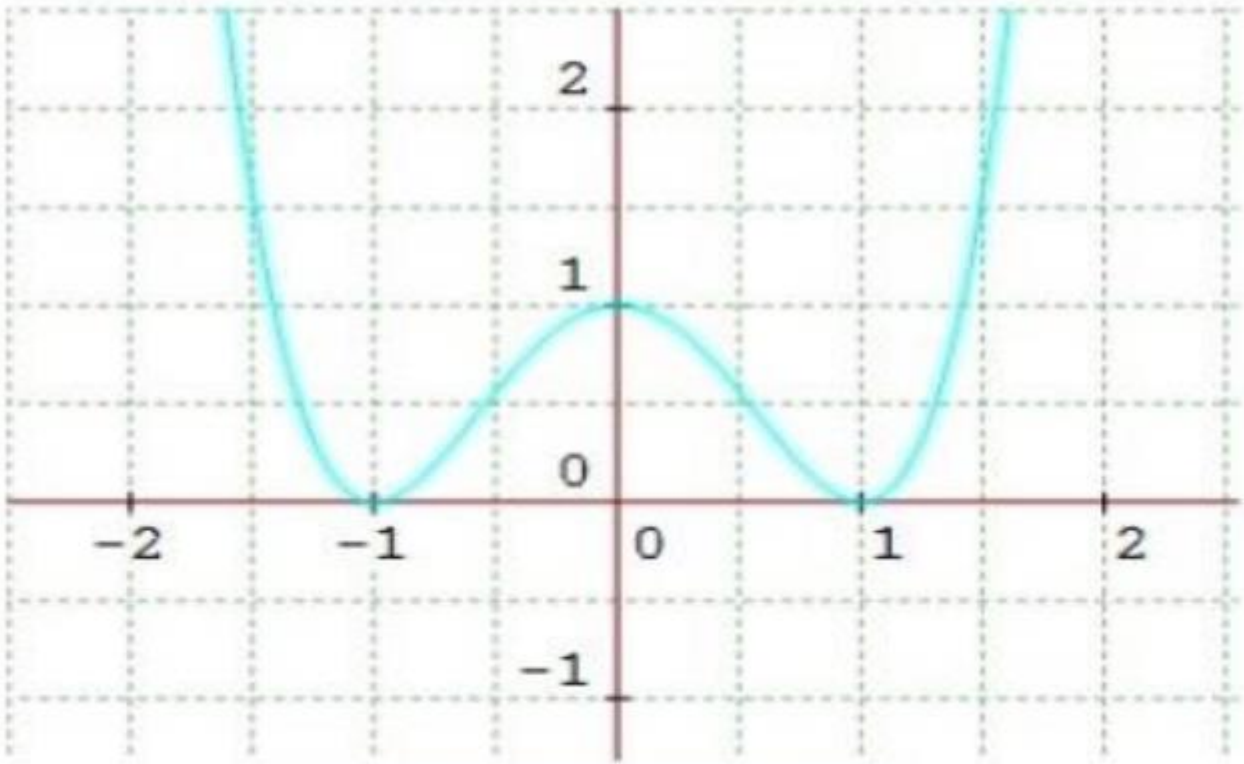
$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

Evaluemos los puntos críticos en f´´

$$f''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 \text{ un mínimo}$$

$$f''(0) = 12(0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4 \text{ un máximo}$$

$$f''(1) = 12(1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 \text{ un mínimo}$$



Grafica realizada con el programa graphmatica para Windows

OPTIMIZACIÓN

Los problemas de optimización tiene como objetivo maximizar o minimizar funciones.

Para resolver un problema de máximo o mínimo, es necesario construir la función que modela el problema y tratar que está depende de una sola variable.

PROBLEMA

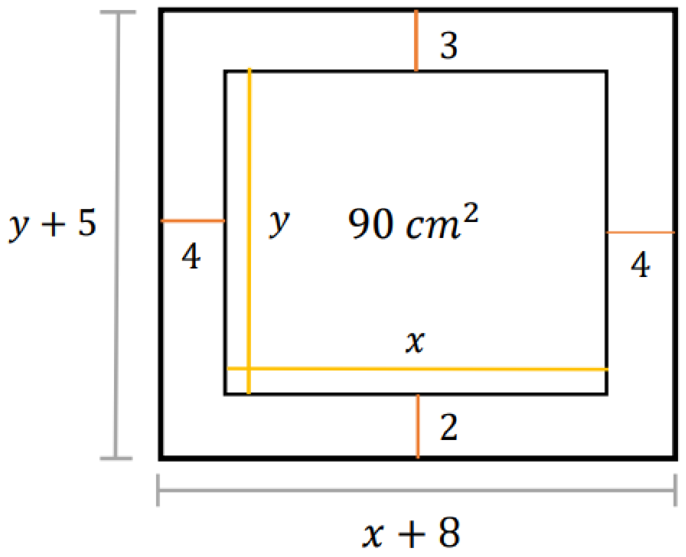
Resuelva el siguiente problema:

"Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar $90\ cm^2$*, el margen superior debe medir* $3\ cm$*, el inferior* $2\ cm$*, y los márgenes laterales* $4\ cm$ *cada uno.*

Determine las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible".

Paso 1

Representar el problema



Paso 2

Generar la función objetivo

$$A = (y+5)(x+8)$$

Para minimizar la cantidad de papel, es necesario determinar el área de la lámina del cartel.

Paso 3

Formular la ecuación auxiliar

$$x \cdot y = 90$$

La ecuación auxiliar permite representar una variable en términos de otras, con la finalidad de establecer la función objetivo en una sola variable.

Paso 4

Despejar la variable "y" de la ecuación auxiliar.

$$y = \frac{90}{x}$$

Paso 5

Sustituir "y" en la función objetivo y simplificar.

$$A(x) = \left(\frac{90}{x} + 5\right)(x + 8)$$

$$A(x) = \frac{90}{x} \cdot x + 5x + 8 \cdot \frac{90}{x} + 40$$

$$A(x) = \frac{90}{\cancel{x}} \cancel{\cdot x} + 5x + 8 \cdot \frac{90}{x} + 40$$

$$A(x) = 90 + 5x + \frac{720}{x} + 40$$

$$A(x) = 130 + 5x + \frac{720}{x}$$

Paso 6

Calcular la derivada de la función objetivo

$$A'(x) = 5 + \frac{0 \cdot x - 720 \cdot 1}{x^2}$$

$$A'(x) = 5 - \frac{720}{x^2}$$

Paso 7

Resolver la suma de fracciones

$$A'(x) = \frac{5x^2 - 720}{x^2}$$

Paso 8

Obtener los puntos críticos

$$\frac{5x^2 - 720}{x^2} = 0$$

$$\frac{5(x^2 - 144)}{x^2} = 0$$

$$\frac{5(x - 12)(x + 12)}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 0 \qquad x - 12 = 0 \qquad x + 12 = 0$$

$$\boxed{x = 0} \qquad \boxed{x = 12} \qquad \boxed{x = -12}$$

De los puntos críticos que se obtuvieron, $x = 0$ corresponde a una restricción, razón por la cual no se puede presentar un máximo ni un mínimo.

Paso 9

Calcular la segunda derivada de la función objetivo.

$$A''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - -720 \cdot 2x}{x^4}$$

$$A''(x) = \frac{1440x}{x^4}$$

$$A''(x) = \frac{1440\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}}$$

$$A''(x) = \frac{1440}{x^3}$$

Paso 10

Evaluar los puntos críticos en la segunda derivada.

$$A''(12) = \frac{1440}{(12)^3} > 0$$

Punto mínimo

El criterio de la segunda derivada, establece que si al evaluar el punto crítico en la segunda derivada y se obtiene un valor positivo, entonces en ese punto crítico se presenta un mínimo relativo.

$$A''(-12) = \frac{320}{(-12)^3} < 0$$

Punto máximo

El criterio de la segunda derivada, establece que si al evaluar el punto crítico en la segunda derivada y se obtiene un valor negativo, entonces en ese punto crítico se presenta un máximo relativo.

Paso 11

Determinar el valor de las variables "x" y "y"

$$x = 12$$

De los puntos críticos que se obtuvieron, en $x = 12$ es donde la función objetivo alcanza un mínimo.

$$y = \frac{90}{x} = \frac{90}{12} = \frac{15}{2} = 7.5$$

Paso 12

Determinar las dimensiones del cartel

$$x + 8 = 12 + 8 = 20$$

$$y + 5 = 7.5 + 5 = 12.5$$

Paso 13

Dar la respuesta

Las dimensiones de la lámina del cartel que minimizan la cantidad de papel son:

$$20\ cm\ x\ 12.5\ cm$$

ACTIVIDAD

Resuelva el siguiente problema:

Una Pymes fabrica cajas con tapa y base cuadrada de volumen $288\ cm^3$*. El precio del material utilizado para la base es de* $\$5$ *por centímetro cuadrado, y el utilizado para las caras laterales y la tapa es de* $\$3$ *por centímetro cuadrado.*

Calcula las dimensiones de la caja para que resulte lo más económica posible.