
Travaux Dirigés de Renforcement de Physique Quantique et Statistique

TD 1 - Introduction et Puits Quantiques

Département de Structures, Propriétés et Modélisation des Solides

Auteurs :

Gabriel SEIGNEUR

Edward LUCYSZYN

Remerciements :

Mehdi AYOZ

Harry GILLINGHAM

Hugo HAKEM

Et aux précédents TAs
responsables de ce TD.

1 Résolution de Schrödinger à une dimension

Il s'agit de poser les fondements mathématiques nécessaires pour mieux comprendre et assimiler les concepts de fonction d'onde et de résolution de l'équation de Schrödinger.

1.1 Equations d'ordre 1

Soit l'équation en temps suivante :

$$\frac{df}{dt}(t) = af(t) \quad (1)$$

où $a = -\frac{1}{\tau}$ est une constante réelle ($\tau > 0$).

1) Trouver l'ensemble des solutions de l'équation différentielle. Quelle est la dimension de τ ?

C'est une équation différentielle de premier ordre. On sait que f est de la forme :

$$f(t) = Ae^{at}$$

où A est une constante (dans \mathbb{C} à priori) qui dépend d'une condition initiale (ou d'une condition de normalisation).

τ est homogène à un temps. On l'appelle souvent **temps caractéristique**.

1.2 Équations d'ordre 2

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = b\phi(x) \quad (2)$$

où b est une constante réelle non nulle.

2) Trouver l'ensemble des solutions de l'équation différentielle. On pourra chercher les solutions sous forme exponentielle et distinguer différents cas selon le signe de b .

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre cette équation différentielle du second ordre.

Méthode 1 : Chercher les solutions de la forme $\phi(x) = Ae^{cx}$, $c \in \mathbb{R}$

On cherche les solutions sous forme exponentielle (on admet ce point). Donc,

$$\phi(x) = Ae^{cx}$$

avec c à déterminer. On injecte cette solution dans l'équation différentielle (2) :

$$c^2 Ae^{cx} = bAe^{cx}.$$

En simplifiant par $\phi(x) = Ae^{cx}$ ($A \neq 0$), on obtient : $c^2 = b$.

On distingue ici deux cas :

- Si $b < 0$: on pose $b = (ik)^2$, avec $k > 0$. On a alors l'égalité $c^2 = (ik)^2$ d'où $c = \pm ik$. Il y a donc deux formes de solutions exponentielles, l'une en ikx et l'autre en $-ikx$. Ces deux solutions étant indépendantes, la solution générale pour ϕ est :

$$\phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

- Si $b > 0$: on pose $b = k^2$. On trouve alors $c = \pm k$. Comme précédemment, on trouve deux formes de solutions exponentielles indépendantes, et la solution générale est :

$$\phi = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

Méthode 2 : Passage par l'équation caractéristique

On écrit l'équation (ou polynôme) caractéristique en X associée à l'équation différentielle (2), qui est :

$$X^2 - b = 0 \quad (3)$$

On sait de plus que les solutions à (2) sont de la forme $\psi(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ où $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ sont les racines complexes de l'équation (3).

On distingue alors les cas $b > 0$ et $b < 0$ comme détaillé dans la méthode 1.

1.3 Séparation des variables et Schrödinger

Soit ψ une fonction de deux variables qui vérifie l'équation de Schrödinger à une dimension :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}. \quad (4)$$

On suppose de plus que ψ peut s'écrire sous la forme :

$$\psi(x, t) = \phi(x)f(t). \quad (5)$$

3.a) Simplifier l'équation pour obtenir un terme dépendant uniquement de x et l'autre terme dépendant de t . Que conclure de cette égalité ?

On remarque d'abord que

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi(x)f(t)}{\partial x^2} = f(t)\phi''(x).$$

De même :

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \phi(x)\dot{f}(t).$$

Sachant cela, on réécrit l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f(t)\phi''(x) = i\hbar \phi(x)\dot{f}(t).$$

D'où finalement :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = i\hbar \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}.$$

On obtient une égalité entre une expression ne dépendant que de x et une autre ne dépendant que de t . On conclut donc que l'égalité est nécessairement égale à une constante que l'on note $E \in \mathbb{R}$.

3.b) En déduire les équations différentielles satisfaites par ϕ et f . Donner la dimension et le sens physique de la constante introduite.

La constante E est homogène à une énergie, ce que l'on peut voir en regardant la dimension de l'un des deux termes. Par exemple :

$$[E] = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} \right] = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \right] L^{-2} = \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right] = \left[\frac{p^2}{2m} \right] = \text{Energie}$$

On obtient alors les deux équations différentielles suivantes :

$$\dot{f}(t) = \frac{E}{i\hbar} f(t) \quad (6)$$

$$\phi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \phi(x) \quad (7)$$

3.c) Donner alors la forme générale des solutions pour $\psi(x, t)$ en fonction du signe de la constante introduite.

Il s'agit ici de reconnaître les formes des équations différentielles des questions 1.1 pour l'équation (6), et 1.2 pour l'équation (7). Ainsi

$$f(t) = Ae^{-i\frac{Et}{\hbar}}.$$

— Si E est négatif, (7) devient

$$\phi''(x) = \frac{2m|E|}{\hbar^2} \phi(x)$$

et d'après 1.2 :

$$\phi(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \text{ avec } k^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Finalement :

$$\psi(x, t) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})e^{-\frac{iEt}{\hbar}}.$$

— Si au contraire, E est positif, alors comme on l'a montré à la question 2, la solution va être de la forme $\phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, avec encore $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Finalement :

$$\psi(x, t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-\frac{iEt}{\hbar}}.$$

2 Énergie et longueur d'onde

1) Quelle est l'énergie, exprimée en eV, d'un photon du spectre visible ($0,4 - 0,8\mu\text{m}$) ?

Pour fixer les idées, on prend un photon de $0,5\mu\text{m}$ (cela correspond à la longueur d'onde moyenne dans le domaine du visible).

La relation de Planck-Einstein donne $E = \hbar\omega$. Pour une onde électromagnétique de pulsation $\omega = 2\pi c/\lambda$, on a ainsi :

$$E_{\text{photon}} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \approx 6,626 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times \frac{1}{\lambda} \approx \frac{19,88 \times 10^{-26}}{\lambda} \text{ Joules} \quad (8)$$

On voit tout de suite que le Joule (J) n'est pas l'unité adaptée à ce type de problème. On utilise alors l'électron-volt (eV). Un eV correspond à l'énergie d'un électron dans une différence de potentiel

d'un Volt :

$$E_{\text{photon}} \approx \frac{19,88 \times 10^{-26}}{1,6 \times 10^{-19}} \frac{1}{\lambda [m]} \approx 12,4 \times 10^{-7} \times \frac{1}{\lambda [m]} \quad (9)$$

Pour un photon de $0,5 \mu m$, on trouve alors :

$$E_{\text{photon}} \approx 2,5 \text{ eV} \quad (10)$$

Attention, cette relation dans laquelle nous trouvons que l'énergie est inversement proportionnelle à la longueur d'onde **est propre au photon**, particule de masse nulle car alors $E = pc = \hbar kc = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} c$.

2) Déterminer la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} associée à un neutron de même énergie cinétique que ce photon. Même question pour un électron.

Pour une particule massive telle que le neutron, s'il n'est pas relativiste, on écrit :

$$E_{\text{neutron}} = \frac{1}{2} m_n v^2 = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n} = \frac{\hbar^2 (2\pi)^2}{2m_n} \frac{1}{\lambda^2} \approx 22 \times 10^{-68} \frac{1}{m_n} \lambda^2 \approx 13,1 \times 10^{-41} \times \frac{1}{\lambda^2}$$

et

$$E_{\text{neutron}} [\text{eV}] \approx 8,2 \times 10^{-22} \times \frac{1}{\lambda [m]^2}$$

La longueur d'onde d'un neutron ayant l'énergie du photon est donc :

$$\lambda \approx 1,8 \times 10^{-11} \text{ m}$$

, soit 0,18 Angströms. Pour trouver la longueur d'onde d'un électron (toujours non relativiste), il suffit de remplacer par la masse de l'électron :

$$E_{\text{electron}} \approx 22 \times 10^{-68} \frac{1}{m_e \lambda^2} \approx 2,4 \times 10^{-37} \times \frac{1}{\lambda^2}$$

On trouve $\lambda = 0,7 \text{ nm}$

3 Diffusion thermique dans un cube

L'intérêt de cette partie est de faire l'analogie entre les équations rencontrées avec le puits quantique infini (cf. Section X) et celles de la diffusion thermique dans un solide avec des conditions limites homogènes (cas décrit ci-dessous). Il s'agit dans les deux cas :

- De résoudre des équations dites "de transport" ;
- D'observer une quantification des solutions, i.e. des modes propres pour la propagation de la température dans un cas ou de la probabilité de présence dans l'autre.

On considère un solide de hauteur infinie selon \vec{e}_y et de largeur L selon \vec{e}_x dans un liquide supposé infini à la température T_f , supposée constante et uniforme.

On cherche à déterminer l'allure de la température $T(x, t)$ dans le solide en fonction de la position x et du temps t . L'équation différentielle satisfaite par $\theta(x, t) = T(x, t) - T_f$ est **l'équation de la chaleur**. Elle est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla^2 T \quad (11)$$

où $D = \frac{\lambda}{\rho c_P}$ est la diffusivité thermique du solide, avec λ sa conductivité thermique, ρ sa masse volumique, c_P sa capacité thermique massique à pression constante.

1. (a) En utilisant la méthode de résolution par séparation des variables, proposer une forme de la solution de l'équation (8) et écrire les équations indépendantes du temps et de l'espace respectivement. Donner la dimension de la constante introduite qu'on appellera K .

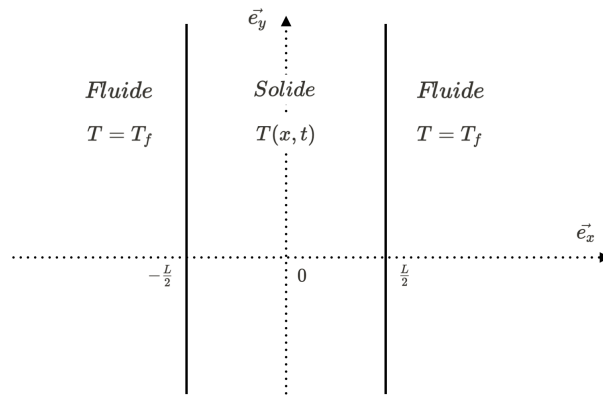


FIGURE 1 – Schéma du Problème

$\theta(x, t) = f(x)g(t)$. Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} g'(t) - Kg(t) = 0 \\ f''(x) - \frac{K}{D}f(x) = 0 \end{cases}$$

Avec $K \in \mathbb{R}$ une constante à déterminer.

- (b) Donner les conditions limites satisfaites par $\theta(x, t)$.

$$\theta(\pm L/2, t) = 0$$

2. Donner la forme générale de la solution de l'équation indépendante du temps. Quel est le signe de K ?

$g(t) = Ae^{Kt} + B$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. On a nécessairement $K < 0$ pour que la solution ne diverge pas.

3. (a) Donner la forme générale de la solution de l'équation indépendante de l'espace.

$$f(x) = C \cos(\sqrt{\frac{-K}{D}}x) + E \sin(\sqrt{\frac{-K}{D}}x), \text{ avec } C, E \in \mathbf{R}$$

- (b) Simplifier cette expression à l'aide du fait que le problème est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$.

$$f(x) = C \cos(\sqrt{\frac{-K}{D}}x)$$

- (c) À l'aide des conditions limites obtenues à la question 1.b, donner les valeurs autorisées pour K .

On note l'apparition de modes propres, i.e. de valeurs discrètes autorisées pour la constante K_n . On a en effet $\theta(\pm L/2, t) = 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{\frac{-K}{D}} \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{-K}{D}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow K_n = -\frac{D\pi^2}{L^2}(2n+1)^2$

- (d) Que dire sur la forme générale de $\theta(x, t)$?

Les modes propres de la forme $f_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\frac{-K_n}{D}}x)$ sont tels que $\theta_n(x, t) = A_n e^{K_n t} \cos(\sqrt{\frac{-K_n}{D}}x)$. La solution générale est donc une somme infinie de ces modes propres : $\theta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{K_n t} \cos(\sqrt{\frac{-K_n}{D}}x) = \theta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{D\pi^2}{L^2}(2n+1)^2 t} \cos(\frac{\pi}{L}(2n+1)x)$

4. Poussons l'analogie un peu plus loin.

- (a) Quelle est la signification physique de K_n ? Dans le cas du puits infini, à quelle grandeur se compare K_n ?

K_n est la constante de temps caractéristique de la décroissance exponentielle de la température dans le mode propre n . Dans le cas du puits quantique infini, $K_n \propto \frac{E_n}{\hbar}$, où E_n est l'énergie du mode propre n .

- (b) Comment peut-on définir l'équivalent de la diffusivité thermique D dans le cas du puits quantique infini? Peut-on en donner un sens physique?

On peut définir une "diffusivité quantique" $D_q = -i \frac{\hbar}{2m}$, où m est la masse de la particule. Cette quantité n'a pas de sens physique, mais permet de retrouver l'expression des modes propres du puits quantique infini.

4 Fonctions d'onde, Energies et Observables

Pour la suite du TD, nous allons essayer de visualiser des fonctions d'ondes et leurs énergies associées dans le cas du puits infini, en rappelant et développant des points qui ont été abordés en cours.

Rendez vous sur : <http://prd-mecaqu.centralesupelec.fr/FR/ex1.html>.

Consigne : Décocher la case "Afficher la probabilité".

Nous redonnons les fonctions d'ondes et les énergies d'une particule dans un puits de potentiel infini, que vous avez établies au TD 2 de Physique :

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}x\right) \quad \text{et} \quad E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}. \quad (12)$$

4.1 Fonction d'onde et densité de probabilité

- 1.a)** Exprimer en fonction de ϕ_n la probabilité de trouver la particule sur le tronçon $[x, x+dx]$.

Par définition de la densité de probabilité :

$$dP = |\phi_n(x)|^2 dx.$$

- 1.b)** Donner la probabilité de trouver la particule en dehors du puits infini P_1 , et celle de la trouver dans le puits P_2 , i.e. entre $[0, a]$. On rappelle que $\int_0^b \sin^2(x) dx = \frac{b}{2} - \frac{\sin(2b)}{4}$.

On a donc, en dehors de $[0, a]$:

$$P_1 = \int_{\mathbb{R} \setminus [0, a]} |\phi_n(x)|^2 dx = 0$$

car $|\phi_n(x)|^2 = 0$.

Puis,

Soit

$$P_2 = 1.$$

C'est un résultat c

ne peut pas la trouvée en dehors. Ainsi elle n'existe que dans $[0, a]$ et donc $P_2 = 1$.

4.2 Conditions aux limites

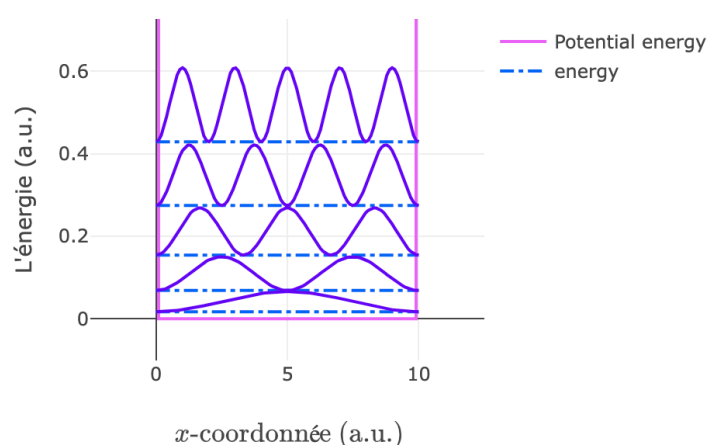
2.a) Aux vues des conditions sur la densité de probabilités trouvées ci-dessus, donner les conditions aux limites du puits pour la fonction d'onde ϕ_n .

Comme vu pendant le cours, on a :

$$\phi_n(0) = 0 \text{ et } \phi_n(a) = 0.$$

2.b) Sur le site, se rendre dans la partie fonction d'onde. Que remarquez vous sur la dérivée de ϕ_n aux limites du puits ?

Profil d'énergie potentielle



On remarque que ϕ'_n semble ne pas être continue aux discontinuités du potentiel, *i.e.* en $x = 0$ et $x = a$. Il y a une discontinuité de la dérivée de la fonction d'onde aux limites du puits. Voir par exemple qu'augmenter la largeur fait diminuer l'énergie pour un mode donnée.

Règle générale : c

nue sur les discontinuités infinies.

2.c) Retrouver mathématiquement que la discontinuité de la dérivée de ϕ_n (calcul de $\phi'_n(0+)$ et conclure).

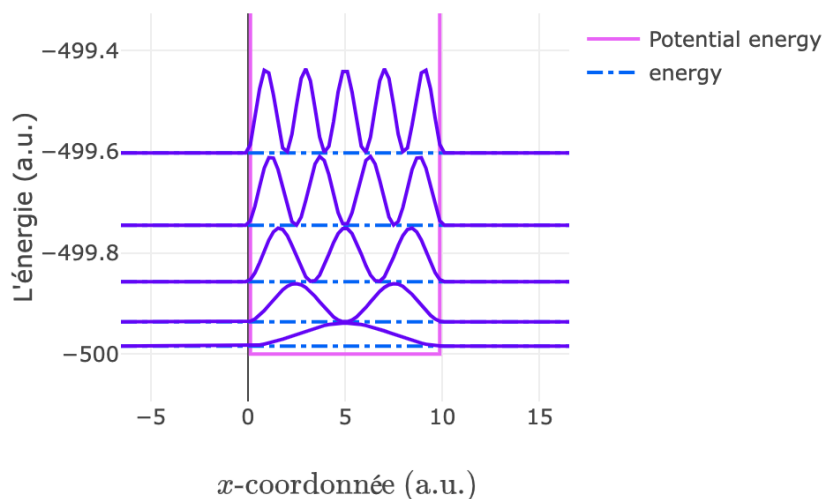
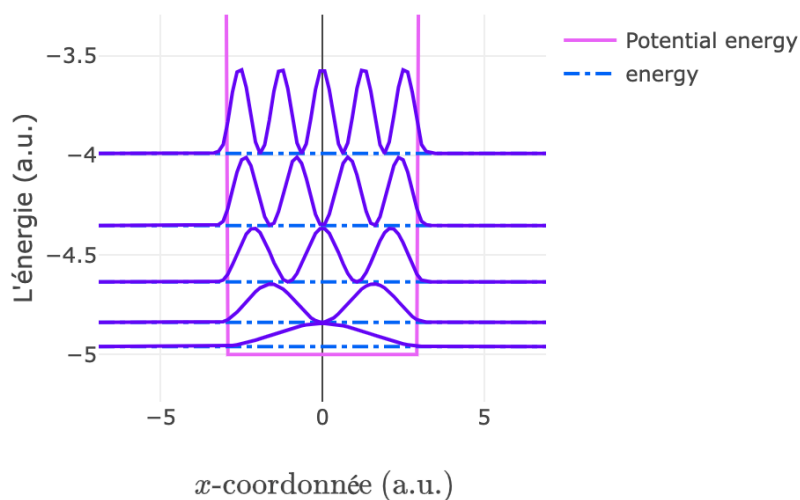
On a

$$\phi'_n(x) = \sqrt{\frac{4mE_n}{a\hbar^2}} \cos\left(\sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}x\right).$$

Donc,

2.d) Changer et passer en mode "potentiel carré" et voir ce qui s'est modifié.

Profil d'énergie potentielle



On remarque que la condition de nullité sur les bords n'est plus respectée. Pour comprendre d'ondes sont presque les mêmes que dans le cas du puits infini. En particulier, les fonctions maintenant à $V_0 = 5$, on remarque que la condition de nullité aux bords n'est plus respectée. ce sont des exponentielles réelles décroissantes (faire le lien avec les deux types de solutions bords des fonctions d'ondes est maintenant continue.

concrètement la tr d'ondes sont nulle En fait, à l'intérieur trouvées dans l'ex

Pour comprendre ce qu'il se passe lorsque le puits est fini, on se place sur la partie des $x > 0$. On considère alors une particule d'énergie E venant des $x < a$. Elle rencontre une barrière de potentiel

$U_0 > E$ en $x = a$.

2.e) Déterminer la forme des fonctions d'onde $\psi(x, t) = \phi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ pour $x > a$.

On applique l'équation de Schrodinger à $\psi(x, t) = \phi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$. Pour $x > a$, il faut prendre en

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + U_0 \psi(x, t)$$

pour ϕ :

$E - U_0 < 0$; donc d'après 1.2, en posant $k_2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}$, on obtient une solution de la

La solution ne pouvant pas diverger en $+\infty$, on a nécessairement $D=0$, on obtient ainsi la

La solution est une onde évanescence : c'est une onde qui ne se propage pas et qui est décrois-

compte le potentie

En appliquant le m

forme :

solution suivante :

sante.

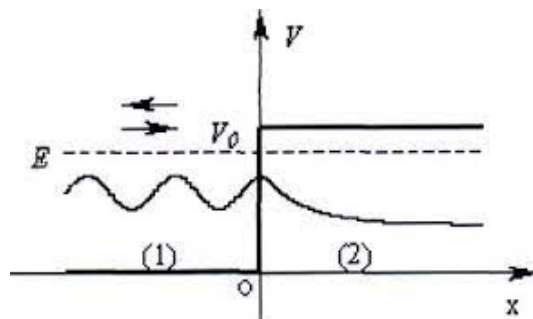


FIGURE 2 – Onde évanescence

$$\phi(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right).$$

$$\phi(x) = F e^{k_2 x}.$$

$x = a$ (voir TD 3 microscope à effet tunnel).

Remarque : Dans

Pour $x < 0$, on ob

Pour déterminer A

4.3 Inégalité d'Heisenberg (Bonus)

3.a) Rappeler l'inégalité d'Heisenberg en redéfinissant les deux termes mis en jeu.

L'inégalité d'Heisenberg, ou principe d'incertitude, s'écrit :

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Et de manière générale, pour tout opérateur A :

$$\langle A \rangle_\psi = \int \psi^* A \psi dP.$$

On rappelle que

3.b) Calculer $\langle X \rangle_{\phi_n}$ en utilisant les fonctions d'ondes du puit quantique infini.

On a que

$$\begin{aligned}
 \langle X \rangle_{\phi_n} &= \int_0^a \phi_n^* x \phi_n dx \\
 &= \int_0^a \frac{2}{a} x \sin^2 \left(\sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}} x \right) dx \\
 &= \int_0^a \frac{2}{a} x \sin^2 \left(\sqrt{\frac{n\pi}{a}} x \right) dx \\
 &= \frac{2a}{n^2 \pi^2} \int_0^{n\pi} X \sin^2(X) dX.
 \end{aligned}$$

En faisant le chan

On calcule à par

née aux étudiants) :

$$\begin{aligned}
 \int_0^b x \sin^2(x) dx &= \int_0^b x \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) dx \\
 &= \left[x \frac{1 - \cos(2x)}{2} \right] - \int_0^b x - \frac{1}{2} \sin(2x) dx \\
 &= \frac{b^2}{2} - \frac{b}{4} \sin(2b) - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right] \\
 &= \frac{b^2 - b \sin(2b) + \frac{1 - \cos(2b)}{2}}{4}.
 \end{aligned}$$

Finalement :

3.c) Vérifier sur le site que l'inégalité est vérifiée.

Sur le site, aller dans l'onglet "Observables" en bas de page, puis choisissez dans le menu déroulant "Princip

3.d) Discuter de l'interprétation physique de cette inégalité en la rapprochant de son appellation de principe d'incertitude.

Cette inégalité montre qu'il existe une limite théorique à la précision avec laquelle il est possible de conna

Pour aller plus loin...

5 ...Sur les ordres de grandeur

1) Considérons un gaz monoatomique, ^4He par exemple, à la température ambiante. Les particules sont libres et on montrera plus loin dans ce cours que l'énergie cinétique moyenne par atome est $\frac{3}{2}k_B T$. Quelle est la longueur d'onde λ_{dB} associée à chacun de ces atomes du gaz ?

2) Sachant que la densité du gaz est environ $n = 10^{24}$ atomes. m^{-3} (pression proche d'une atmosphère), comparer la longueur d'onde obtenue à la distance moyenne entre atomes, \bar{d} .

3) Que se passe-t-il si la température est amenée à 10^{-6} K comme le permet la technique de refroidissement par LASER (Nobel 1997) ? Montrer que la condition $\lambda_{dB} \ll \bar{d}$ est une condition essentielle pour que la physique classique soit encore applicable.

Calculons déjà l'énergie caractéristique correspondant à la température ambiante. Cette valeur sera souvent J, soit $2,6 \times 10^{-2}$ eV. On retiendra donc approximativement $k_B T \approx 1/40$ eV à température ambiante. De ce fait	
En utilisant le résultat de la question précédente :	
$E_{He} = \frac{\hbar^2 (2\pi)^2}{2m_{He}} 1\lambda_{dB}^2$	et $m_{He} = 4 \times$
0,745 Angströms.	
De manière à pouvoir comparer ce résultat à une longueur caractéristique du système, estimons maintenant m^{-3} ; on en déduit une distance moyenne de l'ordre de $\approx n^{-1/3} \approx 10^{-8}$ m.	
Le fait que $\lambda_{dB} \bar{d}$ signifie qu'il sera en moyenne très difficile d'observer un quelconque effet d'interférences entre ce que les effets quantiques soient alors négligeables. Il existe plusieurs critères permettant de décider si la physique d'un système particulier (cf. cours de PQS 1A). On peut remarquer que c'est que la masse est plus importante que pour un simple électron mais aussi que l'énergie thermique n'est pas suffisante pour refroidir considérablement ce gaz, donc de le ralentir. L'énergie disponible est maintenant environ 10^{-8} fois l'énergie, elle sera elle-même 10^4 fois plus grande et de l'ordre de 10^{-7} m. Elle n'est donc plus du tout négligeable d'interférences peuvent alors devenir observables. À ces très basses températures, la physique quantique devient	

6 Effet photo-électrique

Le zinc est un des métaux utilisés dans l'expérience de Von Lenard pour mettre en évidence l'effet photo-électrique. Le travail de sortie d'un électron du zinc, c'est-à-dire l'énergie qu'il faut fournir pour libérer cet électron du potentiel attractif des ions du métal, est d'environ 4,3 eV. En illuminant le zinc avec un rayonnement de longueur d'onde $\lambda \approx 200$ nm (UV lointain) et de puissance 1 mW, quelle est la puissance maximale portée par le faisceau électronique ?

À une longueur d'onde de $\lambda \approx 200$ nm, l'énergie de chaque photon est de l'ordre de $12400/2000 \approx 6,2$ eV. Pour une puissance de 1 mW, il y a alors $10^{-3}/(6,2 \times 1,6 \times 10^{-19}) \approx 10^{15}$ photons/s incidents sur l'atome de zinc et sert à l'éjection d'un électron, on peut s'attendre à ce qu'il y ait aussi environ 10^{15} électrons éjectés par seconde. L'énergie cinétique est bien inférieure puisque 4,3 eV a chaque fois été dépensé pour libérer l'électron. Chacun ne peut donc répartir mieux une puissance de l'ordre $2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 10^{15} \approx 0,3$ mW.	
---	--

7 Corps noir et déplacement de Wien

1) A la limite des petites longueurs d'onde, montrer que la distribution de Planck possède un maximum à la longueur d'onde λ_{\max} de telle sorte que $\lambda_{\max} T = C$ où la valeur de C dépend de la constante de Planck h .

À la limite des petites longueurs d'onde, la distribution de Planck (ou loi de Planck) s'écrit :	Ainsi, on obtient
$dU \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5} e^{-hc/(\lambda k_B T)} d\lambda$	

2) Utiliser la valeur expérimentale $C = 2.9$ mm.K pour en déduire une valeur approchée de h .

Le produit de λ_{\max} et T est effectivement une constante C qui vaut $C = h \times 0,434 \times 10^3$ m.K. Ce résultat permet de trouver une valeur approchée de $h \approx 6,68 \times 10^{-34}$ J.s	
---	--

8 Prédiction de Kapitza-Dirac

En 1933 Kapitza et Dirac proposent que la diffraction d'un faisceau d'électrons par un réseau constitué d'ondes électromagnétiques stationnaires puisse être observée. Parce que ceci repose sur le processus d'émission stimulée, ils préoyaient que la probabilité d'un tel processus devait être très faible et nécessiterait une source de lumière très intense pour accroître l'interaction électrons-photons. En effet, ce tour de force technique dut attendre 70 ans et l'avènement de lasers très puissants. Figure ??, résume le principe de l'expérience et ses résultats.

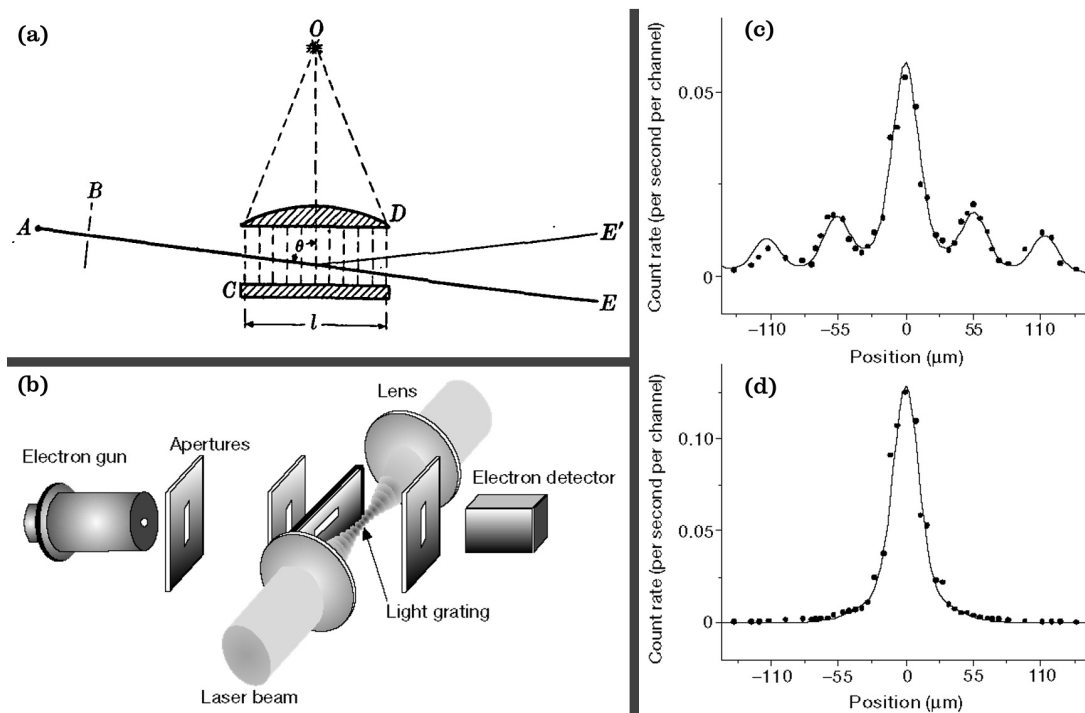


FIGURE 3 – Diffraction de particules massives par des ondes électromagnétiques stationnaires. (a) Principe tel qu'exposé dans la publication de Kapitza et Dirac (1933). Les électrons sont émis en A et détectés en E' lorsque le réseau est créé entre la lentille en D et le miroir en C. Lorsque la lumière est éteinte les particules doivent être détectées en E. (b) Dispositif expérimental par Freimund et collaborateurs. (c) Les franges d'interférence telles que vues par le détecteur à une distance de 24 cm du réseau. L'abscisse fait référence à la position du détecteur. (d) Signal détecté lorsque l'onde électromagnétique est éteinte. Tiré de Nature, "Observation of the Kapitza-Dirac effect", Freimund, Kayvan, Aflatooni and Batelaan, © 2001.

Les électrons ont une énergie d'environ 380eV. Quelle est la longueur d'onde λ_e du faisceau électronique incident ?

La longueur d'onde est $\lambda_e = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{2m\epsilon_e}} \approx 0,6$ Angströms.

1) Le faisceau laser possède une longueur d'onde $\lambda_\nu = 532$ nm. Quelle est l'énergie des photons ? De manière à atteindre une puissance élevée, le laser doit opérer avec des pulses de 10 ns, chacun portant 0,2 J. Quel est le flux de photons si le faisceau possède un diamètre $125\mu\text{m}$?

L'énergie du photon est $\epsilon_\nu = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_\nu} \approx 3,7 \times 10^{-19} \text{ J} \approx 2,3 \text{ eV}$. La densité de puissance du LASER est $\frac{0,2 \text{ J}}{10 \times 10^{-9} \text{ s}} = 2 \times 10^7 \text{ W/m}^2$. Le flux de photons est $\frac{2 \times 10^7 \text{ W/m}^2}{3,7 \times 10^{-19} \text{ J}} \approx 5,4 \times 10^{25} \text{ photons/(m}^2\text{s)}$.

2) Justifier la présence d'un pic de diffraction de premier ordre à $55\mu\text{m}$ en utilisant la loi de diffraction $d \sin \theta = n\lambda$, où d est la période du réseau, λ la longueur d'onde du rayonnement incident et θ l'angle de diffraction.

Le quadrillage de lumière (i.e. réseau à deux dimensions) est créé par l'intensité de la radiation diffractée	} radiation diffractée	
utilisant la loi de diffraction pour le premier ordre ($n = 1$), on trouve que l'angle correspondant		} au premier pic de
premier maximum est placé à $x_1 = 0,226 \times 10^{-3} \times 0,24 \approx 54\mu\text{m}$.		