Optimisation de la répartition d'un matériau absorbant

EI - Contrôle de la pollution acoustique

CentraleSupélec - 2A
Université Paris-Saclay

Auteurs:
Moghit Yebari
Yi Zhong
Farouk Yartaoui
Nabil Alami
Raphaël Pain Dit Hermier
Edward Lucyszyn

27 septembre 2024

CentraleSupélec

Sommaire

Introduction

Introduction

- Projet d'EI en collaboration avec l'ONERA.
- Le but : étudier la pollution acoustique générée dans un réacteur d'avion
- Deux parties : Théorique & Numérique

Partie théorique

Problème initial

Le problème initial :

$$(P)\ :\ \begin{cases} \Delta p + k_0^2\Big(1 - \dfrac{iM_0}{k_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)^2 p = f \in L^2(\Omega) \\ Z\dfrac{\partial p}{\partial n} + ik_0 Z_0 \chi \,\mathrm{Tr}\Big[\Big(1 - i\dfrac{M_0}{k_0}\Big(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big)\Big)^2 p\Big] = 0 \text{ sur } \Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \\ \mathrm{Tr}(p) = g \text{ sur } \Gamma_{in} \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} + ik\,\mathrm{Tr}(p) = 0 \text{ sur } \Gamma_{out} \end{cases}$$

avec $Z_0 \in \mathbb{R}$, $Z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, Re(z) > 0\}$, $\chi : \Gamma \to \{0, 1\}$, $M_0 = \dfrac{u_0}{c_0}$, $k_0 = \dfrac{\omega}{c_0}$, $k = \dfrac{\omega}{u_0}$.

Formulation variationnelle

Une "double" intégration par partie

$$\begin{cases} \int_\Gamma \mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}\Big)\mathrm{Tr}(\overline{q})\chi\, d\mu = -\int_\Gamma \mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial p}{\partial x}\Big)\,\mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial \overline{q}}{\partial x}\Big)\chi d\mu \\ \int_\Gamma \mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}\Big)\mathrm{Tr}(\overline{q})\chi\, d\mu = -\int_\Gamma \mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial p}{\partial y}\Big)\,\mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial \overline{q}}{\partial y}\Big)\chi d\mu \\ \int_\Gamma \mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\Big)\mathrm{Tr}(\overline{q})\chi\, d\mu = -\int_\Gamma \mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial p}{\partial x}\Big)\,\mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial \overline{q}}{\partial y}\Big)\chi d\mu \\ \int_\Gamma \mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\Big)\mathrm{Tr}(\overline{q})\chi\, d\mu = -\int_\Gamma \mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial p}{\partial y}\Big)\,\mathrm{Tr}\Big(\dfrac{\partial \overline{q}}{\partial x}\Big)\chi d\mu \end{cases}$$

Formulation variationnelle

$$A(p,q) = l(q)$$

où

$$A(p,q) = (\nabla p, \nabla q)_{(L^2(\Omega))^2} + ik(\mathrm{Tr}(p), \mathrm{Tr}(q))_{L^2(\Gamma_{out})} + C(p,q) - k_0^2(p,q)_{L^2(\Omega)}$$

$$+2iM_0k_0\left(\frac{\partial p}{\partial x}, q\right)_{L^2(\Omega)} - M_0^2\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}\right)_{L^2(\Omega)} + M_0^2\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot n_x, \mathrm{Tr}(q)\right)_{B'(\partial\Omega),B(\partial\Omega)}$$

puis

$$l(q) = -(\tilde{f}, q)_{L^2(\Omega)}$$

avec

$$C(p,q) = -ik_0\frac{Z_0}{Z}\left[\int_\Gamma \mathrm{Tr}(p)\,\mathrm{Tr}(\overline{q})\,\chi\,d\mu - 2i\frac{M_0}{k_0}\int_\Gamma \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{Tr}(\overline{q})\,\chi\,d\mu + \right.$$

$$\left.\frac{M_0^2}{k_0^2}\int_\Gamma \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \overline{q}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{q}}{\partial y}\right)\chi\,d\mu\right].$$

Première approche de l'espace des solutions

- On veut imposer sur $V(\Omega)$ que $\mathrm{Tr}(q)_{|\Gamma_{in}} = 0$ pour bénéficier de l'inégalité de Poincaré.
- Il faut de plus $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y} \in H^1(\Omega)$. On pose alors :

$$V(\Omega) = \{q \in H^1(\Omega), \mathrm{Tr}(q) = 0 \text{ sur } \Gamma_{in}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y} \in H^1(\Omega)\} = H^2(\Omega) \cap (\mathrm{Tr}^{|\Gamma_{in}})^{-1}(\{0\}).$$

$$\|q\|^2_{V(\Omega)} := \|q\|^2_{H^2(\Omega)} - \|q\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

- $V(\Omega) = Ker(\mathrm{Tr}^{|\Gamma_{in}} \circ \iota)$

$\rightarrow$ $(V(\Omega), \| \cdot \|_{V(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

Deuxième approche de l'espace des solutions

Approche précédente : insuffisante pour résoudre le caractère bien posé

$\rightarrow$ " Agrandir notre espace de solutions "

On dit alors qu'une fonction $v \in H^1(\Omega)$ est dans l'espace des solutions $V(\Omega)$ si elle vérifie :

$$\begin{cases} \Delta q = \varphi \in L^2(\Omega) \\ Z \dfrac{\partial q}{\partial n} + ik_0 Z_0 \chi \, \mathrm{Tr}(q) = \psi \in L^2(\Gamma) \\ \mathrm{Tr}(q) = 0 \text{ sur } \Gamma_{in} \\ \dfrac{\partial q}{\partial n} + ik \, \mathrm{Tr}(q) = 0 \text{ sur } L^2(\Gamma_{out}) \end{cases} \tag{1}$$

Deuxième approche de l'espace des solutions

On peut alors réexprimer les solutions de (1) par la formulation variationnelle :

$$\forall h \in V(\Omega), A^*(q,h) = l^*(\varphi, \psi, h)$$

On pose alors $V(\Omega) = \{q \in H^1(\Omega), \exists(\varphi,\psi) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma), \forall h \in V(\Omega), A^*(q,h) = l^*(\varphi,\psi,h)\}$, muni de la norme $\|\cdot\|_{V(\Omega)} := \|\nabla \cdot\|_{(L^2(\Omega))^2}$.

- Le problème variationnel devient :

$$\forall h \in V(\Omega), ((Id - K)q, h)_{V(\Omega)} = (A_\psi \psi + A_\varphi \varphi, h)_{V(\Omega)}$$

Ce qui revient donc à résoudre $(Id - K)q = A_\psi \psi + A_\varphi \varphi$ sur $V(\Omega)$

$\rightarrow$ **Théorème Fredholm** : $(V(\Omega), \|\cdot\|_{V(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

Caractère bien posé

- Norme équivalente sur $V(\Omega)$ $(M_0 < 1)$:

$$(\|q\|'_{V(\Omega)})^2 := \|\nabla q\|^2_{(L^2(\Omega))^2} - M_0^2 \left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \operatorname{Tr} \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) \right\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

- Décomposition de type Fredholm de $A(p,q)$:

$$A(p,q) = \Theta(p,q) + \xi(p,q)$$

- On montre Θ coercive [2] et $\xi(p,q) = (\Xi p, q)_{V(\Omega)}$ avec Ξ compact

Énergie

- Énergie :

$$J = \int_\Omega |p(\chi)|^2 dx$$

$$U_{\mathsf{ad}}(\beta) = \left\{ \chi \in L^\infty(\Gamma) \,\middle|\, \forall x \in \Gamma, \chi(x) \in \{0,1\}, 0 < \beta = \int_\Gamma \chi \, d\mu < \mu(\Gamma) \right\}$$

$$U^*_{\mathsf{ad}}(\beta) = \left\{ \chi \in L^\infty(\Gamma) \,\middle|\, \forall x \in \Gamma, \chi(x) \in [0,1], 0 < \beta = \int_\Gamma \chi \, d\mu < \mu(\Gamma) \right\}$$

L'ensemble $U^*_{ad}(\beta)$ est compact dans $L^\infty(\Gamma)$ pour la convergence faible*.

$\rightarrow$ On souhaite montrer la continuité de l'énergie par rapport à χ

Étude de l'énergie

- Soit $\chi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \chi$ dans $L^\infty(\Gamma)$.
- p_m correspond à la solution de (P_H) pour χ_m et p celle pour χ. Alors $v_m = p_m - p$ est solution de :

$$(P_{H,m}) \ : \ \begin{cases} \Delta v_m + k_0^2\left(1 - \dfrac{iM_0}{k_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2 v_m = 0 \\ Z\dfrac{\partial v_k}{\partial n} + ik_0 Z_0 \chi_k \operatorname{Tr}\left[\left(1 - i\dfrac{M_0}{k_0}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)\right)^2 v_m\right] = h_m \text{ sur } \Gamma \\ \operatorname{Tr}(v_m) = 0 \text{ sur } \Gamma_{in} \\ \dfrac{\partial v_m}{\partial n} + ik \operatorname{Tr}(v_m) = 0 \text{ sur } \Gamma_{out} \end{cases}$$

où $h_k = -ik_0 Z_0(\chi_m - \chi) \operatorname{Tr}\left[\left(1 - i\dfrac{M_0}{k_0}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)\right)^2 p\right]$

Étude de l'énergie

- v_m est borné dans $V(\Omega)$ qui est de Hilbert

- $\exists (v_{m_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $v \in V(\Omega)$: $v_{m_j} \rightharpoonup v$ dans $V(\Omega)$.

- $\|v_{m_j}\|^2_{V(\Omega)} \leq C_1 \left| \int_\Gamma k_0 Z_0 (\chi_{m_j} - \chi) \operatorname{Tr}\left[\left(1 - i\frac{M_0}{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\right)^2 p\right] \overline{\operatorname{Tr}(v_{m_j})} d\mu \right|$

- On montre ainsi que 0 est l'unique valeur d'adhérence faible de la suite (v_m), puis que $v = 0$

- On montre que la convergence est même forte

$\rightarrow$ continuité de J^* sur $U^*_{ad}(\beta)$.

Énergie et Lagrangien

$$L(\chi, w, q) = F_V(\chi, w, q) + J(w), \quad \forall w, q \in H$$

$$\langle J'(\chi), \chi_0 \rangle = \langle \frac{\partial L(\chi, u(\chi), p(\chi))}{\partial \chi}, \chi_0 \rangle$$

- Problème adjoint :

$$\langle \frac{\partial L}{\partial u_R}, \phi_R \rangle = 0 \quad \forall \phi_R \in V(\Omega)$$

$$\langle \frac{\partial L}{\partial u_I}, \phi_I \rangle = 0 \quad \forall \phi_I \in V(\Omega)$$

Énergie et Lagrangien

$$\langle J'(\chi), \chi_0 \rangle =$$

$$k_0 \frac{Z_0}{|Z|^2} \Re e \Big(\bar{Z} \Big[\int_\Gamma \mathrm{Tr}(p(\chi_0))\, \mathrm{Tr}(\bar{q}(\chi_0)) \chi_0 d\mu$$

$$-2i \frac{M_0}{k_0} \int_\Gamma \mathrm{Tr}\Big(\frac{\partial p(\chi_0)}{\partial x} + \frac{\partial p(\chi_0)}{\partial y} \Big) \mathrm{Tr}(\bar{q}(\chi_0)) \chi_0 \, d\mu$$

$$-\frac{M_0^2}{k_0^2} \int_\Gamma \mathrm{Tr}\Big(\frac{\partial p(\chi_0)}{\partial x} + \frac{\partial p(\chi_0)}{\partial y} \Big) \mathrm{Tr}\Big(\frac{\partial \overline{q}(\chi_0)}{\partial x} + \frac{\partial \overline{q}(\chi_0)}{\partial y} \Big) \chi_0 \, d\mu \Big] \Big)$$

$$\boxed{\langle J'(\chi), \chi_0 \rangle = \Re e (iC(p(\chi_0), q(\chi_0), \chi_0))}$$

Conclusion théorique

- Objectif principal : existence d'une distribution optimale χ^* telle que

$$J^*(\chi^*) = \inf_{\chi \in U_{ad}^*(\beta)} J^*(\chi)$$

.

- On prend une suite minimisante $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (U_{ad}^*(\beta))^{\mathbb{N}}$ telle que

$$J^*(\chi_k) \xrightarrow{k\to+\infty} \inf_{\chi \in U_{ad}^*(\beta)} J^*(\chi)$$

Conclusion théorique

- Problème bien posé

- $U_{ad}^*(\beta)$ est un compact de $L^\infty(\Gamma)$ pour la convergence faible-*.

$\Longrightarrow$ À sous-suite près, $\chi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \chi^*$

- Continuité de J^*, on obtient que

$$J^*(\chi^*) = \lim_{k\to+\infty} J^*(\chi_k) = \inf_{\chi\in U_{ad}^*(\beta)} J^*(\chi).$$

- Pour s'assurer qu'un χ^* est optimal, on vérifie que $\langle J'(\chi^*), \chi_0 \rangle = 0$

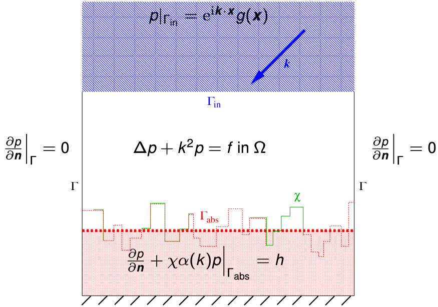
(On notera une fois de plus que χ^* n'est pas nécessairement une fonction caractéristique, donc une telle distribution optimale ne sera presque jamais applicable à un niveau pratique et/ou industriel.)

Partie numérique

Présentation du problème

On considère un volume rectangulaire de 1m horizontalement et de 2m verticalement, comportant $N \times 2N$ quadrangles avec des ;

- Conditions de Dirichlet pour la surface supérieure, ;
- Conditions de Neumann pour les surfaces latérales ;
- Conditions de Robin pour la paroi du réacteur (surface inférieure).



Présentation du problème

Ceci nous amène au système suivant :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 \text{ dans } \Omega \\ p = g_{in} \text{ sur } \Gamma_{in} \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} + \alpha \chi p = 0 \text{ sur } \Gamma_{abs} \end{cases} \qquad (\mathsf{P}_\chi)$$

Variables :

- α est le coefficient d'absorption du lineur, il dépend du matériau ;
- $\chi : \Gamma_{abs} \to \{0, 1\}$ est la fonction caractéristique du lineur ;
- k est le nombre d'ondes.

Présentation du problème

- Nous avons une quantité fixée du matériaux atténuant le niveau sonore.

Cette quantité est $\int_{\Gamma_{abs}} \chi dS = \beta$.

- Nous voulons diminuer le niveau sonore dans notre domaine,

c'est-à-dire, diminuer l'énergie. L'expression de l'énergie J est donnée par :

$$J(\chi) := \int_{\Omega} |p_{\chi}|^2 dx$$

où p_{χ} est la solution du système de Helmhholtz dans le réacteur ëen fonction de la répartition de liner χ.

Calcul de l'énergie

- Approximation de l'aire expliquée dans [1] :

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = [f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)]\frac{(b-a)(d-c)}{4} + E(f)$$

avec $E(f)$ l'erreur qui dépend des conditions sur f.

- L'algorithme utilisé :
  - Prendre un point du maillage qui possède un voisin à droite et en bas ;
  - Regarder si le carré formé par le point initial, son voisin en bas, son voisin à droite et son voisin en bas à droite est dans l'intérieur du domaine ;
  - Si c'est le cas, calculer la moyenne de la valeur absolue au carré des points du carré ;
  - Multiplier cette moyenne par l'aire du carré, cela nous donne une approximation de l'énergie dans le carré ;
  - Faire ceci pour tous les points qui ont un voisin à droite et en bas.

Algorithme du gradient

- But : minimiser une fonction réelle différentiable dans un espace euclidien.

La fonction à minimiser est $\chi \mapsto J(\chi)$. J est bien différentiable au sens de Fréchet avec $J'(\chi) : L^\infty(\Gamma_{abs}) \to L^1(\Gamma_{abs})$ telle que :

$$J(\chi+\chi_0) = J(\chi) + \langle J'(\chi), \chi_0 \rangle + o(\chi_0)\,, \lim_{||\chi_0||_\infty \to 0} \frac{|o(\chi_0)|}{||\chi_0||_\infty} = 0.$$

Avec $J'(\chi) = -\text{Re}(\alpha p_\chi q_\chi)$ où q_χ est la solution du système adjoint de (P_χ) :

$$\begin{cases} \Delta q + k^2 q = -2\bar{p_\chi} \text{ dans } \Omega \\ q = 0 \text{ sur } \Gamma_{in} \\ \dfrac{\partial q}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial q}{\partial n} + \alpha \chi q = 0 \text{ sur } \Gamma_{abs} \end{cases} \tag{P'$_\chi$}$$

Algorithme du gradient

L'algorithme du gradient nous amène à considérer :

$$\chi^{(k+1)} = \mathcal{P}_{\ell_k}\left[\chi^{(k)} - \mu_k J'(\chi^{(k)})\right]$$

où $\mathcal{P}_{\ell_k}$ est un projecteur et $\mu_k > 0$ est le taux d'apprentissage.

Si à l'itération $k+1$ nous n'arrivons pas à diminuer l'énergie par rapport à l'itération k, nous divisions par 2 le taux d'apprentissage μ_k et nous recalculons $\chi^{(k+1)}$. Cependant si l'énergie est bel et bien diminuée, alors on ajoute ϵ_3 à μ_k, avec ϵ_3 un réel suffisamment petit.

Algorithme du gradient

Le schéma est bien convergent vers un minimum car à chaque étape l'énergie décroît théoriquement, $\forall k > 0$:

$$\begin{aligned} J(\chi^{(k+1)}) - J(\chi^{(k)}) &= J(\chi^{(k)}) + \langle J'(\chi^{(k)}), -\mu_k J'(\chi^{(k)})\rangle - J(\chi^{(k)}) + o(\mu_k J'(\chi^{(k)}) \\ &= -\mu_k ||J'(\chi^{(k)})||^2 + o(\mu_k J'(\chi^{(k)})). \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \lim_{||\mu_k J'(\chi^{(k)})||_\infty \to 0} \frac{|o(\mu_k J'(\chi^{(k)}))|}{||\mu_k J'(\chi^{(k)})||_\infty} &= \lim_{\mu_k \to 0} \frac{|o(\mu_k J'(\chi^{(k)}))|}{||\mu_k J'(\chi^{(k)})||_\infty} \\ &= \lim_{\mu_k \to 0} \frac{|o(\mu_k J'(\chi^{(k)}))|}{|\mu_k| ||J'(\chi^{(k)})||_\infty^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Projecteur

Objectif : garantir $\chi^{(k+1)}$ dans $[0, 1]$ et $\beta = \int_{\Gamma_{abs}} \chi^{(k+1)} dS$.

- Le projecteur choisi est $\mathcal{P}_\ell(\chi) = \max(0, \min(\chi + \ell, 1))$.

- Comme $\ell \mapsto \int_{\Gamma_{abs}} \max(0, \min(\chi + \ell, 1)) dS$ est croissante, il est possible de faire une dichotomie pour trouver ℓ.

- Les bornes utilisées pour ℓ sont $-\max(\chi)$ et 1 car

$$\int_{\Gamma_{abs}} \max(0, \min(\chi - \max(\chi), 1)) dS = 0$$

et,

$$\int_{\Gamma_{abs}} \max(0, \min(\chi + 1, 1)) dS = 1.$$

Problèmes rencontrés

- Finesse du maillage ;
- Sortie trop précipitée de la grande boucle ;
- Non convergence vers un minimum.

```
χ^(0) ∈ U_ad(β); μ = μ^(0);
for k = 0 : K do
    compute p^(k); q^(k); J(χ^(k)); J'(χ^(k));
    E = J(χ^(k));
    while E ≥ J(χ^(k)) & μ > ε_0 do
        ℓ = 0;
        χ^(k+1) = P_ℓ [χ^(k) − μJ'(χ^(k))];
        while |∫_{Γ_abs} χ^(k+1) dS − β| ≥ ε_1 do
            if ∫_{Γ_abs} χ^(k+1) dS ≥ β then
                ℓ ← ℓ − ε_2;
            else
                ℓ ← ℓ + ε_2;
            end if
            χ^(k+1) = P_ℓ [χ^(k) − μJ'(χ^(k))];
        end while
        compute p^(k+1); J(χ^(k+1));
        E = J(χ^(k+1));
        if E < J(χ^(k)) then
            μ ← μ + ε_3;
        else
            μ ← μ/2;
        end if
    end while
end for
```

Solutions proposées

- Enlever la condition sur μ_k pour sortir des boucles ;
- Rajouter 10^{-3} à μ_k à chaque passage dans la grande boucle ;
- Rajouter un nombre max d'itérations dans la petite boucle.

$\chi^{(0)} \in U_{\text{ad}}(\beta)$; $\mu = \mu^{(0)}$;
for $k = 0 : K$ **do**
  compute $p^{(k)}$; $q^{(k)}$; $J(\chi^{(k)})$; $J'(\chi^{(k)})$;
  $E = J(\chi^{(k)})$;
  while $E \geq J(\chi^{(k)})$ & $\mu > \epsilon_0$ **do**
    $\ell = 0$;
    $\chi^{(k+1)} = \mathcal{P}_\ell \left[\chi^{(k)} - \mu J'(\chi^{(k)})\right]$;
    while $\left| \int_{\Gamma_{\text{abs}}} \chi^{(k+1)} dS - \beta \right| \geq \epsilon_1$ **do**
      if $\int_{\Gamma_{\text{abs}}} \chi^{(k+1)} dS \geq \beta$ **then**
        $\ell \leftarrow \ell - \epsilon_2$;
      else
        $\ell \leftarrow \ell + \epsilon_2$;
      end if
      $\chi^{(k+1)} = \mathcal{P}_\ell \left[\chi^{(k)} - \mu J'(\chi^{(k)})\right]$;
    end while
    compute $p^{(k+1)}$; $J(\chi^{(k+1)})$;
    $E = J(\chi^{(k+1)})$;
    if $E < J(\chi^{(k)})$ **then**
      $\mu \leftarrow \mu + \epsilon_3$;
    else
      $\mu \leftarrow \mu/2$;
    end if
  end while
end for

Analyse des résultats

Afin de développer la meilleure solution pour la réduction de l'intensité sonore, nous avons fait plusieurs études numériques :

- Étude de la géométrie ;
- Étude des matériaux,
- Étude de la quantité de liners
- Étude de la fréquences des ondes à atténuer.

Intervalle de fréquence considéré

Les bruits créés par les moteurs d'avion proviennent de trois sources principalement :

- le ventilateur ;
- la turbine ;
- la combustion.

La combinaison de ces bruits se situe entre 100 Hz et 6 000 Hz. Étant donné que $k = \omega/c = 2\pi f/c$, nous allons donc étudier le problème pour $k \in [1.85\, m^{-1}, 112\, m^{-1}]$.

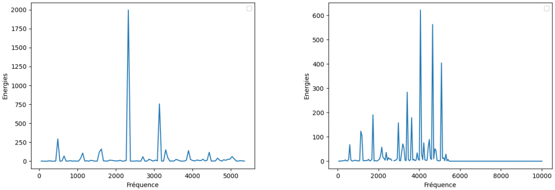
Étude de la géométrie

- On étudie l'efficacité de l'atténuation d'une frontière plane et d'une frontière comportant une fractale de niveau 1, puis 2, puis 3, totalement absorbant ($\beta = 1$).

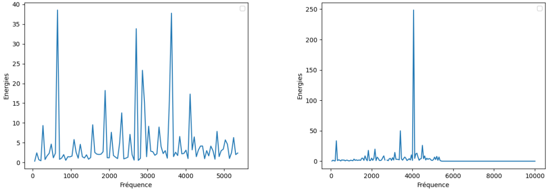
Fractale	Énergie Max	Énergie Moyenne
Niveau 0	16,7	1,2
Niveau 1	5,0	0,94
Niveau 2	3,37	0,75
Niveau 3	3,35	0,6

$\rightarrow$ Les fractales de niveau 2 et 3 sont donc les plus efficaces.

Étude des matériaux



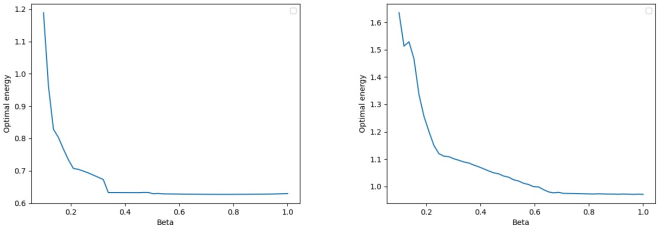
Énergie en fonction de la fréquence avec un matériau réfléchissant ($\alpha = 10 - 0.10j$)



Énergie en fonction de la fréquence avec un matériau absorbant ($\alpha = 10 - 10j$)

Étude de la quantité de matériaux

- On étudie l'efficacité de l'atténuation en fonction de la quantité de matériaux utilisé par le liner afin de trouver le meilleur compromis entre atténuation et coût.

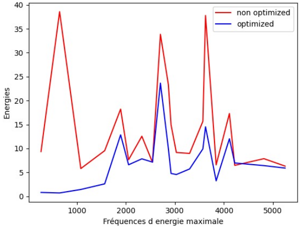


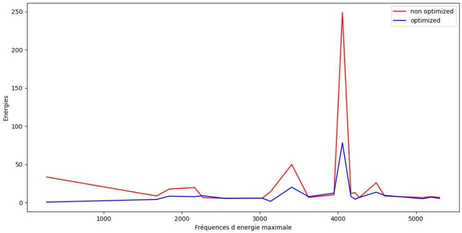
Énergie après optimisation en fonction de β pour la fractale de niveau 2 et 3

Par exemple pour une paroi en fractale de niveau 2, on choisit $\beta = 0.4$.

Étude de la fréquence des ondes à atténuer

- Optimisation des 20 énergies les plus grandes. On obtient les résultats suivants :





Énergie après optimisation en fonction de f pour la fractale de niveau 2 et 3

Optimisation multi-fréquentielle

On cherche maintenant à optimiser pour l'ensemble des fréquences problématiques simultanément. Les modifications dans l'algorithme sont :

- Une nouvelle fonction de coût J ;
- Un nouveau gradient.

Optimisation multi-fréquentielle

La nouvelle fonction de coût ne sera plus l'énergie

$$J(\chi) := \int_\Omega |p_\chi|^2$$

car p_χ est la solution de l'équation de Helmholtz pour une fréquence f bien déterminée. On utilisera plutôt une somme pondérée par la famille (λ_k) des énergies relatives à chaque fréquence considérée :

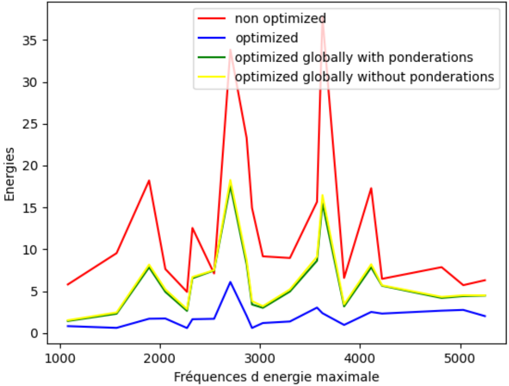
$$J(\chi) := \sum_k \lambda_k \int_\Omega |p_{k_\chi}|^2$$

où k parcourt les fréquences problématiques et p_{k_χ} est la solution de l'équation de Helmholtz pour le nombre d'onde k. Le nouveau gradient devient :

$$J'(\chi) := -\sum_k \lambda_k \mathrm{Re}(\alpha p_k q_k).$$

Optimisation multi-fréquentielle

Comparaison entre les différentes énergies non optimisées et optimisées avec les différentes méthodes :



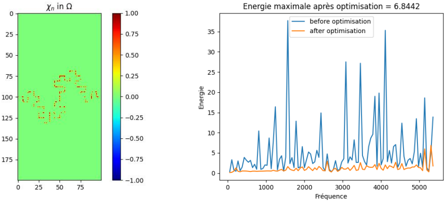
Comparaison entre l'optimisation mono et multi-fréquentielle.

Autre méthode d'optimisation : approche stochastique

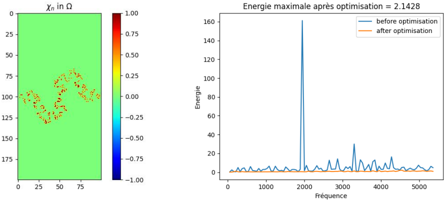
- Méthode hill-climbing : partir d'un χ aléatoire puis explorer itérativement son voisinage pour essayer de trouver une meilleure solution.

- Expérimentalement : peu importe le nombre d'itération, on trouve toujours une solution d'efficacité semblable.

Autre méthode d'optimisation : approche stochastique

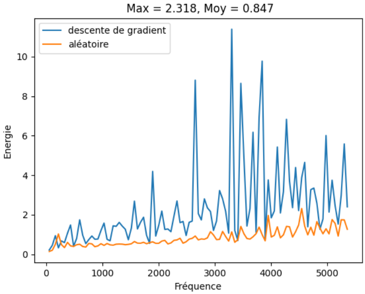


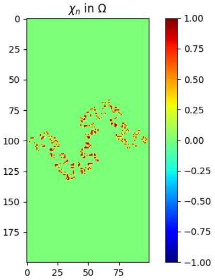
Optimisation stochastique avec fractale de niveau 2



Optimisation stochastique avec fractale de niveau 3

Solution retenue





Comparaison avec l'algorithme de descente de gradient

Solution retenue : Fractale de niveau 3, $\beta = 0,4$, χ aléatoire.

Conclusion numérique

Résumé de notre démarche :

- Implémentation d'un algorithme de descente de gradient ;
- Plusieurs études pour choisir des paramètres adaptés ;
- Comparaison de l'efficacité avec un algorithme stochastique ;

Améliorations possibles :

- Meilleur ajustement des hyperparamètres (learning rate) ;
- Explorer d'autres algorithmes d'optimisation (algorithme génétique...).

Merci !

Bibliographie

[1] C. Grant et E. Talvila. *Elementary numerical methods for double integrals*. BC Canada, 2019. URL : https://arxiv.org/pdf/1905.05805.pdf.

[2] E. Luneville et JF. Mercier. *Mathematical modeling of time-harmonic aerocoustics wtih a generalized impedance boundary condition*. ESAIM, 2014. URL : https://www.esaim-m2an.org/articles/m2an/abs/2014/05/m2an140008/m2an140008.html.

[3] A. Rozanova-Pierrat. *Polycopié du cours de la 2ème année, ST5-57, MDS, "Contrôl des Ondes"*. CentraleSupélec, 2021.