F6/

Eksempel A.8 Det inverse problem for 3-2-1 Eulervinkler,:
Gitt R_b^n finn vinklene, har løsningen (Craig 1989, s. 47)

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= \operatorname{atan2}\left(r_{32}/c_{\theta_2}, r_{33}/c_{\theta_2}\right) \\
\theta_2 &= \operatorname{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) \\
\theta_3 &= \operatorname{atan2}\left(r_{21}/c_{\theta_2}, r_{11}/c_{\theta_2}\right)
\end{aligned}
\tag{A- 39}
$$

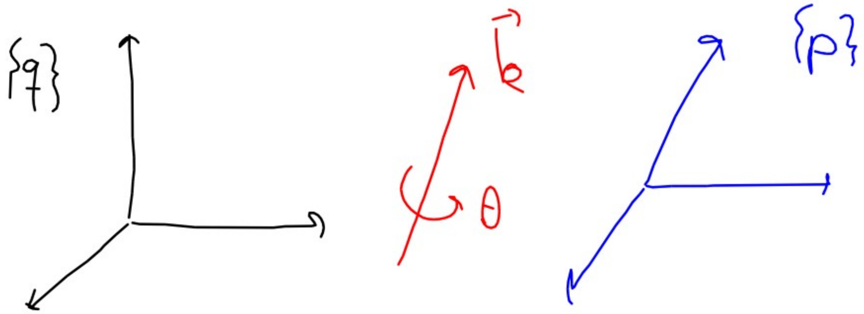
Vi løser først for θ_2. For $\theta_2 = \pm 90°$ har vi singularitet og bare summen av θ_1 og θ_3 kan beregnes.

Vinkel-akserepresentasjon av RKM

Teorem A.9 ***Eulers rotasjonsteorem***
En vilkårlig retningskosinmatrise R_p^q kan fås ved å rotere p-systemet en vinkel θ om aksen $\underline{k}^q = [k_1^q, k_2^q, k_3^q]$ ($\|\underline{k}^q\| = 1$). Dvs vi har :

$$R_p^q = R_{\underline{k}^q}(\theta) \tag{A- 40}$$

Denne representasjonen kalles for vinkel-akse representasjon.



Chose 1 : $\|\vec{k}\| = \|\underline{k}^q\| = 1$, rot θ°

Chose 2 : $\|\vec{k}\| = \|\underline{k}^q\| = \theta$

NB! R_p^q is represented by 3 parametres

Teorem A.10 ***Det direkte problem for vinkel-akse***
Når vinkel-akserepresentasjonen er gitt kan retningskosinmatrisa beregenes på følgende måte:

$$R_p^q = R_{\underline{k}}(\theta) = I + S(\underline{k}^q)\sin\theta + S^2(\underline{k}^q)(1-\cos\theta) \quad \text{(A- 41)}$$

$$= I\cos\theta + S(\underline{k}^q)\sin\theta + \underline{k}^q\,(\underline{k}^q)^T\,(1-\cos\theta) \quad \text{(A- 42)}$$

Fortegnet til θ bestemmes ut fra høgrehåndsregelen.

No proof!

Teorem A.11 ***Det inverse problem for vinkel-akse***
Gitt retningskosinmatrise

$$R_p^q = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{221} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad \text{(A- 43)}$$

No proof!

da er vinkel-akserepresentasjonen gitt ved

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right); \quad \underline{k}^q = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{bmatrix} \quad \text{(A- 44)}$$

Vi får her en $\theta \in [0°, 180°\rangle$, det finns en annen løsning $(-\underline{k}^q, -\theta)$ som gir samme retningskosinmatrise. NB: for små vinkler θ kan de numeriske feilene ved bestemmelse av $\underline{k}^q$ bli store.

Eulers symmetriske parameterrepresentasjon av RKM

Med utgangspunkt i vinkel-akse representasjonen av RKM R_p^q kan vi definere følgende parametre:

Definisjon A.12 *Eulers symmetriske parametre*
Vha vinkel-akse representasjonen kan vi definere en 4-parameter representasjon på følgende måte :

$$\underline{k}^q : \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}, \theta$$

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon_1 = k_1 \sin(\theta/2) & \varepsilon_3 = k_3 \sin(\theta/2) \\ \varepsilon_2 = k_2 \sin(\theta/2) & \varepsilon_0 = \cos(\theta/2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1 \qquad \text{(A- 45)}$$

$$= \underbrace{(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)}_{1} \sin^2(\theta/2) + \cos^2(\theta/2) = 1$$

Quaternion representation of DCM

A quaternion (here we use those with length 1) can represent the DCM R_p^q if it is defined using Euler symmetrical parameters in the following way:

$$\mathcal{E}_p^q = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \mathbb{i} + \varepsilon_2 \mathbb{j} + \varepsilon_3 \mathbb{k} \qquad \|\mathcal{E}_p^q\| = \left(\sum_{i=0}^{3} \varepsilon_i^2\right) = 1$$

$\mathbb{i}\mathbb{i} = \mathbb{j}\mathbb{j} = \mathbb{k}\mathbb{k} = -1$ I.e. interpreted as complex numbers

$\mathbb{i}\mathbb{j} = -\mathbb{j}\mathbb{i} = \mathbb{k}$ I.e Interpreting $\mathbb{i}$, $\mathbb{j}$ and $\mathbb{k}$ as vectors

$\mathbb{j}\mathbb{k} = -\mathbb{k}\mathbb{j} = \mathbb{i}$ in 3D (o.n) and the product of two

$\mathbb{k}\mathbb{i} = -\mathbb{i}\mathbb{k} = \mathbb{j}$ of them as the cross product

The determinant of R_p^q : $|R_p^q| = 1$, this corresponds to $\|\mathcal{E}_p^q\| = 1$

Renormalisation of $\mathcal{E}_p^q$ is simpler than renormalisation of R_p^q

$\left(|R_p^q| = 1 \Rightarrow \mathbb{p}_1^q \perp \mathbb{p}_2^q \perp \mathbb{p}_3^q\right)$

Rule of calculations for quaternions

$$\boxed{\begin{aligned} R^a_c = R^a_b R^b_c &\iff \mathcal{E}^a_c = \mathcal{E}^b_c \mathcal{E}^a_b \\ R^a_b \underline{r}^b &\iff \left(\mathcal{E}^a_b\right)^* \mathbb{r}^b \mathcal{E}^a_b \end{aligned}}$$

Where:

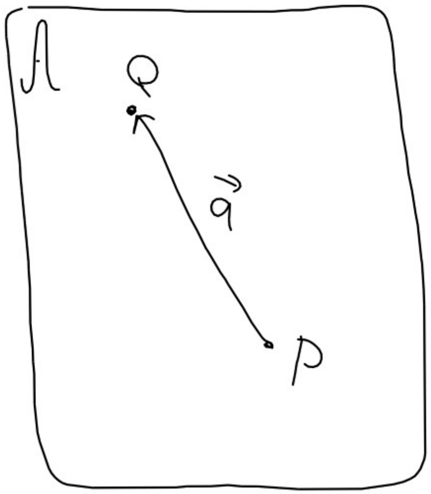
$$\left(\mathcal{E}^a_b\right)^* = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 \mathbb{i} - \varepsilon_2 \mathbb{j} - \varepsilon_3 \mathbb{k}$$

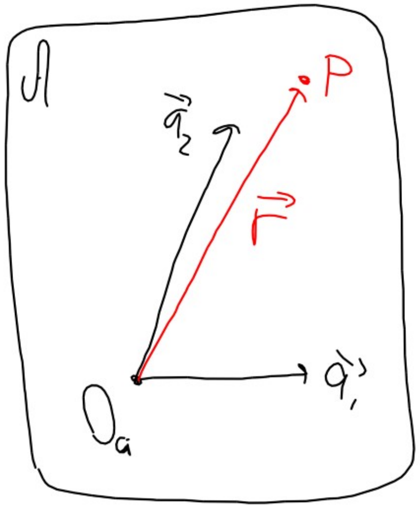
$$\mathbb{r}^b = r^b_1 \mathbb{i} + r^b_2 \mathbb{j} + r^b_3 \mathbb{k} \quad , \quad \underline{r}^b = \begin{bmatrix} r^b_1 \\ r^b_2 \\ r^b_3 \end{bmatrix}$$

Parametrisering	Notasjon	Fordel	Ulempe	Vanilige anvendelser
RKM	C_p^q	Ingen singulariteter, ingen trigonometriske funksjoner, enkel produktregel for suksesive rotasjoner	Seks redundante parametre	I analysen, for å transformere vektorer fra et k.s. til et annet
Eulervinkler	φ, θ, ψ	Ingen redundante parametre, klar fysisk tolkning	Trigonometriske funksjoner, singulariteter for visse vinkler, ingen enkel produktregel for suksessive rotasjoner	Analytiske studier, 3-akset stillingskontrol av legemer
Vinkel-akse	$\underline{k}, \theta$	Klar fysisk tolkning	En redundant parameter, aksen er udefinert når $\sin\theta = 0$, trigonometriske funksjoner	Reorienteringsmanøvre (slew)
Kvaternioner	ε	Ingen singulariteter, ingen trigonometriske funksjoner, enkel produktregel for suksessive rotasjoner	En redundant parameter, ingen klar fysisk tolkning	Treghetsnavigasjonsberegninger

A.3 Affine space

Definisjon A.14 *Affint rom*
La $\mathcal{A}$ være en ikke-tom mengde av punkter, og la $\mathcal{V}$ være et vektorrom over skalarkroppen $\mathbb{K}$. Anta at for vilkårlige punkt $P \in \mathcal{A}$ og $\vec{a} \in \mathcal{V}$ er det definert en addisjon $P + \vec{a} \in \mathcal{A}$ som tilfredstiller følgende betingelser :
1. $P + \vec{0} = P$ ($\vec{0}$ er nullvektoren i $\mathcal{V}$)
2. $(P + \vec{a}) + \vec{b} = P + (\vec{a} + \vec{b})$ for $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$
3. For enhver $Q \in \mathcal{A}$ eksisterer en entydig vektor $\vec{a} \in \mathcal{V}$ slik at $Q = P + \vec{a}$
Da er $\mathcal{A}$ et affint rom.





Given the frame $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}^{a} = \{O_a, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$

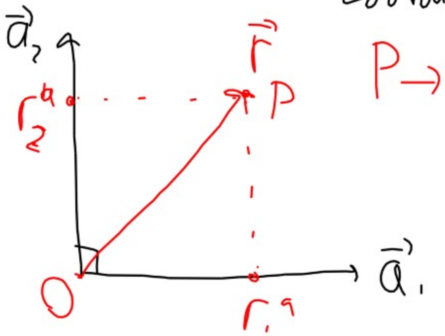
There is a unique (entydig) relation between P, $\vec{r}$, $\underline{r}^{a}$

A3.2 Coordinate systems and frames

Definisjon A.15 ***Affine koordinater***
La $\mathcal{A}$ være et $n-$dimensjonalt affint rom og la $\mathcal{F}^e = (O_e; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ være en ***ramme****, hvor O_e, kallt origo, er et punkt i $\mathcal{A}$, og vektorene $\{\vec{e}_i\}$ er et sett basisvektorer for for det tilhørende vektorrom $\mathcal{V}$. Da er de inhomogene* ***koordinatene*** *til et vilkårlig punkt $P \in \mathcal{A}$ med hensyn til ramma $\mathcal{F}^e$ gitt av n-tuppelet $\{p_1^e, p_2^e, \ldots, p_n^e\}$ (vi vil sette disse sammen til en algebraisk vektor, $\underline{p}^e$), hvor $P = O_e + \sum_{i=1}^{n} p_i^e \vec{e}_i$. Dersom $\mathcal{A}$ også har strukturen til et Euclidsk rom (se nedefor) og vi lar ramma $\mathcal{F}^e = (O_e; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ bestå av ortogonale basisvektorer sier vi at vi har et* ***rektangulært koordinatsystem*** *(eller ortogonalt k.s.), dersom basisvektorer har lengde 1, $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$,kalles k.s. for* ***kartesisk****. Generelt vil $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = c_{ij}$ og vi sier vi har et* ***oblikt koordinatsystem*** *(eller ikke-ortogonalt k.s.). Dersom vi har en oblik ramme hvor lengden på basisvektorene er $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 1$ er vinkelen mellom basisvektoren gitt av $c_{ij} = \cos \angle \vec{e}_i \vec{e}_j$*

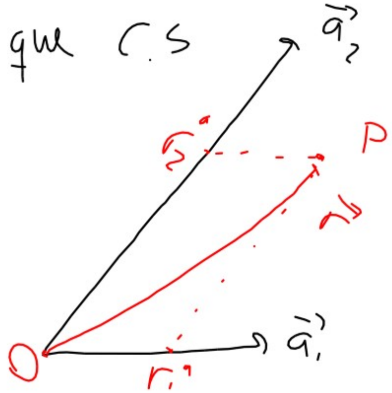
Example.

Cartesian coordinates



$P \to \underline{r}^a$

Oblique c.s



$P \to \underline{r}^a$

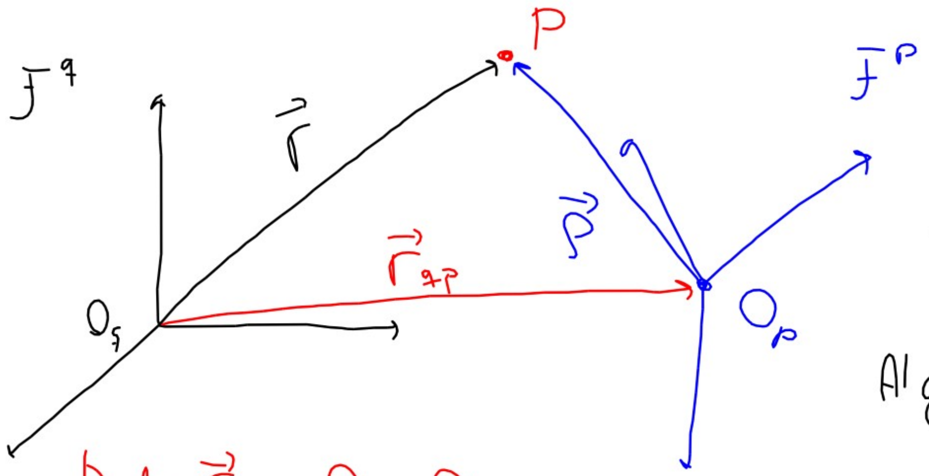
A3.3 Matrix representation of points and vectors

Inhomogenous representation

Def A.17 Position vector

$$P = O_q + \vec{r} = O_p + \vec{\rho}$$

$$\vec{r} - \vec{\rho} = O_p - O_q = \vec{r}_{qp}$$



Def: $\vec{r}_{qp} = O_p - O_q$

$= \vec{r}_{O_q O_p}$

Geometrical eq.	$\vec{r} = \vec{r}_{qp} + \vec{\rho}$
Algebraic e.q.	$\underline{r}^q = \underline{r}^q_{qp} + \underline{\rho}^q = \underline{r}^q_{qp} + R^q_p \underline{\rho}^p$

We see that when we represent points in two different frames the coordinates transform as:

$$\boxed{\underline{r}^q = \underline{r}^q_{qp} + R^q_p \underline{\rho}^p}$$ Inhomogenous

But vectors in vector spaces transform as:

$$\boxed{\underline{v}^q = R^q_p \underline{v}^p}$$ Homogenuous

Homogenuos representation of points coordinates.

$$\boxed{\underline{r}^q_p = \underline{r}^q_{qp} + R^q_p \underline{\rho}^p_p} \quad (1a)$$

Define:

$$\tilde{\underline{r}}^q_p = [\underline{r}^q_p ; 1]$$
$$\tilde{\underline{\rho}}^p_p = [\underline{\rho}^p_p ; 1]$$

4 dim. matrix rep. of the point P in $\mathcal{F}^q$ and $\mathcal{F}^p$

We get:

$$(1b) \quad \boxed{\tilde{\underline{r}}^q_p = T^q_p \tilde{\underline{\rho}}^p_p}, \quad T^q_p = \begin{bmatrix} R^q_p & \underline{r}^q_{qp} \\ [0,0,0] & 1 \end{bmatrix}$$

T^q_p : transformation matrix

For normal vectors (not representation of points) we have:

$$\boxed{\underline{v}^q = R^q_p \underline{v}^p} \quad (2a)$$

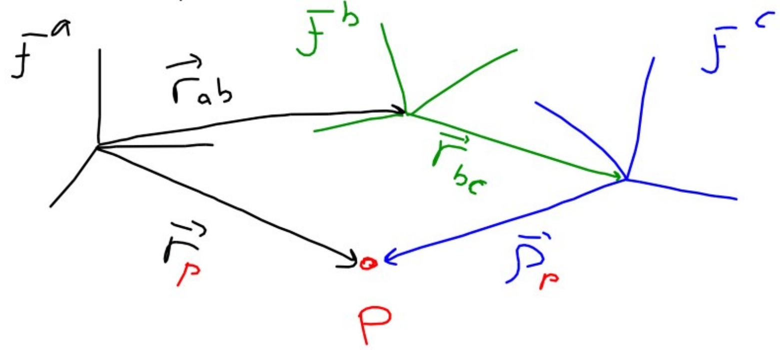
Define: $\tilde{\underline{v}}^q = [\underline{v}^q ; 0]$

$\tilde{\underline{v}}^p = [\underline{v}^p ; 0]$

In that case the 4-dim matrises transform as:

$$\boxed{\tilde{\underline{v}}^q = T^q_p \tilde{\underline{v}}^p} \quad (2b)$$

Example 3 frames



Relation between $\underline{r}^a_p$ and $\underline{\rho}^c_p$

$$\vec{r}_p = \vec{r}_{ab} + \vec{r}_{bc} + \vec{\rho}_p$$

$$\boxed{\underline{r}^a_p = \underline{r}^a_{ab} + R^a_b \underline{r}^b_{bc} + R^a_b R^b_c \underline{\rho}^c_p} \quad (3a)$$

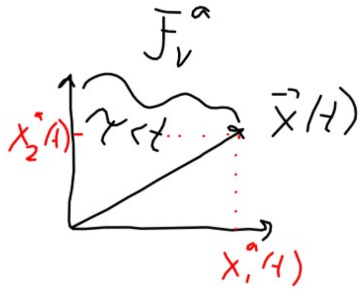
$$\boxed{\tilde{\underline{r}}^a_p = T^a_b T^b_c \tilde{\underline{\rho}}^c_p} \quad (3b)$$

A.4 Time in vectorspace and affine space

Up to now we have used points and vectors as static.

Given the vectorspace V and frame $\mathcal{F}_V^a$ we can define a time varying vector:

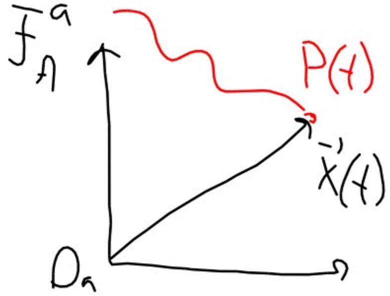
$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i^a(t)\, \vec{a}_i}$$



Unique relation $\vec{x}(t)$ and $\underline{x}^a(t)$

Given the affine space $\mathcal{A}$ with frame $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}^a = \{O_a, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ then a time varying point can be defined as:

$$\boxed{P(t) = O_a + \sum_{i=1}^{n} x_i^a(t)\, \vec{a}_i}$$



Unique realation:

$P(t)$ and $\underline{x}^a(t)$