Frågor och lösningar från genomgång

Assistent Edvin Cambrand

HT 2025

Lektion 1 (13/8): P1

Frågor och svar

Kapitel P1

Fråga 8: Skriv som ett intervall, mängden av alla reella tal x som uppfyller villkoren $x < 2$ och $x \geq -3$, med ett intervall.
Lösning: Enligt villkoren måste alla tal inom intervallet vara större än (eller lika med) -3. Alltså är -3 vår nedre ändpunkt. Alla tal inom intervallet är också strikt mindre än 2,inte lika med två. Tillsammans blir detta ett halvöppet intervall:

$$I = [-3, 2)$$

Fråga 14: Lös olikheten och svara med ett intervall eller en union av flera intervall:

$$3x + 5 \leq 8$$

Lösning: Vi använder (1) från reglerna för operationer på olikheter:

$$a < b \implies a + c < b + c$$

Låt nämligen $c = -5$ så erhåller vi:

$$3x + 5 \leq 8 \implies 3x + 5 - 5 \leq 8 - 5 \iff 3x \leq 3$$

Alltså sökes alla tal x som uppfyller $3x \leq 3$. Vi kan använda (3) från reglerna ovan, med $c = 1/3$ och erhåller:

$$3x \leq 3 \implies 3x/3 \leq 3/3 \iff x \leq 1$$

Vi har nått vårt svar, som skrivs med ett intervall som:

$$(-\infty, 1]$$

Fråga 18: Lös olikheten och svara med ett intervall eller en union av flera intervall:

$$x^2 < 9$$

Lösning: Vårt svar består av alla tal vars kvadrat är mindre än 9. Detta består av alla tal sådana att:

$$|x| < \sqrt{9} \iff |x| < 3$$

För alla $x > 0$ uppfylls villkoret av alla tal inom $I_+ = (0, 3)$.
För alla $x < 0$ uppfylls villkoret av alla tal inom $I_- = (-3, 0)$
Villkoret uppfylls även av 0, varför vårt slutgiltiga svar blir:

$$I = (-3, 3)$$

Fråga 28: Lös följande ekvation:

$$|x - 3| = 7$$

Lösning: Vi använder definitionen av absolutbeloppet $|x|$:

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Definitionen applicerad med argumentet $(x - 3)$, ger att:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x - 3 \geq 0 \\ 3 - x, & x - 3 < 0 \end{cases}$$

Från tidigare kan vi använda att

$$x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$$

och

$$x - 3 < 0 \iff x < 3$$

vilket ger oss:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ 3 - x, & x < 3 \end{cases}$$

Vi löser först ekvationen för villkoret $x \geq 3$:

$$x - 3 = 7 \iff x = 10$$

Detta är en tillåten lösning enligt villkoret, eftersom $10 \geq 3$.
Nu löser vi för villkoret $x < 3$:

$$3 - x = 7 \iff x = -4$$

Detta är också en tillåten lösning. Alltså erhåller vi lösningarna $x \in \{-4, 10\}$
Fråga 38: Uttryck intervallet som definieras av villkoret

$$|2x + 5| < 1$$

Lösning: Som tidigare applicerar vi definitionen av absolutbeloppet:

$$|2x+5| = \begin{cases} 2x+5, & x \geq -5/2 \\ -2x-5, & x < -5/2 \end{cases}$$

Vi löser olikheten för alla $x \geq -5/2$:

$$2x+5 < 1 \iff 2x < -4 \iff x < -2$$

Denna lösning tillsammans med villkoret ovan ger oss intervallet av alla x större än eller lika med $-5/2$, strikt mindre än -2:

$$I = [-5/2, -2)$$

Nu löser vi för alla $x < -5/2$:

$$-2x-5 < 1 \iff -2x < 6 \iff x > -3$$

Alltså erhåller vi, med lösning och villkor:

$$I = (-3, -5/2]$$

Lektion 2 (14/8): P2, P3

Frågor och svar

Kapitel P2

Fråga 8: Beskriv grafen till ekvationen $x^2 + y^2 = 2$ **Lösning**: Vi påminner om grafen G till en cirkel i planet med mittpunkt (a, b) och radie r:

$$G = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

Vi känner då igen att ekvationen i frågan beskriver grafen till en cirkel med mittpunkt i origo $(0, 0)$ och radie $\sqrt{2}$.

Fråga 12: Beskriv grafen till olikheten $y < x^2$

Lösning: Vi söker en graf till olikheten ovan. Vi vill alltså hitta alla punkter (x, y) som uppfyller att $y < x^2$. Ett enkelt sätt att göra detta är att helt enkelt undersöka grafen till $y = x^2$ och välja alla punkter som istället har lägre y-värde:

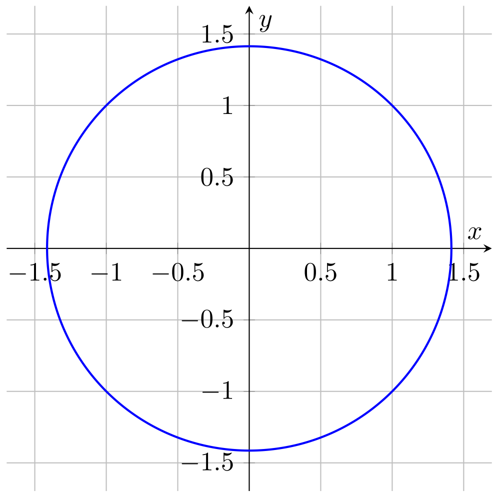

Figure 1: Cirkel med radie $\sqrt{2}$ och mittpunkt $(0, 0)$

Vi kan från denna graf se att vi, för att rita ut grafen till olikheten, helt enkelt ska fylla i området som ligger under den, ty dessa alla uppfyller att $y < x^2$:

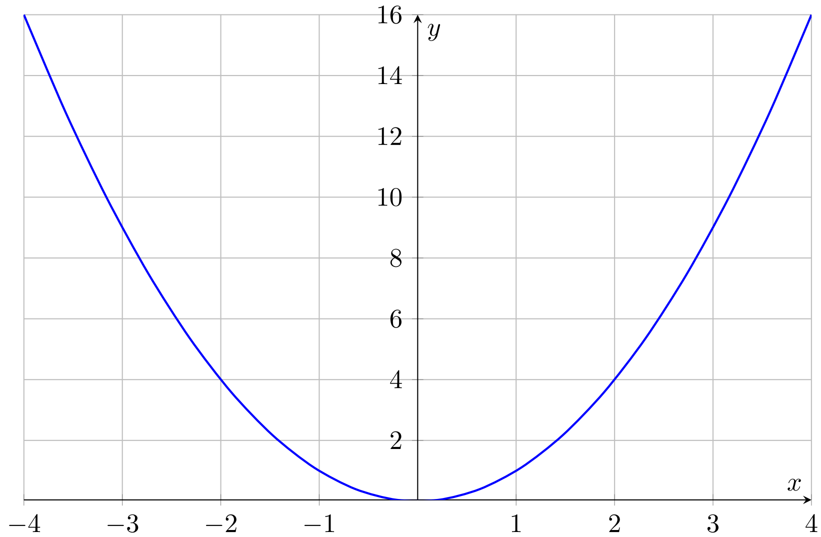

Figure 2: Grafen till $y = x^2$

Fråga 20: Ligger punkten $P = (3, -1)$ på, ovan eller under linjen $x - 4y = 7$
Lösning: Vi börjar med att skriva om linjen på ett mer hanterbart sätt:

$$x - 4y = 7 \iff 4y = x - 7 \iff y(x) = \frac{x-7}{4}$$

Vi undersöker nu var linjen befinner sig då $x = 3$, precis som punkten P:

$$y(3) = \frac{3-7}{4} = -4/4 = -1$$

Alltså ligger linjen på punkten $(3, -1)$.

Fråga 22: Bestäm en ekvation till linjen genom punkterna $P1 = (-2, 1)$ och $P2 = (2, -2)$.
Lösning: Alla linjer har egenskapen att lutningen är konstant mellan varje par av två punkter. Vi börjar därför med att bestämma lutningen till linjen på formen $y = kx + m$:

$$k := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-2) - 1}{2 - (-2)} = \frac{-3}{4}$$

Nu bestämmer vi konstanten m genom att vi vet att punkterna $P1$ och $P2$ båda måste ligga på linjen. Båda går att använda, vi väljer $P1$. Vi vet därför att det måste vara sant att:

$$y_1 = -\frac{3}{4}x_1 + m \iff 1 = -\frac{3}{4}(-2) + m \iff m = 1 - 6/4 = -1/2$$

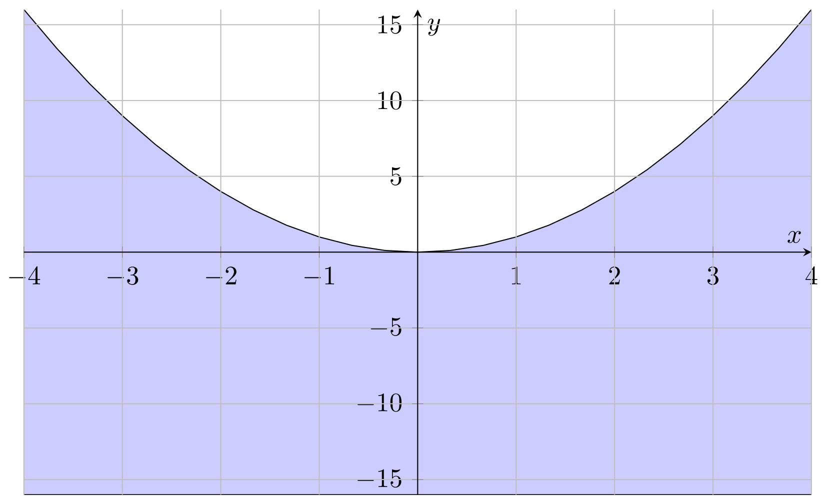

Figure 3: Grafen (eller området) till $y < x^2$

Vi erhåller nu den sökta linjens ekvation:

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

Kapitel P3

Fråga 6: Finn radie och mittpunkt till cirkeln som beskrivs av:

$$x^2 + y^2 + 4y = 0$$

Lösning: Vi önskar att skriva om ekvationen till något liknande den vi känner till:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Vi kan direkt skriva om $x^2 = (x - 0)^2$ och kvadratkompletterar för y:

$$y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4 = (y - (-2))^2 - 4$$

Samma ekvation kan alltså skrivas:

$$x^2 + y^2 + 4y = 0 \iff (x - 0)^2 + (y - (-2))^2 - 4 = 0$$

$$\iff (x - 0)^2 + (y - (-2))^2 = 2^2$$

Vi ser direkt från detta att mittpunkten ges av $C = (0, -2)$ och radien är $r = 2$.

Fråga 12: Beskriv området som definieras av olikheten $x^2 + (y - 2)^2 \leq 4$

Lösning: Vi känner igen detta från cirkelns ekvation,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Vi ser alltså att området innehåller alla punkter på cirklar med mittpunkt $C = (0,2)$ och radie $r \leq 2$. Alla cirklarna tillsammans utgör en area, se figur nedan:

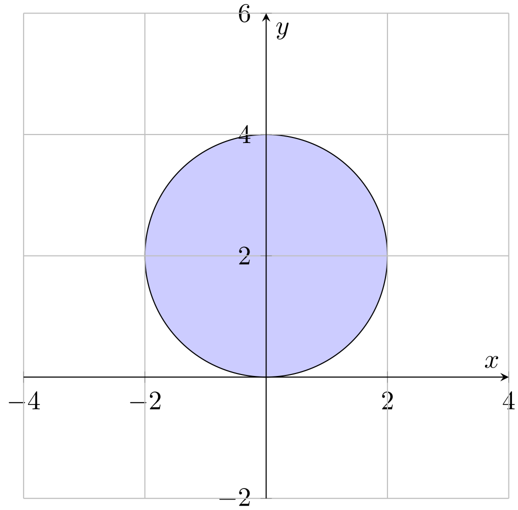

Figure 4: Området som beskrivs av $x^2 + (y-2)^2 \leq 4$

Fråga 14: Beskriv området som begränsas av villkoren:

$$x^2 + y^2 \leq 4 \text{ och } (x+2)^2 + y^2 \leq 4$$

Vi känner igen att dessa två områden är cirklar med mittpunkter $C1 = (0,0)$ respektive $C2 = (-2,0)$ och bägge med radie $r = 2$. De punkter som uppfyller bägge villkor ligger alltså i snittet mellan dessa:

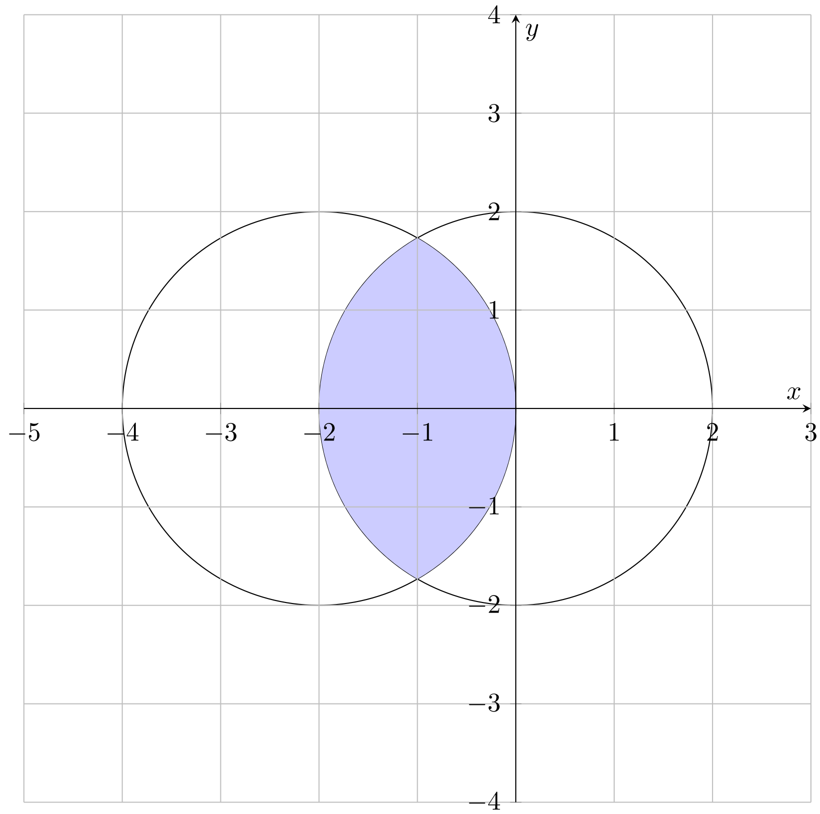

Figure 5: Området som beskrivs av $x^2 + y^2 \leq 4$ och $(x+2)^2 + y^2 \leq 4$

Fråga 44: Identifiera och skissa grafen till ekvationen

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

Lösning: Ekvationen påminner något om en ellips, vars ekvation är:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Låt oss dividera ekvationen given med först 9 sedan 16, sammanlagt $9*16 = 144$. Vi erhåller då en ny ekvation enligt:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Vi ser nu att detta beskriver en ellips med x-amplitud $\sqrt{16} = 4$ och y-amplitud $\sqrt{9} = 3$. Grafen ser ut som följande:

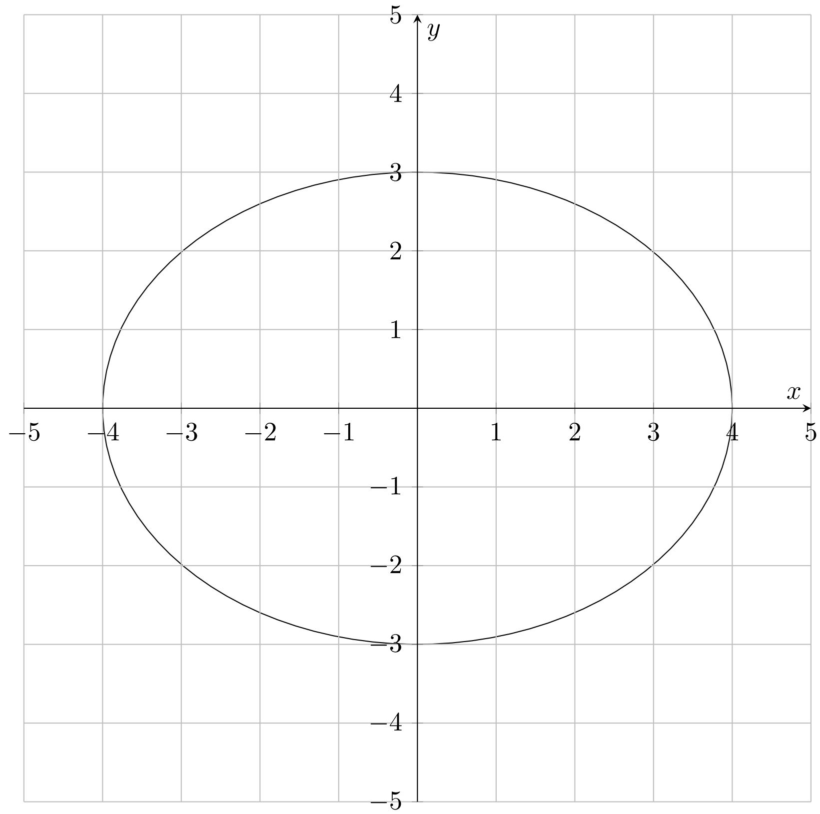

Figure 6: Ellips beskriven av $x^2/16 + y^2/9 = 1$

Fråga 48: Identifiera och rita grafen till följande ekvation:

$$x^2 - y^2 = -1$$

Lösning: Istället för en ellips känner vi igen följande ekvation som en hyperbol, vars ekvation är:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Men, för att få högerledet i den givna ekvationen att bli 1 måste vi multiplicera ekvationen med -1, och vi erhåller:

$$y^2 - x^2 = 1$$

Detta är en hyperbol var x och y har bytt plats, alltså erhåller vi grafen av en hyperbol var axlarna är omväxlade. Se figur:

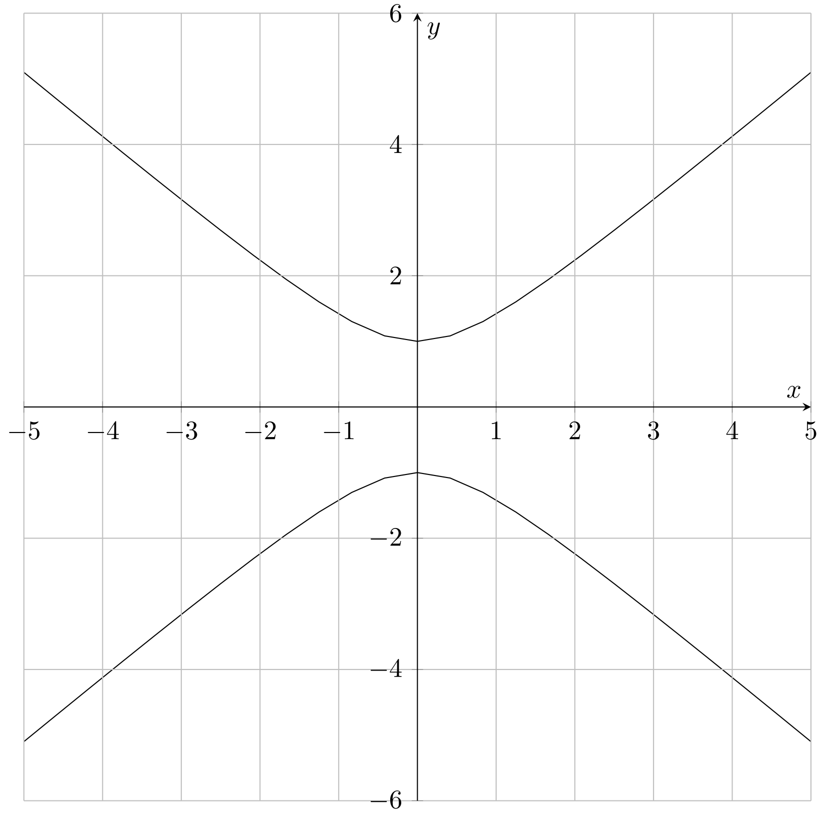

Figure 7: Grafen till $y^2 - x^2 = 1$

Lektion 3 (15/8): P4, P5

Frågor och lösningar

Kapitel P4
Fråga 2: Hitta definitionsmängd och värdemängd till $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

Lösning: Vi vet att $\sqrt{x}$ är definierat för $D = [0, \infty)$. Detta är den enda delen av funktionen i fråga som innehåller variabeln x, alltså blir detta definitionsmängden. Värdemängden av $\sqrt{x}$ är alla positiva reella tal, $[0, \infty)$, varför värdemängden till $-\sqrt{x}$ blir alla negativa tal, $(-\infty, 0]$. Efter addition med 1 får vi funktionen i fråga, $1 - \sqrt{x}$, med värdemängd $(-\infty, 1]$.

Fråga 6: Hitta definitionsmängd och värdemängd till:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x - 2}}$$

Lösning: Vi börjar med att inse att vi inte tillåter $x < 2$, eftersom $\sqrt{x}$ här enbart är definierat för tal $x > 0$. funktionen f består av en kvot, så vi tillåter inte heller att nämnaren är 0, eller ekvivalent att $x = 3$.
Vår definitionsmängd består alltså av alla rella tal $x \in \mathbb{R}$ sådana att:

$$x \geq 2, \quad x \neq 3$$

Vi kan bl.a. uttrycka detta som:

$$D_f = [2, 3) \cup (3, \infty)$$

För att hitta värdemängden inser vi först att funktionen aldrig aldrig antar värdet 0:

$$f(x) \neq 0 \quad \forall \quad x \in D_f$$

Betrakta definitionsmängden. Vi tittar först på $[2, 3)$. Funktionen är inom detta intervall kontinuerlig och strängt avtagande, eftersom $\sqrt{x - 2}$ är strängt växande mellan $[2, 3)$. Funktionen antar i början av intervallet värdet $f(2) = 1$, och vi inser att $f(x) \to \infty$ då $x \to 3-$.

Nu tittar vi på $(3, \infty)$. Först noterar vi att $f(x) \to -\infty$ då $x \to 3+$. För alla $x > 3$ gäller att $1 - \sqrt{x - 2}$ är strängt avtagande, varför $f(x) = 1/(1 - \sqrt{x - 2})$ är strängt växande. Vi ser även att $f(x) \to -0$ då $x \to \infty$.

Sammanlagt kan vi uttrycka värdemängden som:

$$V_f = [-\infty, 0) \cup [1, \infty)$$

Kapitel P5
Fråga 2: Hitta definitionsmängderna för $f + g, f - g, fg, f/g, g/f$ för funktionerna

$$f(x) = \sqrt{1 - x}, \quad g(x) = \sqrt{1 + x}$$

Lösning:
$(f+g)(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$. De särskilda definitionsmängderna ges av:

$$D_f = (-\infty, 1], \quad D_g = [-1, \infty)$$

Vi hittar den gemensamma definitionsmängden D_{f+g} som $D_f \cap D_g = [-1, 1]$. På samma sätt finner vi definitionsmängderna som för $(f-g)$ och (fg).

$(f/g)(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$, Först och främst gäller som tidigare, från de särskilda definitionsmängderna, att $x \in [-1, 1]$. Nu ser vi även att nämnaren ej får vara 0, vilket ger oss villkoret $x \neq -1$. Alltså blir vår definitionsmägnd $D_{f/g} = (-1, 1]$

$(g/f)(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$, vi begränsar först ned definitionsmängden till $[-1, 1]$ från de särskilda definitionsmängderna, och den här gången är kravet för nämnaren $x \neq 1$. Vi erhåller då $D_{g/f} = [-1, 1)$

Fråga 4: Skissa grafen till $f(x) = x^3 - x$ genom att dela upp den i enklare funktioner.

Lösning: Vi skissar grafen genom att först skissa ut $f(x) = x^3$ och $g(x) = -x$. Den sökta grafen är summan av dessa, $(f+g)(x) = x^3 - x$:

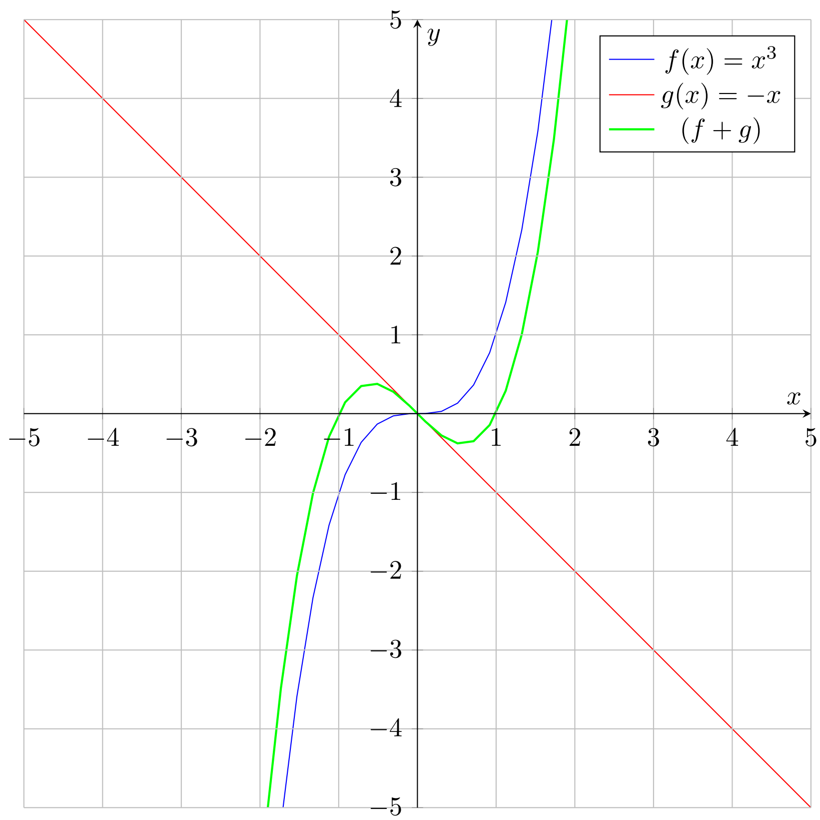

Figure 8: Graferna till $x \mapsto x^3$, $x \mapsto -x$ och $x \mapsto x^3 - x$

Fråga 8: Skriv $h(x) = 2/x$ som en sammansatt funktion och bestäm delfunktionernas definitionsmängder.

Lösning: funktionen $h(x) = 2/x$ är en sammansättning av $g(x) = \frac{1}{x}$ och $f(x) = 2x$, ty:

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) = f(\frac{1}{x}) = 2(\frac{1}{x}) = 2/x$$

Definitionsmängden av $f \circ g$ definieras som de värden x inom definitionsmängden till g sådana att $g(x)$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g,\ \ g(x) \in D_f\}$$

Först och främst har vi villkoret $x \in D_g$. Ovan har vi angivit $g(x) = 1/x$ vars definitionsmängd är $\mathbb{R} \backslash \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Sedan har vi villkoret att $g(x) \in D_f$. Funktionen $f(x) = 2x$ är definierad för alla reella tal, $x \in \mathbb{R}$, varför vi kräver att $g(x) \in \mathbb{R}$. Detta stämmer för hela värdemängden till g och detta begränsar således inte definitionsmängden. Slutligen har vi

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} \backslash \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Det finns oändligt många sätt att skriva h som en sammansättning av två funktioner, man måste inte välja f, g som jag gjort ovan.

P5, Exempel 8: Vi definierar en styckvis funktion:

$$f(x) := \begin{cases} (x+1)^2, & x < -1 \\ -x, & -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & 1 \leq x \end{cases}$$

Till varje $x \in \mathbb{R}$, antar funktionen något värde. Den är alltså definierad för hela den reella tallinjen. Vi kan skissa funktionen genom att skissa vardera graf inom de givna intervallen. Notera att en ifylld punkt innebär att grafen är definierad i den givna punkten, motsvarande en ständ ändpunkt i ett intervall. En tom punkt betyder att funktionen ej är definierad där, motsvarande en öppen ändpunkt:

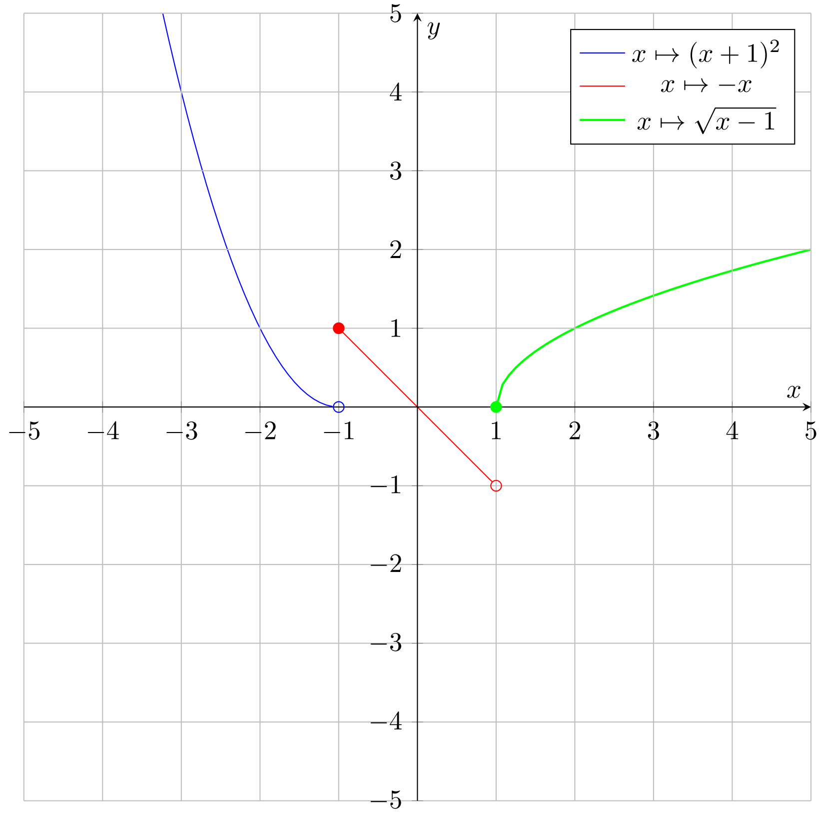

Figure 9: Exempel på en styckvis definierad funktion $f(x)$

P5, Exempel 9: Hitta funktionen $g(x)$ till funktionen i grafen nedan:

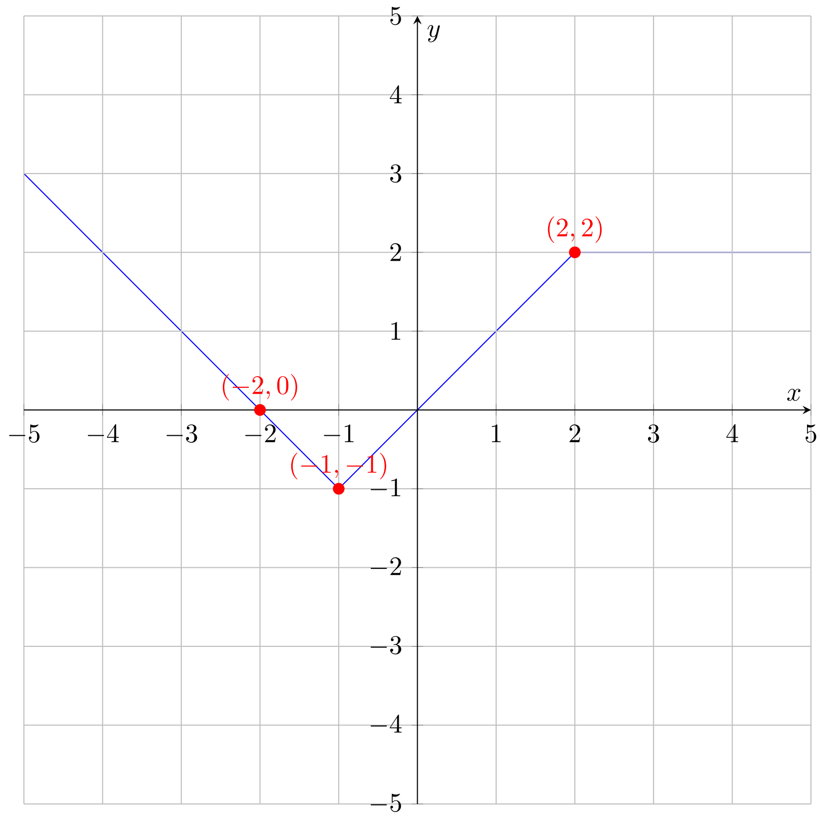

Figure 10: Styckvis definierad funktion $g(x)$

Lösning: Vi ser direkt att grafen består av räta linjer med form $y = kx + m$. Funktionen ändras vid $x = -1$ och vid $x = 2$. Vi vill därför skapa en styckvis definierad funktion $g(x)$, bestående av tre olika räta linjer.
Inom intervallet $(-\infty, -1]$ ser vi att funktionen är en rät linje med lutning som bestäms av de två punterna den skär, $(-2, 0)$ och $(-1, -1)$:

$$k_1 = \Delta y/\Delta x = \frac{(-1) - 0}{(-1) - (-2)} = \frac{-1}{1} = -1$$

Vi kan bestämma m_1 eftersom vi vet att linjen skär $(-2, 0)$:

$$y = kx + m \Longrightarrow 0 = (-1)(-2) + m_1 \Longleftrightarrow 2 + m_1 = 0 \Longleftrightarrow m_1 = -2$$

Den mellersta linjen passerar $(-1, -1)$ och $(2, 2)$. Lutningen bestäms till:

$$k_2 = \frac{2 - (-1)}{2 - (-1)} = 1$$

På samma sätt som tidigare erhåller vi m_2 med punkten $(2,2)$ enligt:

$$y = kx + m \implies 2 = (1)(2) + m_2 \iff m_2 = 0$$

Den tredje linjen inses lätt till att vara $g(x) = 2$.
Vi sammanställer dessa, med rätt intervall, till:

$$g(x) = \begin{cases} -x-2, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x \leq 2 \\ 2, & 2 < x \end{cases}$$

Det går lika bra i detta fall att ändra ändpunkterna i intervallen:

$$g(x) = \begin{cases} -x-2, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x \end{cases}$$

Om linjerna inte mötte varandra skulle det inte vara fallet.

Lektion 4 (18/8): P7

Frågor och svar

Fråga 4: Bestäm värdet av $\sin(7\pi/12)$.
Lösning: Vi delar upp $7\pi/12$ till standardvinklar:

$$7\pi/12 = 3\pi/12 + 4\pi/12 = \pi/4 + \pi/3$$

Vi använder nu *additionsformeln* för sin:

$$\sin(7\pi/12) = \sin(\pi/3 + \pi/4) = \sin(\pi/3)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)\cos(\pi/3)$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) + (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Fråga 10: Uttryck $\cos(3\pi/2 + x)$ enbart med termer innehållande $\sin(x)$ och $\cos(x)$.
Lösning: Vi Börjar med *additionsformeln* för cos och erhåller:

$$\cos(3\pi/2 + x) = \cos(3\pi/2)\cos(x) - \sin(3\pi/2)\sin(x)$$

Från standardvinklar vet vi att $\cos(3\pi/2) = 0$, $\sin(3\pi/2) = -1$. Vi erhåller:

$$\cos(3\pi/2 + x) = (0)\cos(x) - (-1)\sin(x) = \sin(x)$$

Fråga 24: Skissa grafen till $y = 1 + \sin(x + \pi/4)$
Lösning: Vi bryter ned grafen till delar som vi kan skissa. Vi börjar med en sinus-funktion, $f(u) = \sin(u)$, vars graf vi känner till väl. Genom att göra variabelbytet $u = x + \pi/4 \iff x = u - \pi/4$ förskjuter vi grafen $\pi/4$ enheter negativt i x-led. Slutligen förskjuter vi grafen i positivt i y-led genom att addera 1:

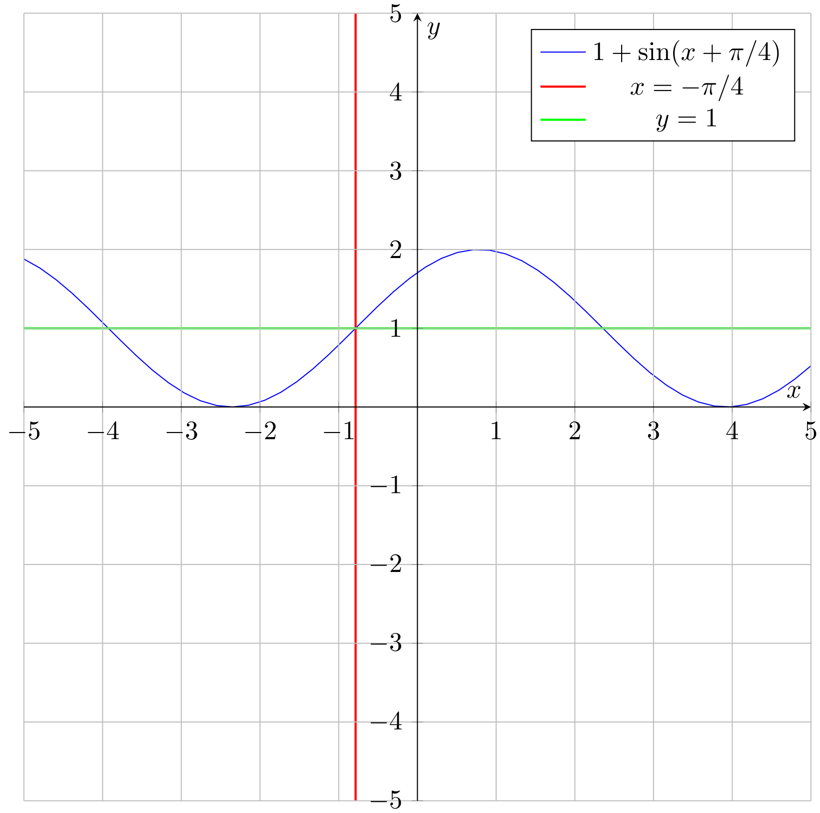

Figure 11: Funktion

Fråga 12: Uttryck följande med $\sin(x)$ och $\cos(x)$:

$$\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$$

Lösning: Från deras definitioner har vi att:

$$\cot x = 1/\tan x = \cos x/\sin x, \qquad \tan x = \sin x/\cos x$$

Vi inför detta i vårt uttryck:

$$\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} \ldots$$

Vi multiplicerar täljare och nämnare med lämpliga uttryck för att erhålla samma nämnare överallt:

$$\ldots = \frac{\frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}} \ldots$$

Vi använder trigonometriska ettan, $cos^2x + sin^2x = 1$ och förkortar hela bråket med $\sin x \cos x$ och erhåller:

$$... = \sin^2 x - \cos^2 x$$

Fråga 26: Givet är $\tan\theta = 2$ och $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Bestäm $\sin\theta, \cos\theta$
Lösning: Vi är givna att $\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta = 2$. Annorlunda uttryckt kan vi skriva $\sin x = 2\cos x$. Vi inför trigonometriska ettan och uttrycker $\cos x$ i $\sin x$:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \iff \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Eftersom vi befinner oss i första kvadranten så är både $\sin x, \cos x$ positiva. Tack vare detta kan vi konstatera att:

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Vi inför detta i vårt uttryck ovan och erhåller:

$$\sin x = 2\cos x = 2\sqrt{1 - \sin^2 x} \implies \sin^2 x = 4(1 - \sin^2 x) = 4 - 4\sin^2 x$$

$$\iff 5\sin^2 x = 4 \iff \sin^2 x = 4/5$$

Vi vet att $\sin x > 0$ och därför finns bara en lösning, nämligen

$$\sin x = 2/\sqrt{5}$$

Vi inför detta i vårt ursprungliga uttryck:

$$\sin x = 2\cos x \iff \cos x = \sin x/2 = (2/\sqrt{5})/2 = 1/\sqrt{5}$$

Lektion 5 (19/8): Appendix 1

Frågor och svar

Fråga 14: Bestäm $|z|, arg(z)$ givet att $z = -\sqrt{3} - 3i$
Lösning: Absolutbeloppet $|z|$ är avståndet från origo till z och definieras som $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ då $z = a + bi$. Med $a = -\sqrt{3}$ och $b = -3$ erhåller vi:

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12}$$

Eftersom $a < 0$ och $b < 0$ så vet vi att punkten z ligger i den tredje kvadranten. Argumentet fås då geometriskt till $arg(z) = \pi + arctan(b/a)$, vi erhåller i vårt fall:

$$arg(z) = \pi + \arctan(3/\sqrt{3}) = \pi + arctan(\sqrt{3}) = \pi + \pi/3 = 4\pi/3$$

Fråga 20: Bestäm x, y sådana att $z = x + yi$, givet $|z| = 1$ och $arg(z) = 3\pi/4$
Lösning: Låt $arg(z) = w$. Vi kan konvertera komplexa tal mellan rektangulär och polär form enligt:

$$z = a + bi = |z|\,(\cos w + i \sin w) = |z|\cos w + i|z|\sin w$$

Vi ser direkt att $x = |z| \cos w$ och $y = |z| \sin w$, vilket ger oss:

$$x = (1)\cos(3\pi/4) = \cos(\pi/2 + \pi/4) = -1/\sqrt{2}$$

$$y = (1)\sin(3\pi/4) = \sin(\pi/2 + \pi/4) = 1/\sqrt{2}$$

Fråga 30: Beskriv eller skissa grafen till olikheten $|z - 2i| \leq 3$
Lösning: Olikheten beskriver alla punkter z sådana att avståndet till z från punkten $(0, 2i)$ är mindre än, eller lika med, 3 längdenheter i det komplexa talplanet. Detta beskriver en cirkel med centrum $(0, 2i)$ och radie $r = 3$. Vi får inte missta centrum av cirkeln till att vara $(0, -2i)$, eftersom detta skulle innebära att avståndet är 0 enheter då z befinner sig på punkten $(0, 2i)$, ty $|z - 2i| = |2i - 2i| = 0$. Men avståndet mellan $(0, -2i)$ och $(0, 2i)$ är förstås 4 längdenheter.

Fråga 42: Förenkla $\frac{1+i}{i(2+3i)}$
Lösning: Vi öppnar parentesen i nämnaren och erhåller:

$$\frac{1+i}{i(2+3i)} = \frac{1+i}{-3+2i}$$

För att få bort imaginära tal i nämnaren, multiplicerar vi täljare och nämnare med nämnarens konjugat, $-3 - 2i$:

$$\frac{1+i}{-3+2i} = \frac{(1+i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \frac{-1-5i}{9+4} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

Fråga 46: Uttryck $z = 3 + \sqrt{3}i$ och $w = -1 + \sqrt{3}i$ i polär form. Bestäm därefter produkten zw samt kvoten z/w
Lösning: Vi behöver absolutbeloppen och argumenten för att beskriva de komplexa talen z, w i polär form.

$$|z| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \qquad |w| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

z ligger i första kvadranten, w ligger i andra kvadranten. Argumenten fås geometriskt till:

$$arg(z) = \arctan(\sqrt{3}/3) = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$$

$$arg(w) = \pi - \arctan(\sqrt{3}/1) = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$$

Vi kan nu skriva dessa i polär form:

$$z = 2\sqrt{3}\,(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))$$

$$w = 2\,(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))$$

SATS: Låt $z, w \in \mathbb{C}$. Då gäller att:

$$|zw| = |z||w| \tag{1}$$
$$arg(zw) = arg(z) + arg(w) \tag{2}$$
$$|z/w| = |z|/|w| \tag{3}$$
$$arg(z/w) = arg(z) - arg(w) \tag{4}$$

Vi använder satsen ovan för att bestämma produkt och kvot av talen z, w:

$$|zw| = |z||w| = 4\sqrt{3}$$

$$arg(zw) = arg(z) + arg(w) = \pi/6 + 2\pi/3 = 5\pi/6$$
$$\implies zw = 4\sqrt{3}\,(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6))$$
$$|z/w| = |z|/|w| = 2\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$$
$$arg(z/w) = arg(z) - arg(w) = \pi/6 - 2\pi/3 = -3\pi/6 = -\pi/2$$

Vi kan enklare ange argumentet inom intervallet $[0, 2\pi)$. $-\pi/2$ motsvarar då $3\pi/2$.

$$\implies z/w = \sqrt{3}\,(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$$

Fråga 52: Lös ekvationen $z^3 = -8i$
Lösning: Vi använder De Moivres sats:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Det följer direkt av De Moivres sats att även:

$$(|z|(\cos\theta + i\sin\theta))^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Vi söker alltså alla komplexa tal sådana att $z^3 = |z|^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = -8i$, där $\theta = arg(z)$. Högerled kan skrivas om till polär form:

$$-8i = 8(\cos(3\pi/2 + 2\pi k) + i\sin(3\pi/2 + 2\pi k)), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vi jämför z^3 med detta och ser att:

$$|z|^3 = 8 \implies |z| = 2$$

och

$$3\theta = 3\pi/2 + 2\pi k \iff \theta = \pi/2 + 2\pi k/3$$

där k är ett heltal. För att hitta tre olika rötter ökar vi k successivt, vi börjar med $k = 0$ och erhåller:

$$z_1 = 2(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = 2i$$

för $k = 1$ erhåller vi:

$$z_2 = 2(\cos(\pi/2 + 2\pi/3) + i\sin(\pi/2 + 2\pi/3)) = 2(\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6))$$

$$= 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} - i$$

För $k = 2$ erhåller vi den sista roten:

$$z_3 = 2(\cos(\pi/2 + 4\pi/3) + i\sin(\pi/2 + 4\pi/3)) = 2(\cos(11\pi/6) + i\sin(11\pi/6))$$

$$= 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} - i$$

Fråga 54: Finn alla olika lösningar till $z^4 = 4$
Lösning: Vi söker alla olika komplexa tal som uppfyller att $z^4 = 4$ och vi använder polär form igen. Vi börjar med att skriva om 4 till polär form:

$$4 = 4(\cos(0 + 2\pi k) + i\sin(0 + 2\pi k)), \quad k \in \mathbb{Z}$$

z^4 kan skrivas om med hjälp av De Moivres sats till:

$$|z|^4(\cos(4\theta) + i\sin(4\theta))$$

Vi jämför dessa två uttryck och inser att:

$$|z|^4 = 4 \implies |z| = \sqrt{2}$$

$$4\theta = 2\pi k \iff \theta = \frac{\pi}{2}k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

De fyra lösningarna fås genom att ansätta $k = 0, 1, 2, 3$:

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos(0) + i\sin(0)) = \sqrt{2}$$

$$z_2 = \sqrt{2}(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = i\sqrt{2}$$

$$z_3 = \sqrt{2}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -\sqrt{2}$$

$$z_4 = \sqrt{2}(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)) = -i\sqrt{2}$$

Lektion 6 (20/8): P6

Frågor och svar

Fråga 4: Faktorisera polynomet $p(x) = x^2 - 6x + 13$
Lösning: Det finns många sätt att faktorisera problemet ovan. Ett är att hitta rötterna r_1, r_2 och uttrycka polynomet som $(x - r_1)(x - r_2)$. För att hitta rötterna kan vi använda pq-formeln:

$$r_1, r_2 = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q} = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm \sqrt{-4}$$

rötterna är imaginära och ges av:

$$r_1 = 3 + 2i, \;\; r_2 = 3 - 2i$$

Polynomet faktoriseras därför till:

$$p(x) = x^2 - 6x + 13 = (x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i)$$

Fråga 6: Faktorisera polynomet $p(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$
Lösning: Vi börjar med att bryta ut en gemensam faktor x^2 och erhåller:

$$p(x) = x^2(x^2 + 6x + 9)$$

Vi kan nu använda pq-formeln igen för att hitta rötterna till $x^2 + 6x + 9$:

$$r_1, r_2 = -3 \pm \sqrt{9 - 9} = -3 \pm 0$$

Eftersom -3 är en rot till polynomet med multiplicitet 2, måste $(x+3)$ vara en faktor till polynomet, också med multiplicitet 2. Vi har funnit alla faktorer och erhåller:

$$p(x) = x^2(x + 3)^2$$

Fråga 10: Faktorisera $p(x) = x^5 - x^4 - 16x + 16$
Lösning: Det går att se ett visst mönster i polynomet. För att se detta bryter vi ut x^4 ur de första två, och -16 ur de sista två:

$$p(x) = x^5 - x^4 - 16x + 16 = x^4(x - 1) - 16(x - 1)$$

Vi ser nu en till gemensam faktor att bryta ut, $x - 1$:

$$p(x) = (x - 1)(x^4 - 16)$$

Vi kan faktorisera polynomet vidare genom att finna rötterna till $x^4 - 16$, eller motsvarande alla lösningar till $x^4 = 16$, vilka är $x = \pm 2, \pm 2i$. Vi kan alltså faktorisera polynomet till:

$$p(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$$

Fråga 12: Faktorisera polynomet $p(x) = x^9 - 4x^7 - x^6 + 4x^4$
Lösning: Ibland tar det tid att hitta ett mönster, ibland finns det inte. Vi kan dock se ett mönster liknande föregående uppgift; vi börjar med att bryta ut x^7 från de första två termerna, och bryter ut x^4 från de sista två termerna:

$$p(x) = x^9 - 4x^7 - x^6 + 4x^4 = x^7(x^2 - 4) + x^4(-x^2 + 4) = x^7(x^2 - 4) - x^4(x^2 - 4)$$

Vi ser nu mönstret, den gemensamma faktorn $(x^2 - 4)$. Vidare faktorisering ger:

$$p(x) = x^7(x^2 - 4) - x^4(x^2 - 4) = (x^4 - 4)(x^7 - x^4)$$

$$= (x^2 - 4)x^4(x^3 - 1)$$

Från differensen mellan två kvadrater $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ kan vi även skriva:

$$p(x) = (x^2 - 2^2)(x^4)(x^3 - 1) = (x + 2)(x - 2)x^4(x^3 - 1)$$

Vi kan också använda att $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ (bekräfta detta själva). Vi erhåller:

$$p(x) = (x+2)(x-2)x^4(x^3-1^3) = (x+2)(x-2)x^4(x-1)(x^2+x+1)$$

Vår uppgift är nu att faktorisera x^2+x+1, vilket vi enkelt gör genom att finna rötterna med pq-formeln:

$$r_1, r_2 = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4-q} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Våra faktorer blir således $(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ och $(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Slutligen erhåller vi polynomet enbart uttryckt i linjära faktorer:

$$p(x) = (x+2)(x-2)x^4(x-1)(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

Fråga 14: Bestäm den största tillåtna definitionsmängden $D_f \subset \mathbb{R}$ till funktionen f, sådan att:

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^3-x}$$

Lösning: Vi är givna en rationell funktion; vi behöver utesluta alla punkter då nämnaren är noll, vilket i vårt fall är då $x^3 - x = 0$. För att finna dessa punkter hittar vi lösningarna till den senaste ekvationen:

$$x^3 - x = 0 \Longleftrightarrow x(x^2-1) = 0$$

Våra lösningar är alltså $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. Dessa punkter tillhör inte vår definitionsmängd. Utöver detta är funktionen definierad över alla reella tal. Vi slutleder att:

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}$$

Fråga 18: Uttryck $p(x)$ som summan av ett polynom $q(x)$ och en rationell funktion $r(x)/b(x)$ var täljaren $r(x)$ har en grad som är lägre än nämnaren $b(x)$, givet att:

$$p(x) = \frac{x^2}{x^2+5x+3}$$

Lösning: Frågan ber oss att finna polynom $q(x)$, $r(x)$ och $b(x)$ sådana att $p(x) = q(x) + r(x)/b(x)$. Från divisionsalgoritmen vet vi att $b(x)$ måste vara nämnaren:

$$b(x) = x^2 + 5x + 3$$

För att hitta $q(x), r(x)$ kan man utföra lång division. Vi kan också resonera oss fram. Vi söker polynom $q(x), r(x)$ sådana att:

$$x^2 = q(x)(x^2+5x+3) + r(x)$$

Vi ser direkt att polynomet $q(x)$ måste vara av grad 0; $q(x)$ är en konstant, eftersom vi annars skulle erhålla ett polynom av grad $n > 2$ vid multiplikation mellan $q(x)$ och $(x^2 + 5x + 3)$. Vi inser också att konstanten måste vara 1; $q(x) = 1$. Nu söker vi polynomet $r(x)$:

$$x^2 = x^2 + 5x + 3 + r(x) \Longleftrightarrow r(x) = -5x - 3$$

Vi slutleder alltså att:

$$x^2 = (1)(x^2 + 5x + 3) - 5x - 3 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + 5x + 3} = 1 - \frac{(5x + 3)}{x^2 + 5x + 3}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$ s.a. $(x^2 + 5x + 3) \neq 0$