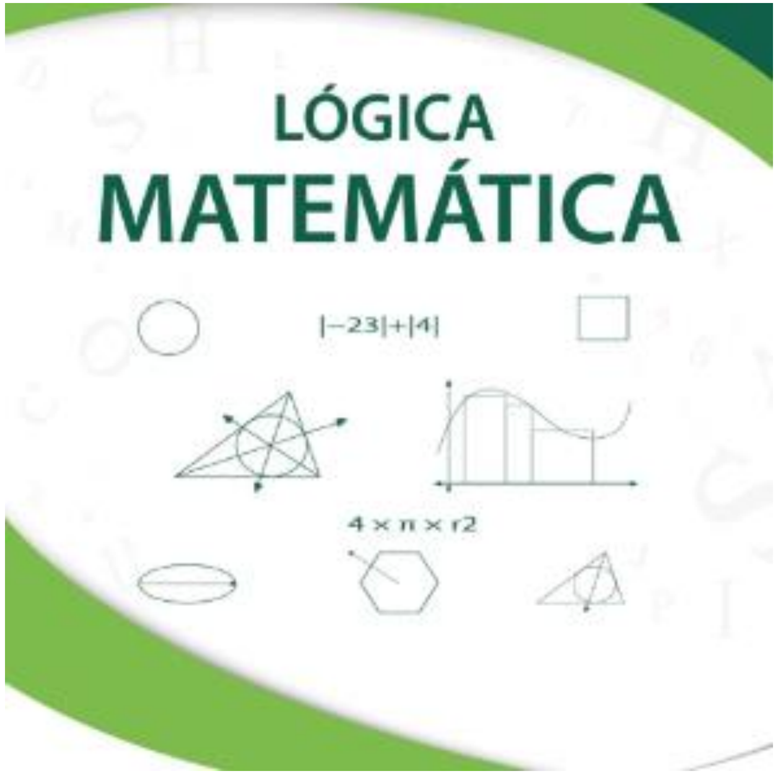
TECNOLOGÍA SUPERIOR BIG DATA

TEC.AZUAY
INSTITUTO UNIVERSITARIO

UNIDAD 2



Docente: Mgtr. Vilma Duchi F.


"Si así fue, así pudo ser; si así fuera, así podría ser; pero como no es, no es. Eso es lógica."
Lewis Carroll

NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA

¿Qué es la lógica Matemática?

La Lógica estudia la forma del razonamiento.

La Lógica Matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento.

En un nivel elemental, la Lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no valido un argumento dado.

El razonamiento lógico se emplea en Matemáticas para demostrar teoremas, sin embargo, se usa en forma constante para realizar cualquier actividad en la vida.

NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA

Razonamiento Lógico

En matemática, el razonamiento lógico es el proceso mediante el cual, partiendo de uno o más juicios o proposiciones, se evalúa la validez de los mismos, es decir, la posibilidad de que sea verdadero o falso otro juicio distinto. El razonamiento lógico se estudia desde tres tópicos enlazados: las proposiciones lógicas, las estructuras lógicas y los conectivos lógicos.

Proposiciones

La Lógica Matemática, se basa en entes matemáticos sobre los cuales va a operar, estas son llamadas **PROPOSICIONES**. Una proposición es la expresión lingüística o un enunciado que tiene sentido y que además se puede avalar como verdadera o falsa, pero no las dos a la vez.

Es necesario tener en cuenta que las expresiones lingüísticas se dividen en ***órdenes, preguntas, exclamaciones*** y ***afirmaciones.*** En las siguientes oraciones, las tres primeras, que son afirmaciones, nos comunican una proposición, verdadera o falsa; las tres últimas no transmiten una proposición, pues se trata de órdenes (O), preguntas (I) o exclamaciones (E) de las que no podemos decidir si son verdaderas o falsas. Simplemente, no son proposiciones.

Proposiciones

Ejemplos de oraciones

- Todos los triángulos tienen cuatro ángulos (P)
- 3+6=9 (P)
- Está lloviendo (P)
- ¡Levántate temprano! (E)
- ¿Has entendido el ejercicio? (I)
- Prohibido fumar (O)

Estructuras Lógicas

Las estructuras lógicas son la forma como se expresan las proposiciones y para su denominación se utilizan usualmente, letras minúsculas del alfabeto, a partir de la letra p. Por ejemplo: p, q, r, s, t,... etc. Podemos citar las siguientes proposiciones y dar su valor de verdad:

p: 16 + 5 = 21 (Verdadero)

q: Cundinamarca es un departamento de Colombia. (Verdadero)

r: 15 es divisible por 3. (Verdadero)

s: El perro es un ave terrestre. (Falso)

Clasificación de las Proposiciones

Proposiciones Abiertas: Son aquellas en las que el(los) sujeto(s) es incógnito Se caracterizan por ser verdaderas para algunos sujetos y falsa para otros.

Ejemplo:
Sea x un sujeto definido en un conjunto incógnito y considere las expresiones matemáticas definidas para x que pueden considerarse como proposiciones abiertas.

a. $x+2=4$
b. $x^2-5x+6 = 0$
c. $x^2-9 = (x-3)(x+3)$
d. $x^2= 9$ y $x-1 = 0$

De las proposiciones anteriores se puede afirmar que
a. $x+2=4$ es verdadera para $x= 2$ y falsa para otros valores de x.
b. $x^2-5x+6=0$es verdadera para $x=2$ o $x=3$, y falsa para otros valores de x.
c. $x^2-9=(x-3)(x+3)$ es verdadera para todo valor de x.
d. $x^2=9$ y $x-1 = 0$ es falsa para todo valor de x.

Clasificación de las Proposiciones

Proposiciones Cerradas: Son aquellas en las que el(los) sujeto(s) está(n) completamente definido(s) en un conjunto de referencia.

Ejemplo:
Las proposiciones "La gallina tiene dos patas"
"El tigre es un animal salvaje"
"El gato toma leche"
Son cerradas ya que lo sujetos "La gallina", "El tigre" y "El gato" están bien definidos en el conjunto de referencia los animales.

Clasificación de las Proposiciones

Proposiciones Cerradas: Son aquellas en las que el(los) sujeto(s) está(n) completamente definido(s) en un conjunto de referencia.

Ejemplo:
Las proposiciones "La gallina tiene dos patas"
"El tigre es un animal salvaje"
"El gato toma leche"
Son cerradas ya que lo sujetos "La gallina", "El tigre" y "El gato" están bien definidos en el conjunto de referencia los animales.

Clasificación de las Proposiciones

Proposición Simple

Proposiciones simples o atómicas: como su nombre lo indica, son oraciones simples que no contienen un conectivo lógico.

P: Hoy es miércoles.
Q: Ayer hizo calor.
R: Soy estudiante de informática.

Proposición Compuesta

Proposiciones compuestas o moleculares: es la composición de dos o más proposiciones simples unidas por un conectivo lógico.

Conectores Lógicos

son las expresiones lingüísticas que conectan proposiciones: y; o; no; si… entonces…; solo si…, entonces…

Ejemplos:

P: Hoy es miércoles y tengo tarea.
Q: Ayer hizo calor o hizo frío.
R: Yo no soy alumno de nivel bachillerato.
S: Si soy estudiante de informática, entonces tengo que estudiar lógica.
T: Si $x+2=5$, entonces $x=3$.

Conectivos Lógicos

Son símbolos, letras o palabras que unen dos o más proposiciones.

A continuación, se muestra su clasificación.

Símbolo del conector lógico	Operación asociada	Significado	Ejemplo
~	Negación	no p o no es cierto que p	**p:** todos los alumnos estudian matemática **~p:** no todos los alumnos estudian matemática
$\wedge$	Conjunción o producto lógico	p y q	**p $\wedge$ q:** 5 es un número impar **y** 6 es un número par
$\vee$	Disyunción inclusiva o suma lógica	p o q (en sentido incluyente)	**p $\vee$ q**: Tiro las cosas viejas **o** que no me sirven
$\Rightarrow$	Implicación	p implica q, o si p entonces q	**p $\Rightarrow$ q**: Si apruebo**, ENTONCES** te presto el libro
$\Leftrightarrow$	Doble implicación o Bicondicional	p si y sólo si q	**p $\Leftrightarrow$ q**: a = b **si y sólo si** $a^2 = b^2$
$\underline{\vee}$, Δ	simétrica o disyunción exclusiva	p o q (en sentido excluyente)	**p $\underline{\vee}$ q: o** vamos a casa **o** vamos al parque

Negación

Dada una proposición p, se denomina negación de p a otra proposición denotada por $\sim\boldsymbol{p}$ (se lee "no p") que le asigna el valor opuesto al de $\boldsymbol{p}$. Esta ley define a la negación lógica o simplemente negación.

Se trata de una operación unitaria y se define para una proposición.

Por ejemplo, la proposición $\boldsymbol{p}: \mathbf{3} > 1$, su negación es $\sim \boldsymbol{p}: \mathbf{3} \leq \mathbf{1}$.

Conjunción

Dos proposiciones simples pueden combinarse mediante la letra "$\boldsymbol{y}$", para formar una proposición compuesta. Si p y q son dos proposiciones cualesquiera, su conjunción se escribe p y q, y se representa simbólicamente:

$$\boldsymbol{p \wedge q}$$

El valor de verdad de la conjunción de dos proposiciones es verdadero únicamente si los valores de verdad de ambos enunciados son verdaderos.

Ejemplo

p: Ana está feliz   q: Ana está contenta

Luego tenemos que $p \wedge q$: Ana está feliz y está contenta.

Disyunción

Existen dos tipos de disyunción: la Inclusiva y la disyunción inclusiva; usan como conectivo la letra **"o".**

Disyunción Inclusiva

Si unimos dos proposiciones mediante la letra ***o***, el nuevo enunciado es una proposición que se llama disyunción inclusiva o disyunción.

Si p y q son dos proposiciones, su disyunción inclusiva se escribe p **o** q, y se simboliza:

$$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$$

El valor de verdad de la disyunción únicamente es falso si son los valores de verdad de las dos proposiciones originales son falsos.

Por ejemplo, si se tiene las proposiciones p: Está lloviendo, q: Es de noche, el resultado de $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ es "Está lloviendo y es de noche".

Disyunción

Disyunción Exclusiva

La disyunción exclusiva es una proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones por medio de las palabras "o – o"

Si tanto p, como q son proposiciones, la disyunción exclusiva se escribe **o** p **o** q, y se simboliza

$$\boldsymbol{p \bigtriangleup q}$$

Establece que la disyunción exclusiva es verdadera si sólo una de las dos proposiciones de las componentes es verdadera. Cuando todas son falsas o son verdaderas la proposición resultante es falsa.

Por ejemplo "El número 3 o es divisor de 6 o divisor de 10"

Implicación Condicional

Si p y q son dos proposiciones, la proposición compuesta **si p "entonces" q** se llama condicional de p y q, y se escribe:

$$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$$

Donde p es condición necesaria para que suceda q. Además, a la proposición p se le llama el antecedente y q, el consecuente. El valor de verdad del condicional es falso únicamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Por ejemplo, dadas las proposiciones p: quiere comer, q: tiene hambre, tenemos que el resultado de $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ es: Si quiere comer entonces tiene hambre.

Implicación Bicondicional

El bicondicional de dos proposiciones (p, q), se define como la conjunción de los dos condicionales posibles ($p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$), es decir que la proposición p es condición para q y, al mismo tiempo, la proposición q es condición para p. El bicondicional se representa:

$$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$$

De una manera literal el bicondicional se expresa como “p si y sólo si q”

El valor de verdad del bicondicional es verdadero cuando ambas proposiciones son verdaderas o cuando ambas son falsas.

Por ejemplo, para el uso del bicondicional, si p: está completo y q: tienes todas las actividades, entonces tenemos que el resultado de $p \leftrightarrow q$ es: está completo si y solo si tienes todas las actividades

TABLAS DE VERDAD

La tabla de verdad de una proposición compuesta o expresión es una tabla en la que se presentan todos los posibles resultados de las proposiciones que la constituyen. La interpretación corresponde al sentido que los conectores lógicos tienen dentro del razonamiento, es decir las tablas de verdad constituyen un método de decisión para determinar es verdadera o no.

Si tenemos dos proposiciones, pueden presentarse **cuatro posibles casos (2^2):**

I. Que ambas proposiciones son verdaderas
II. Que la primera proposición sea verdadera y la segunda es falsa
III. La segunda proposición es verdadera y la primera falsa
IV. Las dos proposiciones sean falsas

Esto se puede representar en una tabla como

p	**q**
V	V
V	F
F	V
F	F

Si hay tres proposiciones, el número de combinaciones serán $2^3 = 8$, es decir necesitamos ocho filas, en las cuales, la primera columna se conformarán los valores de verdad de la siguiente manera: V,V,V,V y F,F,F,F. En la segunda columna se reparten los valores: V, V, F,F, V,V, F,F. Y en la tercera columna son: V,F,V,F,V,F,V,F.

Tablas de Verdad

Negación	La negación de un enunciado verdadero es falso; la negación de un enunciado falso es verdadero.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Disyunción inclusiva	Una disyunción es verdadera cuando al menos una de sus alternativas es verdadera; solamente será falsa si las dos lo son.

p	q	$\mathbf{p \vee q}$
V	**V**	V
V	**F**	V
F	**V**	V
F	**F**	F

Conjunción	En una conjunción basta que uno de sus componentes sea falso para que toda la proposición sea falsa y sólo será verdadera en el caso de que ambos componentes lo sean.

p	q	$\mathbf{p \wedge q}$
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	F
F	**F**	F

Tablas de Verdad

Implicación

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Una implicación o condicional será falso sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso; en los demás casos será verdadera.

Doble implicación

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La doble implicación o bicondicional será verdadera solamente si y solo sí las dos sentencias que la componen son a la vez verdaderas o si ambas son falsas.

Disyunción Exclusiva

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La proposición que resulta de la diferencia simétrica o disyunción exclusiva de otras dos, es falsa si y solo sí, las dos proposiciones simples tienen el mismo valor de verdad.

FORMAS PROPOSICIONALES

Existe tres formas proposicionales:

- Cuando el valor de verdad de todas las combinaciones es verdadero, se concluye que es una TAUTOLOGÍA.
- Cuando el valor de verdad de todas las combinaciones es falso, se concluye que es una CONTRADICCIÓN.
- Cuando el valor de verdad de todas las combinaciones es verdadero y falso, se concluye que es una INDETERMINACIÓN, FALACIA O Contingencia.

EJEMPLOS

- Determine que tipo de proposición se obtiene al resolver los siguientes ejerci

Tabla No.5 - Operador Condicional

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Fuente: Proaño (2006)

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg q)$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1
1	3	2	8	7	4	6	5

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Fuente: Proaño (2006)

TAUTOLOGÍA

La tabla de verdad para este operador lógico es:

Tabla No.6 - Operador Bicondicional

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La tabla de verdad para este operador lógico es:

Tabla No.6 - Operador Bicondicional

p	q	p ⇔ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Fuente: Proaño (2006)

S

ción se obtiene al resolver los siguientes ejercicic

Tabla No.5 - Operador Condicional

p	q	p ⟹ q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Fuente: Proaño (2006)

$$\neg(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

$\neg$	$(p$	$\to$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg p$	$\wedge$	$\neg q)$
0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1
4	1	3	2	8	5	7	6

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Fuente: Proaño (2006)

CONTINGENCIA

EJEMPLOS

- Determine que tipo de proposición se obtiene al resolver los siguientes ejercicios

$$(p \wedge \neg q) \vee (q \rightarrow \neg p)$$

La tabla de verdad para este operador lógico es:

Tabla No.6 - Operador Bicondicional

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Fuente: Proaño (2006)

Tabla No.5 - Operador Condicional

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Fuente: Proaño (2006)

Ejemplos con mas de dos proposiciones

Existen tres proposiciones, para saber cuántas filas debe tener la tabla se aplica la siguiente fórmula:

$$Número\ de\ filas = 2^n$$

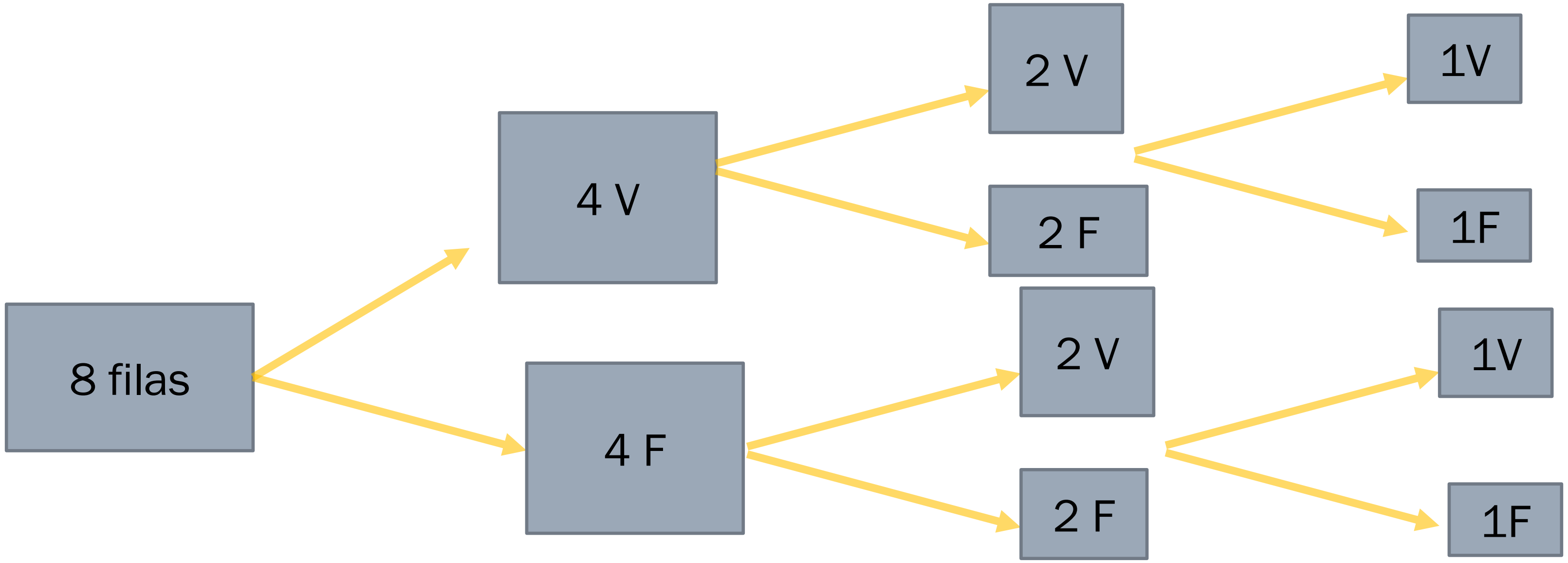
n= número de proposiciones:

$$p, q, r = proposiciones = 3$$

$$n = 3$$

$$Número\ de\ Filas = 2^3 = 8$$

Distribución a partir del cálculo



$$(\sim p \vee q) \rightarrow (r \wedge p)$$

p	q	r	$\sim p$	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	$(r \wedge p)$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
v	v	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla No.5 - Operador Condicional

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Fuente: Proaño (2006)

RESOLVER LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES

$$[(P \wedge {\sim}q) \wedge r] \rightarrow s$$

$$PROPOSICIONES\ 4 \quad = 2^4 = 16$$

p	q	r	s	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$\wedge$	r	$\rightarrow$	S
V	V	V	V	F	F	F	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F	V	V	F
V	V	F	V	F	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	F	F	V	F

Tabla No.5 - Operador Condicional

p	q	$p \Longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Fuente: Proaño (2006)

Determine si los siguientes enunciados compuestos corresponden a una tautología, contradicción o a una contingencia.

a) $p \vee \sim p$

b) $\sim p \vee \sim q$

c) $\sim (p \wedge q)$

d) $p \vee \sim (p \wedge q)$

e) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

f) $(q \rightarrow p) \leftrightarrow \sim q$

g) $\sim (p \vee \sim r) \wedge s$

h) $[(q \rightarrow p) \leftrightarrow \sim q] \wedge r$

i) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

j) $\sim \{[(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)] \rightarrow (a \rightarrow c)\}$

k) $\sim \{[(q \rightarrow p) \leftrightarrow \sim q] \wedge r\}$

l) $\sim s \leftrightarrow [p \vee (\sim t \wedge s)]$

m) $\sim \{\sim [(t \wedge \sim s) \wedge \sim (p \rightarrow \sim q)] \rightarrow \sim t\}$

n) $\sim [\sim (q \wedge \sim s) \leftrightarrow \sim q] \rightarrow \sim t$

o) $\sim \{\sim [\sim (t \vee \sim s) \leftrightarrow \sim (p \vee \sim q)] \vee \sim r\}$

Leyes de Algebra Proposicional

1) Leyes del tercio excluido $p \vee \sim p \equiv V$ $\quad$ $p \wedge \sim p \equiv F$	**6) Leyes distributivas** $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
2) Ley de involución o doble negación $\sim (\sim p) \equiv p$	**7) Leyes de De Morgan** $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
3) Ley de idempotencia $p \vee p \equiv p$ $\quad$ $p \wedge p \equiv p$	**8) Leyes condicionales** $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
4) Leyes conmutativas $p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$	**9) Leyes bicondicionales** $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
5) Leyes asociativas $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	**10) Leyes de absorción** $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

Las leyes de la algebra de proposiciones son equivalencias lógicas que se pueden demostrar con el desarrollo de las tablas de verdad del bicondicional. Las leyes del algebra de proposiciones son las siguientes:

11) Formas normales para la conjunción y disyunción

$V \wedge V \equiv V$	$F \vee F \equiv F$
$p \wedge V \equiv p$	$p \vee F \equiv p$
$p \wedge F \equiv F$	$p \vee V \equiv V$

Ejercicios

Simplificar

$\sim\{(\boldsymbol{p} \wedge \sim\boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{p}\} \vee \boldsymbol{q}$

$\sim\{\sim(\boldsymbol{p} \wedge \sim \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{p}\} \vee \boldsymbol{q}$ **Leyes de condicional**

$\sim\{\sim p \vee q \vee p\} \vee q$

$\sim\{(\sim p \vee p) \vee q\} \vee q$

$\sim\{\boldsymbol{V} \vee \boldsymbol{q}\} \vee \boldsymbol{q}$

$\sim\{\boldsymbol{V}\} \vee \boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{q}$

- 1. No puede haber en la ecuación términos de condicional o bicondicional, todo debe estar en conjunción y disyunción.

$p \rightarrow q = \sim p \vee q$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

ACTIVIDAD

$$[p \to \sim(q \to p)] \to \sim q$$