

ST7 : MODÉLISATION DES RISQUES FINANCIERS

CENTRALESUPÉLEC - 2A

BNP Paribas Asset Management

Rapport de projet

27/03/2024



CentraleSupélec

Auteurs :

Hugo JUPIN

Chahine NEJMA

Yecine KTARI

Julius GRAF

Edward LUCYSZYN

Table des matières

1	Introduction, Description du Data set et Exploration des données	2
1.1	Introduction	2
1.2	Description du Data set	2
1.3	Exploration des données et S&P	2
2	Description des méthodes utilisées et hypothèses choisies	6
2.1	Markowitz	6
2.1.1	Principes fondamentaux de l'optimisation de portefeuille	6
2.1.2	Le modèle de Markowitz	6
2.1.3	Estimation des paramètres du modèle	7
2.1.4	Présentation des Résultats	7
2.1.5	Effet de la variance admissible	7
2.1.6	Critiques et améliorations du modèle	9
2.2	Contrainte "soft" de coût de transaction	10
2.2.1	Définition du modèle	10
2.2.2	Analyse de la fonction d'utilité modifiée	10
2.2.3	Comparaison des pénalités	10
2.2.4	Analyse de performance	11
3	Analyse et interprétation des résultats	13
3.1	Différentes mesures de risques	13
3.1.1	Expected Shortfall (ES)	13
3.1.2	Entropic Value at Risk (EVaR)	13
3.2	Analyse des résultats	14
3.2.1	Comparaison entre les différentes stratégies	14
3.2.2	Analyse de l'influence du coût de transaction	14
4	Conclusions & Perspectives	18

Chapitre 1

Introduction, Description du Data set et Exploration des données

1.1 Introduction

Un portefeuille est une collection d'actifs financiers. Les poids ω_i^t représentent la proportion de chaque actif i dans le portefeuille au temps t , avec donc la contrainte $\sum_{i=1}^n \omega_i^t = 1$.

L'objectif de ce projet est de mettre en place un "portefeuille optimal", c'est-à-dire une stratégie de construction des ω_i^t qui optimise certains critères choisis, tels que le rendement ou le risque.

1.2 Description du Data set

Les données utilisées sont tirées de Yahoo Finance en Python. Dans tout le projet, on utilise les prix de clôture ajustés ("*Adj Close*") des actifs financiers. Les prix sont journaliers, mais nous "actualiserons" les ω_i^t et les secteurs de nos actifs (stratégie que nous détaillerons plus loin) de façon mensuelle.

L'indice S&P (Standard & Poor's) est un indicateur de référence pour le marché boursier américain, représentant les performances des 500 plus grandes entreprises. Il peut être vu comme un portefeuille diversifié, offrant une vue globale de l'économie américaine. Il représente la stratégie de base à laquelle nous comparerons nos portefeuilles.

Dans tout le projet, excepté pour le calcul du S&P, nous nous limitons aux 150 actifs les plus représentés dans le S&P. Nous déterminons la fenêtre fixe d'étude de nos stratégies (excepté pour la présentation du S&P qui suit) du 1^{er} janvier 2015 au 31 décembre 2023.

1.3 Exploration des données et S&P

On calcule l'indice S&P par combinaison linéaire des rendements (calculés à partir des prix) des 500 actifs de l'indice en utilisant les poids actualisés mensuellement. Pour pallier aux "trous" dans les données, caractérisés par des "NaN", nous avons utilisé deux stratégies.

Lorsque l'on est confronté à une longue série temporelle de "NaN" sur le prix d'un actif, cela signifie a priori que celui-ci n'était pas sur le marché avant une certaine date. Nous avons donc mis son rendement sur cette période à 0 car le poids valait de toute façon 0 à ce moment, ne changeant donc pas le calcul.

Lorsqu'il y a un seul "NaN" au milieu de la série temporelle, celui-ci est a priori une simple anomalie. Nous fixons alors sa valeur à celle du jour précédent.

Nous avons profité de cet exercice pour mettre en place une routine à travers une fonction "pipeline" qui prend en entrée la période considérée (date de début et fin) ainsi que les tickers des actifs que l'on veut et retourne la matrice des rendements, de la variance et de la covariance.

Le premier graphique représentant l'indice S&P donne :

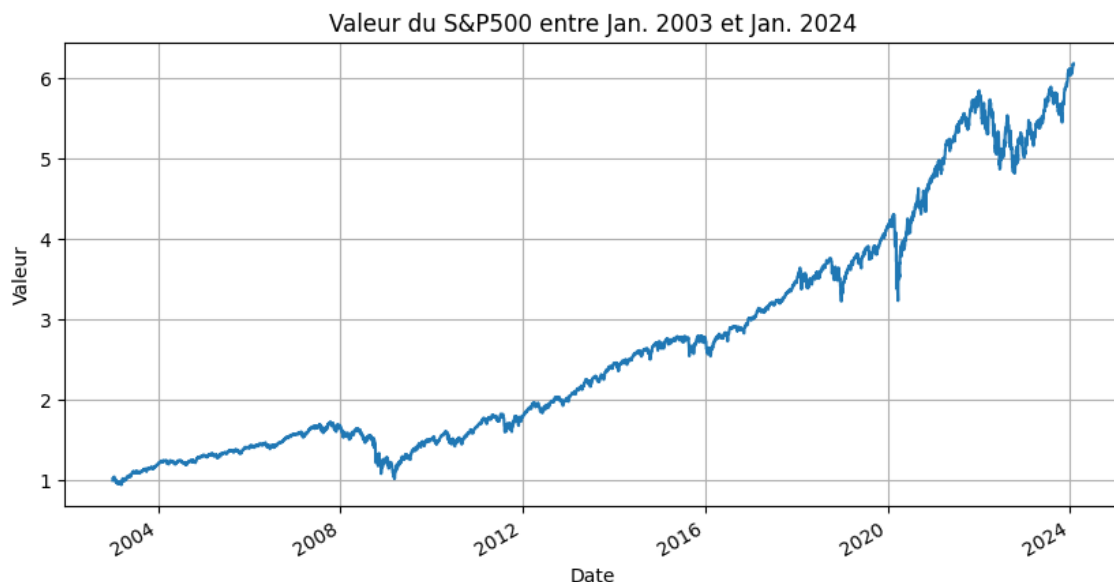


FIGURE 1.1 – Indice S&P entre 2003 et 2024 avec un prix initial à 1

Cette courbe offre un aperçu de l'économie américaine. En effet, les chutes de l'indice en 2008 et 2020 correspondent aux crises survenues aux États-Unis à ces moments-là (respectivement la crise des subprimes et celle du Covid-19). De même, avant 2008, l'économie américaine était plutôt stagnante, et l'indice augmentait alors très peu. Après 2008, l'économie américaine a connu une expansion significative, entraînant une forte croissance de l'indice.

Malgré la pertinence de cet indice pour nous donner une idée de la santé de l'économie américaine au fil du temps, celui-ci masque de grandes disparités et nuances. En regroupant les actifs par secteur d'activité et en traçant les rendements de chacun tout en conservant les poids relatifs de chaque actif, nous pouvons mieux appréhender ces nuances.

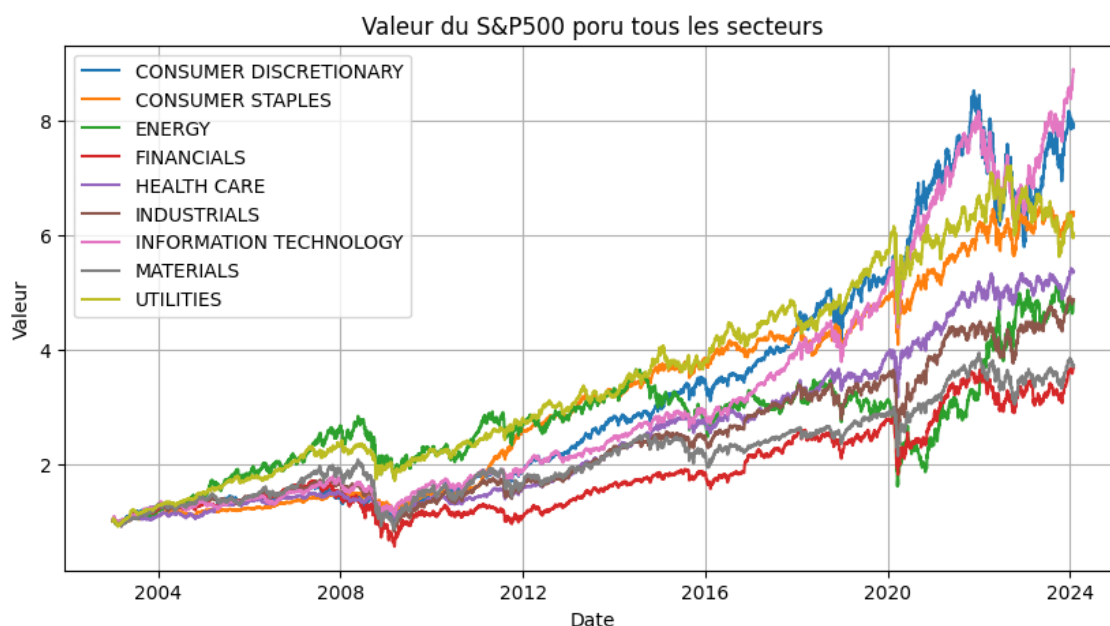


FIGURE 1.2 – Indice "S&P" séparé par secteur entre 2003 et 2024 avec un prix initial à 1

Ce graphique met en évidence les différences entre les différents secteurs en termes d'évolution des prix et de stabilité. Dans les cas les plus extrêmes, sur une période de 20 ans, le prix des actifs du secteur "Financials" a été multiplié par 4, tandis que sur la même période, celui des actifs du secteur "Information Technologie" a été multiplié par 16. En ce qui concerne la "résistance aux crises", le secteur "Financials" a connu une récession marquée en 2008, alors que celle-ci était beaucoup moins prononcée dans le secteur "Utilities".

Précédemment, nous avons parlé des crises économiques générales et de leur impact sur le S&P. Cependant, les différents secteurs connaissent des crises qui ne les touchent que spécifiquement, et celles-ci peuvent être plus ou moins fréquentes en fonction du secteur (qui est plus ou moins à risque).

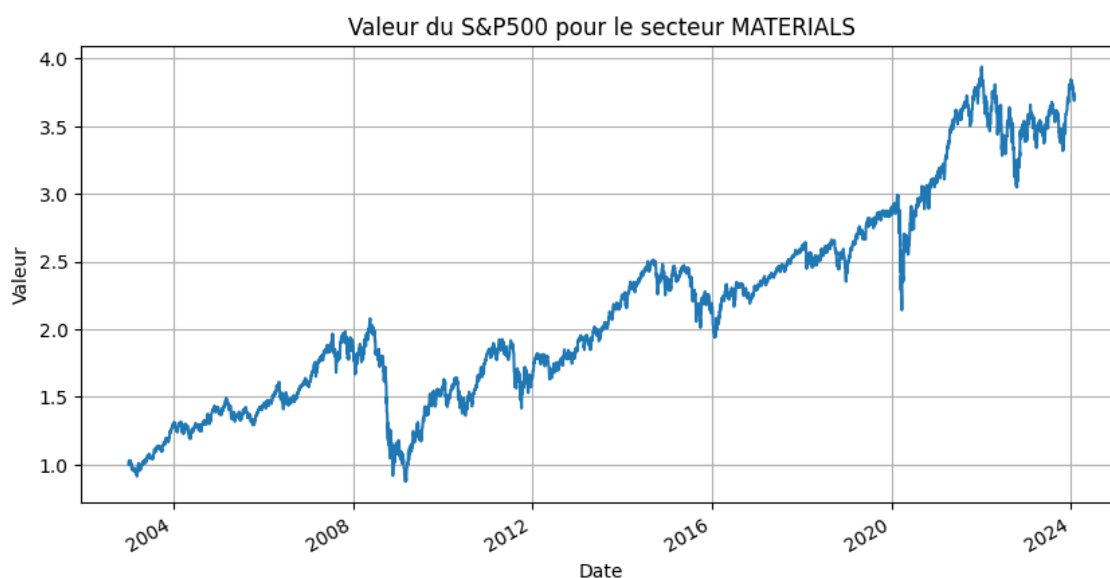


FIGURE 1.3 – Indice "S&P Materials" entre 2003 et 2024 avec un prix initial à 1

L'exemple ci-dessus concernant le secteur "Materials" illustre ce point. Malgré une période générale d'expansion économique aux États-Unis entre 2009 et 2020, celui-ci a connu des périodes de faiblesse en 2012 et 2016.

Tout comme le S&P, le S&P par secteur peut être considéré comme un portefeuille. Ce travail préliminaire nous a permis d'avoir des intuitions pour la construction de nos portefeuilles. Nous visons un portefeuille offrant un bon rendement tout en étant le plus résistant aux risques possibles. Nous utiliserons le S&P comme base de comparaison sur la période mentionnée en introduction.

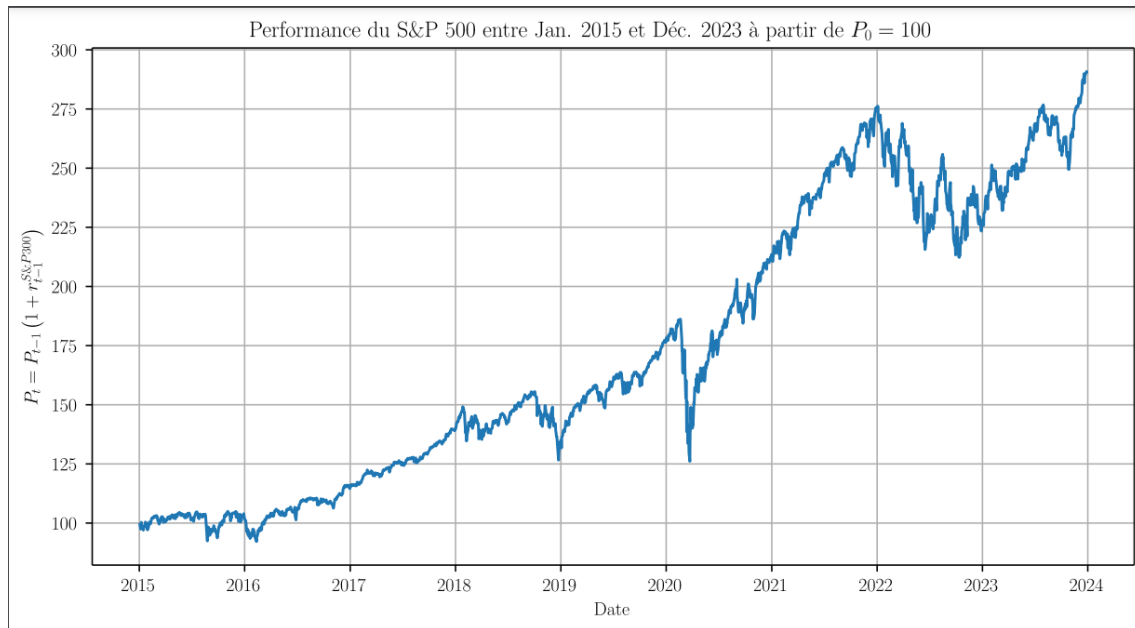


FIGURE 1.4 – Indice S&P 2015 et 2024 avec un prix initial à 100

Enfin, pour l'étude de l'évolution des portefeuilles sous divers stratégies, nous avons utilisé le module RISKFOLIO qui marche avec Python [1].

Chapitre 2

Description des méthodes utilisées et hypothèses choisies

2.1 Markowitz

2.1.1 Principes fondamentaux de l'optimisation de portefeuille

Harry Markowitz, dans son modèle d'optimisation de portefeuille, a introduit une approche quantitative pour l'allocation d'actifs qui cherche à équilibrer le rendement et le risque en prenant en compte la corrélation des rendements des actifs. La théorie repose sur l'hypothèse selon laquelle les investisseurs sont averses au risque et cherchent à maximiser leur utilité, c'est-à-dire le rendement ajusté au risque de leur portefeuille d'investissement.

2.1.2 Le modèle de Markowitz

Le modèle vise à sélectionner les proportions d'actifs dans un portefeuille afin de maximiser le rendement attendu pour un niveau de risque donné, ou, alternativement, à minimiser le risque pour un niveau de rendement attendu. Le problème d'optimisation peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} & \underset{\omega}{\text{maximiser}} && \omega^\top \bar{\mu} \\ & \text{soumis à} && \omega^\top \bar{\Sigma} \omega \leq \sigma_{\max}^2, \\ & && \omega^\top \mathbf{1} = 1, \\ & && \omega \geq 0. \end{aligned}$$

où :

- ω représente le vecteur des poids des actifs dans le portefeuille ;
- $\bar{\mu}$ est le vecteur des rendements attendus des actifs ;
- $\bar{\Sigma}$ est la matrice de covariance ;
- σ_{\max}^2 est la variance maximale acceptable pour l'investisseur ;
- $\mathbf{1}$ est un vecteur de 1.

2.1.3 Estimation des paramètres du modèle

Les rendements attendus, $\bar{\mu}$, sont généralement estimés en utilisant des moyennes historiques, et la matrice de covariance, $\bar{\Sigma}$, est calculée à partir des rendements passés. Pour affiner ces estimations, la période considérée a été variée : nous avons adopté deux techniques différentes, l'une basée sur des prévisions mensuelles pour assurer une gestion réactive en période de crise et l'autre s'étalant sur une période de deux ans pour maximiser les rendements tout en réduisant le bruit statistique affectant nos modèles.

2.1.4 Présentation des Résultats

Les analyses précédentes offrent un aperçu théorique des méthodes utilisées pour la gestion de portefeuille en suivant l'approche de Markowitz. Les performances du portefeuille ont été évaluées en prenant en compte la volatilité des actifs. Nous présentons ci-dessous les rendements mensuels et la croissance de la valeur du portefeuille, calculés à partir des données historiques allant de janvier 2015 à décembre 2023. Des graphiques sont utilisés pour illustrer l'évolution du portefeuille au fil du temps et pour comparer l'impact des différents niveaux de contraintes de coût de transaction sur la performance globale.

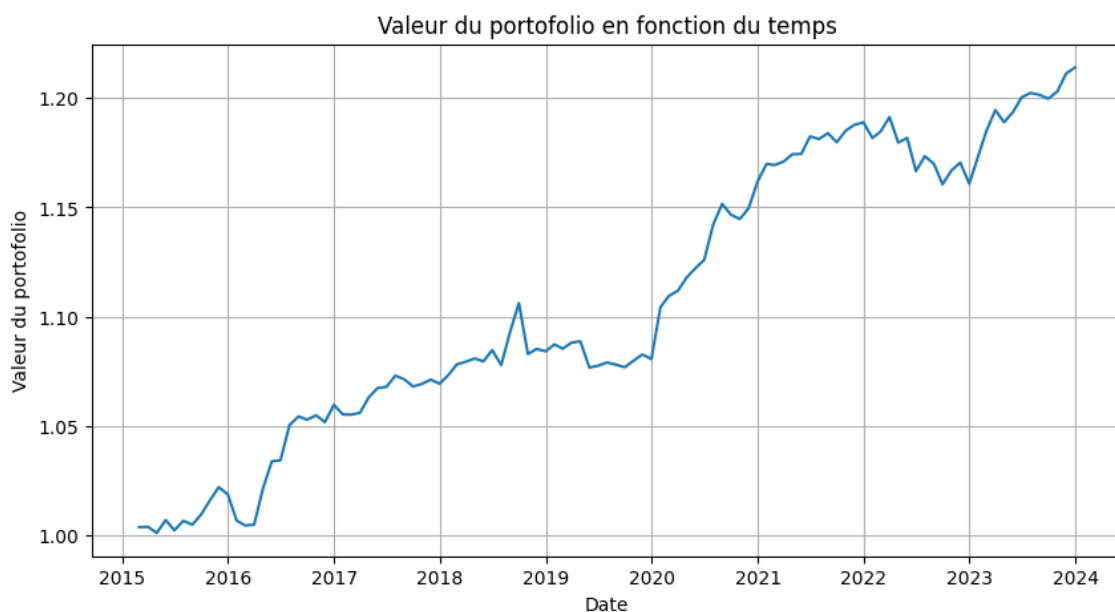


FIGURE 2.1 – Allocation du Portefeuille pour un risque de $\sigma_{max}^2 = 0.1$

Sur la Figure 2.1, on constate que pour un prix commençant à 1.00, celui-ci atteint un peu plus de 1.20 au bout de 9 ans, soit une augmentation d'un peu plus de 20%. De-même pour la Figure 2.2, les retours sont la majorité du temps positifs. Enfin, la Figure 2.3 montre que le portefeuille se base sur une dizaine d'entreprises pour la quasi-totalité de son portefeuille.

2.1.5 Effet de la variance admissible

Comme le montre la Figure 2.4, la variance maximale admissible constitue une limite à la performance théorique, engendrant ainsi la courbe de la frontière efficace que nous illustrons ci-après. Il est important de souligner que les rendements théoriques potentiels du

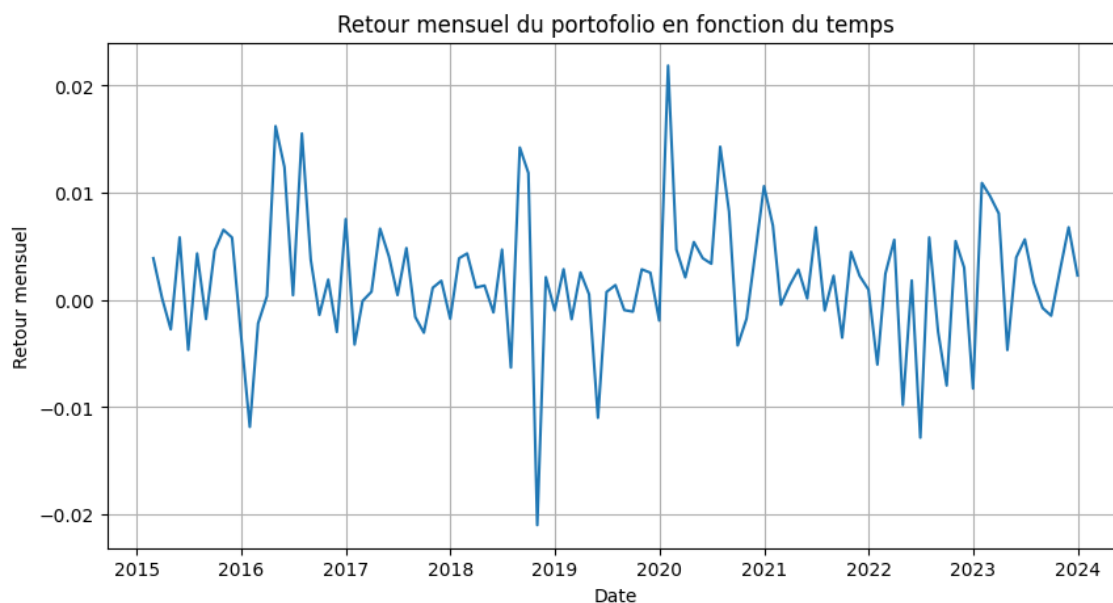


FIGURE 2.2 – Rendements mensuels du portefeuille en fonction du temps pour un risque de $\sigma_{max}^2 = 0.1$

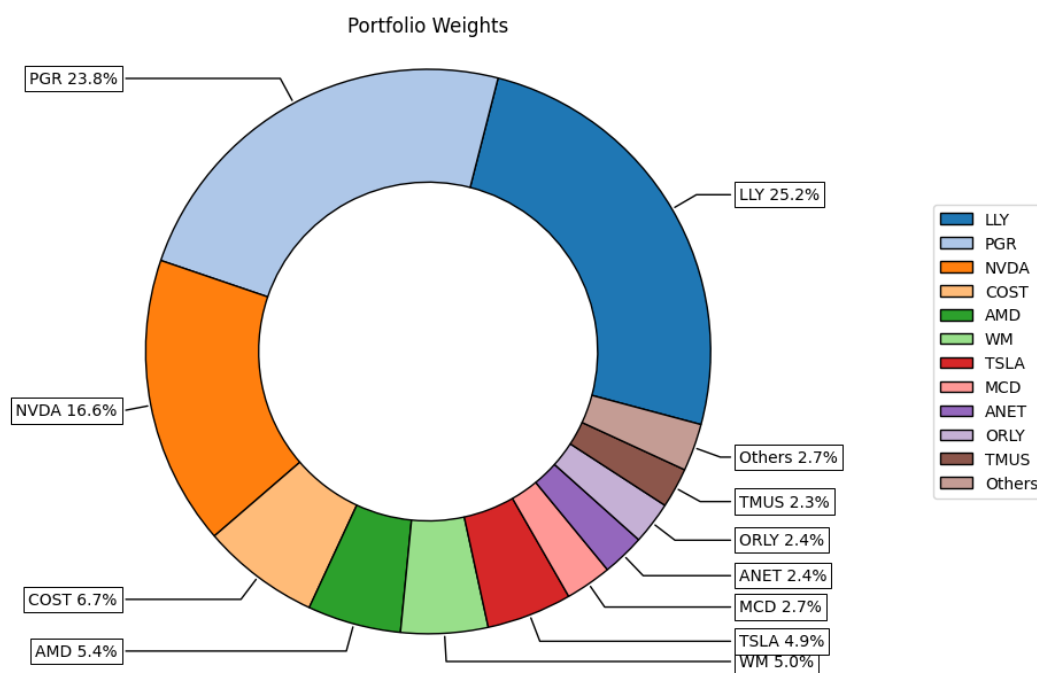


FIGURE 2.3 – Portefeuille final atteint pour un risque de $\sigma_{max}^2 = 0.1$

portefeuille sont souvent hors de portée en raison de divers facteurs liés à la modélisation des prix. Ces facteurs incluent les variations continues des rendements attendus et des variances, qui peuvent différer significativement selon les secteurs. De plus, une compréhension macroéconomique globale est cruciale, car elle impacte directement la dynamique des marchés et, par conséquent, l'efficacité de nos prévisions de rendement. Ainsi, bien que la frontière d'efficacité serve de guide pour l'allocation optimale des actifs, les résultats pratiques peuvent s'écarter des prédictions théoriques en raison de ces contraintes et considérations complexes.

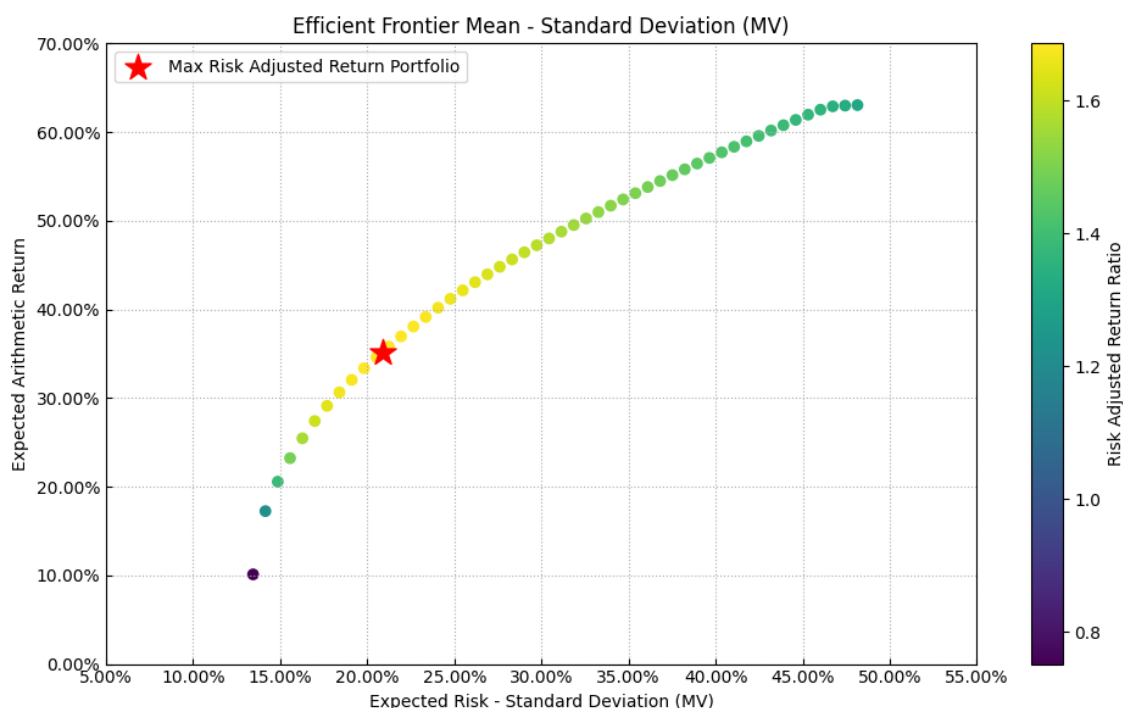


FIGURE 2.4 – Rendements mensuels du portefeuille en fonction de la variance admissible

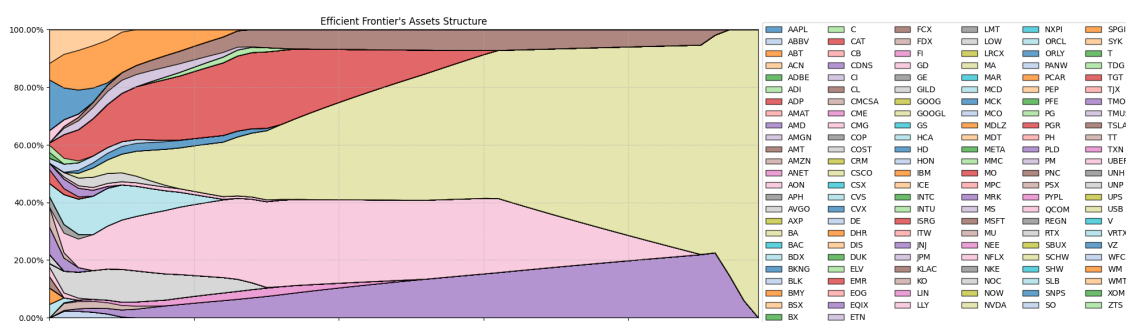


FIGURE 2.5 – Allocation du portefeuille en fonction de la variance admissible

2.1.6 Critiques et améliorations du modèle

Le modèle de Markowitz suscite des critiques, notamment en ce qui concerne sa sensibilité aux estimations de rendement et la stabilité des solutions optimales. Pour y remédier, différentes améliorations ont été proposées, telles que les méthodes explorées ci-dessous, qui prennent en compte les coûts de transaction.

2.2 Contrainte "soft" de coût de transaction

2.2.1 Définition du modèle

Une contrainte "soft" de coût de transaction a été ajoutée à la fonction d'utilité dans le programme d'optimisation.

Les rendements mensuels sont définis de manière à ce que $\bar{\mu}$ soit un estimateur historique sur les deux dernières années. Dès lors, si N est le nombre de jours de marché dans l'année ($N = 260$ en pratique), alors pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et tout instant t , on a :

$$\bar{\mu}_t^i = \frac{1}{2N} \sum_{j=t-2N+1}^t r_j^i.$$

Tous les mois, les optimisations suivantes ont été réalisées sur les 10 plus grandes capitalisations boursières :

$$\omega_t^{\text{MVO}} = \underset{\omega \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmax}} \left(\bar{\mu}_t^\top \omega - \psi \|\omega - \omega_{t-1}\|_{\ell^1(\mathbb{R}^d)} \right) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \omega^\top \bar{\Sigma}_t \omega \leq \sigma^{*2} \\ \omega^\top \mathbf{1}_d \end{cases},$$

avec $\psi = 2\%$, $\sigma^* = 20\%$ et ω_{t-1} le poids optimal du mois précédent. Le vecteur de poids est initialisé en résolvant le problème d'optimisation de Markowitz à poids positifs (pas de short-selling) sur le premier mois, c'est-à-dire avec la même fonction d'utilité, sans la partie en ψ . Ainsi,

$$\omega_0^{\text{MVO}} = \underset{\omega \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmax}} \bar{\mu}_0^\top \omega \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \omega^\top \bar{\Sigma}_0 \omega \leq \sigma^{*2} \\ \omega^\top \mathbf{1}_d \\ \omega \geq 0 \end{cases}.$$

2.2.2 Analyse de la fonction d'utilité modifiée

Le terme $\|\omega - \omega_{t-1}\|_{\ell^1(\mathbb{R}^d)}$ représente les coûts de transaction du mois $t-1$ au mois t . Le facteur ψ permet de valoriser plus ou moins les variations élevées de poids dans le portefeuille, qui sont mesurées par la norme $\|\cdot\|_{\ell^1(\mathbb{R}^d)}$. Cela permet de tenir compte d'un impact réel dans ces variations : chaque transaction implique un coût de transaction, tel qu'un coût de courtage par exemple. La pénalité permet donc de rebalancer l'optimisation du retour contre le coût de rebalancer le portefeuille.

2.2.3 Comparaison des pénalités

La Figure 2.6 représente la performance du portefeuille pour différentes valeurs de ψ entre 0% et 2%.

La période d'analyse s'étend de janvier 2015 à fin décembre 2023. Cette période est marquée par une série d'événements économiques qui ont potentiellement influencé le S&P 500 et, par extension, toute stratégie d'investissement liée au marché des actions. Ces événements comprennent notamment :

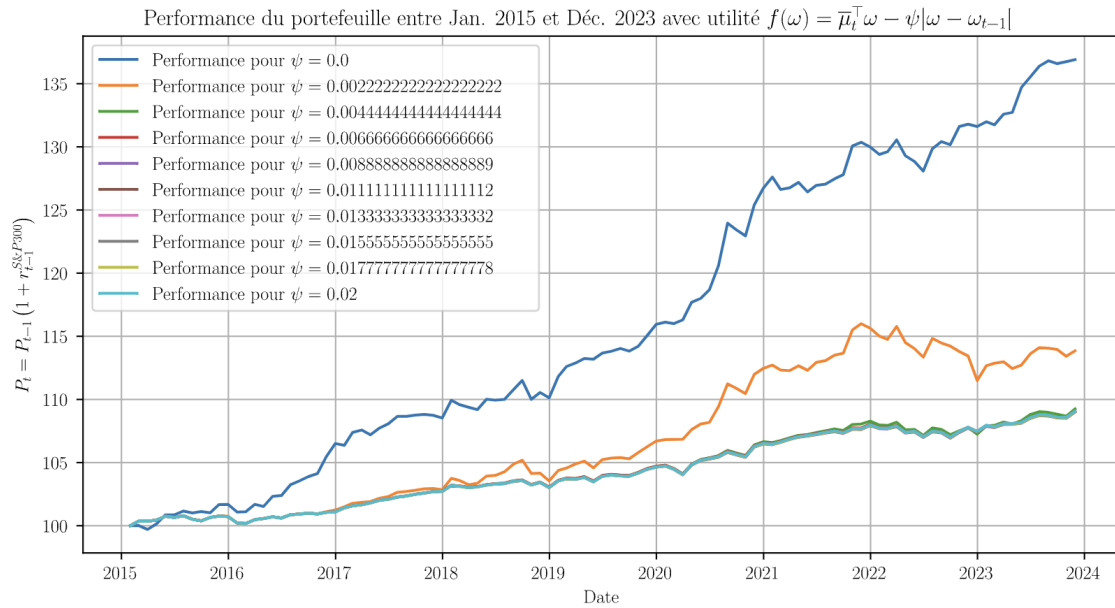


FIGURE 2.6 – Performance du portefeuille $\{\omega_t^{\text{MVO}}; t \in \llbracket 0, T \rrbracket\}$ pour différentes valeurs de ψ entre 0 et $2 \cdot 10^{-2}$

- L'expansion économique de la fin des années 2010 ;
- Le krach boursier de 2020 dû à la pandémie de COVID-19 ;
- Des événements politiques tels que la guerre commerciale entre les États-Unis et la Chine et les élections américaines.

L'analyse quantitative de la performance des portefeuilles indique une supériorité constante du portefeuille avec $\psi = 0$ sur ceux avec ψ positif pendant la période 2015-2023. Cette tendance suggère que les coûts de transaction ne permettent pas d'atteindre un rendement vraiment optimal. Cependant, ces résultats ne prennent pas en compte l'érosion des rendements due aux frais transactionnels, lesquels, une fois pris en compte, pourraient réduire l'écart de performance entre les stratégies avec et sans pénalités de ψ .

2.2.4 Analyse de performance

Les portefeuilles pénalisés par $\psi > 0$ réalisent une performance de 18% à 27% entre Janvier 2015 et Décembre 2023, et 37% pour $\psi = 0$. En comparaison, le S&P 500 atteint une performance de 185% entre Janvier 2015 et Décembre 2023, ce qui est bien meilleur que notre portefeuille.

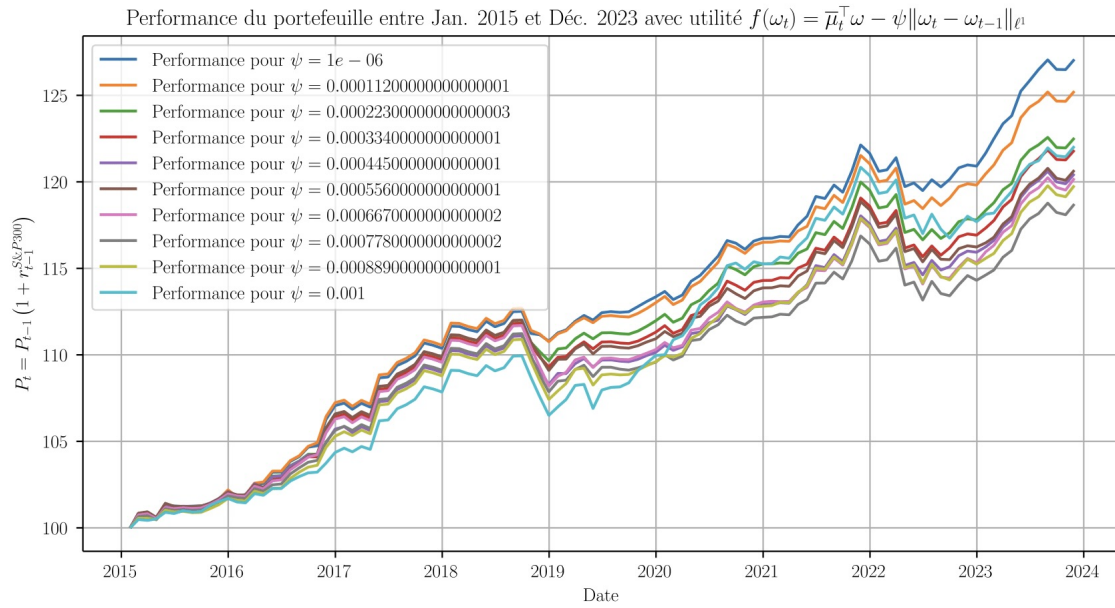


FIGURE 2.7 – Performance du portefeuille $\{\omega_t^{\text{MVO}}; t \in \llbracket 0, T \rrbracket\}$ pour différentes valeurs de ψ entre 10^{-6} et 10^{-3} sur les 10 plus grandes capitalisations boursières

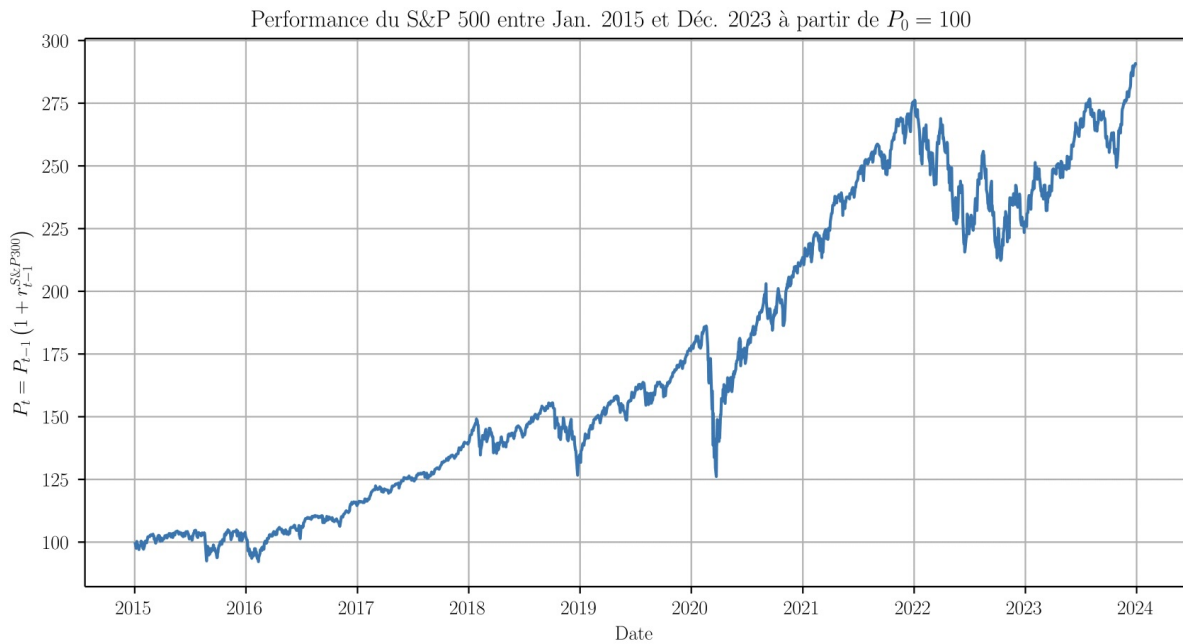


FIGURE 2.8 – Performance du S&P500 entre Janvier 2015 et Décembre 2023

Chapitre 3

Analyse et interprétation des résultats

3.1 Différentes mesures de risques

3.1.1 Expected Shortfall (ES)

Le Expected Shortfall (ES), également connu sous le nom de Conditional Value at Risk (CVaR), est une mesure de risque qui quantifie le déficit moyen attendu dans le pire $\alpha\%$ des scénarios de perte. Contrairement au Value at Risk (VaR), qui indique seulement le seuil au-delà duquel les pertes sont considérées comme extrêmes, l'ES fournit une estimation de l'ampleur moyenne de ces pertes extrêmes. La formule de l'ES pour un niveau de confiance α est donnée par :

$$ES_{\alpha}(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_u(X) du$$

où $VaR_u(X) = F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbf{R}; F_X(x) \geq u\}$ est le Value at Risk au niveau de confiance u .

Par exemple, si l'Expected Shortfall pour un niveau de confiance de 95% est de 2%, cela implique qu'il y a 5% de chances que, dans les scénarios les plus extrêmes, la perte moyenne attendue du portefeuille soit de 2%.

Cette métrique est fréquemment employée dans la gestion des risques financiers afin d'évaluer la résilience d'un portefeuille ou d'une stratégie d'investissement dans des situations de marché défavorables.

3.1.2 Entropic Value at Risk (EVaR)

L'Entropic Value at Risk (EVaR) est une mesure de risque cohérente et alternative au Value at Risk (VaR) et Expected Shortfall (ES), qui utilise la fonction génératrice des moments pour quantifier le risque. Elle a l'avantage de tenir compte de l'ensemble de la distribution des rendements et pas seulement de la queue, comme c'est le cas pour le VaR et l'ES et elle amplifie le risque pour les cas extrêmes. La formule de l'EVaR est donnée

par :

$$\text{EVaR}_\alpha(X) = \inf_{z>0} \left\{ \frac{1}{z} \log \left(\frac{M_X(t)}{\alpha} \right) \right\}$$

où $M_X(t) = \mathbf{E}[e^{tX}]$ est la fonction génératrice des moments et α le niveau de confiance.

Si l'EVaR à un niveau de confiance de 95% est de 2%, cela implique qu'il faut en moyenne une quantité d'informations pour décrire les pertes au-delà de ce seuil de 2% dans 95% des cas les plus extrêmes.

Cette mesure propose une vision distincte de l'Expected Shortfall (ES) ou de la Value-at-Risk (VaR) en incorporant des éléments d'entropie et de complexité. On l'emploie dans la gestion des risques financiers afin de compléter d'autres mesures de risque et de mieux comprendre la structure et la nature des pertes potentielles dans un portefeuille ou une stratégie d'investissement.

3.2 Analyse des résultats

3.2.1 Comparaison entre les différentes stratégies

La Figure 2.6 et la Figure 2.7 illustrent que lorsque $\psi = 0$, la stratégie est plus avantageuse. Cependant, la différence entre un ψ de 10^{-6} et un ψ de 10^{-3} n'est pas très significative (un gain de 27% contre 18% sur une période de 10 ans). Néanmoins, comme mentionné précédemment, la contrainte soft est plus réaliste car elle prend en compte les coûts de transaction.

En ce qui concerne la stratégie prenant en compte les différents risques introduits précédemment, on remarque que la stratégie basée sur l'Entropic Value at Risk est plus performante que les autres. Une autre chose notable est la différence de rendement par rapport à la stratégie naïve.

Enfin, il est possible de constater que l'augmentation de la valeur du portefeuille avec une stratégie de Markowitz, une contrainte soft ou en prenant en compte les différentes formes de risques, est clairement inférieure à celle basée sur les MarketCaps. Cela pourrait s'expliquer par le fait que le S&P n'est pas limité par une volatilité maximale.

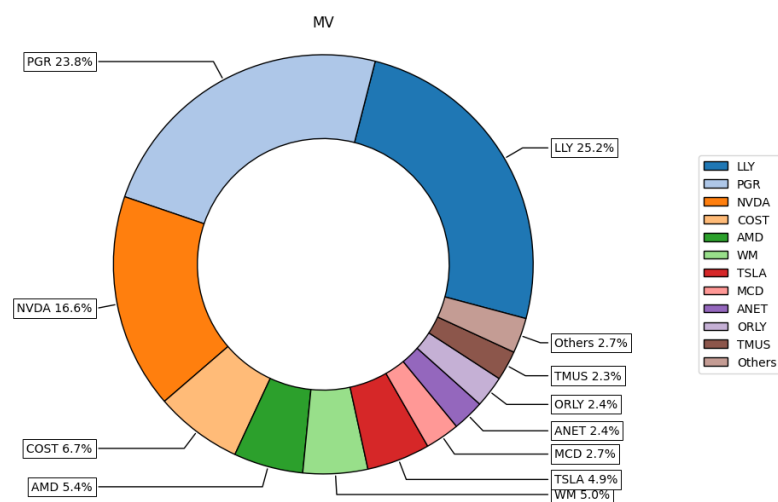
3.2.2 Analyse de l'influence du coût de transaction

Les investisseurs plus averses au risque au risque pourraient privilégier un ψ élevé, synonyme de moins de transactions et de volatilité atténuée, ce qui est confirmé par des fluctuations moins extrêmes dans les courbes de rendement. Malgré sa moindre réactivité aux cycles économiques, cette approche pourrait se justifier par une meilleure maîtrise des coûts et des risques, bien que cela puisse limiter l'exploitation complète des périodes de croissance économique.

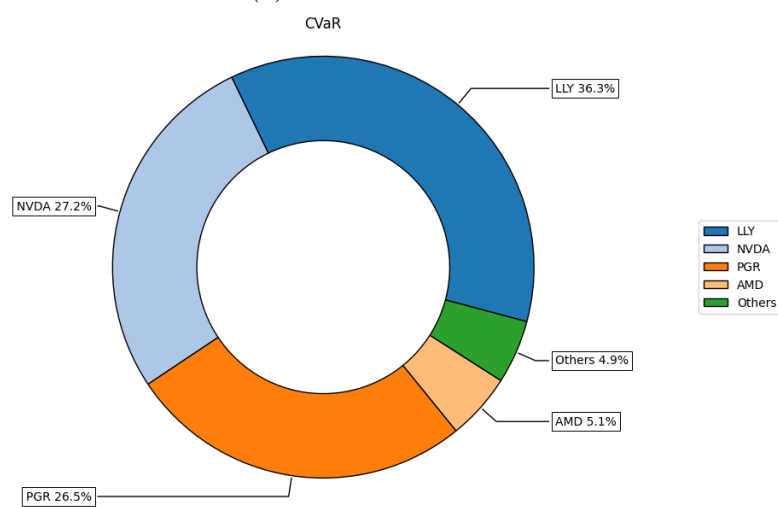
Le portefeuille avec une valeur de ψ élevée ($\psi = 0.001$) récupère le mieux du Krach boursier de 2019, ce qui s'observe par la croissance forte dans la période de relance économique. Interprétons cela. Après le krach boursier lié au Covid-19 en mars 2020, la Réserve fédérale américaine (Fed) a réagi rapidement pour soutenir l'économie. La Fed a abaissé son

taux directeur, le Federal Funds Rate, dans $[0; 0.25]\%$ dans une série de baisses d'urgence en mars 2020. C'était une partie d'une approche de relance monétaire visant à encourager l'emprunt et l'investissement. Cela pourrait avoir favorisé le portefeuille obtenu par un pénalité des coûts de transaction plus élevée, parce qu'un tel portefeuille est plus enclin à garder sa position plus longtemps, ce qui peut s'avérer bénéfique si les positions conservées connaissent une appréciation due à la recherche de rendement des investisseurs qui se tournent vers des actifs à risque plus élevé comme les actions. Cela tient d'autant plus que l'on s'intéresse ici aux 10 plus grandes capitalisations boursières.

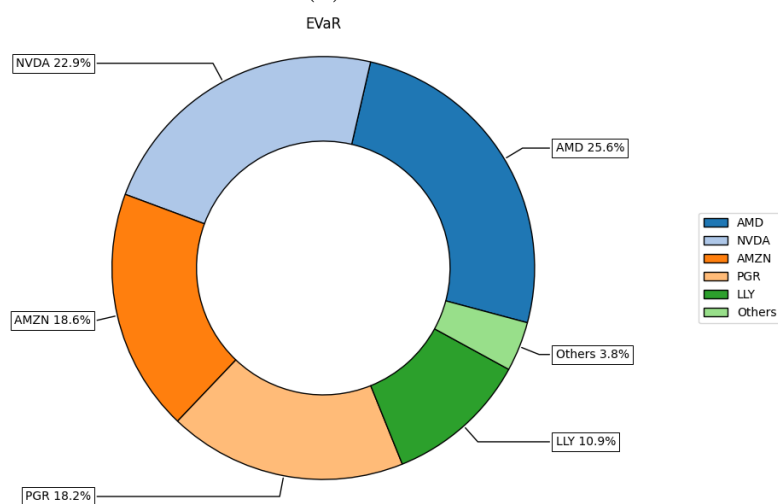
Une autre explication de cette inversion de tendance serait que le fait que $\bar{\mu}$ soit un estimateur historique sur deux années n'est pas cohérent avec le krach boursier du Covid-19 : ce phénomène a tellement transformé l'économie américaine que cette inversion de tendance pourrait provenir de ce conflit.



(a) Mean Variance



(b) CVaR



(c) EVaR

FIGURE 3.1 – Comparison of different risk measures

TABLE 3.1 – Risk Measures and Values

Optimized Risk Measure	Mean	Variance	CVaR	EVaR
<i>Profitability</i>				
Mean Return(%)	47.12		47.97	53.32
Compound Annual Growth Rate (CAGR)(%)	35.32		35.82	39.73
<i>Risk Measures based on Returns</i>				
Standard Deviation(%)	25.53		26.81	31.08
Value at Risk (VaR)(%)	36.20		36.67	44.89
Conditional Value at Risk (CVaR)(%)	55.74		54.99	63.99
Entropic Value at Risk (EVaR)(%)	66.61		65.15	75.22
<i>Risk Measures based on Drawdowns</i>				
Average Drawdown (ADD)(%)	3.38		3.57	5.32
Max Drawdown (MDD)(%)	30.23		26.41	29.40

Chapitre 4

Conclusions & Perspectives

En conclusion, notre projet ST7 sur la modélisation des risques financiers à Centrale-Supélec a abouti à une analyse approfondie de la construction d'un portefeuille optimal en utilisant les principes de Markowitz ainsi que des mesures de risque avancées telles que l'Expected Shortfall et l'Entropic Value at Risk. Nous avons découvert que, bien que des rendements élevés soient possibles, ils ne doivent pas masquer l'importance du risque associé.

Notre application des modèles au marché actuel a révélé que la tolérance au risque et les coûts de transaction sont des facteurs déterminants dans le comportement des investisseurs. La complexité du marché financier et la nécessité d'une analyse macroéconomique sont devenues évidentes, soulignant la nécessité d'ajuster en permanence les stratégies d'investissement.

Ce travail a mis en lumière l'importance de modèles financiers résilients, capables de s'adapter aux chocs économiques imprévus qui semblent être devenus la nouvelle norme. La modélisation des risques financiers reste donc un domaine essentiel pour naviguer avec succès dans les eaux parfois tumultueuses des marchés financiers.

Bibliographie

- [1] DCAJASN FROM GITHUB. *Riskfolio-Lib*. <https://riskfolio-lib.readthedocs.io/en/latest/>. [Consulté pour la dernière fois le 27 Mars 2024]. 2024.