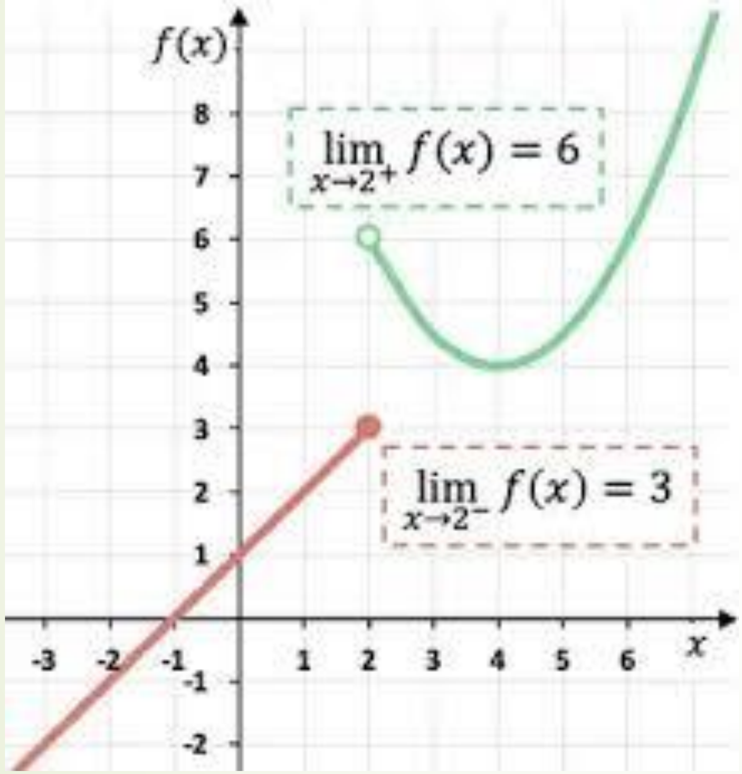
TEC.AZUAY
INSTITUTO UNIVERSITARIO

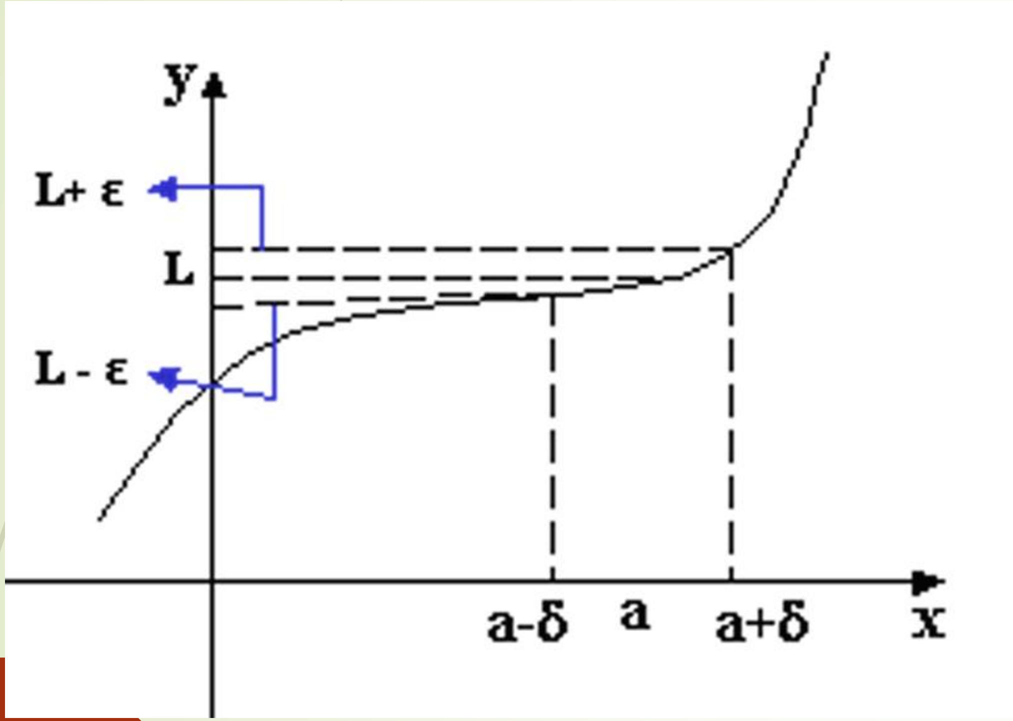



# UNIDAD 5

# LÍMITES

Docente: Mgtr. Vilma Duchi F.

# Límite de una Función




El concepto de límite es la base fundamental con la que se construye el cálculo infinitesimal.

El límite de una función es el valor al que tiende una función cuando la variable independiente tiende a un número determinado.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

## DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos

“el límite de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima a $a$, es igual a $L$”

si podemos hacer los valores de $f(x)$, arbitrariamente cercanos a $L$ (tan cerca de $L$ como queramos) tomando $x$ suficientemente cercana a $a$, pero no igual a $a$.

# Método de Aproximación

¿Qué le sucede a la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

a medida que la variable x se acerca al valor 1?

| | $x < 1$ | | | $x > 1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 0.95 | 0.99 | 1 | 1.01 | 1.05 |
| f(x) | 2.95 | 2.99 | 3 | 3.01 | 3.05 |

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{2x^2 - x - 10} = ?$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | | | $-2$ | | |
| f(x) | | | | | |

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+9} - 3} = ?$$

| x | | | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | |

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} + x - 3}{\ln(x-1) - x^2 + 4} = ?$$

| x | | | 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | |

## LÍMITES POR SUSTITUCIÓN DIRECTA

Si $f$ es polinomial o una función racional y $a$ está en el dominio de $f$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Evalúe los siguientes límites.

**(a)** $\displaystyle\lim_{x \to 3} (2x^3 - 10x - 8)$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$

## SOLUCIÓN

**(a)** La función $f(x) = 2x^3 - 10x - 8$ es polinomial, por lo que podemos hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to 3} (2x^3 - 10x - 8) = 2(3)^3 - 10(3) - 8 = 16$$

**(b)** La función $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$ es una función racional y $x = -1$ está en su dominio (porque el denominador no es cero para $x = -1$). Entonces, podemos hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2} = \frac{(-1)^2 + 5(-1)}{(-1)^4 + 2} = -\frac{4}{3}$$

# Practiquemos

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 6}{x + 2}$$

# Hallar límites usando álgebra y las Leyes de Límites

La evaluación de límites por sustitución directa es fácil pero no todos los límites pueden evaluarse de este modo. En realidad, la mayor parte de las situaciones en las que los límites son útiles exigen que trabajemos más para evaluar el límite para ello de hace uso de los casos de factoreo  con el fin de eliminar uno de los factores.

Encuentre $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

Factorizamos el denominador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} && \text{Factorice} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x + 1} && \text{Cancele} \\
&= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} && \text{Sea } x \to 1
\end{aligned}
$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+2)=(1+2)=3$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{2x^2-x-10}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{x+9}-3}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x+4} - 2}$$

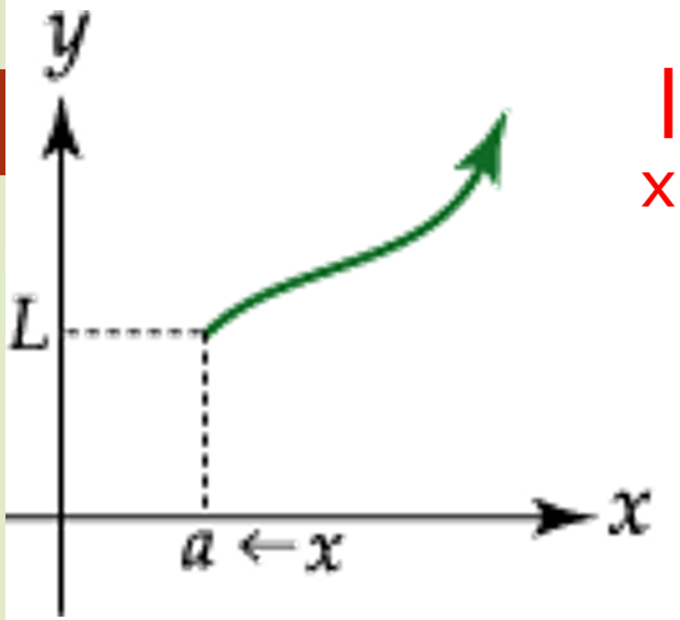
$$\operatorname{lím}_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

# Límites Laterales

Algunos límites se calculan mejor si primero hallamos los límites izquierdo y derecho.

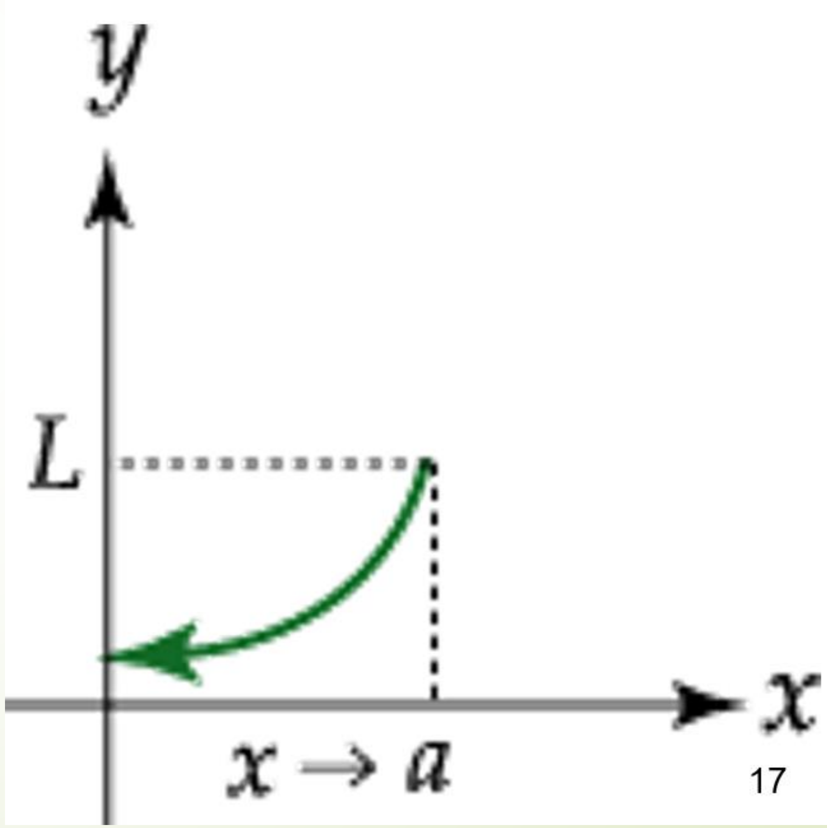
Dice que existe un límite bilateral si y sólo si existen ambos límites unilaterales y son iguales.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$




$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$



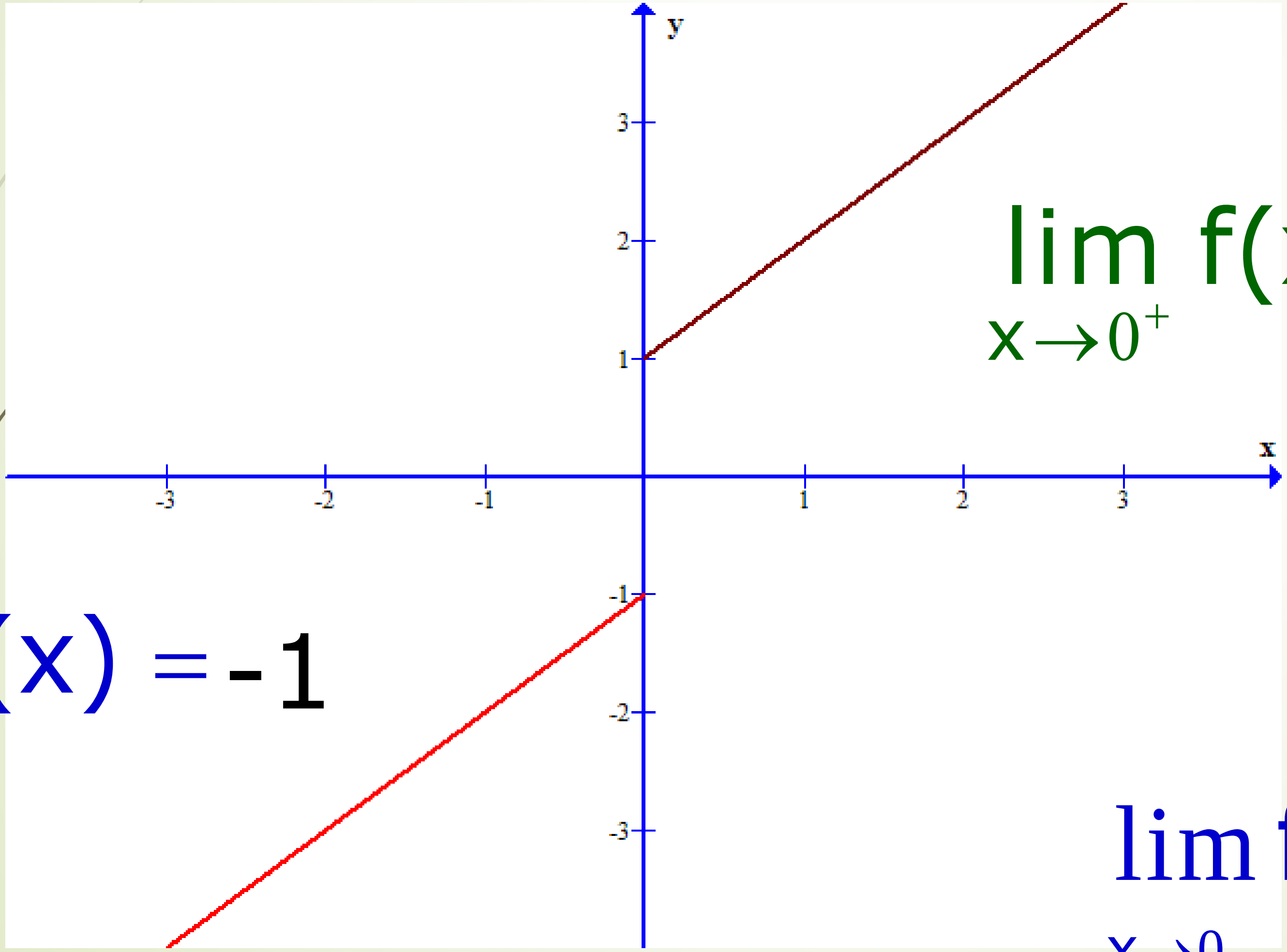
TEOREMA: Sea f una función definida para todos los valores de x cercanos a $x = a$ , entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y solo si}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \ , x < 0 \\ x + 1 \ , x > 0 \end{cases}$$



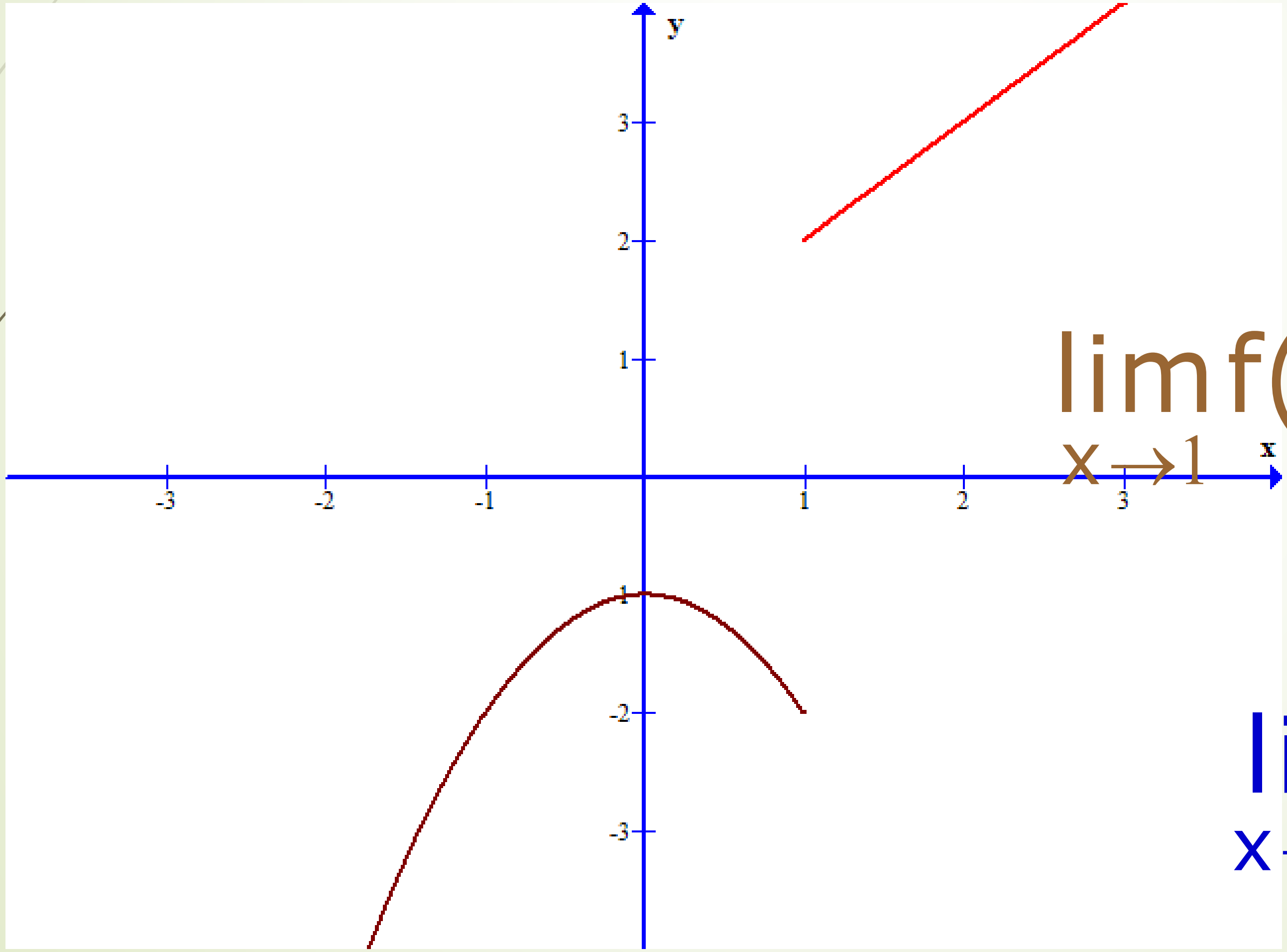

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \text{ no existe}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \;, x \geq 1 \\ -x^2 - 1, x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = ?$$



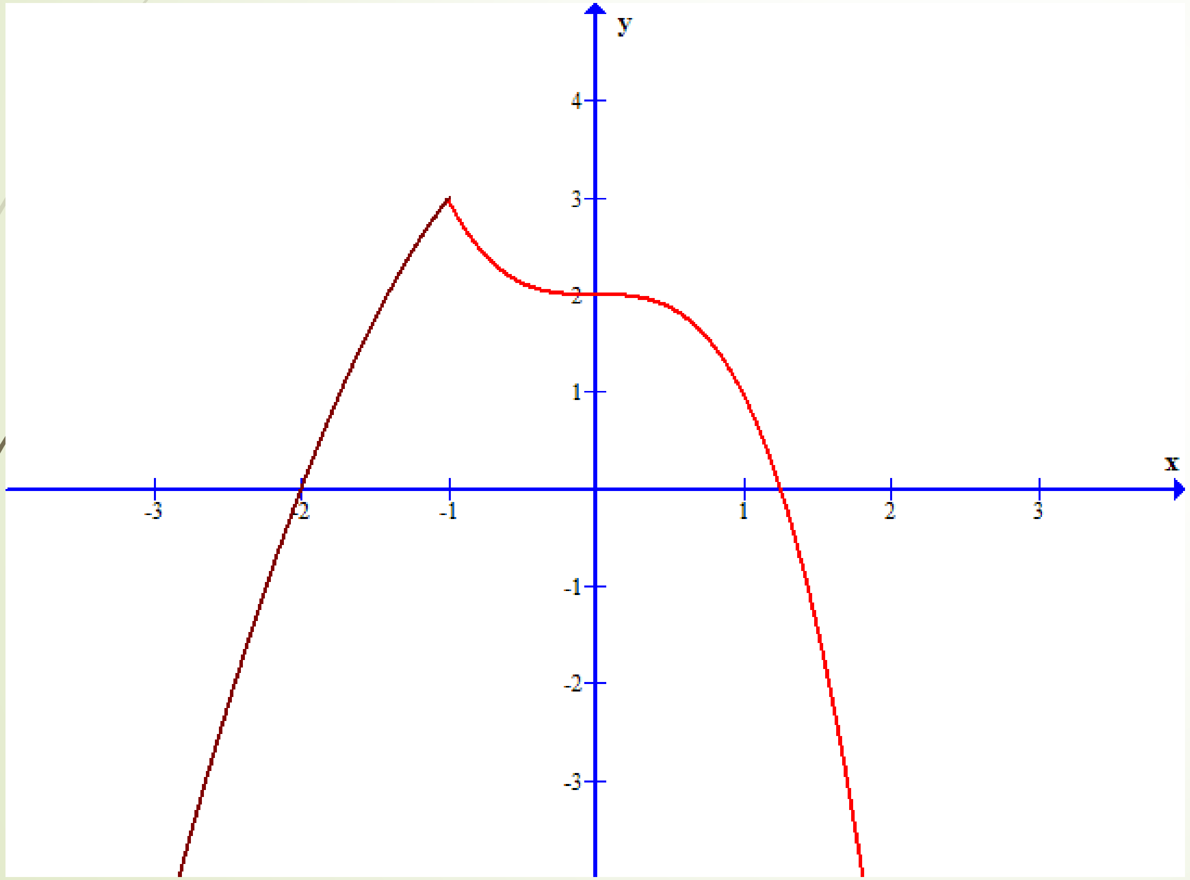

$$\lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \text{no existe}$$

$$\lim_{x \to 1^-} (-x^2 - 1) = \text{-}2$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < -1 \\ 2 - x^3, & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = ?$$



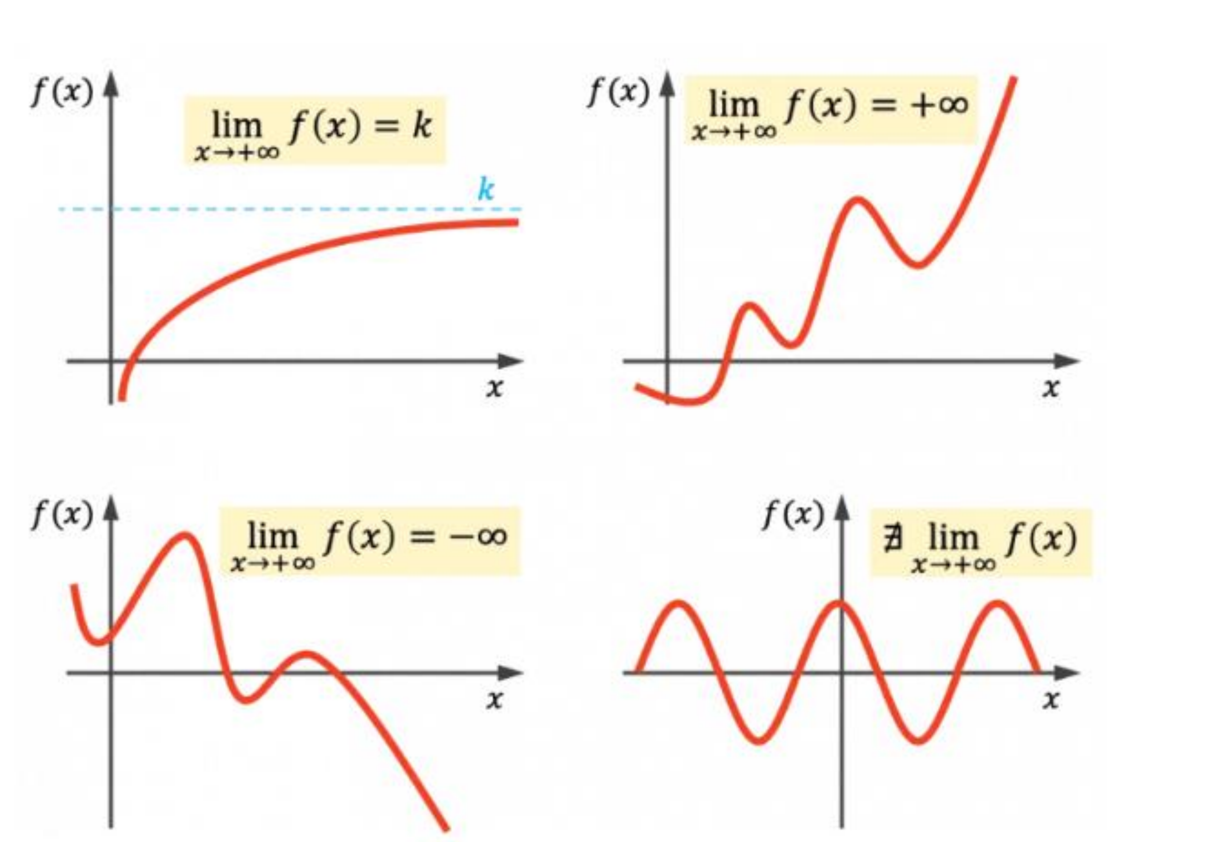
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2}, & x<2\\[2ex] \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\geq 2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=?$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2-10x+8}{8x^2-x-7}, & x\geq 1\\[2ex] \dfrac{6\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{x+8}\right)}{1-x^3}, & x<1\end{cases}$$

# Límites al Infinito

El límite de una función cuando x tiende a infinito, ya sea positivo o negativo, puede ser un valor real, más infinito, menos infinito o no existir. Para resolver límites al infinito, se debe sustituir la x por infinito.




Como puedes ver en el primer gráfico, la función representada tiende al valor real *k* al infinito, porque se va acercando a *k* a medida que *x* va creciendo. La función de arriba a la derecha tiende al más infinito cuando *x* tiende a infinito, ya que crece indefinidamente al aumentar de valor la *x*. En cambio, la gráfica de abajo a la izquierda decrece sin parar y por eso tiende a menos infinito. Finalmente, la última función es periódica y no tiende a ningún valor, por lo tanto, no existe el límite en el infinito en este caso.

# Cómo resolver límites al infinito

Para resolver un límite al infinito en funciones polinómicas, debemos sustituir la x por el infinito solamente en el término de mayor grado de la función.

Por ejemplo, fíjate en el siguiente cálculo de un límite al infinito donde únicamente sustituimos el infinito en el monomio de mayor grado:

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 4x + 6) = 3(+\infty)^2 = +\infty$$

Como puedes ver en el ejemplo, +∞ elevado al cuadrado da +∞, ya que un número muy grande (+∞) elevado a la 2 seguirá dando como resultado un número muy grande (+∞).

Y sucede lo mismo con la multiplicación: si multiplicas un número muy grande (+∞) seguirá dando como resultado un número muy grande (+∞). Por ejemplo: $3 \cdot (+\infty) = +\infty$.

**Atención:** para calcular límites en el infinito es importante que tengas en cuenta lo siguiente:

→ Un número negativo elevado a un exponente par da positivo. Por tanto, menos infinito elevado a un exponente par da más infinito:

$$(-\infty)^2 = +\infty$$

→ Un número negativo elevado a un exponente impar da negativo. Por tanto, menos infinito elevado a un exponente impar es menos infinito:

$$(-\infty)^3 = -\infty$$

→ La multiplicación de un número negativo cambia el signo del infinito:

$$-2(+\infty) = -\infty$$

→ Cualquier número dividido entre $\pm\infty$ da como resultado 0:

$$\frac{5}{\infty} = 0$$

# Ejemplos de límites al infinito

Para que puedas ver cómo se resuelven los límites al infinito en polinomios, a continuación tienes resueltos varios límites de este tipo:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - x^2 + 4) = (+\infty)^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-5x + 2) = -5(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 7x + 1) = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - x^2 + 4) = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

# Límites al infinito indeterminados

Los límites en el infinito no siempre serán tan fáciles de calcular, ya que en ocasiones obtendremos la indeterminación infinito entre infinito o la indeterminación infinito menos infinito.

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty$$

Cuando obtenemos estos tipos de indeterminaciones (o formas indeterminadas) no podemos saber el resultado directamente, sino que debemos hacer un procedimiento previo para hallar el valor de límite. A continuación, vamos a ver cómo se resuelven los límites indeterminados al infinito.

# Indeterminación infinita entre infinito

- Para hallar el resultado de la indeterminación infinito dividido entre infinito tenemos que comparar el grado del numerador y el grado denominador de la fracción:

1. Si el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, la indeterminación infinto partido por infinito **es igual a cero.**
2. Si el grado del polinomio del numerador es equivalente al grado del polinomio del denominador, la indeterminación infinito sobre infinito es el **cociente de los coeficientes principales de los dos polinomios.**
3. Si el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador, la indeterminación infinito entre infinto da **más o menos infinito** (el signo depende de los términos principales de ambos polinomios).

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^r + a_{n-1}x^{r-1} + a_{n-2}x^{r-2} + \dots}{b_n x^s + b_{n-1}x^{s-1} + b_{n-2}x^{s-2} + \dots} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < s \\ \dfrac{a_n}{b_n} & \text{si} \quad r = s \\ \pm\infty & \text{si} \quad r > s \end{cases}$$

# EJEMPLOS

Por ejemplo, en el siguiente límite, el polinomio del numerador es de segundo grado, mientras que el polinomio del denominador es de tercer grado, por lo tanto, la solución del límite es 0.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2-5}{x^3+1} = \frac{6(+\infty)^2}{(+\infty)^3} = \frac{+\infty}{+\infty} = \mathbf{0}$$

Fíjate en este otro ejemplo, en el que los dos polinomios de la función racional son de segundo grado, por lo que tenemos que dividir los coeficientes de los términos de mayor grado para calcular el límite en el infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+1}{2x^2-5} = \frac{4(+\infty)^2}{2(+\infty)^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

Finalmente, en el siguiente límite la función del numerador tiene mayor grado que la del denominador, por lo que la indeterminación infinito sobre infinito da infinito. Además, del numerador se obtiene un infinito positivo, pero del denominador un infinito negativo, así que el resultado del límite es negativo (positivo entre negativo da negativo).

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-5}{7x+1} = \frac{3(-\infty)^2}{7(-\infty)} = \frac{3(+\infty)}{-\infty} = \frac{+\infty}{-\infty} = -\infty$$

# Indeterminación infinito entre infinito con raíces

Por otro lado, el **grado de una función irracional** (función con raíces) es el cociente entre el grado del término principal y el índice del radical.

$$\sqrt[m]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots} \longrightarrow \text{grado} = \frac{n}{m}$$

Por lo tanto, si **el límite de una función con raíces da la indeterminación infinito entre infinito**, tenemos que aplicar las mismas reglas explicadas arriba de los grados del numerador y del denominador, pero teniendo en cuenta que el grado de un polinomio con raíces se calcula diferente.

Fíjate en el siguiente ejemplo del límite al infinito de una función con radicales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+11}{\sqrt{x^8-3x^2-5}} = \frac{4(+\infty)^2}{\sqrt{(+\infty)^8}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \mathbf{0}$$

El grado del numerador es 2, y el grado del denominador es 4 (8/2=4), por lo tanto, el límite da 0 porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

# Indeterminación infinito entre infinito con funciones exponenciales

El crecimiento de una función exponencial es mucho más grande que el crecimiento de una función polinómica, así que **debemos considerar que el grado de una función exponencial es mayor que el grado de una función polinómica.**

$$\text{exponencial} > \text{polinomio}$$

Por lo tanto, si la indeterminación infinito partido por infinito resulta de un límite con funciones exponenciales, simplemente debemos aplicar las mismas reglas explicas de los grados del numerador y del denominador, pero teniendo en cuenta que una función exponencial es de mayor orden que un polinomio.

Además, si tenemos funciones exponenciales en el numerador y en el denominador de la división, la función exponencial cuya base sea más grande será la que tendrá mayor orden.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5+6x^3-4x}{4^x}=\frac{7(+\infty)^5}{4^{+\infty}}=\frac{+\infty}{+\infty}=\mathbf{0}$$

En este ejemplo, el denominador está formado por una función exponencial, por lo que es de mayor orden que el numerador. En consecuencia, la forma indeterminada infinito entre infinito da 0.

# ACTIVIDAD

- Determine los siguientes límites

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 4x + 1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-3x^2 + 8x + 5)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{7}{2x - 5}$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-4x^2 + 3}{3x + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x + 8}{-5x + 2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x^4 - x - 6}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^7 - 4x^3}}{x^2 + 5x}$$