

MATEMATISK MODELLERING AV DYNAMISKE SYSTEMER

Oddvar Hallingstad

24. august 2016

INNHold

A MATEMATISK GRUNNLAG	3
A.1 Innledning	3
A.2 Vektorrom	4
A.2.1 Definisjoner	5
A.2.2 Matriserepresentasjon av vektorer	8
A.2.3 Matriserepresentasjon av lineære operatorer	9
A.2.4 Matriserepresentasjon ved bytte av basisvektorer	9
A.2.5 Matriserepresentasjon av rotasjonsoperatorer	10
A.2.6 Tolkning av retningskosinmatrisa (RKM)	11
A.2.7 Representasjon av ortogonale RKM	11
Eulervinkelrepresentasjon av RKM	12
Vinkel-akserepresentasjon av RKM	13
Eulers symmetriske parameterrepresentasjon av RKM	14
Kvaternionrepresentasjon av RKM	14
A.3 Affine rom	17
A.3.1 Definisjoner	17
A.3.2 Koordinatsystemer og rammer	17
A.3.3 Matriserepresentasjon av punkter og vektorer	18
Inhomogen representasjon	18
Homogen representasjon, transformasjonsmatrisa	19
A.4 Tid i vektorrom og affine rom.	19
A.5 Derivasjon i vektorrom og affine rom	20
A.5.1 Definisjon av deriverte i vektorrom og affine rom.	21
A.5.2 Derivasjon av RKM	21
Derivasjon av ortogonale RKM og definisjon av vinkelhastighet	21
Det kinematiske problem for 3-2-1 eulervinkler	23
Vinkelhastighet og vinkelakselerasjon i ulike basissystem	24
A.5.3 Derivasjon av vektorer	25
A.5.4 Derivasjon av punkters bevegelse i affine rom	25

Hastighet og akselerasjon for et punkt sett fra to k.s. med relativbevegelse	26
Tolkning av uttrykket for akselerasjon	26
A.6 Matriserekning i kybernetikken	27
B DYNAMIKK	29
B.1 Kinematikk	29
B.1.1 Kinematisk beskrivelse for partikler	29
B.1.2 Kinematisk beskrivelse for stive legemer	29
B.2 Kinetikk	30
B.2.1 Newtons lover	30
Newtons lover for en partikkel	30
Newtons 2. lov for n partikler	31
B.2.2 Spinnsatsen	31
Spinnsatsen for en partikkel	31
Spinnsatsen for n partikler	32
Spinnsatsen for stive legemer	32
B.3 Momentfri bevegelse for et stivt legeme	33
B.3.1 Beskrivelse av bevegelsen sett fra b-systemet	34
B.3.2 Beskrivelse av bevegelsen sett fra i-systemet	35
B.3.3 Stabilitet om hovedaksene	35
B.4 Momentfri bevegelse for et aksesymmetriske stivt legeme	35
B.4.1 Beskrivelse av bevegelsen sett fra b-systemet	35
B.4.2 Beskrivelse av bevegelsen sett fra i-systemet	36
REFERANSER	37
1.1 Bøker	37
1.2 Artikler	37
1.3 Internett	37
1.4 Notater	37

DelA:

MATEMATISK GRUNNLAG

A.1 Innledning

Dette kompendiet behandler matematisk modellering av dynamiske systemer. Et dynamiske system er et system hvis tilstand endrer seg med tiden. Dette er en svært stor klasse av systemer så vi vil se på en underklasse som består av mekaniske systemer som kan modelleres vha ordinære differensiallikninger (partikler og stive legemer). Som vi skal se senere gir dette modeller av fysiske systemer som satelitter, fly, roboter og treghetssystemer.

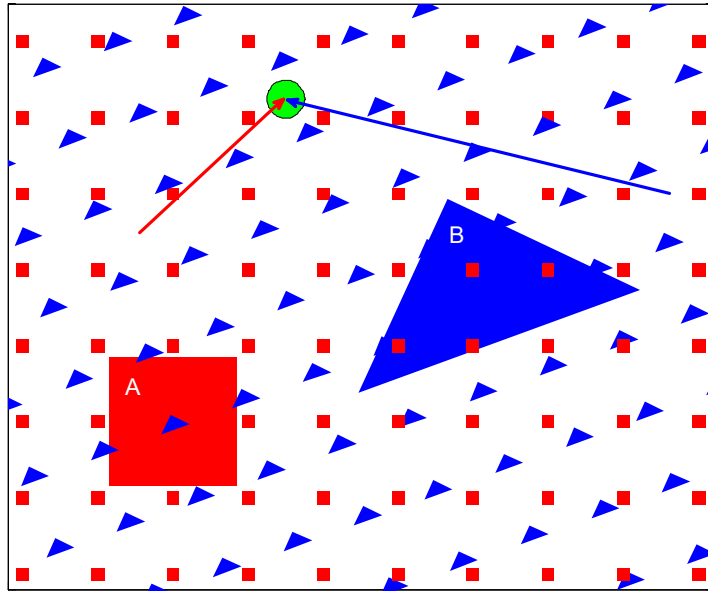
Kompendiet er logisk bygd opp av tre seksjoner. I første seksjon (del A) ser vi på det matematiske grunnlaget. Vi definerer to matematiske rom (vektorrom og affine rom) som er så generelle at de kan tjene som modeller for det fysiske tredimensjonale rom som klassisk mekanikk er formulert i. Først ser vi på det statiske tilfellet hvor vektorer og punkter ikke er funksjoner av tiden. Ved å definere basisvektorer og indreprodukt kan vi innføre koordinatsystemer (rammer) som gjør oss istand til å finne representasjoner av (geometriske) punkter, vektorer og lineære operatorer i \mathbb{R}^n og $\mathbb{R}^{n \times n}$. Vi vil hele tiden skille mellom geometrisk objekter i vektor- og affine rom, og deres representasjon i \mathbb{R}^n . Vi definerer så tidsvariante punkter, vektorer og lineære operatorer og finner sammenhenger mellom det vi i mekanikken vil kalle posisjoner, hastigheter og akselerasjoner

I den andre seksjonen (del B) ser vi på hvordan vi kan bruke det matematiske verktøyet vi utviklet i første seksjon sammen med Newtons lover til å finne modeller for bevegelsen av partikler og stive legemer som blir utsatt for ytre krefter.

I den tredje seksjonen (delene C,D og E) utvikler vi så matematiske modeller for roboter, fly og treghetsnavigasjonssystemer ved å bruke modellene fra seksjon to og matematikken fra seksjon en.

Hvilke begrep en skal bruke i et kurs om matematisk modellering av mekaniske systemer er viktig fordi begrepene bør ha et entydig innhold. Siden vi både må bruke matematisk begrep og begrep som beskriver den fysiske verden så viser litteraturen at begrepene blir definert forskjellig av forfatterne. Det meste en kan håpe på er at en forfatter er konsekvent gjennom sin lærebok. Jeg har nedenfor oppsummert de begrepene og notasjonen som blir brukt om de sentrale begrepene vektorrom og affine rom i matematikken og referanse- og treghetsrom i den fysiske verden. Alt vi senere gjør blir formulert og tolket i ett eller flere av disse rommene.

Rom	Rammer	Kommentar
Referanserom		Fysisk rom bestående av punkter som er i ro i forhold til hverandre. Eng: (observational) frame of reference
Treghetsrom		Et referanserom hvor Newtons 2. lov har sin enkleste form, $\vec{f} = m\vec{a}^i$
Vektorrom \mathcal{V}	$\mathcal{F}_{\mathcal{V}}^a = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{\vec{a}_i\} = \{a\}$ ramme a i vektorrom \mathcal{V} med basisvektorer \vec{a}_i	Matematisk definert rom med vektorer som objekter.
Affint rom \mathcal{A}	$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}^a = \{O_a; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{a\}$ ramme a i det affine rom \mathcal{A} med origo O_a og basisvektorer \vec{a}_i	Matematisk definert rom med punkter og vektorer som objekter. Brukes som modell for referanse- og treghetsrom.



Referanserom for firkant og trekant med navn på de assosierte affine rom \mathcal{A} og \mathcal{B} . Banen for sirkelen sett fra de to referanserommene er vist med piler.

I et koordinatsystem vil en basisvektor definere retningen på en *koordinatakse*.

Definisjon A.1 Et koordinatsystem $C_{\mathcal{A}}^a$ for et affint rom \mathcal{A} avbilder et punkt P inn i \mathbb{R}^n :

$$C_{\mathcal{A}}^a : P \rightarrow \underline{x}_P^a \text{ hvor } P \in \mathcal{A} \text{ og } \underline{x}_P^a \in \mathbb{R}^n$$

$$C_{\mathcal{A}}^a(P) = \underline{x}_P^a$$

Definisjon A.2 Et koordinatsystem $C_{\mathcal{V}}^a$ for et vektorrom \mathcal{V} avbilder en vektor \vec{x} inn i \mathbb{R}^n :

$$C_{\mathcal{V}}^a : \vec{x} \rightarrow \underline{x}_P^a \text{ hvor } \vec{x} \in \mathcal{V} \text{ og } \underline{x}_P^a \in \mathbb{R}^n$$

$$C_{\mathcal{V}}^a(\vec{x}) = \underline{x}_P^a$$

Når vi senere innfører rammer i et vektor- eller affint rom som kan ha både translasjon og rotasjon kan vi vanligvis nøye oss med ett vektor- eller affint rom. Vi kan da bruke notasjonen C^a som navn på koordinatsystemet både i \mathcal{V} og \mathcal{A}

A.2 Vektorrom

Jeg vil bruke følgende notasjon og forkortelser i tidsinvariante vektorrom:

A.2 Vektorrom

\vec{x}	Geometrisk vektor
\underline{x}	Algebraisk vektor (kolonnematrise)
\mathbf{A}	Operator
$A^q = [\mathbf{A}]^q$	Operatoren \mathbf{A} representert i q-systemet
$\{\vec{q}_i\}$	Basissystemet q
$\{\vec{q}_i^*\}$	Det duale basissystem for q
$S(\underline{\omega}^q) \equiv [\vec{\omega} \times]^q$	Matriserepresentasjon av ” $\vec{\omega} \times$ ”-operatoren i q-systemet.
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$	Indreproduktet av \vec{a} og \vec{b} .
$\underline{x}^T = [x_1; x_2; \dots; x_n]$	Transponert vektor (Matlab skrivemåte)
$\underline{x} = [x_i], \quad x_i = [\underline{x}]$	Kolonnematrise med generelt element x_i
$D = [d_{ij}], \quad d_{ij} = [D]_{ij}$	Matrise med generelt element d_{ij}
c_φ	$\cos(\varphi)$
s_φ	$\sin(\varphi)$
C_a^b	Retningskosinmatrise
R_a^b	Ortogonal retningskosinmatrise
k.s.	Koordinatsystem
$C_{\mathcal{V}}^a$	k.s. a i vektorrommet \mathcal{V}
$C_{\mathcal{A}}^a$	k.s. a i det affine rom \mathcal{A}
RKM	Retningskosinmatrise
$\mathbb{K}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Skalarkropp, mengden av reelle tall, mengden av komplekse tall

En vektor er et element i et vektorrom. . Eksempler på vektorrom kan være geometriske objekter med retning og lengde (piler) og n-tupler av tall samlet i en kolonnematrise. Objektene i disse to vektorromma vil vi skrive på forskjellig måte : \vec{x} og \underline{x} ($\in \mathbb{R}^n$). Som vi senere skal se, gjør vi dette for å understreke at vi for det første vektorrommet ikke har valgt en basis, mens dette er tilfelle med det andre vektorrommet. Den første type vektorer vil vi kalle *geometriske vektorer*, mens vi kaller den andre typen for *algebraiske vektorer* eller kolonnevektorer. Når vi kaller et objekt en vektor i dette kompendiet betyr det at det er definert addisjon og skalarmultiplikasjon for objektet og at disse operasjonene tilfredstiller kravet som settes til et vektorrom. Det er derfor ikke alle kolonnematriser som er algebraiske vektorer (kolonnevektorer)!

A.2.1 Definisjoner

Jeg har her samlet noen definisjoner fra lineær algebra, se Desoer (1970).

Den første definisjonen gir oss de egenskapene tallene som brukes i et lineært vektorrom må oppfylle:

Definisjon A.3 Skalarkropp

En ikke-tom mengde \mathbb{K} av elementer (a, b, c, \dots kalt skalarer) kalles en **skalarkropp** dersom følgende aksiomer gjelder :

A. Addisjon: For vilkårlige skalarer $a, b \in K$ definerer addisjon en entydig skalar $a + b \in K$. Addisjon oppfyller følgende aksiomer :

1. $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$ (kommutativitet)
2. $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b \in K$ (assosiativitet)
3. $\exists 0 \in K$ slik at $a + 0 = a \quad \forall a \in K$ (nullelement)
4. $\forall a \in K \exists (-a) \in K$ slik at $a + (-a) = 0$ (additiv invers)

B. Multiplikasjon: For vilkårlige skalarer $a, b \in K$ definerer multiplikasjon en entydig skalar $ab \in K$. Multiplikasjon oppfyller følgende aksiomer :

1. $ab = ba \quad \forall a, b \in K$ (kommutativitet)
2. $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in K$ (assosiativitet)

A MATEMATISK GRUNNLAG

3. $\exists 1 \in K$ slik at $1a = a \quad \forall a \in K$ (multiplikativ identitet)
4. $\forall a \neq 0$ og $a \in K$ eksisterer en entydig skalar $a^{-1} \in K$ slik at $aa^{-1} = 1$ (multiplikativ invers)

C. Blanding: Multiplikasjon er distributiv mhp. addisjon :

1. $a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in K$ (distributivitet)

Eksempel A.1 Skalkropp

Komplekse tall (\mathbb{C}), reelle tall (\mathbb{R}), rasjonale tall (\mathbb{Q}) og rasjonale funksjoner er alle skalkropper. Mens de hele tall ikke tilfredstiller krava til en skalkropp.

Den neste definisjonen gir oss kravene til de operasjonene en kan utføre på vektorer. Når vi senere kaller noe en vektor må det tilfredstille disse kravene.

Definisjon A.4 Lineære vektorrom

En ikke-tom mengde \mathcal{V} av elementer (kalt $\vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) kalles et lineært vektorrom over skalkroppen \mathbb{K} (betegnet med $(\mathcal{V}, \mathbb{K})$ eller bare \mathcal{V}) dersom følgende aksiomer gjelder :

A. Vektoraddisjon: Til vilkårlige vektorer $\vec{x}, \vec{y} \in V$ definerer vektoraddisjon en entydig vektor $\vec{x} + \vec{y} \in V$. Vektoraddisjonen oppfyller følgende aksiomer :

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ (kommutativitet)
2. $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ (assosiativitet)
3. $\exists \vec{0} \in V$ slik at $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in V$ (nullvektor)
4. $\forall \vec{x} \in V$ og $-\vec{x} \in V$ er $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (additiv invers)

B. Skalarmultiplikasjon: For vilkårlige skalarer $a \in K$ og vektorer $\vec{x} \in V$ definerer skalarmultiplikasjon en entydig vektor $a\vec{x} \in V$. Skalarmultiplikasjonen oppfyller følgende aksiom:

1. $(ab)\vec{x} = a(b\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in K$ (assosiativitet)
2. $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall a \in K$ (distributivitet av skalar mht vektoraddisjon)
3. $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in V, \forall a, b \in K$ (distributivitet av vektor mht skalaraddisjon)
4. $1\vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in V$ (1 er den multiplikative identitet i K)

Eksempel A.2 Lineære vektorrom

1. $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$, dvs n -tupler av tall i \mathbb{K} over skalkroppen \mathbb{K} . F eks $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eller $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ er begge lineære vektorrom.
2. Piler tegnet i planet med en addisjonsoperasjon definert av parallelogramloven og en skalarmultiplikasjon som gir en strekning av pilene.
3. n 'te ordens polynomer danner et n -dimensjonalt vektorrom .

Definisjon A.5 Basis (ramme, basisvektorsett)

Med en basis for et n -dimensjonalt vektorrom \mathcal{V} mener vi n lineært uavhengige vektorer $\vec{q}_i, i = 1, 2, \dots, n$. (Fra lineær algebra vet vi at et slikt sett alltid vil eksistere i et lineært vektorrom).

For å kunne definere ortogonalitet mellom vektorer, vinkel mellom vektorer, lengden av vektorer og projeksjonen av en vektor ned på en annen vektor definerer vi indreprodukt:

Definisjon A.6 Indreprodukt

Et reelt indreprodukt, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, har for alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{V}$ og $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ egenskapene:

1. bilineært: $\langle k_1 \vec{a} + k_2 \vec{b}, \vec{c} \rangle = k_1 \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + k_2 \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ og $\langle \vec{a}, k_1 \vec{b} + k_2 \vec{c} \rangle = k_1 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + k_2 \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$
2. symmetrisk: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$
3. ikke-degenerativt: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ for alle $\vec{b} \implies \vec{a} = \vec{0}$
4. positivt-definit: $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ for alle $\vec{a} \neq \vec{0}$ og $\langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = 0$

Dersom vi definerer et indreprodukt for et vektorrom for vi et *indreproduktrom*. For geometriske vektorer definerer vi indreproduktet ved:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \angle \vec{a} \vec{b} \quad (\text{A-1})$$

Vi ser at dette uttrykket oppfyller alle krav i definisjonen av indreprodukt, men det er tilpasset 3-D.

I tillegg til indreprodukt får en ofte bruk for to andre vektorprodukt:

Definisjon A.7 Med kryssproduktet mellom to vektorer $\vec{a} \times \vec{b} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ mener vi vektoren $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ som står vinkelrett på både \vec{a} og \vec{b} og har en lengde lik $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \angle \vec{a} \vec{b}$

Gitt de generelle vektorene $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{V}$ og skalaren s . Kryssproduktet har følgende egenskaper

A. Skalarmultiplikasjon. For enhver skalarer $s \in \mathbb{R}$

$$s(\vec{a} \times \vec{b}) = (s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b})$$

B. Kryssproduktet er distributivt mhp vektor addisjon

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

C. Kryssproduktet er antikommutativt

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

D. Kryssproduktet er ikke-assosiativt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

dvs parentesene kan ikke fjernes

Definisjon A.8 Dyadeproduktet av to vektorer \vec{a} og \vec{b} skrevet som $\vec{a}\vec{b}$ er en operator $\vec{a}\vec{b} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ som er definert ved: $\vec{a}\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ og $\vec{d} \cdot \vec{a}\vec{b} = \langle \vec{d}, \vec{a} \rangle \vec{b}$

For å kunne generalisere parallelogramloven (brukes i planet) for dekomponering av en vektor i vektorkomponenter innføres den duale basis.

Definisjon A.9 Dual basis

Den duale basis $\{\vec{p}_i^*\}$ til basisen $\{\vec{p}_i\}$ er gitt ved :

$$\langle \vec{p}_i, \vec{p}_j^* \rangle = \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (\text{A- 2})$$

Eksempel A.3 Dual basis i planet (tas på tavla)

Teorem A.1 Gram-Schmidt ortogonalisering.

Dersom vi har et sett med basisvektorer $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ kan vi lage et ortonormalt sett av basisvektorer $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ hvor $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ på følgende måte:

$$\left. \begin{aligned} \vec{h} &= \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{a}_k, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \\ \vec{e}_k &= \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|} \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A- 3})$$

Proof. Tas på tavla. ■

A.2.2 Matriserepresentasjon av vektorer

Problem A.1 Hvordan beregnes kolonnerepresentasjon, \underline{r}^p , av en vektor, \vec{r} , i p-basisen?

Siden vi ikke forutsetter at basisvektorene skal være ortogonale må vi kunne dekomponere våre vektorer etter en 3-dimensjonal versjon av parallelogramloven (den gjelder for 2-dimensjonale vektorer). Det viser seg at den duale basis (kalles også for den resiproke basis) har de rette egenskaper for dette.

Teorem A.2 Kolonnerepresentasjon av vektor

Gitt et sett med basisvektorer $\{\vec{p}_i\}$ i vektorrommet \mathcal{V} . Da kan enhver vektor $\vec{r} \in \mathcal{V}$ uttrykkes entydig i p-basisen på følgende måte :

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^n r_i^p \vec{p}_i \quad \text{hvor} \quad r_i^p = \langle \vec{r}, \vec{p}_i^* \rangle \quad (\text{A- 4})$$

Dvs det er en entydig sammenheng mellom vektoren \vec{r} og kolonnerepresentasjonen \underline{r}^p når basisen $\{\vec{p}_i\}$ er gitt.

Proof. Tas på tavla. ■

Oppgave A.1 Vis at indreproduktet definert for geometriske vektorer

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \angle \vec{a}\vec{b} \quad (\text{A- 5})$$

kan beregnes i p-ramma ved

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i^p \vec{p}_i, \sum_{j=1}^n b_j^p \vec{p}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^p b_j^p \langle \vec{p}_i, \vec{p}_j \rangle = (\underline{a}^p)^T G \underline{b}^p \quad (\text{A- 6})$$

hvor matrisen G kalles metrikmatrisa. Dersom vi bruker et ortonormalt basisvektorsett blir $G = I$ og $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = (\underline{a}^p)^T \underline{b}^p$

A.2.3 Matriserepresentasjon av lineære operatorer

Problem A.2 Hvordan beregnes matriserepresentasjon, A^p , av en lineær operator, \mathbf{A} , i p-basisen?

Definisjon A.10 *Lineær operator*

Operatoren \mathbf{A} sies å være lineær $\Leftrightarrow \forall$ vektorer $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ og \forall skalaerer $a, b \in \mathbb{R}$ så er

$$\mathbf{A}(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\mathbf{A}\vec{x} + b\mathbf{A}\vec{y} \quad (\text{A- 7})$$

Teorem A.3 *Matriserepresentasjon av en lineær operator*

Gitt et sett med basisvektorer $\{\vec{p}_i\}$ i vektorrommet \mathcal{V} . Da kan enhver lineær operator \mathbf{A} representeres entydig vha matrisen A^p , dvs:

$$\vec{y} = \mathbf{A}\vec{x} \Leftrightarrow \underline{y}^p = A^p \underline{x}^p \quad \text{hvor} \quad a_{ij}^p = \langle \mathbf{A}\vec{p}_j, \vec{p}_i^* \rangle \quad (\text{A- 8})$$

Proof. Tas på tavla. ■

Eksempel A.4 *Matrise representasjonen av " $\vec{\omega} \times$ "-operatoren*

Matrise representasjonen, $S(\underline{\omega}^p)$, av " $\vec{\omega} \times$ "-operatoren i en ortonormal basis, $\{\vec{p}_i\}$, er gitt ved :

$$S(\underline{\omega}^p) = \underline{\omega}^p \times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad \vec{\omega} = \omega_1 \vec{p}_1 + \omega_2 \vec{p}_2 + \omega_3 \vec{p}_3 \quad (\text{A- 9})$$

A.2.4 Matriserepresentasjon ved bytte av basisvektorer

Problem A.3 Bestem sammenhengen mellom matriserepresentasjonene av vektoren \vec{r} og operatoren \mathbf{A} i hhv q- og p-systemet. Dvs sammenhengen mellom \underline{r}^q og \underline{r}^p , A^q og A^p

Teorem A.4 *Matriserepresentasjon ved bytte av basisvektorer.*

Gitt to basissystemer $\{\vec{q}_i\}$ og $\{\vec{p}_i\}$ i vektorrommet \mathcal{V} . La \vec{r} og \mathbf{A} være hhv en vektor og en lineær operator i \mathcal{V} . Da har vi følgende sammenhenger mellom matriserepresentasjonene i de to basissystemene :

$$\underline{r}^q = C_p^q \underline{r}^p \quad \text{hvor} \quad C_p^q = [\langle \vec{p}_j, \vec{q}_i^* \rangle] \quad (\text{A- 10})$$

$$\underline{r}^p = C_q^p \underline{r}^q \quad \text{hvor} \quad C_q^p = [\langle \vec{q}_j, \vec{p}_i^* \rangle] \quad (\text{A- 11})$$

$$A^q = C_p^q A^p C_q^p \quad \text{og} \quad A^p = C_q^p A^q C_p^q \quad (\text{A- 12})$$

C_p^q og C_q^p kalles retningskosinmatriser (RKM). (Vi skal senere se at den kan brukes i mange sammenhenger og har navn deretter. Ovenfor brukes den som en koordinattransformasjonsmatrise, KTM.)

Proof. Tas på tavla. ■

Eksempel A.5 Teorem A.5 RKM for to ortonormale basissystem

Dersom vi har to ortonormale basisvektorsettet $\{\vec{q}_i\}$ og $\{\vec{p}_i\}$, dvs

$$\begin{aligned}\langle \vec{q}_i, \vec{q}_j \rangle &= \delta_{ij} \\ \langle \vec{p}_i, \vec{p}_j \rangle &= \delta_{ij}\end{aligned}\tag{A-13}$$

så vil de duale basissystema være lik basissystema

$$\begin{aligned}\vec{q}_i &= \vec{q}_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \vec{p}_i &= \vec{p}_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\tag{A-14}$$

Dette gir

$$C_p^q = [\langle \vec{p}_j, \vec{q}_i \rangle] = [\cos(\angle \vec{p}_j, \vec{q}_i)] = R_p^q\tag{A-15}$$

Dette viser hvorfor C_p^q kalles en **retningskosinmatrise**. Vi vil innføre en spesiell notasjon i dette tilfellet med ortonormale basissystemer og betegner en ortonormal RKM med R_p^q .

Som vist ovenfor skiller jeg notasjonsmessig mellom RKM mellom to rammer hvor basisvektorene ikke trenger ha enhetslengde og heller ikke være ortogonale (C_p^q), og RKM mellom to rammer som begge har ortonormale basisvektorer (R_p^q).

Teorem A.6 RKM R_p^q er en ortogonal matrise

Retningskosinmatrisa mellom to rammer som begge har ortonormale basisvektorer, R_p^q , er en ortogonal matrise. Dvs

$$(R_p^q)^{-1} = (R_p^q)^T\tag{A-16}$$

Proof. Retningskosinmatrisa

$$R_p^q = \begin{bmatrix} p_1^q & p_2^q & p_3^q \end{bmatrix}$$

har ortonormale kolonnevektorer

$$\underline{p}_i^T \underline{p}_j = \delta_{ij}$$

Vi har derfor

$$(R_p^q)^T R_p^q = \begin{bmatrix} \underline{p}_i^T \underline{p}_j \end{bmatrix} = [\delta_{ij}] = I$$

■

Selv om R_p^q er ei 3×3 matrise og inneholder 9 elementer så er ikke dette ni uavhengige elementer. Fordi matrisa som vist ovenfor er ortogonal gjelder følgende sammenhenger mellom elementa:

$$\|\underline{p}_j^q\| = 1 \text{ for } j = 1, 2, 3\tag{A-17}$$

$$\langle \underline{p}_i^q, \underline{p}_j^q \rangle = 0 \text{ for } (i, j) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}\tag{A-18}$$

vi har dermed 6 likninger mellom de 9 elementa i R_p^q . En ortogonal RKM har derfor bare 3 uavhengige elementer. Det bør derfor være mulig å representere (generere) R_p^q entydig vha 3 uavhengige parametre. Som vi skal se senere kan dette gjøres på mange måter.

NB : Multiplikasjon av retningskosinmatriser (også ortogonale) er ikke-kommutativ.

A.2.5 Matriserepresentasjon av rotasjonsoperatorer

Definisjon A.11 En rotasjonsoperator er en lineær operator $\mathbf{R}_{ab} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ definert ved

$$\vec{b}_i = \mathbf{R}_{ab} \vec{a}_i; \quad i \in \{1, 2, 3\}\tag{A-19}$$

hvor basisvektorsettet $\{\vec{a}_i\}$ samlet roteres til en ny stilling slik at $\vec{a}_i \rightarrow \vec{b}_i$.

Vi ser at dyaderepresentasjonen av \mathbf{R}_{ab} er:

$$\mathbf{R}_{ab} = \vec{b}_1 \vec{a}_1^* + \vec{b}_2 \vec{a}_2^* + \vec{b}_3 \vec{a}_3^*\tag{A-20}$$

A.2 Vektorrom

fordi

$$\mathbf{R}_{ab}\vec{a}_i = \vec{b}_i \text{ for } i = 1, 2, 3$$

Teorem A.7 *Matriserepresentasjonen av rotasjonsoperatoren \mathbf{R}_{ab} i rammene a og b er*

$$R_{ab}^a = R_{ab}^b = C_b^a \quad (\text{A- 21})$$

$$R_{ab}^a = [\mathbf{R}_{ab}]^a; \quad R_{ab}^b = [\mathbf{R}_{ab}]^b \quad (\text{A- 22})$$

Bevis 1:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{ab}]^a &= [\langle \mathbf{A}\vec{a}_j, \vec{a}_i^* \rangle] = \left[\langle \vec{b}_j, \vec{a}_i^* \rangle \right] = C_b^a \\ [\mathbf{R}_{ab}]^b &= C_a^b [\mathbf{R}_{ab}]^a C_b^a = C_a^b C_b^a C_b^a = C_b^a \end{aligned}$$

Bevis 2:

For en vilkårlig vektor \vec{x} må vi ha at

$$\vec{y} = \mathbf{R}_{ab}\vec{x} \quad (\text{A- 23})$$

$$\underline{y}^b = \underline{x}^a \quad (\text{A- 24})$$

Matriserepresentasjon av operatoren \mathbf{R}_{ab} må derfor tilfredstille

$\begin{aligned} C_b^a \underline{y}^b &= [\mathbf{R}_{ab}]^a \underline{x}^a \\ \underline{x}^a &= C_a^b [\mathbf{R}_{ab}]^a \underline{x}^a \\ (I - C_a^b [\mathbf{R}_{ab}]^a) \underline{x}^a &= \underline{0} \text{ for alle } \underline{x}^a \\ C_a^b [\mathbf{R}_{ab}]^a &= I \\ [\mathbf{R}_{ab}]^a &= C_b^a \end{aligned}$	$\begin{aligned} \underline{y}^b &= [\mathbf{R}_{ab}]^b C_a^b \underline{x}^a \\ \underline{x}^a &= [\mathbf{R}_{ab}]^b C_a^b \underline{x}^a \\ (I - [\mathbf{R}_{ab}]^b C_a^b) \underline{x}^a &= \underline{0} \text{ for alle } \underline{x}^a \\ [\mathbf{R}_{ab}]^b C_a^b &= I \\ [\mathbf{R}_{ab}]^b &= C_b^a \end{aligned}$
$[\mathbf{R}_{ab}]^a = [\mathbf{R}_{ab}]^b = C_b^a$	

Dvs matriserepresentasjonen av \mathbf{R}_{ab} i a - og b -systemene er den samme!

A.2.6 Tolkning av retningskosinmatrisa (RKM)

Vi kan nå summere opp tre mulige tolkninger eller bruk av RKM C_b^a :

1. C_b^a er en *koordinattransformasjonsmatrise* (KTM) som gir oss sammenhengen mellom koordinatene i rammene b og a , dvs mellom de algebraiske vektorene \underline{r}^b og \underline{r}^a :

$$C_b^a : \underline{r}^b \rightarrow \underline{r}^a = C_b^a \underline{r}^b \quad (\text{A- 25})$$

2. C_b^a : er en *stillingsmatrise* (attitude matrix) som gir stillinga (orienteringa) av ramme b i ramme a : Dvs kolonnene i C_b^a er en kolonnerepresentasjonen av b -basisen i a -basisen.

$$C_b^a = [\underline{b}_1^a, \underline{b}_2^a, \underline{b}_3^a] \quad (\text{A- 26})$$

3. $C_b^a = [\mathbf{R}_{ab}]^a = [\mathbf{R}_{ab}]^b$ er en *rotasjonsmatrise* som kan brukes til å rotere en vektor i a - eller b -ramma:

$$\vec{r}_2 = \mathbf{R}_{ab}\vec{r}_1 \quad (\text{A- 27})$$

$$\underline{r}_2^a = C_b^a \underline{r}_1^a \quad (\text{A- 28})$$

$$\underline{r}_2^b = C_b^a \underline{r}_1^b \quad (\text{A- 29})$$

Hvilket navn vi bruker på C_b^a er som vist avhengig av hvilken tolkning som er aktuell. *Retningskosinmatrisa* avspeiler den matematiske beregning av elementa i C_b^a , og kan brukes i forbindelse med alle tolkningene. Tolkning en og to kalles også for en passiv tolkning fordi det er k.s. som endres. Tolkning 3 kalles aktiv fordi det er vektoren som endres.

A.2.7 Representasjon av ortogonale RKM

Vi skal i dette avsnittet se på ulike måter å representere ortogonale RKM.

Eulervinkelrepresentasjon av RKM

Elementære RKM. Gitt rammene q og p . Dersom en tenker seg at rammene opprinnelig var sammenfallende fås den endelige p -ramma ved å dreie den en vinkel θ om q_i -aksen. Vi har følgende elementære RKM-er:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A- 30})$$

Regneregler for elementære RKM. De følgende regler er lett å verifisere:

$$R_i(\theta_1 + \theta_2) = R_i(\theta_1)R_i(\theta_2) = R_i(\theta_2)R_i(\theta_1) \quad (\text{A- 31})$$

$$(R_i(\theta))^{-1} = (R_i(\theta))^T = R_i(-\theta) \quad (\text{A- 32})$$

I litteraturen bruker en ofte betegnelsene:

$$[\psi] = R_3(\psi) : \text{asimut}$$

$$[\theta] = R_2(\theta) : \text{elevasjon (pitch)}$$

$$[\varphi] = R_1(\varphi) : \text{rull}$$

Rotasjoner om basisvektorne. Dersom en RKM defineres ved rotasjoner om basisvektorene (koordinataksene), har vi to hovedtyper. Disse hovedtypene kan defineres vha de elementære RKM :

1. Rotasjon om nye koordinatakser (vinklene kalles *eulervinkler*).

$${}^E R_p^q(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) = R_i(\alpha)R_j(\beta)R_k(\gamma) \quad (\text{A- 33})$$

Antar rammene. er sammenfallende. Dreier først en vinkel α om q_i -aksen, så β om p'_j -aksen og til slutt γ om p_k -aksen.

2. Rotasjon om faste koordinatakser.

$${}^F R_p^q(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) = R_k(\gamma)R_j(\beta)R_i(\alpha) \quad (\text{A- 34})$$

Dreier først en vinkel α om q_i -aksen, så β om q_j -aksen og til slutt γ om q_k -aksen.

Teorem A.8 Sammenheng mellom rotasjon om nye og faste akser

Tre rotasjoner om nye akser (*eulervinkler*) gir den samme endelige stilling som de samme rotasjoner tatt i omvendt rekkefølge om faste akser, dvs :

$${}^E R_p^q(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) = {}^F R_p^q(\gamma_k, \beta_j, \alpha_i) \quad (\text{A- 35})$$

Det betyr at vi bare har 12 forskjellige definisjoner av RKM når vi dreier om nye eller faste akser. Vi har to hovedtyper av rotasjoner:

1. Tre rotasjon om tre forskjellige akser. Vi får singulariteter for $\beta = \pm 90^\circ$.
2. Tre rotasjoner om to akser. Vi får her singulariteter for $\beta = 0^\circ$ og $\beta = 180^\circ$.

Hvilket vinkelsett som brukes er avhengig av problemet som skal løses fordi vinkelsetta har singulariteter (ved løsning av det inverse problem : gitt R_p^q finne α, β, γ) avhengig av dreiesekvens og hvilke akser det dreies om.

Eksempel A.6 3-2-1 Eulervinkler.

Ved simulering av fly og båter bruker en ofte følgende stillingsmatrise:

$$R_b^n = {}^E R_b^n(\theta_3, \theta_2, \theta_1) = R_3(\theta_3)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1) \quad (\text{A- 36})$$

A.2 Vektorrom

Multipliseres de elementære RKM sammen får vi :

$${}^E R_b^n(\theta_3, \theta_2, \theta_1) = \begin{bmatrix} c_{\theta_3} c_{\theta_2} & c_{\theta_3} s_{\theta_2} s_{\theta_1} - s_{\theta_3} c_{\theta_1} & c_{\theta_3} s_{\theta_2} c_{\theta_1} + s_{\theta_3} s_{\theta_1} \\ s_{\theta_3} c_{\theta_2} & s_{\theta_3} s_{\theta_2} s_{\theta_1} + c_{\theta_3} c_{\theta_1} & s_{\theta_3} s_{\theta_2} c_{\theta_1} - c_{\theta_3} s_{\theta_1} \\ -s_{\theta_2} & c_{\theta_2} s_{\theta_1} & c_{\theta_2} c_{\theta_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A- 37})$$

Vi har ovenfor brukt notasjonen :

- n geografisk k.s. med origo i flyet og med aksene N,E og D (north, east, down)
- b body k.s. som ligger fast i flyet og har aksene R,P og Y (roll, pitch, yaw)
- θ_1 rullvinkel, bruker ofte φ for denne.
- θ_2 elevasjonsvinkel (pitch), bruker ofte θ for denne
- θ_3 asimutvinkel (yaw), bruker ofte ψ for denne

Eksempel A.7 3-1-3 Eulervinkler (klassiske Eulervinkler)

Ved løsning av mange mekanikkproblem bruker en RKM

$$R_b^i = {}^E R_b^i(\alpha_3, \beta_1, \gamma_3) \quad (\text{A- 38})$$

hvor vi har brukt notasjonen

- i treghetssystemet
- b body k.s. som ligger fast i legemet
- α presesjonsvinkel (bruker ofte ψ om denne)
- β nutasjonsvinkel (bruker ofte θ om denne)
- γ spinnvinkel (bruker ofte φ om denne)

Vi har ovenfor sett på det **direkte problem** : gitt vinkler og dreiesekvens bestem retningskosinmatrisa R_p^q .

Det **inverse problem** er : gitt retningskosinmatrisa R_p^q (matrise bestående av tall) bestem vinklene for en bestemt dreiesekvens.

Ved løsning av det inverse problem forsøker en å finne vinklene vha atan2 fordi denne gir entydige vinkler.

Eksempel A.8 Det inverse problem for 3-2-1 Eulervinkler,:

Gitt R_b^n finn vinklene, har løsningen (Craig 1989, s. 47)

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \text{atan2}(r_{32}/c_{\theta_2}, r_{33}/c_{\theta_2}) \\ \theta_2 &= \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) \\ \theta_3 &= \text{atan2}(r_{21}/c_{\theta_2}, r_{11}/c_{\theta_2}) \end{aligned} \quad (\text{A- 39})$$

Vi løser først for θ_2 . For $\theta_2 = \pm 90^\circ$ har vi singularitet og bare summen av θ_1 og θ_3 kan beregnes.

Vinkel-akserepresentasjon av RKM

Euler beviste følgende teorem:

Teorem A.9 Eulers rotasjonsteorem

En vilkårlig retningskosinmatrise R_p^q kan fås ved å rotere p -systemet en vinkel θ om akse $\underline{k}^q = [k_1^q, k_2^q, k_3^q]$ ($\|\underline{k}^q\| = 1$). Dvs vi har :

$$R_p^q = R_{\underline{k}^q}(\theta) \quad (\text{A- 40})$$

Denne representasjonen kalles for vinkel-akse representasjon.

Dette teoremet sier at enver stilling i rommet kan nås vha en rotasjon rundt en akse. Vi ser at også denne representasjonen er beskrevet av 3 uavhengige parametre siden vi har en likning som skal være oppfylt mellom de 4 parametrene: $\theta, k_1^q, k_2^q, k_3^q$ ($\|\underline{k}^q\| = 1$).

A MATEMATISK GRUNNLAG

Formlene for det direkte problem og det inverse problem er gitt i Craig (side 52):

Teorem A.10 *Det direkte problem for vinkel-akse*

Når vinkel-akserepresentasjonen er gitt kan retningskosinmatrisa beregnes på følgende måte:

$$R_p^q = R_{\underline{k}}(\theta) = I + S(\underline{k}^q) \sin \theta + S^2(\underline{k}^q)(1 - \cos \theta) \quad (\text{A- 41})$$

$$= I \cos \theta + S(\underline{k}^q) \sin \theta + \underline{k}^q (\underline{k}^q)^T (1 - \cos \theta) \quad (\text{A- 42})$$

Fortegnet til θ bestemmes ut fra høyrehåndsregelen.

Teorem A.11 *Det inverse problem for vinkel-akse*

Gitt retningskosinmatrise

$$R_p^q = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A- 43})$$

da er vinkel-akserepresentasjonen gitt ved

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right); \quad \underline{k}^q = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A- 44})$$

Vi får her en $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$, det finns en annen løsning $(-\underline{k}^q, -\theta)$ som gir samme retningskosinmatrise. NB: for små vinkler θ kan de numeriske feilene ved bestemmelse av \underline{k}^q bli store.

Eulers symmetriske parameterrepresentasjon av RKM

Med utgangspunkt i vinkel-akse representasjonen av RKM R_p^q kan vi definere følgende parametre:

Definisjon A.12 *Eulers symmetriske parametre*

Vha vinkel-akse representasjonen kan vi definere en 4-parameter representasjon på følgende måte :

$$\left. \begin{array}{ll} \varepsilon_1 = k_1 \sin(\theta/2) & \varepsilon_3 = k_3 \sin(\theta/2) \\ \varepsilon_2 = k_2 \sin(\theta/2) & \varepsilon_0 = \cos(\theta/2) \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1 \quad (\text{A- 45})$$

Kvaternionrepresentasjon av RKM

Med utgangspunkt Eulers symmetriske parametre kan vi innføre regneregler som gjør det å behandle 3-dimensjonale rotasjoner omtrent like enkelt som i det 2-dimensjonale tilfellet hvor vi kan bruke komplekse tall.

Definisjon A.13 *Kvaternioner*

Eulers symmetriske parametre som representerer RKM R_p^q kan ses på som en kvaternion, ϵ_p^q (med lengde lik 1), definert ved :

$$\epsilon_p^q = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \mathbf{i} + \varepsilon_2 \mathbf{j} + \varepsilon_3 \mathbf{k}$$

hvor $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ og \mathbf{i}, \mathbf{j} og \mathbf{k} tilfredstiller :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{ii} & = & \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = -1 \\ \mathbf{ij} & = & -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \\ \mathbf{jk} & = & -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \\ \mathbf{ki} & = & -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \end{array} \quad (\text{A- 46})$$

Teorem A.12 *Det direkte problem for kvaternioner*

Når kvaternionen ε_q^p er gitt kan vi beregne RKM R_p^q på følgende måte:

$$R_p^q = \begin{bmatrix} 1 - 2\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_0\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_0\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_0\varepsilon_3) & 1 - 2\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_3^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_0\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_0\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_0\varepsilon_1) & 1 - 2\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_2^2 \end{bmatrix}$$

Teorem A.13 *Det inverse problem for kvaternioner*

Når RKM $R_p^q = [r_{ij}]$ er gitt kan kvaternionen ε_p^q beregnes fra

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \\ \varepsilon_1 &= \frac{r_{32} - r_{23}}{4\varepsilon_0} \\ \varepsilon_2 &= \frac{r_{13} - r_{31}}{4\varepsilon_0} \\ \varepsilon_3 &= \frac{r_{12} - r_{21}}{4\varepsilon_0} \end{aligned}$$

La R_b^a og R_c^b være to retningskosinmatriser med tilhørende kvaternioner ε_b^a og ε_c^b . Da kan det vises at :

$$\left. \begin{aligned} R_b^a R_c^b &\equiv \varepsilon_c^b \varepsilon_b^a \\ R_b^a \underline{r}^b &\equiv (\varepsilon_b^a)^* \underline{r}^b \varepsilon_b^a \end{aligned} \right\} \text{ hvor } \begin{cases} \varepsilon^* = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 \mathbf{i} - \varepsilon_2 \mathbf{j} - \varepsilon_3 \mathbf{k} \\ \underline{r}^b = r_1^b \mathbf{i} + r_2^b \mathbf{j} + r_3^b \mathbf{k} \end{cases} \quad (\text{A- 47})$$

ε^* kalles ε -konjugert.

En kan også lage matriserepresentasjoner (p) av en kvaternion (\underline{p}), konjugerte kvaternion (\underline{p}^*), operatoren \mathbf{P} i kvaternionprodukt $\underline{p}\underline{q}$ og koordinattransformasjon av en vektor $\underline{p}^* \underline{r} \underline{p}$:

$$\begin{aligned} \underline{p} &= [p_0; p_1; p_2; p_3] \\ \underline{p}^* &= [p_0; -p_1; -p_2; -p_3] \\ \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Parametrisering	Notasjon	Fordel	Ulempe	Vanlige anvendelser
RKM	C_p^q	Ingen singulariteter, ingen trigonometriske funksjoner, enkel produktregel for successive rotasjoner	Seks redundante parametre	I analysen, for å transformere vektorer fra et k.s. til et annet
Eulervinkler	φ, θ, ψ	Ingen redundante parametre, klar fysisk tolkning	Trigonometriske funksjoner, singulariteter for visse vinkler, ingen enkel produktregel for successive rotasjoner	Analytiske studier, 3-akset stillingskontrol av legemer
Vinkel-akse	\underline{k}, θ	Klar fysisk tolkning	En redundant parameter, aksen er udefinert når $\sin \theta = 0$, trigonometriske funksjoner	Reorienteringsmanøvre (slew)
Kvaternioner	ε	Ingen singulariteter, ingen trigonometriske funksjoner, enkel produktregel for successive rotasjoner	En redundant parameter, ingen klar fysisk tolkning	Treghetsnavigasjonsberegninger

A.3 Affine rom

Et vektorrom har bare vektorer som elementer. Men vi har også bruk for geometriske objekter som vi kaller punkter. Vi skal i dette avsnittet se hvordan vi både kan bruke punkter og vektorer til å beskrive sammenhenger i et 3-dimensjonalt rom.

A.3.1 Definisjoner

Definisjon A.14 Affint rom

La \mathcal{A} være en ikke-tom mengde av punkter, og la \mathcal{V} være et vektorrom over skalarkroppen \mathbb{K} . Anta at for vilkårlige punkt $P \in \mathcal{A}$ og $\vec{a} \in \mathcal{V}$ er det definert en addisjon $P + \vec{a} \in \mathcal{A}$ som tilfredstiller følgende betingelser :

1. $P + \vec{0} = P$ ($\vec{0}$ er nullvektoren i \mathcal{V})
2. $(P + \vec{a}) + \vec{b} = P + (\vec{a} + \vec{b})$ for $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$
3. For enhver $Q \in \mathcal{A}$ eksisterer en entydig vektor $\vec{a} \in \mathcal{V}$ slik at $Q = P + \vec{a}$

Da er \mathcal{A} et affint rom.

Dersom vi velger et punkt $O_a \in \mathcal{A}$, er det en en-til-en korrespondanse mellom \mathcal{A} og \mathcal{V} gitt av avbildninga som sender en $P \in \mathcal{A}$ til en $\vec{a} \in \mathcal{V}$ slik at $P = O_a + \vec{a}$. Et slikt element $\vec{a} \in \mathcal{V}$ kalles en **posisjonsvektor** for P gitt **initialpunktet** O_a og skrives ofte $\overrightarrow{O_a P}$.

Vi sier at $r+1$ punkter P_i ($0 \leq i \leq r$) er **uavhengige** dersom vektorene $\overrightarrow{P_0 P_i}$ ($1 \leq i \leq r$) er lineært uavhengige, ellers sies de å være avhengige. Det kan vises at denne definisjonen er uavhengig av valget av O_a , det er altså en egenskap til det affine rom.

Dersom \mathcal{V} har dimensjonen n , har også \mathcal{A} dimensjonen n og vi skriver ofte \mathcal{A}^n istedet for \mathcal{A} (på samme måten som vi ofte skriver \mathcal{V}^n istedet for \mathcal{V} for n -dimensjonale vektorrom).

Det kan vises at det affine rom \mathcal{A} er av dimensjon $n \Leftrightarrow$ det eksisterer $n+1$ uavhengige punkter i \mathcal{A} .

Eksempel A.9 Dersom vi fyller det 3-dimensjonale rom \mathbb{R}^3 med punkter og bruker vanlige 3-dimensjonale vektorer vil det kunne defineres som et affint rom.

A.3.2 Koordinatsystemer og rammer

Et affint rom består av punkter og vektorer. Vi ønsker en funksjonen som tilordner entydige tallverdier til hvert punkt i det affine rom. En slik funksjon kalles et **koordinatsystem** (k.s.). Formelt har vi følgende definisjon :

Definisjon A.15 Affine koordinater

La \mathcal{A} være et n -dimensjonalt affint rom og la $\mathcal{F}^e = (O_e; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ være en **ramme**, hvor O_e , kalt origo, er et punkt i \mathcal{A} , og vektorene $\{\vec{e}_i\}$ er et sett basisvektorer for det tilhørende vektorrom \mathcal{V} . Da er de inhomogene **koordinatene** til et vilkårlig punkt $P \in \mathcal{A}$ med hensyn til ramma \mathcal{F}^e gitt av n -tupplet $\{p_1^e, p_2^e, \dots, p_n^e\}$ (vi vil sette disse sammen til en algebraisk vektor, \underline{p}^e), hvor $P = O_e + \sum_{i=1}^n p_i^e \vec{e}_i$. Dersom \mathcal{A} også har strukturen til et Euclidsk rom (se nedfor) og vi lar ramma $\mathcal{F}^e = (O_e; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ bestå av ortogonale basisvektorer sier vi at vi har et **rektangulært koordinatsystem** (eller ortogonalt k.s.), dersom basisvektorer har lengde 1, $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, kalles k.s. for **kartesisk**. Generelt vil $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = c_{ij}$ og vi sier vi har et **oblikt koordinatsystem** (eller ikke-ortogonalt k.s.). Dersom vi har en oblik ramme hvor lengden på basisvektorene er $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 1$ er vinkelen mellom basisvektoren gitt av $c_{ij} = \cos \angle \vec{e}_i \vec{e}_j$

Vi har tidligere innført betegnelsen RKM for $[c_{ij}]$.

Definisjon A.16 Euklidsk rom

Et rom som tilfredstiller aksiomene til Euklidsk geometri kalles et Euklidsk rom.

Eksempel A.10 Et affint rom som har som vektorrom et n -dimensjonalt Euklidsk indreproduktrom over de reelle tall \mathbb{R} , er et n -dimensjonalt Euklidsk rom \mathcal{E}^n .

I et n -dimensjonalt Euklidsk rom \mathcal{E}^n , kan vi velge en ortogonal ramme $\mathcal{F}^e = \{O_e; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ hvor $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$. Ramma \mathcal{F}^e bestemmer altså et sett med **kartesiske koordinater** \underline{p} i et hvert punkt i \mathcal{E}^n . Vi kan derfor etablere en en-til-en forbindelse mellom \mathcal{E}^n og \mathbb{R}^n ($\underline{p} \in \mathbb{R}^n$). Vi kaller derfor også \mathbb{R}^n for et n -dimensjonalt Euklidsk rom. Det 1-dimensjonale rom \mathbb{R}^1 er en rett linje, og det kartesiske produkt av n kopier av \mathbb{R}^1 er et n -dimensjonalt Euklidsk rom som vi også kaller et **kartesisk rom**. Avstanden mellom to punkter \underline{p} og \underline{r} i et kartesisk rom er gitt ved

$$d(\underline{p}, \underline{r}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - r_i)^2} = \sqrt{(\underline{p} - \underline{r})^T (\underline{p} - \underline{r})} \quad (\text{A- 48})$$

Dersom vi legger inn et oblikt k.s. i et Euklidsk rom kan avstanden mellom to punkter \underline{p} og \underline{r} beregnes på følgende måte :

$$d(\underline{p}, \underline{r}) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} (p_i - r_i) (p_j - r_j) \right)^{1/2} = ((\underline{p} - \underline{r})^T G (\underline{p} - \underline{r}))^{1/2} \quad (\text{A- 49})$$

hvor $G = [\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle]$ er metrikkmatrisa.

A.3.3 Matriserepresentasjon av punkter og vektorer

Inhomogen representasjon

Definisjon A.17 Posisjonsvektor

Dersom vi innfører to rammer \mathcal{F}^q og \mathcal{F}^p , hver med ortogonale basisvektorer med enhetslengde, i et affint rom :

$$\mathcal{F}^q = \{O_q; \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\} \quad (\text{A- 50})$$

$$\mathcal{F}^p = \{O_p; \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\} \quad (\text{A- 51})$$

*vil et punkt P kunne assosieres med to **posisjonsvektorer** \vec{r} og $\vec{\rho}$:*

$$P = O_q + \vec{r} = O_p + \vec{\rho} \quad (\text{A- 52})$$

Dersom vi definerer vektoren (differansen mellom to punkter i et affint rom er en vektor):

$$\vec{r}_{qp} = O_p - O_q \quad (\text{A- 53})$$

får vi vektorlikninga

$$\vec{r} = \vec{r}_{qp} + \vec{\rho} \quad (\text{A- 54})$$

Siden vi nå har geometriske vektorer kan vi bruke teorien fra avsnittet om vektorrom til å representere disse i forskjellige basissystem. Disse posisjonsvektoren vil ha koordinatene \underline{r}^q og $\underline{\rho}^p$ i de to rammene. Vektoren mellom origoene kan representeres i f.eks $\{q\}$ som \underline{r}_{qp}^q . Sammenhengen mellom koordinatene for punktet r i det to k.s. blir da

$$\underline{r}^q = \underline{r}_{qp}^q + R_p^q \underline{\rho}^p \quad (\text{A- 55})$$

hvor R_p^q er KTM som gir sammenhengen mellom to basissystema.

A.4 Tid i vektorrom og affine rom.

Vi ser altså at ved å innføre posisjonsvektorer i et affint rom kan vi bruke vektoralgebra på punkter også.

Homogen representasjon, transformasjonsmatrisa

Likninga over er en inhomogen likning. Ved å innføre transformasjonsmatrisa T_p^q og de 4–dimensjonale posisjonsvektorene $\underline{\hat{r}}^q$ og $\underline{\hat{\rho}}^p$ definert ved:

$$T_p^q = \begin{bmatrix} R_p^q & \underline{r}_{qp}^q \\ 0, 0, 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\hat{r}}^q = \begin{bmatrix} r_1^q \\ r_2^q \\ r_2^q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}^q \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\hat{\rho}}^p = \begin{bmatrix} \rho_1^p \\ \rho_2^p \\ \rho_2^p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\rho}^p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A- 56})$$

kan den inhomogene likninga

$$\underline{r}^q = \underline{r}_{qp}^q + R_p^q \underline{\rho}^p \quad (\text{A- 57})$$

nå skrives på homogen form

$$\underline{\hat{r}}^q = T_p^q \underline{\hat{\rho}}^p \quad (\text{A- 58})$$

Vi ser at transformasjonslikninga T_p^q transformerer *posisjonsvektorer* mellom to koordinatsystem. Hastigheter er eksempel på en annen type vektorer som kalles *frie vektorer*. Disse transformerer på en måte som bare avhenger av den relative stilling mellom de to basissystemene (samme typer vektorer som i avsnittet om vektorrom). Vi fant i avsnittet om vektorrom at vektorer (frie vektorer) transformerer på følgende måte :

$$\underline{v}^q = R_p^q \underline{v}^p \quad (\text{A- 59})$$

Ved å definere den 4-dimensjonale vektor:

$$\underline{\hat{v}}^q = \begin{bmatrix} v_1^q \\ v_2^q \\ v_3^q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}^q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A- 60})$$

har vi en 4-dimensjonal vektor som transformerer som en fri vektor :

$$\begin{bmatrix} \underline{v}^q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p^q & \underline{r}_{qp}^q \\ 0, 0, 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}^p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p^q \underline{v}^p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A- 61})$$

dvs:

$$\underline{\hat{v}}^q = T_p^q \underline{\hat{v}}^p \quad (\text{A- 62})$$

Vi vil senere ikke skille notasjonsmessig mellom 3–dimensjonale og 4–dimensjonale vektorer. Det vil framgå av sammenhengen hvilken type vi har. Dersom vi har transformasjonsmatriser, T_p^q , i uttrykk har vi 4–dimensjonale vektorer.

A.4 Tid i vektorrom og affine rom.

Vi har til nå antatt at alle vektorer og punkter har vært statiske. Men siden vi ønsker å modellere dynamiske systemer må vi definere tidsvariante vektorer og punkter. I et vektorrom \mathcal{V} kan dette gjøres ved å innføre (den statiske) ramma $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}^a$ og definere den tidsvariante vektoren $\vec{x}(t)$ ved

$$\vec{x}(t) \triangleq \sum_{i=1}^3 x_i^a(t) \vec{a}_i \text{ hvor } x_i^a(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A- 63})$$

Tilsvarende kan vi i det affine rommet \mathcal{A} innføre (den statiske) ramma $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}^a$ og definere det tidsvariante punktet $P(t)$ ved:

$$P(t) \triangleq O_a + \vec{r}_{O_a P}(t) = O_a + \vec{r}_P(t) \quad (\text{A- 64})$$

hvor $\vec{r}_P(t)$ er den tidsvariante radiusvektoren fra origo i ramma (O_a) til punktet P .

Vi kan så innføre tidsvariante rammer ($\mathcal{F}_{\mathcal{V}}^b(t)$ og $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}^b(t)$) både i vektorrom og affine rom vha en

tidsvariant rotasjonsoperator $\mathbf{R}_{ab}(t)$ som er definert vha av den tidsvariante RKM $R_b^a(t)$:

$$[\mathbf{R}_{ab}(t)]^a \triangleq R_b^a(t) \quad (\text{A- 65})$$

$$\vec{b}_i(t) = \mathbf{R}_{ab}(t) \vec{a}_i \text{ for } i = 1, 2, 3 \quad (\text{A- 66})$$

Dette gir:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{V}}^b(t) = \left\{ \vec{b}_1(t), \vec{b}_2(t), \vec{b}_3(t) \right\} \quad (\text{A- 67})$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}^b(t) = \left\{ O_b(t); \vec{b}_1(t), \vec{b}_2(t), \vec{b}_3(t) \right\} \text{ hvor } O_b(t) = O_a + \vec{r}_{O_a O_b}(t) \quad (\text{A- 68})$$

Vi kan velge hvilken som helst ramme i et affint rom som referanse. Hver ramme kan tenkes å ligge i ro i sitt eget affine rom (eller vektorrom).

NB: Ved omregning av koordinater fra en ramme til en annen ramme gjelder Galiliotransformasjonen (relativhastigheter mellom affine rom kan adderes) i klassisk mekanikk.

NB: Når en skal definere avstanden mellom posisjonen til et punkt ved to forskjellige tidspunkter må en velge hvilke affint rom dette skal gjøres i for at det skal ha noen mening:

$$P^{\mathcal{A}}(t_2) - P^{\mathcal{A}}(t_1) = \vec{r}_{P(t_1)P(t_2)}^{\mathcal{A}} \quad (\text{A- 69})$$

Det er her innført en notasjon hvor en har angitt at punkter og vektorer er referert det affine rom \mathcal{A} .

A.5 Derivasjon i vektorrom og affine rom

I dette avsnittet skal vi anta at vektorer og punkter er tidsfunksjoner og vi ønsker å finne deriverte og dobbelderiverte av dem. Som vi skal se vil dette gjøre oss istand til å beskrive hastigheter og akselerasjoner for punkter.

Ved derivasjon av vektorer og punkters bevegelse må vi alltid vite hvilket basissystem (eller vektorrom og affint rom) vi ser vektoren eller punktet fra under derivasjonen. Hvor derivasjonen er sett fra markerer vi med en superskript, f.eks $\dot{\vec{x}}^a$ for geometriske vektorer og $\dot{\underline{x}}^{ac}$ for algebraiske vektorer (i det siste tilfellet indikerer c hvor vi representerer vektoren).

De to viktige aspektene som vår notasjon viser er :

1. Hvilket ramme en algebraisk vektor blir representert i : \underline{x}^c
2. Hvor derivasjonen er sett fra (gjelder både algebraiske og geometriske vektorer) : $\dot{\vec{x}}^a$ (derivasjonen er sett fra a), $\dot{\underline{x}}^{ac}$ (derivasjonen er sett fra a og den deriverte vektoren er representert i c).

Regelen for superskriptene er:

1. Geometrisk vektor: angir hvor derivasjonene er sett fra, f.eks.

$$\vec{v}^a = \dot{\vec{x}}^a = \frac{\partial^a}{\partial t} \vec{x} \quad (\text{A- 70})$$

$$\vec{a}^{ab} = \ddot{\vec{x}}^{ab} = \frac{\partial^b}{\partial t} \left(\frac{\partial^a}{\partial t} \vec{x} \right) \quad (\text{A- 71})$$

Dette tilsvarer notasjonen som blir brukt i matematikken hvor en skriver: $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) = f_{xy}$. Forskjellen er at en her ikke deriverer mhp flere frie variable, men sier hvor en ser tidsderivasjonen fra - derfor superskript.

2. Algebraiske vektorer: En må her også markere hvor de geometriske vektorene blir representert.

A.5 Derivasjon i vektorrom og affine rom

Dersom de geometriske vektorene ovenfor blir representert i ramma c får vi:

$$\underline{v}^{ac} = \underline{\dot{x}}^{ac} = \left[\dot{\vec{x}}^a \right]^c \quad (\text{A- 72})$$

$$\underline{a}^{abc} = \underline{\ddot{x}}^{abc} = \left[\ddot{\vec{x}}^{ab} \right]^c \quad (\text{A- 73})$$

Vi kommer nedenfor tilbake til hvordan disse vektorene beregnes.

A.5.1 Definisjon av deriverte i vektorrom og affine rom.

Når vi skal definere de deriverte av vektorer og punkter må vi starte med det vi kjenner fra matematikken nemlig derivasjon i \mathbb{R} og så generalisere til \mathbb{R}^n , \mathcal{V} og \mathcal{A} :

1. Derivasjon i \mathbb{R} :

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} (x(t + \Delta t) - x(t)) \right) \quad (\text{A- 74})$$

2. Derivasjon i \mathbb{R}^n :

$$\underline{\dot{x}}(t) = [\dot{x}_i(t)] \quad (\text{A- 75})$$

3. Derivasjon i vektorrommet \mathcal{V} sett fra en fast ramme $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}^a$:

$$\dot{\vec{x}}^a = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^a(t) \vec{a}_i \quad (\text{A- 76})$$

4. Derivasjon i det affine rom \mathcal{A} sett fra en fast ramme $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}^a$:

$$\dot{P}^a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} (P(t + \Delta t) - P(t)) \right) \quad (\text{A- 77})$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} (\vec{r}_{P(t+\Delta t)} - \vec{r}_{P(t)}) \right) \quad (\text{A- 78})$$

$$= \dot{\vec{r}}_P^a \quad (\text{A- 79})$$

$$= \dot{\vec{v}}_P^a \quad (\text{A- 80})$$

Teorem A.14 Den deriverte av en vektor (punkt) i et vektorrom \mathcal{V} (affint rom \mathcal{A}) er uavhengig av hvilken fast ramme vi velger i \mathcal{V} (\mathcal{A}).

Proof. Bevis tas på tavla ■

A.5.2 Derivasjon av RKM

Vi har tidligere innført tidsvariante RKM og rotasjonsoperatorer. I dette avsnittet skal vi se på tidsderiverte av disse. Det vi utleder vil gjelde både i vektorrom og affine rom siden affine rom også har innebygd et vektorrom.

Derivasjon av ortogonale RKM og definisjon av vinkelhastighet

Vi har tidligere vist at dersom vi har ortonormale basisvektorer blir RKM mellom rammene \mathcal{F}^p og \mathcal{F}^q en ortogonal matrise som vi betegner R_p^q . Vi vil nå vise at etter derivasjon av denne matrisa er det naturlig å innføre en skjevsymmetrisk matrise $S(\underline{\omega}_p^q)$ hvor $\underline{\omega}_p^q$ er vinkelhastigheten for \mathcal{F}^p -ramma sett fra \mathcal{F}^q -ramma.

Teorem A.15 Differensiallikning for retningskosinmatrisa

A MATEMATISK GRUNNLAG

Gitt to ortonormale rammer \mathcal{F}^p og \mathcal{F}^q . Differensiallikninga for retningskosinmatrisa R_p^q er da:

$$\dot{R}_p^q(t) = S(\underline{\omega}_p^q(t))R_p^q(t) = R_p^q(t)S(\underline{\omega}_p^{qp}(t)); \quad R_p^q(0) \text{ gitt} \quad (\text{A- 81})$$

hvor $S(\underline{\omega}_p^q)$ er matriserepresentasjonen av " $\vec{\omega}_p^q \times$ "-operatoren i q -systemet og $S(\underline{\omega}_p^{qp})$ er matriserepresentasjonen av " $\vec{\omega}_p^{qp} \times$ "-operatoren i p -systemet

$$S(\underline{\omega}_p^q) = R_p^q S(\underline{\omega}_p^{qp}) R_q^p \text{ og } S(\underline{\omega}_p^{qp}) = -S(\underline{\omega}_q^p) \quad (\text{A- 82})$$

Proof.

La $R (= R_p^q)$ være en ortogonal matrise, da har vi:

$$RR^T = I \quad (\text{A- 83})$$

Derivasjon av (A-83):

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \dot{R}R^T + \left(\dot{R}R^T\right)^T = 0 \quad (\text{A- 84})$$

Vi definerer så:

$$S = \dot{R}R^T \quad (\text{A- 85})$$

S er en skjevsymmetrisk matrise fordi (A-85) innsatt i (A-84) gir :

$$S + S^T = 0 \quad (\text{A- 86})$$

Dvs det eksisterer en sammenheng mellom den derivert av en ortonormal matrise R og den skjevsymmetriske matrise S :

$$S = \dot{R}R^T = \dot{R}R^{-1} \Leftrightarrow \dot{R} = SR \quad (\text{A- 87})$$

Siden S er skjevsymmetrisk må den ha strukturen:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A- 88})$$

Siden det bare er 3 uavhengige elementer i S kan disse settes sammen til en vektor

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (\text{A- 89})$$

og vi kan skrive

$$\dot{R} = S(\underline{\omega}) R \quad (\text{A- 90})$$

Vi innførte i starten av utledninga den forenkla notasjonen $R = R_p^q$. Denne RKM kan vi også uttrykke vha basisvektorene i p -systemet: $R_p^q = \begin{bmatrix} \underline{p}_1^q, \underline{p}_2^q, \underline{p}_3^q \end{bmatrix}$. Dette gir

$$\dot{R}_p^q = \begin{bmatrix} \dot{\underline{p}}_1^q, \dot{\underline{p}}_2^q, \dot{\underline{p}}_3^q \end{bmatrix} \quad (\text{A- 91})$$

$$= S(\underline{\omega}) \begin{bmatrix} \underline{p}_1^q, \underline{p}_2^q, \underline{p}_3^q \end{bmatrix} \quad (\text{A- 92})$$

$$= \begin{bmatrix} S(\underline{\omega}) \underline{p}_1^q, S(\underline{\omega}) \underline{p}_2^q, S(\underline{\omega}) \underline{p}_3^q \end{bmatrix} \quad (\text{A- 93})$$

Dvs

$$\dot{\underline{p}}_i^q = S(\underline{\omega}) \underline{p}_i^q \quad (\text{A- 94})$$

$$= \underline{\omega} \times \underline{p}_i^q \quad (\text{A- 95})$$

Siden $\underline{\omega}$ inngår i beregningen av den deriverte av de roterende basisvektorene \underline{p}_i^q sett fra q -systemet (vektorer som også har konstant lengde) kaller vi den for vinkelhastigheten for \mathcal{F}^p -ramma sett fra \mathcal{F}^p -ramma (eller for p -systemet sett fra q -systemet) og vi bruker notasjonen $\underline{\omega}_p^q$ eller $\underline{\omega}_p^{qp}$ fordi vi både har en derivasjon sett fra \mathcal{F}^q -ramma og vi representerer resultatet av derivasjonen i q -

A.5 Derivasjon i vektorrom og affine rom

systemet. Vi skriver derfor

$$\dot{\vec{p}}_i^q = \vec{\omega}_p^q \times \vec{p}_i^q \quad (\text{A- 96})$$

$$S(\underline{\omega}_p^q) = [\vec{\omega}_p^q \times]^q \quad (\text{A- 97})$$

$$\dot{R}_p^q = S(\underline{\omega}_p^q) R_p^q \quad (\text{A- 98})$$

■

I utledningen ovenfor viste vi at den deriverte av en basisvektor kan skrives

$$\dot{\vec{p}}_i^q = \vec{\omega}_p^q \times \vec{p}_i^q \quad (\text{A- 99})$$

Men en basisvektor er også en vektor med konstant lengde. Vi får derfor teoremet:

Teorem A.16 Den deriverte av en vektor $\vec{r}(t)$ som har konstant lengde ($\|\vec{r}(t)\| = r$) og ligger fast i ramma $\mathcal{F}^p(t)$ sett fra den faste ramma \mathcal{F}^q er

$$\dot{\vec{r}}^q(t) = \vec{\omega}_p^q \times \vec{r}(t) \text{ hvor } \|\vec{r}(t)\| = r \quad (\text{A- 100})$$

Dersom vi har gitt to generelle basissystem, $\{\vec{q}_i\}$ og $\{\vec{p}_i\}$ har vi tidligere vist at stillinga for p -systemet beskrevet i q -systemet generelt er gitt av retningskosinmatrisa C_p^q . Vi kan nå finne differensiallikninga for denne matrisa.

Teorem A.17 Differensiallikning for retningskosinmatrisa

Gitt to generelle basissystemer p og q . Differensiallikninga for retningskosinmatrisa C_p^q er da:

$$\dot{C}_p^q(t) = S(\underline{\omega}_p^q(t)) C_p^q(t) = C_p^q(t) S(\underline{\omega}_p^{qp}(t)); \quad C_p^q(0) \text{ gitt} \quad (\text{A- 101})$$

hvor $S(\underline{\omega}_p^q)$ er matriserepresentasjonen av " $\vec{\omega}_p^q \times$ "-operatoren i q -systemet og $S(\underline{\omega}_p^{qp})$ er matriserepresentasjonen av " $\vec{\omega}_p^{qp} \times$ "-operatoren i p -systemet

$$S(\underline{\omega}_p^q) = C_p^q S(\underline{\omega}_p^{qp}) C_q^p \text{ og } S(\underline{\omega}_p^{qp}) = -S(\underline{\omega}_q^p) \quad (\text{A- 102})$$

Proof. Tas på tavla. ■

En mindre stringent måte å definere vinkelhastigheten er som følger: Anta vektoren \vec{r} har konstant lengde og roterer med vinkelfarten, $\dot{\theta}$, om en retning \vec{e} ($\|\vec{e}\| = 1$) i rommet, vi sier da at vektoren dreier seg med vinkelhastigheten $\vec{\omega}_r^q$ relativt q -ramma. Vinkelhastigheten kan vi definere ved

$$\vec{\omega}_r^q = \dot{\theta} \vec{e} \quad (\text{A- 103})$$

$$\underline{\omega}_r^q = \dot{\theta} \underline{e}^q \quad (\text{A- 104})$$

Det kinematiske problem for 3-2-1 eulervinkler

Vi fant ovenfor differensiallikninga for RKM. Denne differensiallikninga kan vi i prinsippet løse dersom vinkelhastigheten, $\underline{\omega}_p^q(t)$, er gitt (målt) og vi kjenner $R_p^q(t_0)$. Vi sier da at vi har løst det kinematiske problem. Dersom retningskosinmatrisa er representert vha Eulervinkler ønsker vi å skrive differensiallikninga direkte i Eulervinklene. Dvs gitt $\underline{\omega}_p^{qp} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ finn eulervinklene θ_1, θ_2 og θ_3 definert ved ${}^E R_p^q(\theta_3, \theta_2, \theta_1)$. Løsningen er :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \theta_1 \tan \theta_2 & \cos \theta_1 \tan \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_2} & \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \end{bmatrix} \underline{\omega}_p^{qp} = D_p^\theta(\underline{\theta}) \underline{\omega}_p^{qp} \quad (\text{A- 105})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_2} & \frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_2} & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ \cos \theta_3 \tan \theta_2 & \sin \theta_3 \tan \theta_2 & 1 \end{bmatrix} \underline{\omega}_p^q = D_q^\theta(\underline{\theta}) \underline{\omega}_p^q \quad (\text{A- 106})$$

$$\begin{aligned}\underline{\omega}_p^{qp} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 \end{bmatrix} \dot{\underline{\theta}} = D_\theta^p(\underline{\theta}) \dot{\underline{\theta}} \\ \underline{\omega}_p^q &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \cos\theta_2 \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\underline{\theta}} = D_\theta^q(\underline{\theta}) \dot{\underline{\theta}}\end{aligned}$$

Proof.

Siden vinkelhastigheten er en vektor kan vi sette opp:

$$\begin{aligned}\underline{\omega}_p^q &= [I]_{\text{col}3} \dot{\underline{\theta}}_3 + [R_3(\theta_3)]_{\text{col}2} \dot{\underline{\theta}}_2 + [R_3(\theta_3) R_2(\theta_2)]_{\text{col}1} \dot{\underline{\theta}}_1 \\ &= [[R_3(\theta_3) R_2(\theta_2)]_{\text{col}1}, [R_3(\theta_3)]_{\text{col}2}, [I]_{\text{col}3}] \dot{\underline{\theta}} \\ \underline{\omega}_p^q &= \left[\begin{bmatrix} \cos\theta_2 \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 \sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & \sin\theta_2 \sin\theta_3 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}_{\text{col}1}, \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{col}2}, [I]_{\text{col}3} \right] \dot{\underline{\theta}} \\ \underline{\omega}_p^q &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \cos\theta_2 \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\underline{\theta}}\end{aligned}$$

Vi kan så løse for $\dot{\underline{\theta}}$:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\theta}} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \cos\theta_2 \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \underline{\omega}_p^q \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_2} & \frac{\sin\theta_3}{\cos\theta_2} & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ \cos\theta_3 \tan\theta_2 & \sin\theta_3 \tan\theta_2 & 1 \end{bmatrix} \underline{\omega}_p^q \\ \dot{\underline{\theta}} &= \begin{bmatrix} \frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_2} & \frac{\sin\theta_3}{\cos\theta_2} & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ \cos\theta_3 \tan\theta_2 & \sin\theta_3 \tan\theta_2 & 1 \end{bmatrix} R_p^q \underline{\omega}_p^{qp} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_2} & \frac{\sin\theta_3}{\cos\theta_2} & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ \cos\theta_3 \tan\theta_2 & \sin\theta_3 \tan\theta_2 & 1 \end{bmatrix} R_3 R_2 R_1 \underline{\omega}_p^{qp} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta_1 \tan\theta_2 & \cos\theta_1 \tan\theta_2 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 / \cos\theta_2 & \cos\theta_1 / \cos\theta_2 \end{bmatrix} \underline{\omega}_p^{qp}\end{aligned}$$

hvor

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-107})$$

■

Vinkelhastighet og vinkelakselerasjon i ulike basissystem

Gitt tre basissystem (a, b og c), da har vi (geometriske vektorer):

$$\left. \begin{aligned}\vec{\omega}_c^a &= \vec{\omega}_b^a + \vec{\omega}_c^b \\ \vec{\omega}_c^a &= \vec{\omega}_b^a + \vec{\omega}_c^{ba} \\ &= \vec{\omega}_b^a + \vec{\omega}_c^b + \vec{\omega}_b^a \times \vec{\omega}_c^b\end{aligned} \right\} \quad (\text{A-108})$$

A.5 Derivasjon i vektorrom og affine rom

Dersom vi dekomponerer i basissystema får vi (algebraiske vektorer):

$$\left. \begin{aligned} \underline{\omega}_c^a &= \underline{\omega}_b^a + R_b^a \underline{\omega}_c^b \\ \underline{\dot{\omega}}_{ac}^a &= \underline{\dot{\omega}}_b^a + S(\underline{\omega}_b^a) R_b^a \underline{\omega}_c^b + R_b^a \underline{\dot{\omega}}_c^b \\ &= \underline{\dot{\omega}}_b^a + \underline{\omega}_b^a \times R_b^a \underline{\omega}_c^b + R_b^a \underline{\dot{\omega}}_c^b \end{aligned} \right\} \quad (\text{A- 109})$$

Dersom vi istedet ønsker å derivere og representere vinkelhastighetene i b og c systema :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\omega}_c^{ac} &= R_b^c \underline{\omega}_b^{ab} + \underline{\omega}_c^{bc} \\ \underline{\dot{\omega}}_c^{acc} &= R_b^c \underline{\dot{\omega}}_b^{abb} + S(\underline{\omega}_b^c) R_b^c \underline{\omega}_b^{ab} + \underline{\dot{\omega}}_c^{bcc} \\ &= R_b^c \underline{\dot{\omega}}_b^{abb} + \underline{\omega}_b^c \times R_b^c \underline{\omega}_b^{ab} + \underline{\dot{\omega}}_c^{bcc} \\ &= R_b^c \underline{\dot{\omega}}_b^{abb} + R_b^c \underline{\omega}_b^{ab} \times \underline{\omega}_b^c + \underline{\dot{\omega}}_c^{bcc} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A- 110})$$

For roboter plasserer en gjerne et k.s. i hver link, disse nummereres forløpende utoverer fra basen som har nummer 0 (treghetssystemet). Vinkelhastigheten til $\{i\}$ relativt $\{0\}$ representeres i $\{i\}$: $\underline{\omega}_i^{0i}$. Vinkelakselerasjonen til $\{i\}$ relativt $\{0\}$ ses fra $\{i\}$ og representeres i $\{i\}$: $\underline{\dot{\omega}}_i^{0ii}$. Likninga ovenfor kan ved å bruke substitusjonen, $\{a\} = \{0\}$, $\{b\} = \{i\}$, $\{c\} = \{i+1\}$, skrives:

$$\underline{\omega}_{i+1}^{0,i+1} = R_i^{i+1} \underline{\omega}_i^{0i} + \underline{\omega}_{i+1}^{i,i+1} \quad (\text{A- 111})$$

$$\underline{\dot{\omega}}_{i+1}^{0,i+1,i+1} = R_i^{i+1} \underline{\dot{\omega}}_i^{0i} + R_i^{i+1} \underline{\omega}_i^{0i} \times \underline{\omega}_{i+1}^{i,i+1} + \underline{\dot{\omega}}_{i+1}^{i,i+1,i+1} \quad (\text{A- 112})$$

Ved beregning av vinkelhastighet og vinkelakselerasjon relativt ramme 0 starter en innenfra og iterer seg utover. Dersom $\{0\}$ er treghetsramma må vi ta hensyn til at $\underline{\dot{\omega}}_i^{0ii}$ ikke er beregnet i en treghetsramme når vi bruker spinnsatsen (se B-149).

Teorem A.18 Deriverte av vinkelhastigheten

Gitt to k.s. a og b. Ved beregning av $\underline{\dot{\omega}}_b^{abb}$ kan vi enten beregne $\underline{\omega}_b^a$ og transformere til b-systemet, eller vi kan derivere direkte i b-systemet, dvs : $\underline{\dot{\omega}}_b^{abb} = R_a^b \underline{\dot{\omega}}_a^a$

Proof. Bevis tas på tavla ■

A.5.3 Derivasjon av vektorer

Vi har tidligere vist at en vektor som ligger fast i en roterende ramme $\mathcal{F}_V^p(t)$ (er tidsinvariant sett fra denne ramme) har en derivert sett fra en fast ramme \mathcal{F}_V^q gitt ved

$$\underline{\vec{v}}^q = \underline{\dot{\vec{r}}}^q = \underline{\vec{\omega}}_p^q \times \underline{\vec{r}} \quad (\text{A- 113})$$

$$\underline{\underline{v}}^q = \underline{\underline{\dot{r}}}^q = S(\underline{\omega}_p^q) \underline{\underline{r}}^q \quad (\text{A- 114})$$

hvor $\underline{\vec{\omega}}_p^q$ er vinkelhastigheten for $\mathcal{F}_V^p(t)$ sett fra \mathcal{F}_V^q . Vektoren $\underline{\vec{\omega}}_p^q$ står vinkelrett på planet utspent av $\underline{\vec{r}}(t)$ og $\underline{\vec{r}}(t + \Delta t)$.

Dersom vektoren ikke er tidsinvariant sett fra $\mathcal{F}_V^p(t)$ får vi teoremet:

Teorem A.19 Den derivert av en vektor, $\underline{\vec{r}}(t)$, som er tidsvariant i ramme $\mathcal{F}_V^p(t)$, sett fra en fast ramme \mathcal{F}_V^q er

$$\underline{\dot{\vec{r}}}^q = \underline{\dot{\vec{r}}}^p + \underline{\vec{\omega}}_p^q \times \underline{\vec{r}} \quad (\text{A- 115})$$

$$\underline{\underline{\dot{r}}}^q = R_p^q \underline{\underline{\dot{r}}}^p + S(\underline{\omega}_r^q) R_p^q \underline{\underline{r}}^p \quad (\text{A- 116})$$

Proof. Bevis tas på tavla ■

A.5.4 Derivasjon av punkters bevegelse i affine rom

Ei ramme er definert av et punkt, O_q , og et sett basisvektorer $\{\underline{\vec{q}}_i\}$ i det affine rom. Dersom vi har to rammer (og dermed to k.s.) kan vi beskrive sammenhengen mellom disse ved å oppgi vektoren

mellom origoene, \vec{r}_{qp} , og den relative stilling uttrykt ved en RKM (ortonormale basiser). Vi kan da bruke disse opplysningen til å beskrive bevegelsen til et punkt sett fra og representert i ulike k.s.

Kommentar A.1 *Jeg har nedenfor skrevet likningene uttrykt vha kryssprodukt også for algebraiske vektorer. Pga at den assosiative lov ikke gjelder for kryssprodukt må en passe på at en bare krysser vektorer som er representert i samme k.s.*

Hastighet og akselerasjon for et punkt sett fra to k.s. med relativbevegelse

Vi kaller den deriverte og den andre deriverte av en posisjonsvektor for hhv *hastigheten* og *akselerasjonen til punktet*. Posisjonsvektoren (for punktet vi betrakter) fra origo i q -systemet betegnes \vec{r} (\underline{r}^q), posisjonsvektoren fra origo i p -systemet betegnes $\vec{\rho}$ ($\underline{\rho}^p$) og posisjonsvektoren fra origo i q -til origo i p -systemet med \vec{r}_{qp} (\underline{r}_{qp}^q).

Teorem A.20 *Hastighet og akselerasjon sett fra to k.s. med relativbevegelse (geometriske vektorer)*

Sammenhengen mellom hastighet og akselerasjon sett fra hhv q - og p -systema :

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_{qp} + \vec{\rho} \\ \vec{v}^q &= \dot{\vec{r}}_{qp}^q + \vec{v}^p + \vec{\omega}_p^q \times \vec{\rho} \\ \vec{a}^q &= \ddot{\vec{r}}_{qp}^q + \vec{a}^p + \dot{\vec{\omega}}_p^q \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_p^q \times (\vec{\omega}_p^q \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega}_p^q \times \vec{v}^p \end{aligned} \right\} \quad (\text{A- 117})$$

Proof. Bevis tas på tavla ■

Teorem A.21 *Hastighet og akselerasjon sett fra to k.s. med relativbevegelse (algebraiske vektorer)*

Sammenhengen mellom hastighet og akselerasjon sett fra hhv q - og p -systema representert i de samme systemene :

$$\left. \begin{aligned} \underline{r}^q &= \underline{r}_{qp}^q + R_p^q \underline{\rho}^p \\ \underline{v}^q &= \dot{\underline{r}}_{qp}^q + R_p^q (\underline{v}^p + \underline{\omega}_p^{qp} \times \underline{\rho}^p) \\ &= \dot{\underline{r}}_{qp}^q + R_p^q \underline{v}^p + \underline{\omega}_p^q \times R_p^q \underline{\rho}^p \\ \underline{a}^q &= \ddot{\underline{r}}_{qp}^q + R_p^q (\underline{a}^p + \dot{\underline{\omega}}_p^{qp} \times \underline{\rho}^p + \underline{\omega}_p^{qp} \times (\underline{\omega}_p^{qp} \times \underline{\rho}^p) + 2\underline{\omega}_p^{qp} \times \underline{v}^p) \\ &= \ddot{\underline{r}}_{qp}^q + R_p^q \underline{a}^p + \dot{\underline{\omega}}_p^q \times R_p^q \underline{\rho}^p + \underline{\omega}_p^q \times (\underline{\omega}_p^q \times R_p^q \underline{\rho}^p) + 2\underline{\omega}_p^q \times R_p^q \underline{v}^p \end{aligned} \right\} \quad (\text{A- 118})$$

Proof. Bevis tas på tavla ■

Tolkning av uttrykket for akselerasjon

Vi skal i Del B se at en partikkel kan modelleres som en punkt i et k.s. Vi antar at q -systemet er et treghetssystem, mens p -systemet er et vilkårlig ikke-inertial system. I q -systemet kan da Newtons 2. lov skrives på følgende måte, når vi antar at partikkelen har masse m .

$$\vec{f} = m \vec{a}^q \quad (\text{A- 119})$$

Ved å uttrykke akselerasjonen \vec{a}^q vha ledda på høyre sida, får vi de kreftene som må innføres i et ikke-inertial system. Likninga ovenfor blir nå :

$$m \vec{a}^q = m \left(\ddot{\vec{r}}_{qp}^q + \vec{a}^p + \dot{\vec{\omega}}_p^q \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_p^q \times (\vec{\omega}_p^q \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega}_p^q \times \vec{v}^p \right) \quad (\text{A- 120})$$

Løser likninga mhp $m \vec{a}^p$:

$$m \vec{a}^p = m \vec{a}^q - m \ddot{\vec{r}}_{qp}^q - m \dot{\vec{\omega}}_p^q \times \vec{\rho} - m \vec{\omega}_p^q \times (\vec{\omega}_p^q \times \vec{\rho}) - m 2\vec{\omega}_p^q \times \vec{v}^p \quad (\text{A- 121})$$

Vi har her følgende krefter

$\vec{f}_p = m\vec{a}^p$: tilsynelatende kraft i et ikke-inertial system

$\vec{f}_q = m\vec{a}^q$: ytre kraft på partikkelen

$\vec{f}_o = -m\ddot{\vec{r}}_{qp}^q$: kraft som skyldes translasjon av k.s. p relativt q .

$\vec{f}_t = -m\dot{\vec{\omega}}_p^q \times \vec{\rho}$: tangentialkraft, skyldes vinkelakselerasjon av k.s. p relativt k.s. q .

$\vec{f}_s = -m\vec{\omega}_p^q \times (\vec{\omega}_p^q \times \vec{\rho})$: sentrifugalkraft, skyldes vinkelhastigheten til k.s. p relativt k.s. q .

$\vec{f}_c = -m2\vec{\omega}_p^q \times \vec{v}^p$: Corioliskraft, skyldes bevegelse (hastighet) relativt k.s. p som så igjen beveger seg relativt k.s. q

A.6 Matriserekning i kybernetikken

I kybernetikken er tilstandsromlikninga sentral :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (\text{A- 122})$$

Underforstått er tilstandsvektoren \underline{x} et element i et Euklids rom $\mathbb{E}^n = \mathbb{R}^n$ (se neste avsnitt). Notasjonsmessig børde vi si hvilket k.s. \underline{x} er representert i, dvs bruke notasjonen \underline{x}^q :

$$\dot{\underline{x}}^q = A^q \underline{x}^q; \quad \underline{x}^q(0) = \underline{x}_0^q \quad (\text{A- 123})$$

Vi kan finne egenverdiene , λ_i , (uavhengige av k.s) fra :

$$\det(\lambda I - A^q) = 0 \quad (\text{A- 124})$$

og egenvektorene, \underline{m}_i^q , fra:

$$(\lambda_i I - A^q) \underline{m}_i^q = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A- 125})$$

Egenvektorene kan settes sammen til ei egenvektormatrise

$$M_p^q = [\underline{m}_1^q, \underline{m}_2^q, \dots, \underline{m}_n^q] \quad (\text{A- 126})$$

Vi kan da skrive:

$$\lambda_i \underline{m}_i^q = A^q \underline{m}_i^q; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A- 127})$$

$$[\lambda_1 \underline{m}_1^q, \lambda_2 \underline{m}_2^q, \dots, \lambda_n \underline{m}_n^q] = [A^q \underline{m}_1^q, A^q \underline{m}_2^q, \dots, A^q \underline{m}_n^q] \quad (\text{A- 128})$$

$$M_p^q \Lambda = A^q M_p^q \quad (\text{A- 129})$$

$$\Lambda = [\lambda_i \delta_{ij}] = (M_p^q)^{-1} A^q M_p^q \quad (\text{A- 130})$$

$$A^q = M_p^q \Lambda (M_p^q)^{-1} \quad (\text{A- 131})$$

Vi kan nå innføre en ny tilstandsvektor, \underline{x}^p , ved:

$$\underline{x}^q = M_p^q \underline{x}^p, \quad \underline{x}^p = (M_p^q)^{-1} \underline{x}^q \quad (\text{A- 132})$$

I det nye k.s. p har vi :

$$\dot{\underline{x}}^p = (M_p^q)^{-1} A^q M_p^q \underline{x}^p = \Lambda^p \underline{x}^p; \quad \underline{x}_0^p = (M_p^q)^{-1} \underline{x}_0^q \quad (\text{A- 133})$$

hvor Λ er en diagonalmatrise bestående av egenverdiene til A .

Vi ser at differensiallikninga nå kan løses direkte fordi den er ukoblet :

$$\dot{x}_i^p = \lambda_i x_i^p, \quad x_{i0}^p \text{ gitt}; \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A- 134})$$

I det opprinnelig k.s. kan løsningen skrives som

$$\underline{x}^q(t) = M_p^q \underline{x}^p(t) = \sum_{i=1}^n \underline{m}_i^q e^{\lambda_i t} x_{0,i}^p \quad (\text{A- 135})$$

Dvs løsningen er satt sammen av elementære svingninger langs egenvektorene i k.s. q .

Kommentar A.2 Linjene i matrisen $(M_p^q)^{-1}$ er lik de transponerte duale vektorene til egenvektorene \underline{m}_j^q :

$$(M_p^q)^{-1} M_p^q = \begin{bmatrix} (\underline{m}_1^{*q})^T \\ (\underline{m}_1^{*q})^T \\ \vdots \\ (\underline{m}_1^{*q})^T \end{bmatrix} [\underline{m}_1^q, \underline{m}_2^q, \dots, \underline{m}_n^q] = [\delta_{ij}] \quad (\text{A- 136})$$

Ved beregning av egenvektorer bør en velge de med enhetslengde fordi da vil vi få orogonale egenvektormatriser dersom egenvektorene er orogonale, dvs $M^{-1} = M^T$ i det ortogonale tilfellet.

DelB:

DYNAMIKK

Stoffet i dette kapitlet er hentet fra flere kilder, men Wiesel (1989) er den som dekker stoffet best. Utledninger av bl.a spinnsatsen kan også finnes i f.eks Irgens (1985) hvor vi også har tatt følgende forklaring:

Med **dynamikk** mener vi læren om legemers bevegelse og de krefter som forårsaker denne bevegelsen. Faget deles i to hoveddeler :

1. **Kinematikk** som beskriver bevegelsen.
2. **Kinetikk** som behandler samvirke mellom kreftene og den bevegelsen de forårsaker.

Vi vil i dette kapittelen utlede de matematiske modellene for dynamikken til stive legemer og vise hvordan bevegelsen kan beskrives geometrisk i det momentfrie tilfellet.

Den teorien som blir utledet her bygger på det matematiske grunnlaget gitt i del A, og vil danne utgangspunktet for utledning av de matematiske modeller for roboter, fly og treghtsnavigasjonssystem.

For å forklare endel begreper som blir brukt vil det bli delt ut et notat om "Grunnleggende prinsipper i klassisk mekanikk".

B.1 Kinematikk

Med kinematikk mener vi her beskrivelsen av bevegelsen til partikler og stive legemer. Det viser seg at den matematikken vi brukte i del A er tilstrekkelig for dette formålet.

B.1.1 Kinematisk beskrivelse for partikler

Den beskrivelsen vi ga av punkters bevegelse i affine rom, uttrykt med begrepene hastighet og akselerasjon, kan brukes direkte dersom vi erstatter punkt med partikkel. Men vær klar over at i dynamikken er det visse rammer som har en spesiell betydning nemlig *treghtsrammer*.

B.1.2 Kinematisk beskrivelse for stive legemer

Definisjon B.1 *Stivt legeme*

Et stivt legeme er et legeme hvor avstanden mellom partiklene som danner legemet er konstant.

Definisjon B.2 *Ren translasjon av et stivt legeme*

Et stivt legeme har en ren translasjon dersom alle partiklene i legemet har lik hastighet relativt et k.s. ved ethvert tidspunkt. Hastigheten (fart + retning) til et legeme i ren translasjon kan variere med tiden slik at bevegelsen ikke nødvendigvis er langs en rett linje.

Definisjon B.3 *Rotasjon av et stivt legeme*

Dersom et stivt legeme beveger seg på en slik måte at alle partiklene langs en linje i legemet eller en hypotetisk utvidelse av legemet har null hastighet relativt et k.s., sies legemet å rotere relativt dette k.s. Linjen bestående av stasjonære partikler kalles den øyeblikkelige rotasjonsakse.

Teorem B.1 (Chasley's teorem) Dekomponering i translasjon og rotasjon

Bevegelsen av et stivt legeme relativt et k.s. kan settes sammen av translasjon og rotasjon. Dette kan gjøres på følgende måte :

- 1) Velg et punkt A (B) i legemet. Anta at alle punktene i legemet har samme hastighet, \vec{v}_A (\vec{v}_B), hvor \vec{v}_A (\vec{v}_B) er hastigheten relativt vårt k.s.
- 2) Superponer en ren rotasjon om punktet A med vinkelhastighet $\vec{\omega}$ relativt vårt k.s. (NB : $\vec{\omega} = \vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$, mens generelt er $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$ ($\vec{v}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \vec{r}_A / \Delta t)$)).

Proof. Bevis tas på tavla ■

Dette er et sentralt teorem fordi det sier at beskrivelsen av bevegelsen til et stivt legeme kan deles i to problem:

1. Beskrivelse av translasjonsbevegelsen. Dette gjøres ved å beskrive bevegelsen til origo til et koordinatsystem som ligger fast i legemet (b-systemet).
2. Beskrivelse av rotasjonsbevegelsen. Dette gjøres ved å se på retningskosinmatrisene som relaterer et k.s. som ligger fast i legemet til et k.s. som ligger fast i treghetsrommet.

Denne todelinga har også betydning for kinetikkproblemet fordi dette også kan deles i to for stive legemer. Beskrivelsen bli spesielt enkel dersom vi plasserer origo i b-systemet i massesenteret, likningen for de to bevegelsene blir da uavhengige:

1. Bevegelsen av massesenteret er gitt av Newtons 2.lov som vil ha samme enkle form som for en partikkel

$$\vec{F} = m_{total} \vec{a}^i \quad (\text{B- 137})$$

2. Rotasjonen om masse senteret er gitt av spinnsatsen for stive legemer

$$\vec{n} = \dot{\vec{h}}^i \quad (\text{B- 138})$$

B.2 Kinetikk

Med kinetikk mener vi her sammenhengen mellom bevegelsen av partikler og stive legemer og de krefter som forårsaker bevegelsen.

Vi behandler i dette avsnittet to temaer : Newtons lover og spinnsatsen. Som kommentert i avsnittet foran vil sammenhengen mellom bevegelsen av for massesentert for et stivt legeme og total ytre kraft være gitt av Newtons 2. lov anvendt på den totale massen. Mens rotasjonsbevegelsen for et stivt legeme vil være dekoblet fra translasjonen å være gitt av spinnsatsen.

B.2.1 Newtons lover

Newtons lover for en partikkel

Teorem B.2 (Newtons 1.lov) Dersom en partikkel er langt borte fra innflytelsen fra alle andre partiler i universet, vil den bevege seg med konstant hastighet mht et treghetssystem, \mathbf{i} (kan egentlig utledes fra Newtons 2.lov).

Teorem B.3 (Newtons 2.lov) Dersom det lineære moment, \vec{p}^i , for en partikkel i et treghetssystem \mathbf{i} endres med tiden, sies partikkelen å være påvirket av en kraft, \vec{f} , gitt ved :

$$\vec{f} = \dot{\vec{p}}^i \quad \text{hvor} \quad \vec{p}^i = m\vec{v}^i \quad (\text{B- 139})$$

B.2 Kinetikk

Teorem B.4 (Newtons 3.lov) Dersom to isolerte partikler interakterer med hverandre vil den krafta partikkel nr 1 utsetter partikkel nr 2 for være lik i størrelse, men motsatt rettet den krafta partikkel nr 2 utsetter partikkel 1 for. Dvs : aksjon = reaksjon eller kraft = motkraft.

Newton's 2. lov for n partikler

Det følgende teorem gjelder for et vilkårlig system av partikler (antar at Newtons 3. lov gjelder), det gjelder derfor også for et stivt legeme.

Teorem B.5 Newtons 2. lov for et system av partikler

Vi antar at Newtons 3. lov gjelder for krafta mellom partiklene, dvs $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$. Da vil den totale ytre kraft, \vec{F} , være lik total masse, M , ganger med massesenterets akselerasjon, \vec{a}_c , sett fra treghetsramma :

$$\boxed{\vec{F} = M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = M \vec{a}_c} \quad (\text{B- 140})$$

Proof. Bevis tas på tavla ■

B.2.2 Spinnsatsen

Utleddninga av spinnsatsen for stive legemer tar vi i tre trinn. Vi ser først på en partikkel, deretter på et system av partikler og til slutt ser vi på et stivt legeme.

Spinnsatsen for en partikkel

Teorem B.6 Spinnsatsen for en partikkel

Gitt en partikkel, P , som er utsatt for en kraft, F . La A være et vilkårlig punkt i treghetssystemet \mathbf{i} ($\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}_A$). Da er sammenhengen mellom momentet og spinnnet om punktet A :

$$\begin{aligned} \vec{n}_A &= \dot{\vec{h}}_A + \vec{\rho}_A \times (m\ddot{\vec{r}}_A) \quad \text{hvor} \\ \vec{n}_A &= \vec{\rho}_A \times \vec{F} \end{aligned} \quad (\text{B- 141})$$

$$\dot{\vec{h}}_A = \vec{\rho}_A \times (m\dot{\vec{r}}_A) \quad (\text{B- 142})$$

Dersom $\vec{\rho}_A \times (m\ddot{\vec{r}}_A) = \vec{0}$, dvs bla når A oppfyller 1 eller 2 :

1). $\ddot{\vec{r}}_A = \vec{0}$: A har konstant hastighet i treghetssystemet (ligger f.eks i ro).

2). $\vec{\rho}_A \parallel \ddot{\vec{r}}_A$: A akselererer mot/fra partikkel P
så kan spinnsatsen skrives :

$$\boxed{\vec{n}_A = \dot{\vec{h}}_A} \quad (\text{B- 143})$$

Proof. Bevis tas på tavla ■

Kommentar B.1 Den definisjonen som er brukt her for spinnnet om et punkt A er ikke den eneste som blir brukt. I mange bøker defineres spinnnet ved $\vec{\rho}_A \times (m\dot{\vec{r}})$ hvor $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}_A$, se f.eks. Goldstein (1980). Det er derfor svært viktig å sjekke definisjonen før en bruker formler fra lærebøker. Referansene Deloge (1982) og Shames (1980) bruker den samme definisjonen som vi bruker.

Spinnsatsen for n partikler

Teorem B.7 Spinnsatsen for et n-partikkel system

Gitt et system av n partikler hvor partikkel i er utsatt for den ytre kraft \vec{F}_i og krafta \vec{f}_{ij} fra partikkel j ($j = 1, \dots, n$) antas å oppfylle Newtons 3.lov ($\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$) og i tillegg være en sentralkraft (ligger langs $\vec{r}_i - \vec{r}_j$). Da vil for et vilkårlig punkt A i treghetssystemet \mathbf{i} :

$$\vec{n}_A = \dot{\vec{h}}_A^{\mathbf{i}} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_{Ai} \times \ddot{\vec{r}}_A^{\mathbf{i}} \quad \text{hvor} \quad (\text{B- 144})$$

$$\vec{n}_A = \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_{Ai} \times \vec{F}_i \quad \text{totalt ytre moment om } A \quad (\text{B- 145})$$

$$\vec{h}_A = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_{Ai} \times \dot{\vec{r}}_A^{\mathbf{i}} \quad \text{totalt spinn om } A \quad (\text{B- 146})$$

Dersom $\sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_{Ai} \times \ddot{\vec{r}}_A^{\mathbf{i}} = 0$, dvs bl.a. når A oppfyller 1, 2 eller 3 :

- 1). $\sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_{Ai} = \vec{0}$: A er i massesenteret.
 - 2). $\ddot{\vec{r}}_A^{\mathbf{i}} = \vec{0}$: A har konstant hastighet i treghetsrommet (f.eks. i ro).
 - 3). $\sum_{i=1}^n m_i \vec{\rho}_{Ai} \parallel \ddot{\vec{r}}_A^{\mathbf{i}}$: A akselererer mot massesenteret.
- så kan spinnsatset for et n-partikkel system skrives :

$$\vec{n}_A = \dot{\vec{h}}_A^{\mathbf{i}} \quad (\text{B- 147})$$

Proof. Bevis tas på tavla ■

Spinnsatsen for stive legemer

Vi har ovenfor utledet spinnsatsen for en vilkårlig samling av partikler (gjelder også for stive legemer), men vi vil anta legemet er kontinuerlig slik at summeringer må erstattes av integral.

Teorem B.8 Spinnsatsen for stive legemer

Gitt treghetssystemet \mathbf{i} og et k.s. b som ligger fast i legemet og har sitt origo i A . Dersom A tilfredstiller 1 eller 2 :

- 1). A ligger i massesenteret.
- 2). A ligger i ro i treghetsrommet.

er spinnsatsen på en koordinatuavhengig form :

$$\begin{aligned} \vec{n}_A &= \dot{\vec{h}}_A^{\mathbf{i}} \\ &= \dot{\vec{h}}_A^{\mathbf{ib}} + \vec{\omega}_b^{\mathbf{i}} \times \vec{h}_A^{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (\text{B- 148})$$

eller representert i b -systemet :

$$\begin{aligned} \underline{n}_A^b &= \dot{\underline{h}}_A^{\mathbf{ibb}} + \underline{\omega}_b^{\mathbf{ib}} \times \underline{h}_A^{\mathbf{ib}} \\ &= J^b \underline{\omega}_b^{\mathbf{ibb}} + \underline{\omega}_b^{\mathbf{ib}} \times (J^b \underline{\omega}_b^{\mathbf{ib}}) \\ \underline{\omega}_b^{\mathbf{ibb}} &= R_{\mathbf{i}}^b \dot{\underline{\omega}}_b^{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (\text{B- 149})$$

hvor spinnen er definert ved :

$$\underline{h}_A^{\mathbf{ib}} = J^b \underline{\omega}_b^{\mathbf{ib}}$$

Treghetsmatrisa J^b beregnes via treghetsmomenta, J_{ii}^b , og treghetsprodukta, J_{ij}^b :

$$J^b = \begin{bmatrix} J_{xx}^b & -J_{xy}^b & -J_{xz}^b \\ -J_{yx}^b & J_{yy}^b & -J_{yz}^b \\ -J_{zx}^b & -J_{zy}^b & J_{zz}^b \end{bmatrix} \quad (\text{B- 150})$$

B.3 Momentfri bevegelse for et stivt legeme

$$\begin{bmatrix} J_{xx}^b & -J_{xy}^b & -J_{xz}^b \\ -J_{yx}^b & J_{yy}^b & -J_{yz}^b \\ -J_{zx}^b & -J_{zy}^b & J_{zz}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_M (y^2 + z^2) dm & -\int_M xy dm & -\int_M xz dm \\ -\int_M xy dm & \int_M (x^2 + z^2) dm & -\int_M yz dm \\ -\int_M xz dm & -\int_M yz dm & \int_M (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \quad (\text{B- 151})$$

Dus treghetsmatrisa er symmetrisk.

Proof. Bevis tas på tavla ■

Siden J^b er ei reell symmetrisk matrise, $J^b = (J^b)^T$, har den reelle egenverdier og ortogonale egenvektorer. Dette betyr at det er mulig å plassere b-systemet slik at J^b blir ei diagonal matrise. Vi sier da at aksene i b-systemet faller sammen med *hovedaksene* til legemet.

Teorem B.9 Eulerlikningene

Dersom k.s. b velges fast i legemet med origo i A , med akser langs hovedaksene for legemet og A i tillegg tilfredstiller 1 eller 2 :

- 1). A ligger i massesenteret.
- 2). A ligger i ro i treghetsrommet.

kan spinnsatsen skrives på følgende enkle form :

$$\left. \begin{aligned} n_x &= J_{xx}^b \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (J_{zz}^b - J_{yy}^b) \\ n_y &= J_{yy}^b \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (J_{xx}^b - J_{zz}^b) \\ n_z &= J_{zz}^b \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (J_{yy}^b - J_{xx}^b) \end{aligned} \right\}, \quad \underline{n}_A = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad \underline{\omega}_b^i = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (\text{B- 152})$$

Proof. Bevis tas på tavla ■

Eksempel B.1 Treghetmatrisa for en murstein

Anta at en murstein har sidekantene a , b og c . La b-systemet ha akser parallelle med sidekantene og med origo i massesenteret . På grunn av symmetrien vil treghetsprodukta bli lik 0 og treghetsmatrisa blir diagonal :

$$J_{xx}^b = \frac{M}{12}(b^2 + c^2) \quad (\text{B- 153})$$

$$J_{yy}^b = \frac{M}{12}(a^2 + c^2) \quad (\text{B- 154})$$

$$J_{zz}^b = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \quad (\text{B- 155})$$

Vi ser at dersom $a < b < c$ så blir $J_{xx}^b > J_{yy}^b > J_{zz}^b$.

B.3 Momentfri bevegelse for et stivt legeme

Vi skal her se på momentfri bevegelse for et generelt stivt legeme. Vi ønsker å gi en geometrisk beskrivelse av vinkelhastighetvektorens bevegelse, først sett fra det roterende b -systemet og deretter fra treghetssystemet i . De generelle Eulerlikningen kan i prinsippet løses mhp et Eulervinkelsett. Men de gir elliptiske funksjoner. Vi søker derfor en geometrisk løsning, dvs stedskurven for $\vec{\omega}_b^i$, ikke tidsfunksjonen $\vec{\omega}_b^i(t)$.

Vi antar at b -systemet ligger langs hovedaksene for legemet og at $J_{xx}^b > J_{yy}^b > J_{zz}^b$.

Vi vil først vise at under gitte betingelser kan vi beskrive spinnet, den kinetiske rotasjonsenergien og treghetsmatrisa vha tre ellipsoider med akser langs hovedaksene for det stive legemet. Vi skal så vise at den geometriske beskrivelsen av bevegelsen til $\vec{\omega}_b^i$ kan beskrives vha disse tre ellipsoidene.

Teorem B.10 Spinnellipsoida

Dersom det ytre moment er lik $\vec{0}$, vil spinnet været konstant. I et b -system som faller sammen med hovedaksene vil sammenhengen mellom vinkelhastigheten, $\underline{\omega}_b^{\text{ib}}$, treghetsmomenta, $\{J_{ii}^b\}$, og lengda på spinnvektoren, h_0 , tilfredstille likninga for ei ellipsoide :

$$\frac{\omega_x^2}{\left(\frac{h_0}{J_{xx}^b}\right)^2} + \frac{\omega_y^2}{\left(\frac{h_0}{J_{yy}^b}\right)^2} + \frac{\omega_z^2}{\left(\frac{h_0}{J_{zz}^b}\right)^2} = 1 \quad \text{hvor} \quad h_0 = \|\vec{h}\| = \sqrt{J_{xx}^b \omega_x^2(t_0) + J_{yy}^b \omega_y^2(t_0) + J_{zz}^b \omega_z^2(t_0)} \quad (\text{B- 156})$$

Proof. Bevis tas på tavla ■

Teorem B.11 Den kinetiske rotasjonsenergiellipsoida

Dersom det ytre moment er lik $\vec{0}$, vil den kinetiske rotasjonsenergien være konstant. I et b -system som faller sammen med hovedaksene vil sammenhengen mellom vinkelhastigheten, $\underline{\omega}_b^{\text{ib}}$, treghetsmomenta, $\{J_{ii}^b\}$, og den kinetiske rotasjonsenergien, K_0 , tilfredstille likninga for ei ellipsoide:

$$\frac{\omega_x^2}{2\frac{K_0}{J_{xx}^b}} + \frac{\omega_y^2}{2\frac{K_0}{J_{yy}^b}} + \frac{\omega_z^2}{2\frac{K_0}{J_{zz}^b}} = 1 \quad \text{hvor} \quad K_0 = \frac{1}{2} \left(J_{xx}^b \omega_x^2(t_0) + J_{yy}^b \omega_y^2(t_0) + J_{zz}^b \omega_z^2(t_0) \right)$$

Proof. Bevis tas på tavla ■

Teorem B.12 Treghetsellipsoida

Til enhver symmetrisk positiv definit matrise kan en assosiere en ellipsoide vha et kvadratisk uttrykk. Treghetsmatrisa, J^b , er ei slik matrise. Dersom b -systemet legges langs hovedaksene for et stivt legeme blir treghetsmatrisa diagonal og ellipsoida får en spesielt enkel form :

$$\frac{x^2}{2\frac{J_0}{J_{xx}^b}} + \frac{y^2}{2\frac{J_0}{J_{yy}^b}} + \frac{z^2}{2\frac{J_0}{J_{zz}^b}} = 1 \quad \text{hvor } J_0 \text{ er en konstant} \quad (\text{B- 157})$$

Proof. Bevis tas på tavla ■

Kommentar B.2 Konstantene h_0 og K_0 kan ses på som integrasjonskonstanter, jfr at bevegelsen er beskrevet av 6 koblete differensiallikninger.

Treghetsellipsoida og den kinetiske rotasjonsenergiellipsoida for et gitt stivt legeme har samme form. Treghetsellipsoida har halvaksler som tilsvarer formen på legemet. Dette ser vi fra eksempelet for treghetsmatrisa for murstein. Dersom $a < b < c$ så blir $J_{xx}^b > J_{yy}^b > J_{zz}^b$ og $\frac{J_0}{J_{xx}^b} < \frac{J_0}{J_{yy}^b} < \frac{J_0}{J_{zz}^b}$.

B.3.1 Beskrivelse av bevegelsen sett fra b -systemet

Vi antar først vi står i b -systemet og betrakter $\vec{\omega}_b^{\text{ib}}$ -vektoren. Dette tilsvarer f.eks at vi står på jorda og ser hvordan jordas rotasjonsakse beveger seg på jordoverflata.

Teorem B.13 Bevegelsen av et stivt legeme sett fra det roterende b -systemet

Anta b -systemet faller sammen med hovedaksene for det stive legemet. For et stivt legeme som ikke er utsatt for ytre moment beveger vinkelhastighetsvektoren ($\underline{\omega}_b^{\text{ib}}$) seg da, sett fra b -systemet, på skjeringa (polhode) mellom spinnellipsoida og den kinetiske rotasjonsenergiellipsoida. Bevegelsen til det stive legemet er i hvert øyeblikk en ren rotasjon om vinkelhastighetsvektoren.

Proof. Bevis tas på tavla ■

B.3.2 Beskrivelse av bevegelsen sett fra i-systemet

Vi antar nå at vi står i treghetssystemet \mathbf{i} og skal beskrive bevegelsen av det stive legemet.

Teorem B.14 *Bevegelsen av et stivt legeme sett fra treghetssystemet \mathbf{i}*

Bevegelsen av et stivt legeme som ikke er utsatt for et ytre moment er beskrevet, sett fra treghetssystemet, av at den kinetiske energiellipsoida ruller på det invariable plan (plan \perp spinnvektoren $\vec{h}^{\mathbf{i}}$) uten å gli. Rullinga følger polhodet på den kinetiske energiellipsoida (kontaktpunktet mellom det invariable plan og ellipsoida er dermed enden på $\vec{\omega}_b^{\mathbf{i}}$ -vektoren).

Proof. Bevis tas på tavla ■

Legg merke til at de løsningene vi har her beskriver bevegelsen til det stive legemet geometrisk, men vi har ingen informasjon om hvor raske bevegelsene er. Retningen på bevegelsen ser vi lett ut fra Eulerlikninga.

B.3.3 Stabilitet om hovedaksene

Vi vil her undersøke stabiliteten til bevegelsen for små perturbasjoner om hovedaksene for et stivt legeme. Ovenfor så vi på bevegelsene i stort.

Teorem B.15 *Stabiliteten om hovedaksene for et stivt legeme*

Anta b-systemet faller sammen med hovedaksene for det stive legemet og $J_{xx}^b > J_{yy}^b > J_{zz}^b$. Da gir linearisering om \vec{b}_1 -aksen (J_{xx}^b) eller \vec{b}_3 -aksen (J_{zz}^b) et lineært system med kompleks konjugerte egenverdier. Linearisering om \vec{b}_2 -aksen (J_{yy}^b) gir et lineært system med to egenverdier, den ene ligger i venstre halvplan den andre i høyre.

Proof. Bevis tas på tavla ■

B.4 Momentfri bevegelse for et aksesymmetriske stivt legeme

Vi skal her se på momentfri bevegelse av et aksesymmetrisk legeme (antar $J_{xx}^b = J_{yy}^b \neq J_{zz}^b$) sett fra hhv legemet selv (b-systemet) og fra treghetssystemet (\mathbf{i} -systemet). Vi har i forrige avsnitt beskrevet bevegelsen for et generelt legeme (dermed også aksesymmetrisk), men vi skal se at vi her får en enda enklere modell enn de ellipsoidene vi hadde generelt.

B.4.1 Beskrivelse av bevegelsen sett fra b-systemet

Teorem B.16 *Beskrivelse av bevegelsen sett fra b-systemet*

Anta b-systemet faller sammen med hovedaksene for det stive aksesymmetriske legemet, med \vec{b}_3 -aksen langs symmetriaksen. For et stivt aksesymmetrisk legeme som ikke er utsatt for ytre moment beveger vinkelhastigheten ($\underline{\omega}_b^{\mathbf{ib}}$) og spinnvektoren ($\underline{h}_A^{\mathbf{ib}}$) seg da, sett fra b-systemet, på to kjepler om \vec{b}_3 aksen (kjeglen assosiert med vinkelhastigheten kalles legemekonene). Ved hvert tidspunkt ligger vektorene $\underline{\omega}_b^{\mathbf{ib}}$, $\underline{h}_A^{\mathbf{ib}}$ og \vec{b}_3 i samme plan.

Proof. Bevis tas på tavla ■

B.4.2 Beskrivelse av bevegelsen sett fra i-systemet

Teorem B.17 *Beskrivelse av bevegelsen sett fra i-systemet*

For et stivt aksesymmetrisk legeme som ikke er utsatt for ytre moment beveger vinkelhastigheten ($\vec{\omega}_b^i$) seg, sett fra treghetssystemet, på en kjegle (romkonen) om den konstante spinnvektoren (\vec{h}_A^i). Vi kan beskrive bevegelsen av det stive legemet med følgende modeller:

- 1). $J_{xx}^b = J_{yy}^b < J_{zz}^b$: Legemekjegla ruller, uten å gli, på romkjegla. Vi sier at vi har regulær presesjon.
- 2). $J_{xx}^b = J_{yy}^b = J_{zz}^b$: Legemet roterer om spinnvektoren som har samme retning som vinkelhastigheten.
- 3). $J_{xx}^b = J_{yy}^b > J_{zz}^b$: Legemekjegla ruller, uten å gli, på romkjegla som ligger inni legemekjegla. Vi sier vi har retrograd presesjon.

Proof. Bevis tas på tavla ■

Referanser

B.1 Bøker

- Britting, Kenneth R. (1971). *Inertial Navigation Systems Analysis*. Wiley
- Craig, John J. (Second Edition 1989). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Addison-Wesley.
- Chatfield, A.B. (1997). *Fundamentals of High Accuracy Inertial Navigation*. AIAA
- Desoer, D.A. (1970). *Notes on a second course on linear systems*. Van Nostrand Reinhold
- Desloge, Edward A. (1982). *Classical Mechanics*, Vol. I. Wiley.
- Desloge, Edward A. (1982). *Classical Mechanics*, Vol. II. Wiley.
- Goldstein, Herbert (Second Edition 1980). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley.
- Irgens, Fridtjov (2.utgave 1985). *Dynamikk*. Tapir
- Lawrence, Anthony (1993). *Modern Inertial Technology*. Springer-Verlag
- Lin, Ching-Fang (1994). *Advanced Control Systems Design*. Prentice-Hall
- Nicholson, H. (editor, 1980). *Modelling of Dynamical Systems. Vol. 1*. IEE
- Stevens, Brian L. and Lewis, Frank L. (1992). *Aircraft Control and Simulation*. Wiley
- Shames, Irving H. (Third Edition 1980). *Engineering Mechanics*, Vol. II Dynamics. Prentice-Hall.
- Thomson, William T. (Dover Edition 1986). *Introduction to SPACE DYNAMICS*. Dover
- Wertz, James R. (1978). *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Kluwer Academic Publishers.
- Wiesel, William E. (1997). *Spaceflight Dynamics. 2. edition* McGraw-Hill
- Wolovich, William A. (1987). *ROBOTICS: Basic Analysis and Design*. Holt and Winston
- Zipfel, Peter H. (2000). *Modelling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA Education Series.

B.2 Artikler

B.3 Internett

WGS 84 World Geodetic System 1984, se <http://www.wgs84.com>

B.4 Notater

Hallingstad, Oddvar (1997). *Notat 2 : Gradient operasjoner*. Unik