

UNIDAD 1
TEORIA DE CONJUNTOS

TEORÍA DE CONJUNTOS

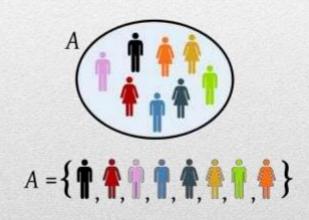
La teoría de conjuntos no es un nuevo planteamiento en la educación matemática, más bien es un sistema que emplea un lenguaje matemático muy específico para dar solución a determinado tipo de problemas.

Los conjuntos se han empleado para enseñar a contar y resolver problemas que incluyen la noción de cantidad, esto nos lleva a comprender el concepto de número entero con mayor facilidad y las ideas geométricas al emplear la teoría de conjuntos.

El aprender y comprender las nociones básicas de los conjuntos ayuda a la comprensión de otros temas matemáticos como son las funciones, probabilidad, muestreo, etc.

DEFINICIONES BÁSICAS

CONJUNTO:



Grupo de objetos con una o más características comunes. También se puede decir que es una colección desordenada de objetos. Un conjunto está bien definido si es posible conocer todos sus elementos.

Requisitos para formar un Conjunto.

- a)A los elementos hay que agruparlos o coleccionarlos de una manera bien definida.
- Ningún elemento del conjunto se debe contar más de una vez, si un elemento se repite se debe quitar (todos los elementos deben ser distintos).
- c)El orden en que se enlistan los elementos no tiene importancia.

EJEMPLOS

EJEMPLOS:

- Las Vocales del Alfabeto V = {a; e; i; o; u}
 V = Nombre del conjunto en mayúscula
 a, e, i, o, u = Nombre de los elementos en minúscula.
- Los enteros positivos impares menores a 10 I
 = {1; 3; 5; 7; 9}
 Los elementos pueden ser también números.
- •B = {a; 2; Roberto; Francia} Los elementos de un conjunto pueden también no estar relacionados.

ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

Son los objetos que componen un conjunto, también se les conoce como miembros. Se dice que el conjunto contiene a sus elementos y los elementos pertenecen al conjunto.

- Si un elemento "a" pertenece a un conjunto "V", se denota por: a ∈ V
- Si un elemento "d" no pertenece a un conjunto "V", se denota por: d ∉ V

Modos de representación de un conjunto

• a) EXTENSIÓN:

Se detallan todos los elementos del conjunto.

Ejemplo:

$$V = \{a; e; i; o; u\}$$

• b) COMPRENSIÓN:

Se da una idea que representa los elementos.

Ejemplo:

Las vocales del alfabeto.

Modos de representación de un conjunto

• c) DESCRIPCIÓN POR CONSTRUCCIÓN:

Se caracterizan todos los elementos del conjunto declarando la propiedad o propiedades que deben tener sus miembros.

Ejemplo: Conjunto I de todos los números enteros positivos menores que 10.

 $I = \{x \mid x \text{ es un entero positivo menor que } 10\}$

$$I = \{x \mid x \in Z^+, x < 10\}$$

DETERMINACIÓN DE CONJUNTOS

Los conjuntos se pueden determinar de dos formas:

Por Extensión ó Forma Tabular: Un conjunto por extensión, determina se sea por enumeración, cuando se listan los elementos del conjunto.

Ejemplo 1

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$
 $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $C = \{c, o, n, j, u, t, s\}$

En un conjunto determinado por extensión no se repite un mismo elemento.

2. Por comprensión o Forma Constructiva. Un conjunto se determina por comprensión, cuando se da una propiedad, que la cumplan todos los elementos del conjunto.

```
Ejemplo 2
A = {x/x es una vocal}
B = {x/x es un número par menor que 10}
C = {x/x es una letra de la palabra conjuntos}
```

Observe el siguiente cuadro comparativo de determinación de conjuntos:

Por ExtensiónPor comprensión $A = \{a, e, i, o, u\}$ $A = \{x/x \text{ es una vocal }\}$ $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $B = \{x/x \text{ es un número par menor que 10}\}$ $C = \{c, o, n, j, u, t, s\}$ $C = \{x/x \text{ es una letra de la palabra conjuntos}\}$ $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $D = \{x/x \text{ es un número impar menor que 10}\}$ $E = \{b, c, d, f, g, h, j, ...\}$ $E = \{x/x \text{ es una consonante}\}$

por comprensión	lectura	por extensión
$B = \{x / x \in \mathbf{N}, x \mid 6\}$	"B es el conjunto de todos los números naturales que sean divisores de 6"	$B = \{1,2,3,6\}$
	"C es el conjunto de los números naturales divisibles por 6 que sean menores o iguales que 12", o bien, "C es el conjunto de los múltiplos de 6 que sean menores o iguales que 12"	C = {6, 12}
	"D es el conjunto de los números reales que sean raíces de la ecuación $x^2 - 3 x = 0$ "	$D = \{0,3\}$
	"E es el conjunto de los números naturales que se obtengan de multiplicar 2 por un número entero ", o bien, "E es el conjunto de los números naturales que sean múltiplos de 2 "	E = {2,4,6,}
$F = \{ x \in \mathbf{R} / x^2 = x \}$	"F es el conjunto de todos los números reales que coincidan con su cuadrado"	F = {0,1}

Modos de representación de un conjunto

d) DIAGRAMA DE VENN:

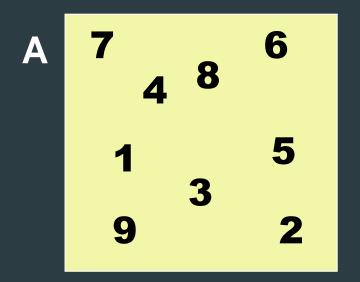
Es una forma gráfica de representar un conjunto. Parte del concepto de conjunto Universal.

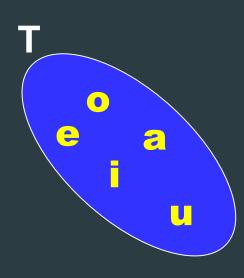
Se define el Conjunto Universal 'U' como aquel que contiene todos los elementos que están siendo objeto de estudio. Se representa por un rectángulo y la letra U.

El diagrama se construye con el conjunto universal representado por un rectángulo, y luego utilizando círculos dentro del rectángulo se representan los conjuntos, identificados con letras mayúsculas. Los elementos se representan dentro de los conjuntos, utilizando letras minúsculas.

DIAGRAMA DE VENN

Los diagramas de Venn que se deben al filósofo inglés John Venn (1834-1883) sirven para representar conjuntos de manera gráfica mediante dibujos ó diagramas que pueden ser círculos, rectángulos, triángulos o cualquier curva cerrada.

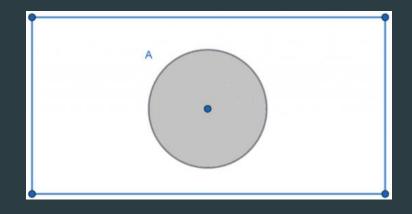




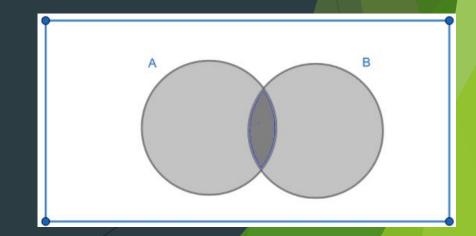


TIPOS DE DIAGRAMAS DE VEN

De un conjunto: Cuenta con dos regiones, la región de los elementos que pertenecen al conjunto, y la región de los elementos que están fuera del conjunto.

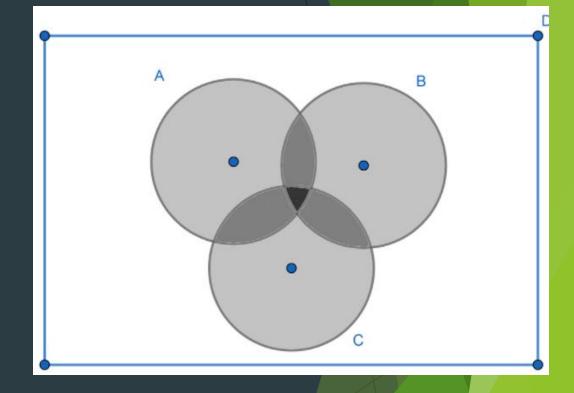


•De dos conjuntos: Tiene un total de 4 regiones: Las regiones con los elementos que solo pertenecen al conjunto A o solo al conjunto B, la región de los elementos que pertenecen a los dos conjuntos (sombreado con el color plomo más oscuro), y la región donde están los elementos que no pertenecen a ninguno de los dos conjuntos.



TIPOS DE DIAGRAMAS DE VEN

De tres conjuntos: Siguiendo la lógica de la categoría anterior, tiene un total de ocho regiones, pues hay cuatro intersecciones (entre dos o entre los tres conjuntos), tres regiones donde están los elementos que pertenecen a solo uno de los tres conjuntos, y una región donde se ubican los elementos que no pertenecen a ningún conjunto

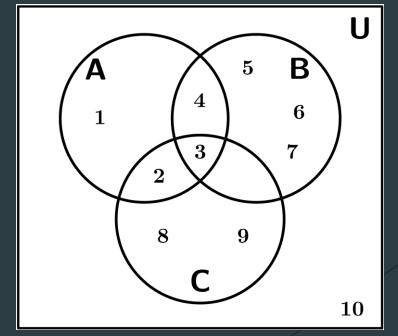


EJEMPLOS

Ejemplo 1 Diagrama de Venn







Conjunto Finito e Infinito

Conjunto finito es aquel que tiene un número determinado de elementos, pudiéndose contarlos por cualquier método; en caso contrario el conjunto será infinito.

Ejemplos

Los siguientes conjuntos son finitos.

$$A = \{a, b, c, d, e, \dots, x, y, z\}$$

$$B = \{x/(x \text{ sea un número natural y menor a 1 000 000})\}$$

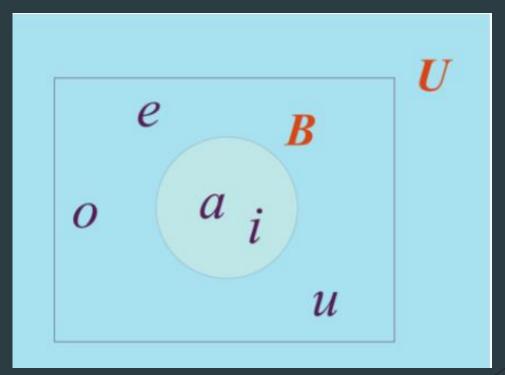
Conjunto infinito es que no se puede contabilizar todos sus elementos, tiene principio, pero no tiene fin o no tiene principio ni fin.

Conjunto Vacío

Consideremos la existencia de un conjunto que no tiene elementos, este es llamado conjunto vacío. Para representar dicho conjunto usamos el reconocido símbolo del vacío, como se muestra en la imagen de abajo:

Conjunto Universo

Con el ánimo de evitar confusiones, cuando definimos un conjunto debemos especificar de dónde se están tomando los elementos que lo conforman. Esto significa que debe existir una base de la cual tomamos estos elementos, esta base sobre el cual trabajamos es llamada conjunto universal. Usaremos siempre la letra U para representar el conjunto universal.



Relación entre conjuntos

En función de sus relaciones entre ellos, los conjuntos pueden ser:

Conjuntos disjuntos

Son aquellos que no tienen ningún elemento en común.

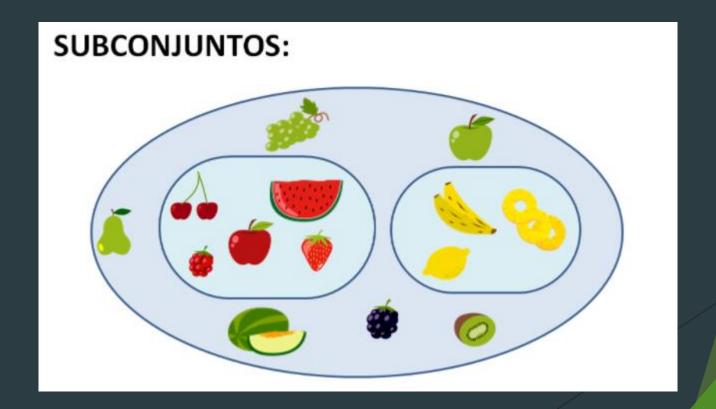
Por ejemplo, los conjuntos de frutas y de animales son disjuntos, porque no hay ninguna fruta que sea un animal, ni ningún animal que sea una fruta:



Relación entre conjuntos

- Conjuntos subconjuntos
- Se da cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen al otro.

Por ejemplo, el conjunto de frutas rojas y el conjunto de frutas amarillas son subconjuntos del conjunto de frutas, puesto que todas las frutas rojas son frutas, y todas las frutas amarillas son frutas también:



Relación entre conjuntos

Conjuntos subconjuntos

El conjunto de los seres vivos es muy grande: tiene muchos subconjuntos, por ejemplo:

- Las plantas son un subconjunto de los seres vivos
- Los animales son un subconjunto de los seres vivos
- Los seres humanos son un subconjunto de los animales



RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

SUBCONJUNTO O INCLUSIÓN

Un conjunto A esta incluido en otro conjunto B ,sí y sólo sí, todo elemento de A es también elemento de B

Se simboliza:

 $A \subset B$

A es *subconjunto* de B

A está *incluido* en B

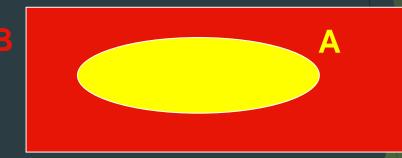
Se lee:

A está *contenido* en B

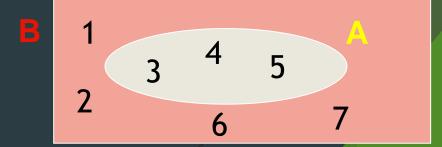
A es parte de B

Observación: Cuando un conjunto NO es subconjunto de otro, se simboliza ⊄

Se representa o se gráfica:



Ejemplo A = {3,4,5} B = {1,2,3,4,5,6,7}



Conjunto Potencia

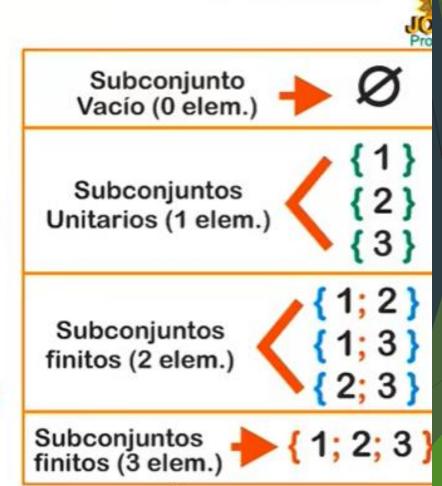
- La familia de todos los subconjuntos de un conjunto A se llama Conjunto Potencia de A.
- Se le denota como 2^A.
 - $A = \{1, 2, 3\}$
 - El conjunto M tiene 3 elementos
 - $2^A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{\emptyset\}\}$
 - Entonces $2^3 = 8$ elementos

Conjunto Potencia

Conjunto Potencia

$$S = \{1; 2; 3\}$$

$$P(S) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}; \{1;2;3\}\}\}$$



Determine el conjunto Potencia

$$X = \{a, e, i, o, u\}$$

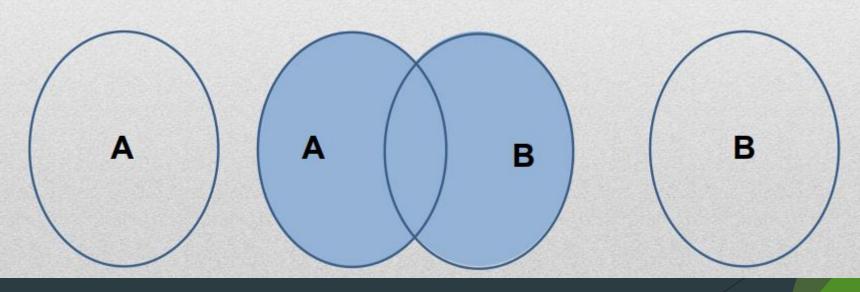
{{a},{e},{i},{o},{u}, {a,e},{a,i},{a,o},{a,u},{e,i},{e,o},{e,u},{i,o},{i,u},{o,u}, {a,e,i},{a,e,o},{a,e,u},{a,i,o},{a,i,u},{a,o,u},{e,i,o},{e,i,u},{e,o,u},{i,o,u}, ,{a,e,i,o},{a,e,i,u},{a,e,o,u},{a,i,o,u},{e,i,o,u}, {a,e,i,o,u}, {} }

OPERACIONES CON CONUNTOS

• a) UNIÓN DE CONJUNTOS:

Sean A y B conjuntos. La unión de los conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A o bien en B, o en ambos.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

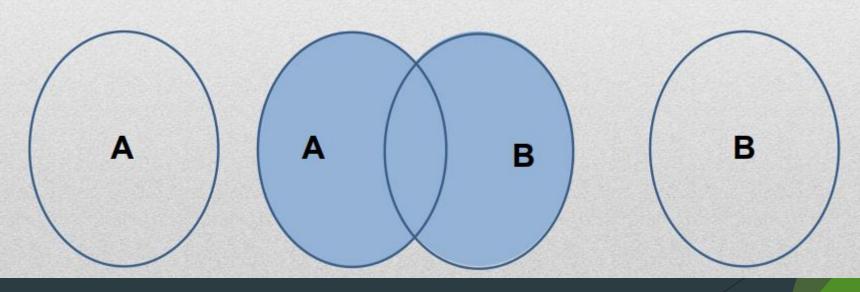


OPERACIONES CON CONUNTOS

• a) UNIÓN DE CONJUNTOS:

Sean A y B conjuntos. La unión de los conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A o bien en B, o en ambos.

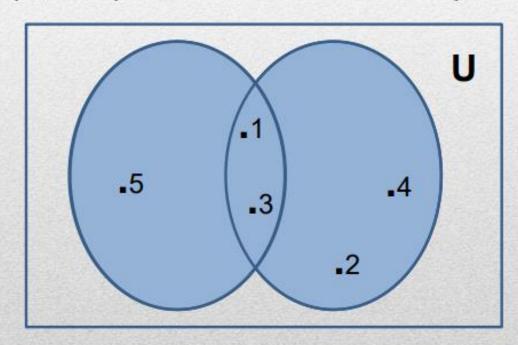
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$



EJEMPLO DE UNIÓN DE CONJUNTOS:

$$A = \{1; 3; 5\}$$

$$B = \{1; 2; 3; 4\}$$



$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

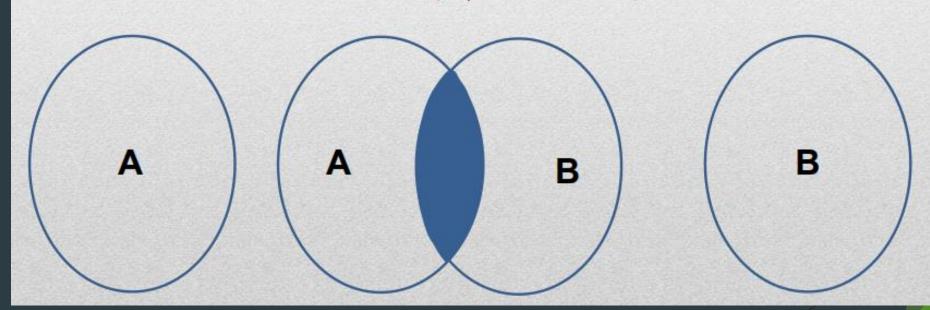
PROPIEDADES DE LA UNIÓN DE CONJUNTOS

- 1) $A \cup A = A$
- 2) $A \cup B = B \cup A$
- 3) $A \cup \Phi = A$
- 4) $A \cup U = U$
- 5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Si $A \cup B = \Phi$ entonces $A = \Phi \land B = \Phi$

b) INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS:

 Sean A y B conjuntos. La intersección de los conjuntos A y B, denotada por A ∩ B, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están tanto en A como en B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$



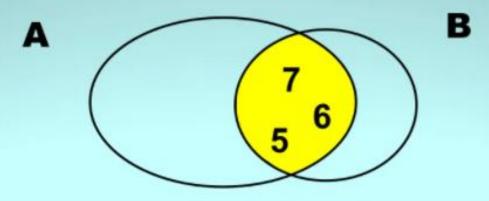
INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

El conjunto "A intersección B" que se representa A \cap B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B.

Ejemplo:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \text{ yB} = \{5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \text{ yB} = \{5; 6; 7; 8; 9\}$$



$$A \cap B = \{5; 6; 7\}$$

Propiedades de la Intersección

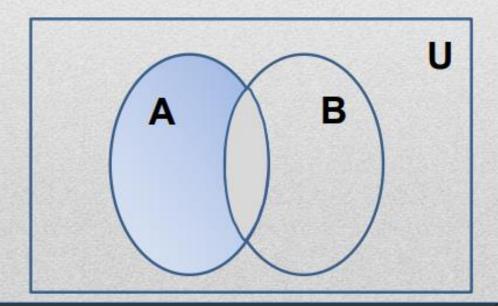
PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS:

- 1) $A \cap A = A$
- 2) $A \cap B = B \cap A$
- 3) $A \cap \Phi = \Phi$
- 4) $A \cap U = A$
- 5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

• c) DIFERENCIA DE CONJUNTOS:

Sean A y B conjuntos. La diferencia de los conjuntos A y B, denotada por A – B, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A pero no en B. La diferencia de A – B se llama también el complementario de B respecto a A.

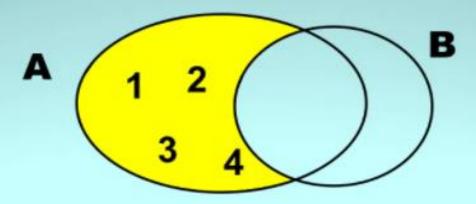
$$A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$



DIFERENCIA DE CONJUNTOS

El conjunto "A menos B" que se representa A – B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

Ejemplo:



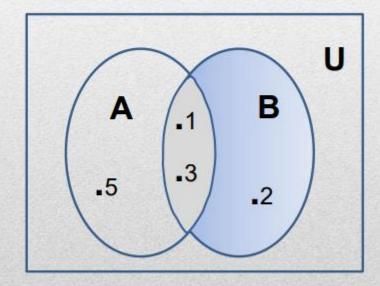
$$A - B = \{1; 2; 3; 4\}$$

EJEMPLO DE DIFERENCIA DE CONJUNTOS:

$$A = \{1; 3; 5\}$$

$$A - B = \{5\}$$

$$B = \{1; 2; 3\}$$



$$B - A = \{2\}$$

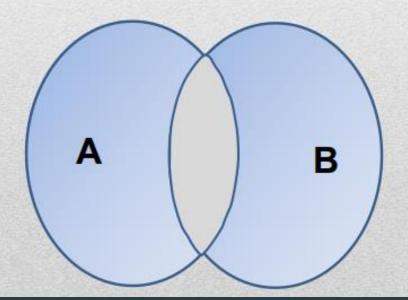
DIFERENCIA SIMÉTRICA

d) DIFERENCIA SIMÉTRICA DE CONJUNTOS:

Sean A y B conjuntos. La diferencia simétrica de los conjuntos A y B, denotada por A

B, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A o que están en B, pero no en ambos. Es lo opuesto a la intersección.

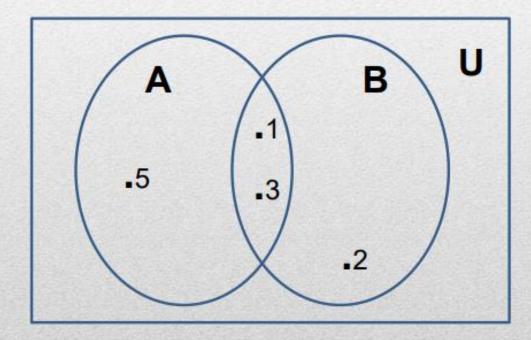
$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}$$



DIFERENCIA SIMÉTRICA

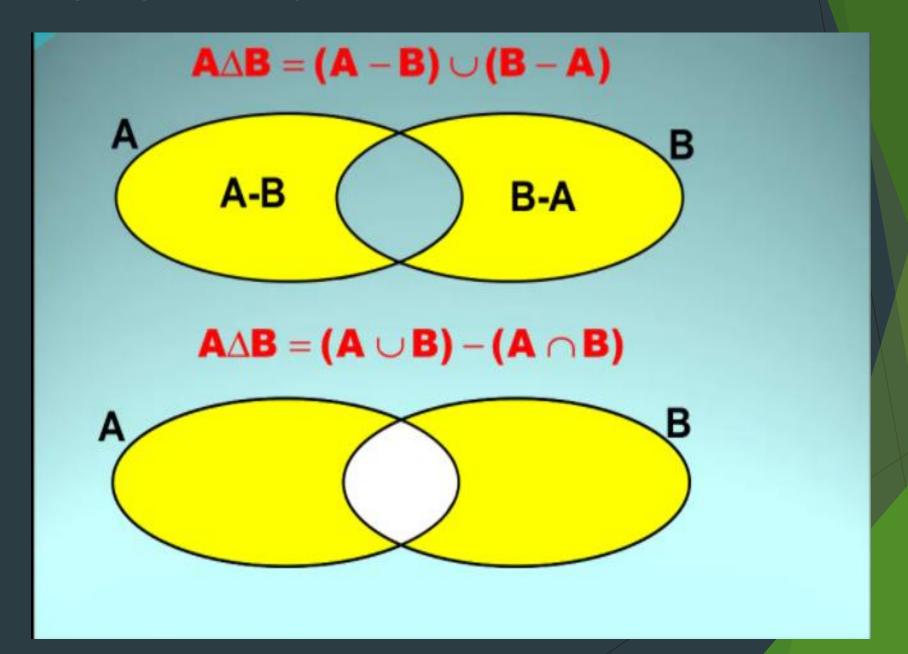
EJEMPLO DE DIFERENCIA SIMÉTRICA DE CONJUNTOS:

$$A = \{1; 3; 5\}$$
 $B = \{1; 2; 3\}$

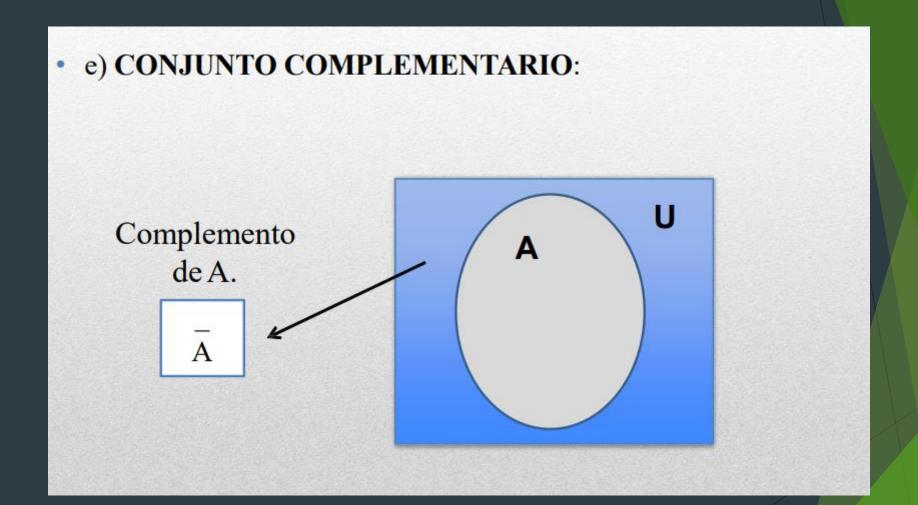


$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \{2; 5\}$$

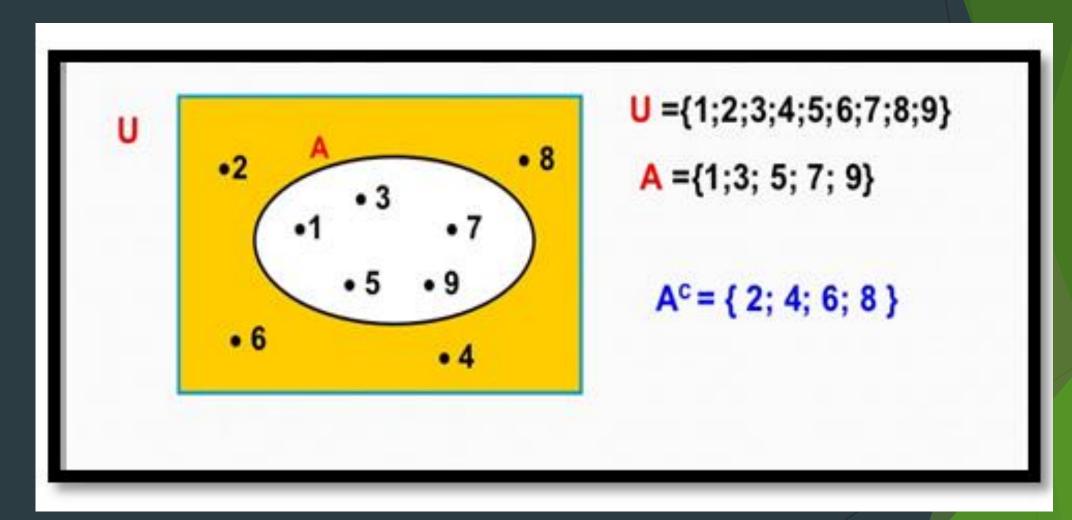
DIFERENCIA SIMÉTRICA



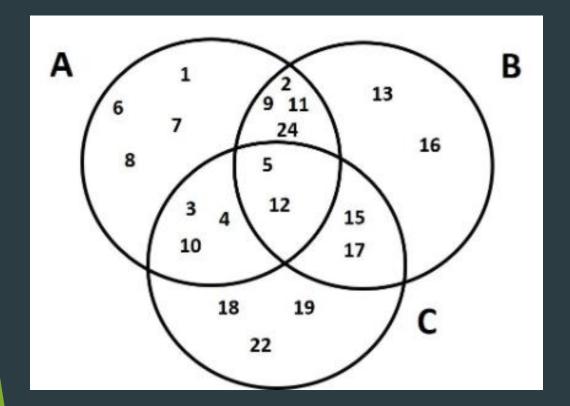
COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO



COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO



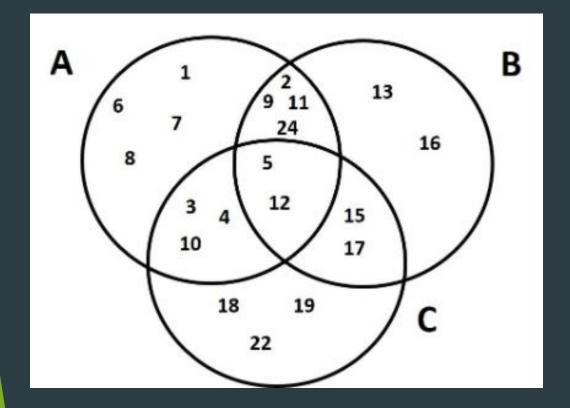
ACTIVIDAD



Determine:

- $ightharpoonup A \cup B$
- $A \cup C$
- \triangleright $B \cup C$
- $\triangleright A \cap B$
- $\triangleright B \cap C$
- $ightharpoonup A \cap C$
- \blacktriangleright $(A \cap B) \cap C$
- $\triangleright A B$
- $\triangleright A C$
- ightharpoonup C B
- $ightharpoonup A \triangle B$
- \triangleright $B \wedge C$

ACTIVIDAD



Determine:

- $A \cup B = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 24, 3, 4, 5, 12, 15, 17\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 17, 18, 19, 22, 24\}$
- $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 24\}$
- $A \cap B = \{2, 5, 9, 11, 12, 24\}$
- $B \cap C = \{5, 12, 15, 17\}$
- $A \cap C = \{5, 12, 3, 4, 10\}$
- $(A \cap B) \cap C = \{5, 12\}$
- $A B = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$
- $A C = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 11, 24\}$
- $C B = \{3, 4, 10, 18, 19, 22\}$
- $A \triangle B = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 17\}$
- $B \triangle C = \{2, 3, 4, 9, 10, 11, 13, 16, 18, 19, 22, 24\}$

PROBLEMAS CON CONJUNTOS

De un grupo de 100 alumnos, 47 no han escogido informática como optativa, 56 no han escogido teatro como optativa y 27 no han escogido ni informática ni teatro. ¿Cuántos alumnos han escogido sólo un curso?

ACTIVIDAD

En un club deportivo, el 80% de los socios juegan al fútbol y el 40% al baloncesto. Sabiendo que el 30% de los socios practican los dos deportes, calcula la probabilidad de que un socio elegido al azar:

- a) Juegue sólo al fútbol
- b) Juegue sólo al baloncesto
- c) Juegue al fútbol o al baloncesto
- d) No juegue a ninguno de los dos deportes

- 2. En un grupo de 30 estudiantes perteneciente a un curso, 15 no estudiaron Matemáticas y 19 no estudiaron Lenguaje. Si tenemos un total de 12 alumnos que no estudiaron Lenguaje ni Matemáticas. ¿Cuántos alumnos estudian exactamente una de las materias mencionadas?
- 3. En una investigación hecha a un grupo de 100 estudiantes, la cantidad de personas que estudian idiomas fueron las siguientes: español, 28; alemán, 30; y francés, 42; español y alemán, 8; español y francés 10; alemán y francés 5; los tres idiomas 3.
- a) ¿Cuántos alumnos no estudian ningún idioma?
- b) ¿Cuántos estudiantes tenían el francés como único idioma de estudio?
- 3. En una reunión se determina que 40 personas son aficionadas al juego, 39 son aficionadas al vino y 48 a las fiestas, además hay 10 personas que son aficionadas al vino, juego y fiestas, existen 9 personas aficionadas al juego y vino solamente, hay 11 personas que son aficionadas al juego solamente y por último 9 a las fiestas y al vino solamente.

Determinar:

- a) El número de personas que es aficionada al vino solamente.
- b) El número de personas que es aficionada a las fiestas solamente.

LEYES DE CONJUNTOS

LC ₁	Idempotencia	$A \cap A = A$, $A \cup A = A$
LC ₂	Asociativa	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
LC ₃	Conmutativa	$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
LC ₄	Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
LC ₅	Identidad	$A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$, $A \cup U = U$
LC ₆	Complemento	$A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = U$ $(A')' = A$, $A \cap B' = A - B$ $\emptyset' = U$, $U' = \emptyset$
LC ₇	De Morgan	$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
LC ₈	Absorción	$A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$

Ley de la diferencia simétrica

•
$$A\triangle B = (A-B) \cup (B-A)$$

•
$$A\triangle B = (A \cup B) - (B \cap A)$$

De la absorción

•
$$A \cup (A \cap B) = A$$

•
$$A \cap (A \cup B) = A$$

•
$$A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$$

•
$$A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$$

Aplicando las leyes de los conjuntos Compruebe:

$$(A-B)\cap (A-C)=A-(B\cup C)$$

$$(A-B)-C=A-(B\cup C)$$

$$(A \cup \overline{B}) \cap [\overline{(A \cup \overline{B})} \cup \overline{B}] = \overline{B}$$

Actividad

$$A - (A \cup B) \cup B = B$$

$$(A\cap B)\cup (A-B)=A$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Demostrar que:

$$[A-(A\cap B)]\cup [B-(A\cap B)]\cup (A\cap B)=A\cup B$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) = A \cap B$$

$$(A \cap (B \cap C')') \cup ((A' \cup B') \cup C)' = A$$