Optimal Portfolio

Enc*adré par Romain Perchet*

Par :

- Chahine Nejma
- Edward Lucyszyn
- Julius Graf
- Yecine Ktari
- Hugo Jupin

BNP PARIBAS

Sommaire

01. Introduction

Définition et contextualisation

N assets

Portfolio: Comment sont répartis nos investissements sur ces assets

ω_t^i Poids investi dans l'asset i au temps t

01. Introduction

Définition et contextualisation

$$\omega_t = \begin{pmatrix} \omega_t^1 \\ \omega_t^2 \\ \cdots \\ \omega_t^N \end{pmatrix}$$

Notre portefeuille (qui dépend du temps)

Le retour de l'asset i

$$r_t^i = \frac{P_t^i}{P_{t-1}^i} - 1$$

vérifiant à tout temps $\sum_{i=1}^{N} \omega_t^i = 1$

01. Introduction

Définition et contextualisation

Comment construire un portefeuille **optimal** ?

Optimal selon quels critères ?
Retours ? **Risques** ?

02. Indice S&P

Un premier portefeuille

Le **S&P 500** est un indice boursier basé sur 500 grandes sociétés cotées sur les bourses aux États-Unis, **pondéré proportionellement** à leur capitalisation boursière

- Représentatif du marché américain
- Peut être vu comme un portefeuille
- Stratégie “naïve” de base

02. Indice S&P

Un premier portefeuille

Mise en place d'une routine à travers une fonction ***pipeline***.

- **Entrée:** date de départ de fin, tickers des assets.
- **Sortie:** les retours , la variance et la matrice de covariance mensuellement

On multiplie les retours par la matrice les poids du S&P

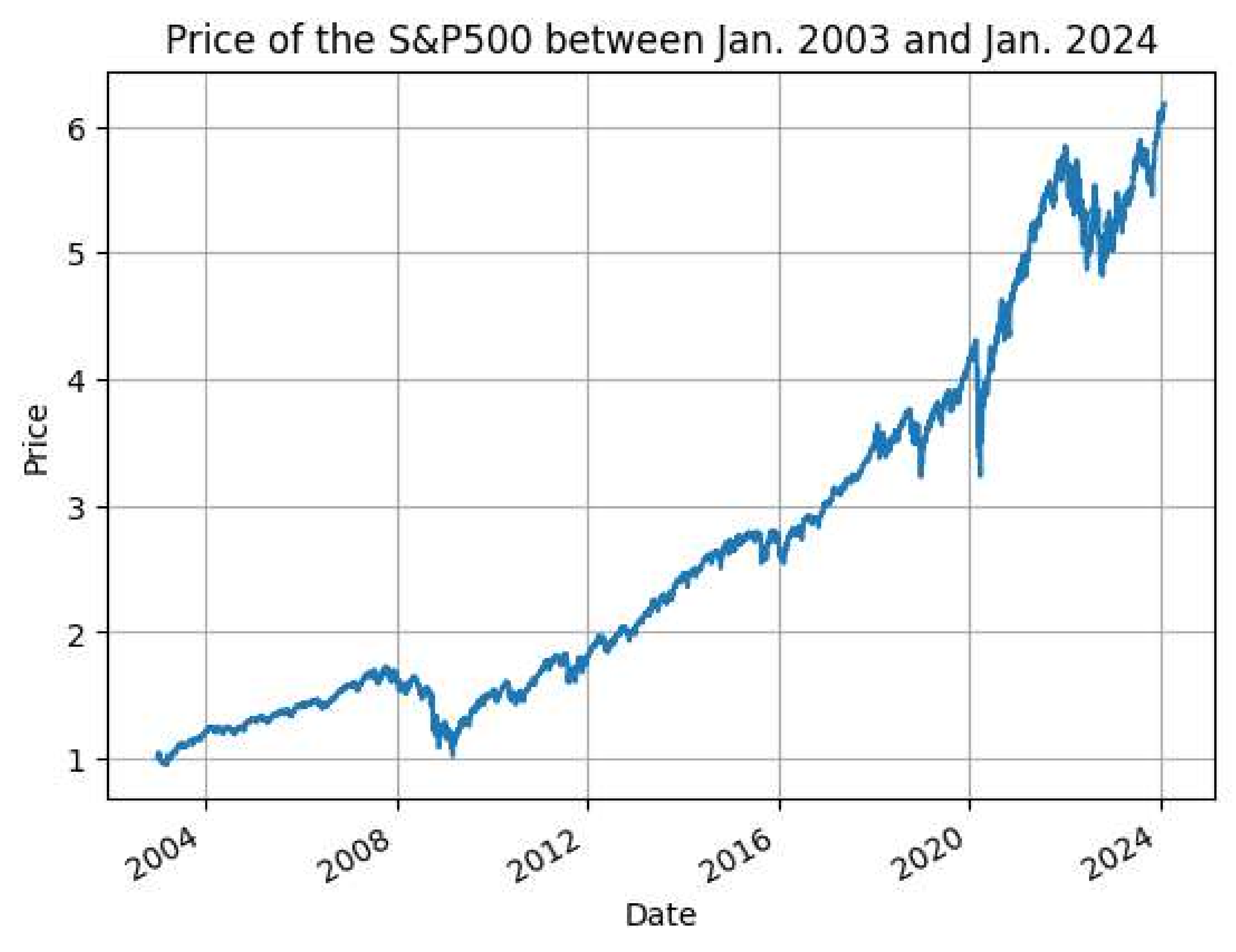
↓

S&P

02. Indice S&P

Un premier portefeuille

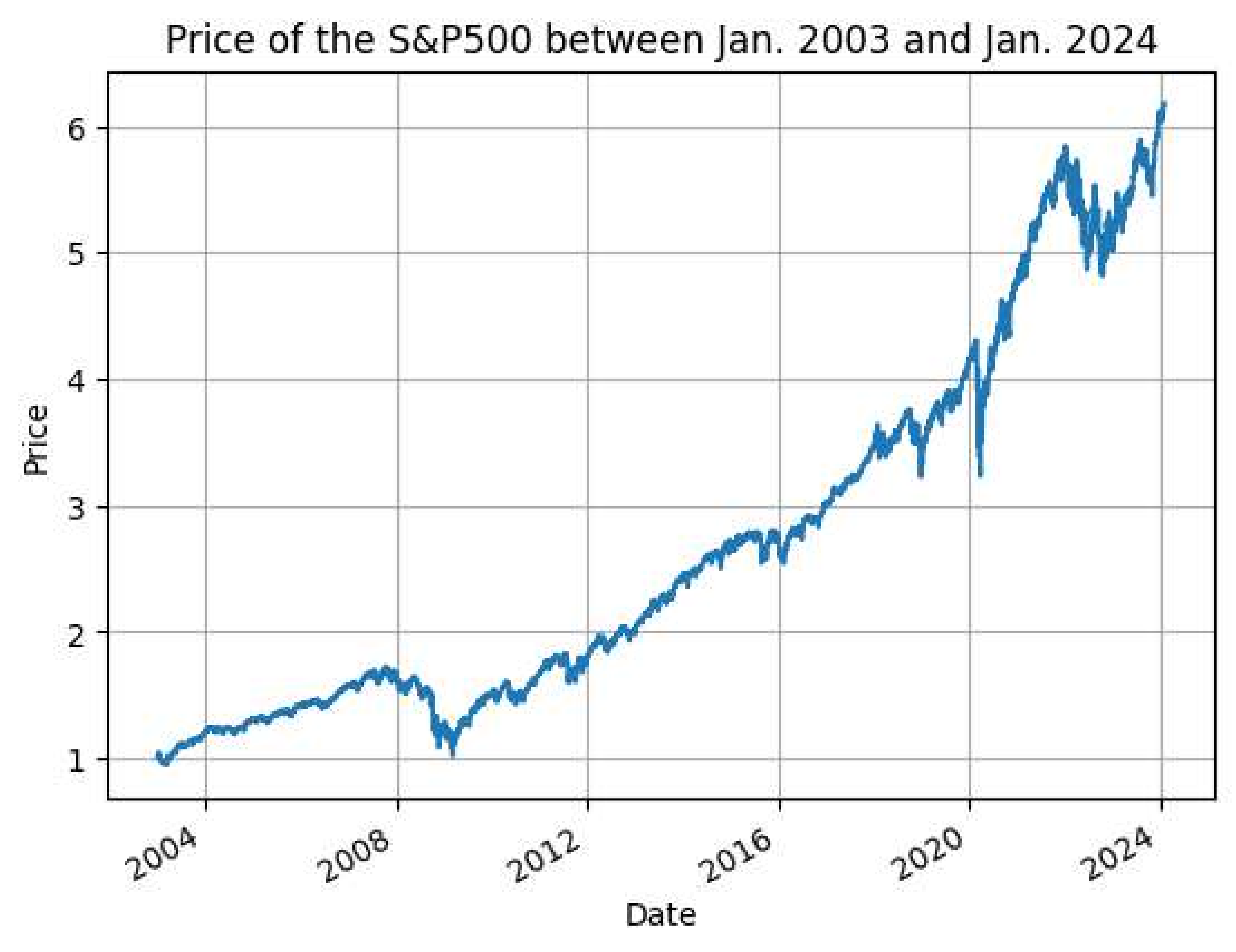
Indice S&P au cours du temps avec un prix initial de 1



02. Indice S&P

Un premier portefeuille

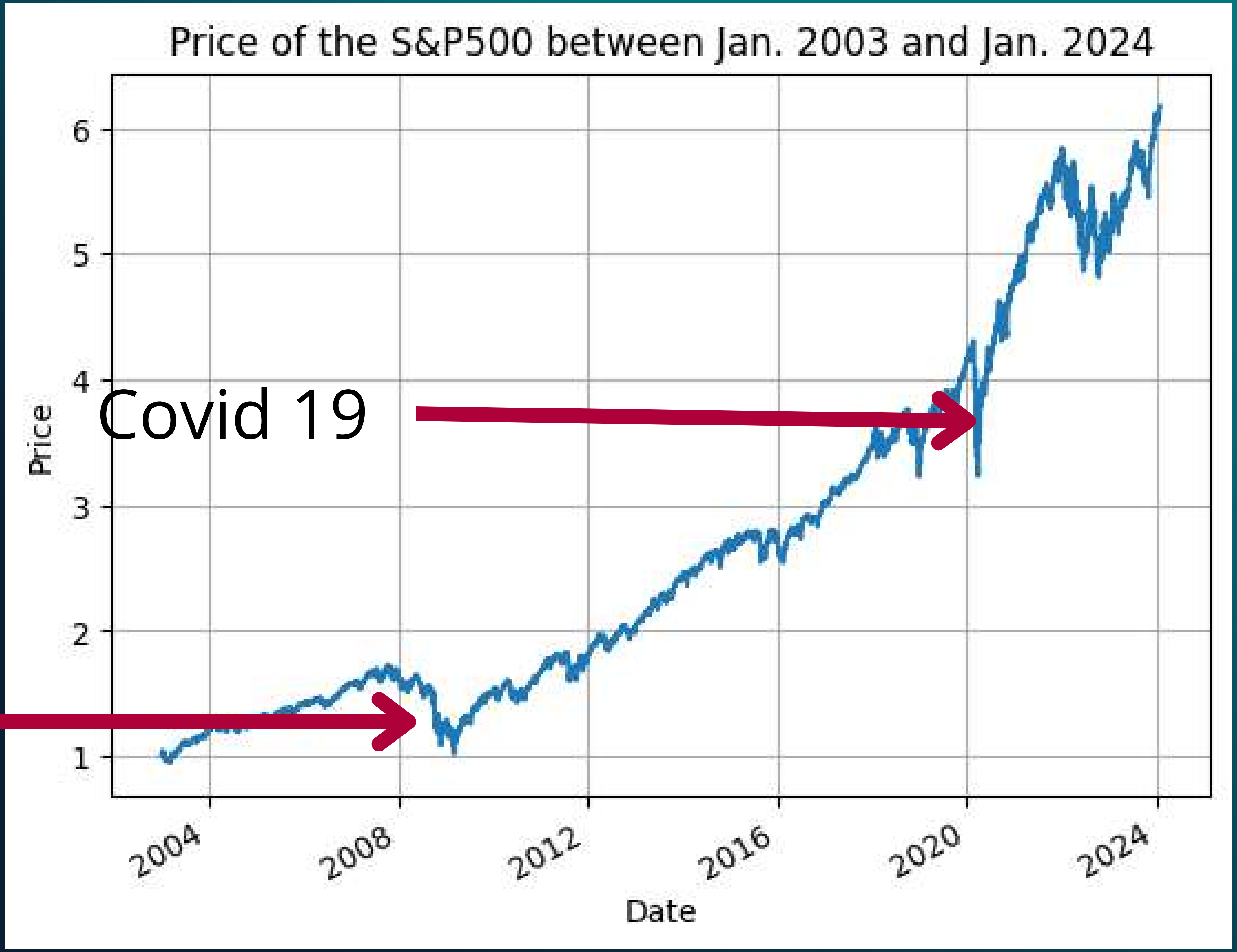
Fenêtre sur l'activité économique américaine



02. Indice S&P

Un premier portefeuille

Fenêtre sur l'activité économique américaine



Crise des subprimes

02. Indice S&P

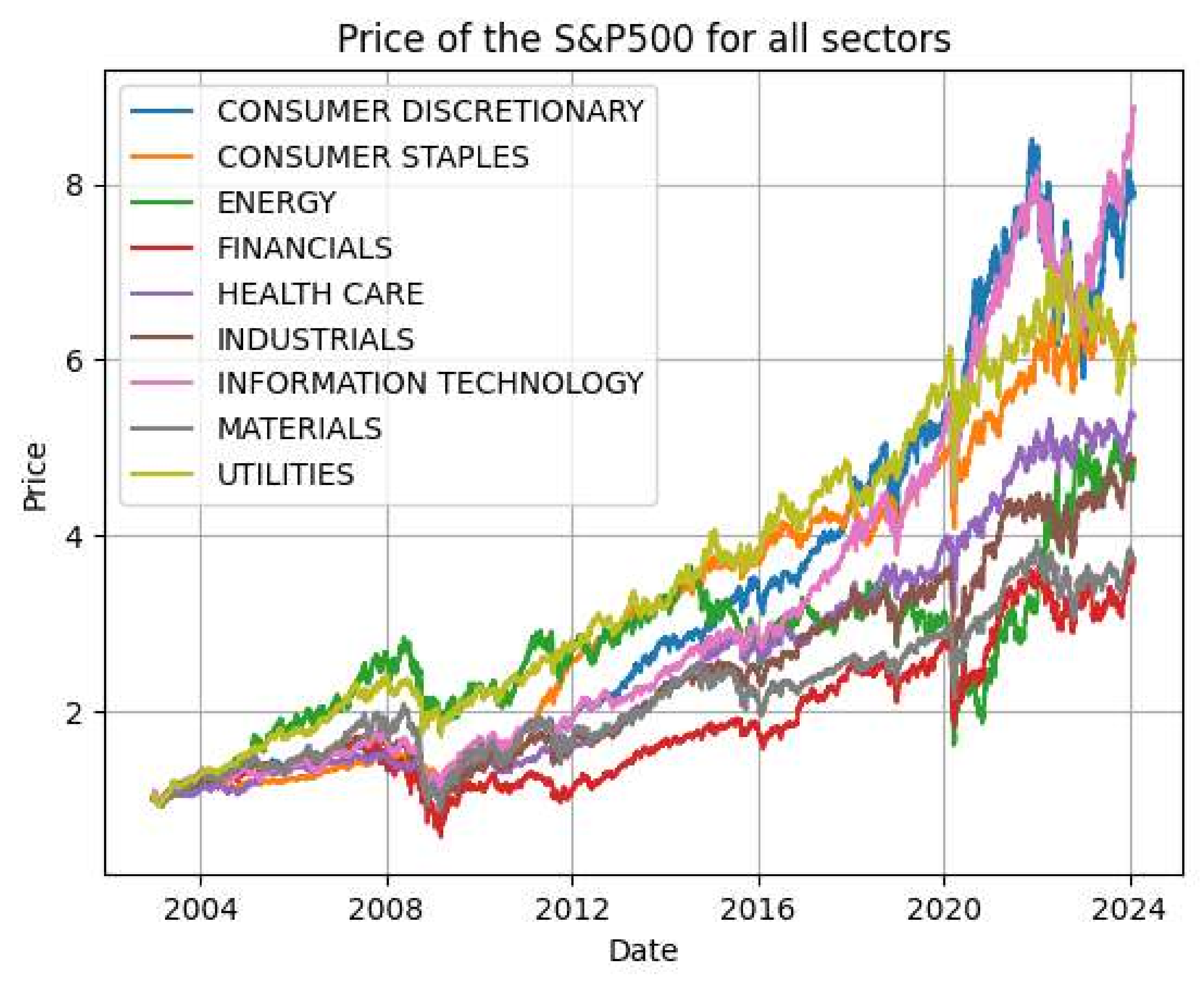
Un premier portefeuille

Fenêtre sur l’activité économique américaine

02. Indice S&P

Un premier portefeuille

Grosse disparitée entre les secteurs



02. Indice S&P

Un premier portefeuille

02. Indice S&P

Un premier portefeuille

03. Nos portefeuilles

Markowitz

Maximiser $\omega^T \mu$ sous la contrainte

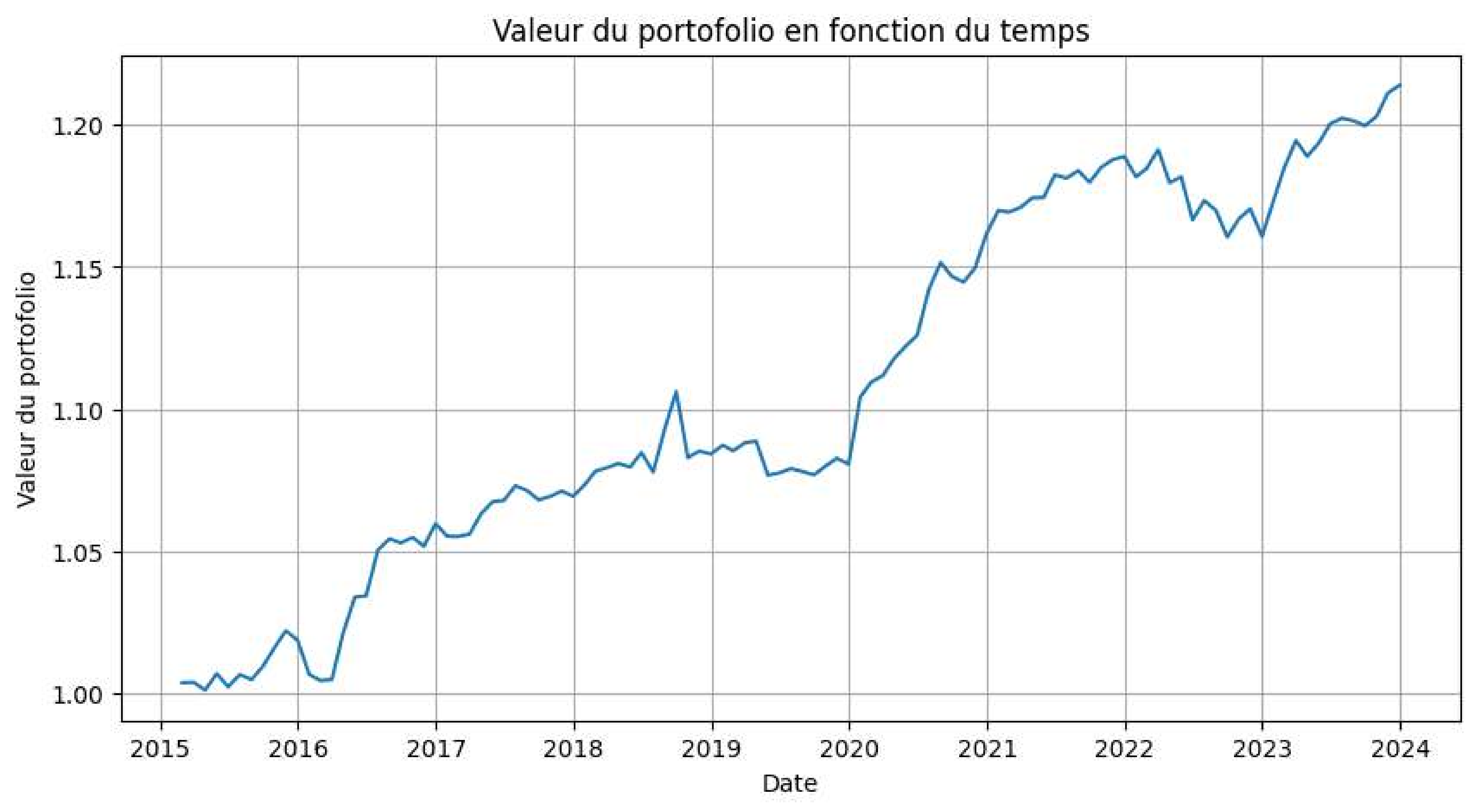
$$\omega^T \Sigma \omega \leqslant \sigma^2_{\max}, \omega^T 1 = 1, \omega \geqslant 0$$

Estimer μ et Σ ?

03. Nos portefeuilles

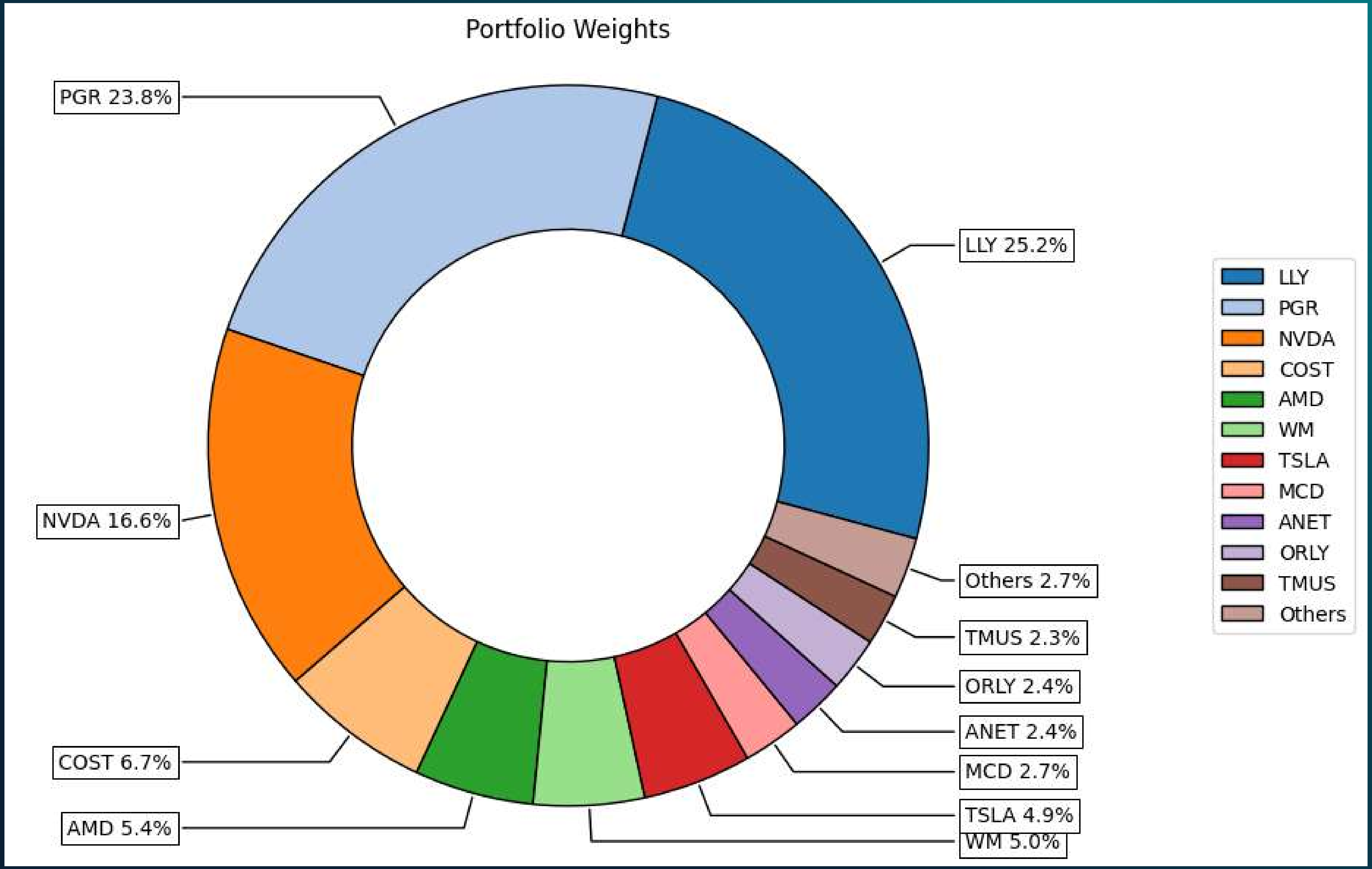
Markowitz

Avec 150 assets américaines



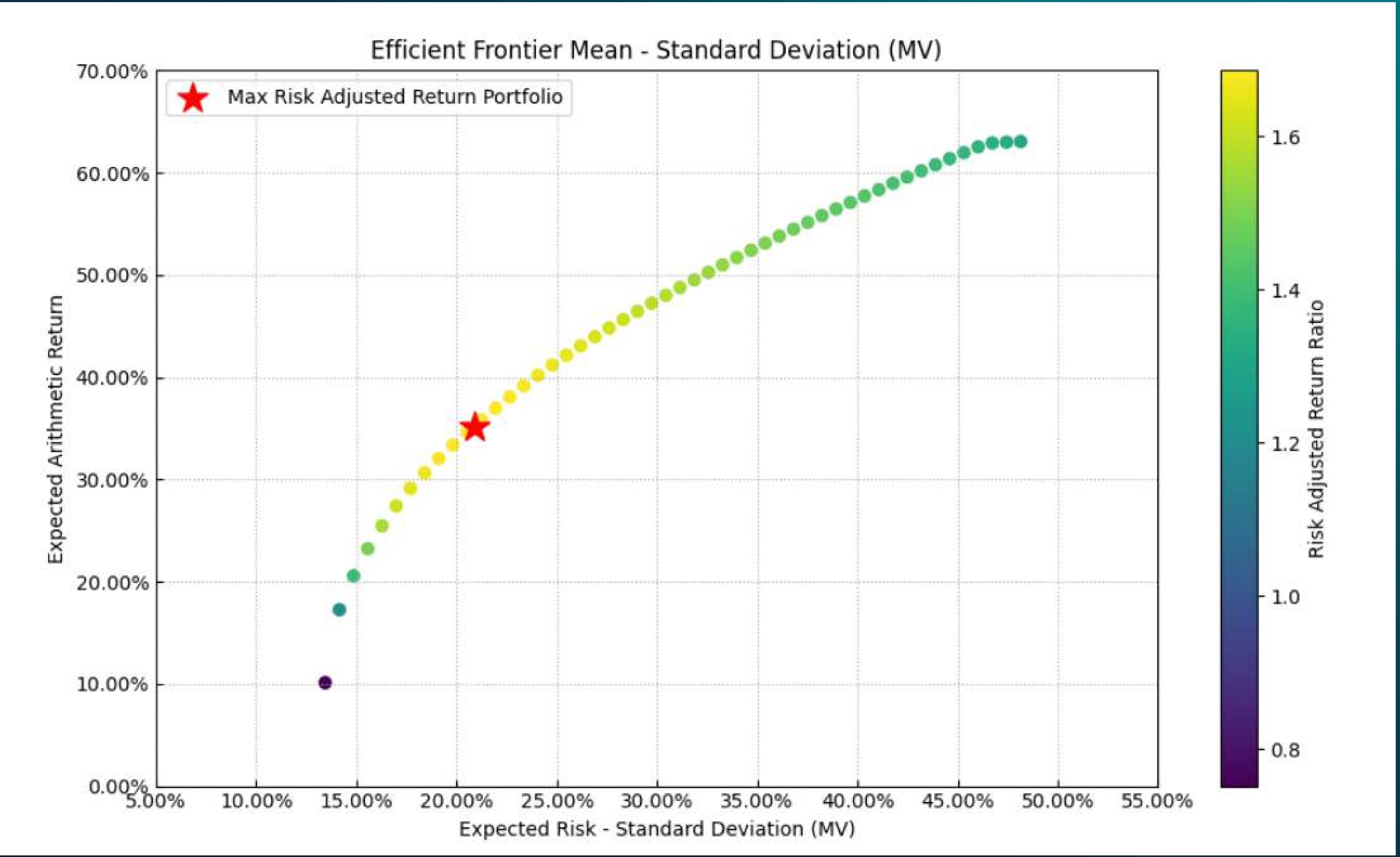
03. Nos portefeuilles

Markowitz



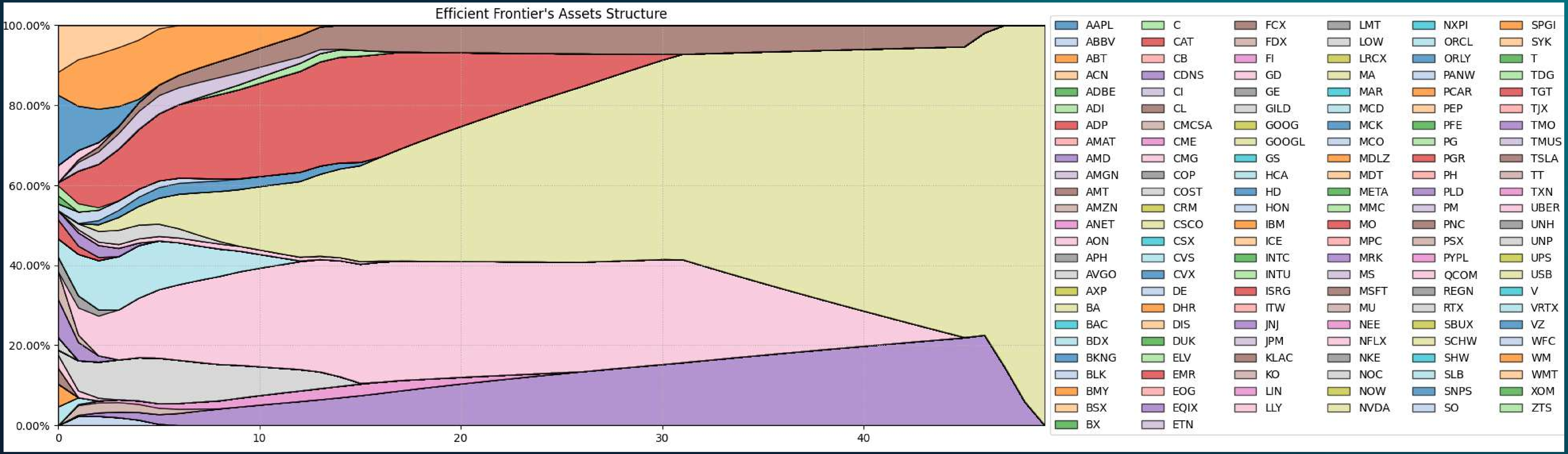
03. Nos portefeuilles

Markowitz



03. Nos portefeuilles

Markowitz



03. Nos portefeuilles

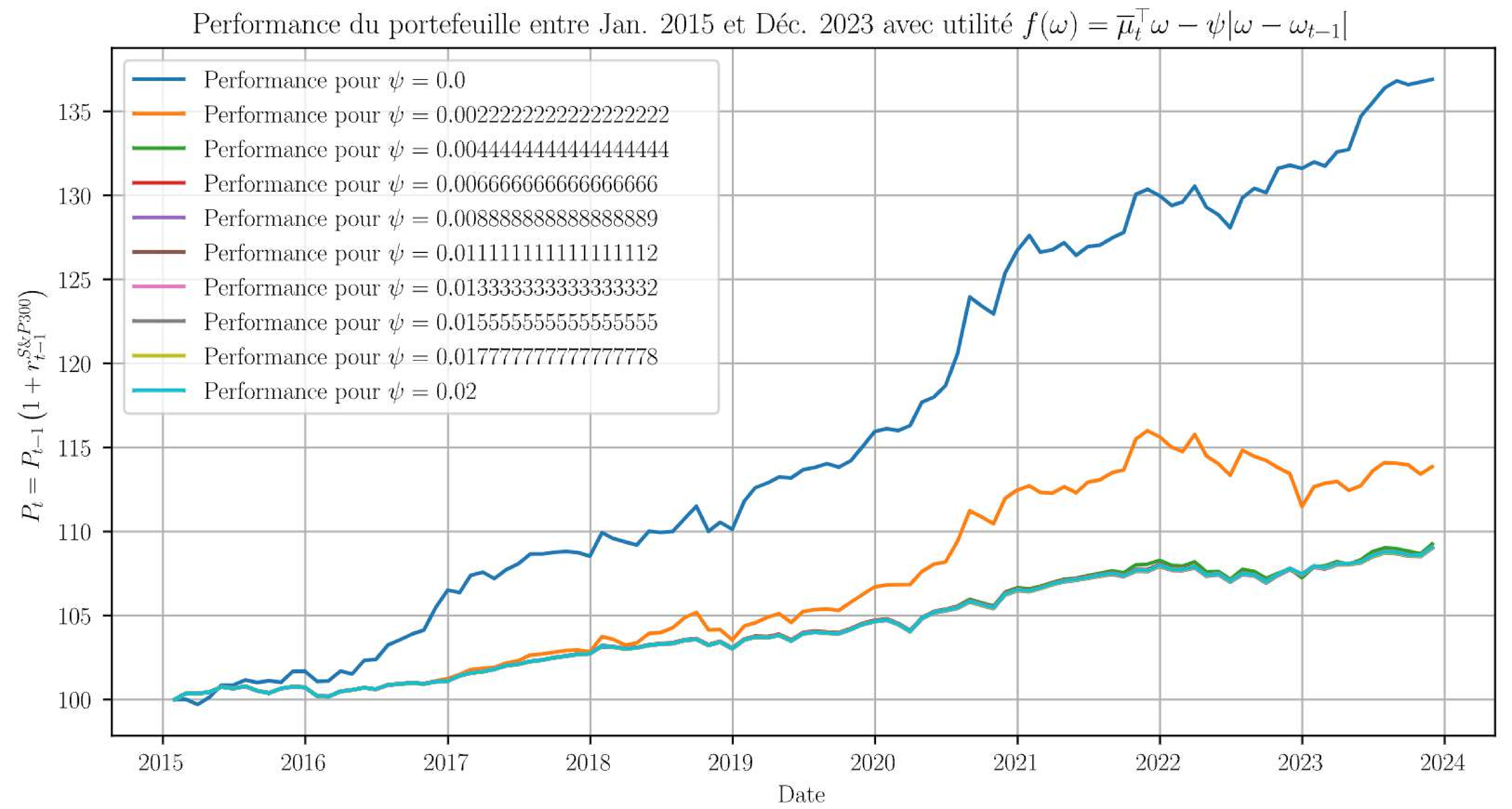
Contrainte “soft” de coût de transaction

$$\omega_t^{\mathrm{MVO}} = \underset{\omega \in \mathbf{R}^d}{\operatorname{argmax}} \left(\bar{\mu}_t^\top \omega - \psi \left\| \omega - \omega_{t-1} \right\|_{\ell^1(\mathbf{R}^d)} \right)$$

- Le paramètre ψ pénalise les coûts de transaction proportionnels à la variation absolue en poids.
- L’optimisation est réalisée sur les 10 plus grandes capitalisations boursières.

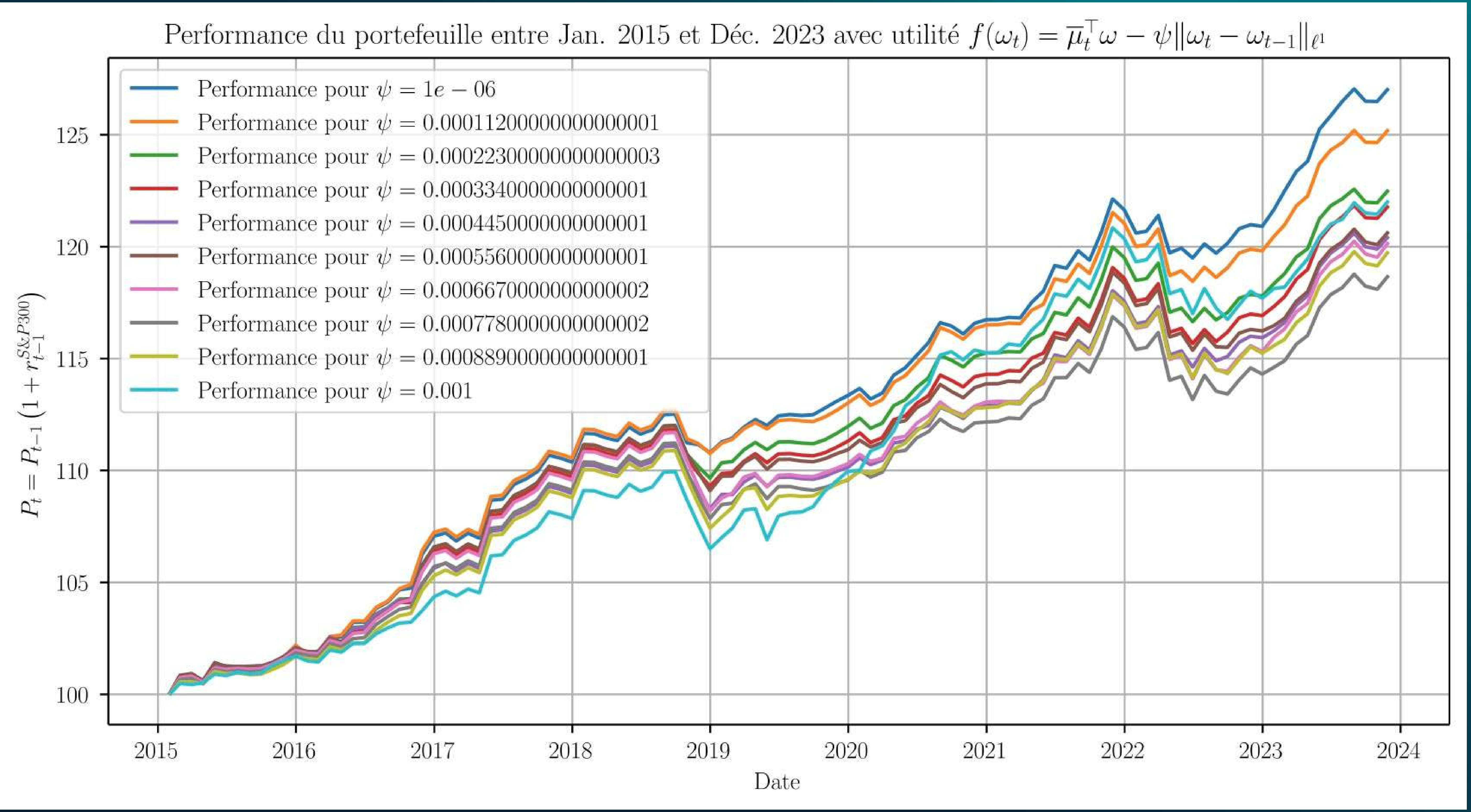
03. Nos portefeuilles

Contrainte “soft” de coût de transaction



03. Nos portefeuilles

Contrainte “soft” de coût de transaction



03. Nos portefeuilles

Contrainte “soft” de coût de transaction

- Inversion de tendance serait que le fait que **μ soit un estimateur historique** sur deux années **incohérent** avec le **krach** boursier du Covid-19
- La Fed a **abaissé son taux directeur**, le Federal Funds Rate, dans [0; 0.25]% après le Krach boursier de 2019 : opportunité ?
- Les portefeuilles pénalisés par ψ > 0 faible réalisent une performance de **18% à 27%** entre Janvier 2015 et Décembre 2023, et 37% pour ψ = 0.

04. Analyse des risques

Performance pour les différentes mesures de risque

Expected Shortfall

$$
\begin{aligned}
ES_\alpha &= \mathbb{E}\left[X \mid X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)\right] \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u(X)du.
\end{aligned}
$$

AVEC

Value at Risk

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$$

CVaR = la perte moyenne attendue au-delà de la Value at Risk (VaR)

- une vision plus complète du risque en considérant non seulement la probabilité de pertes extrêmes mais aussi leur magnitude

04. Analyse des risques

EVar, Exptected Shortfall et autres définitions

Entropic Value at Risk

$$\mathrm{EVaR}_{1-\alpha}(X) = \inf_{z>0}\left\{z^{-1}\ln\left(\frac{M_X(z)}{\alpha}\right)\right\}.$$

AVEC

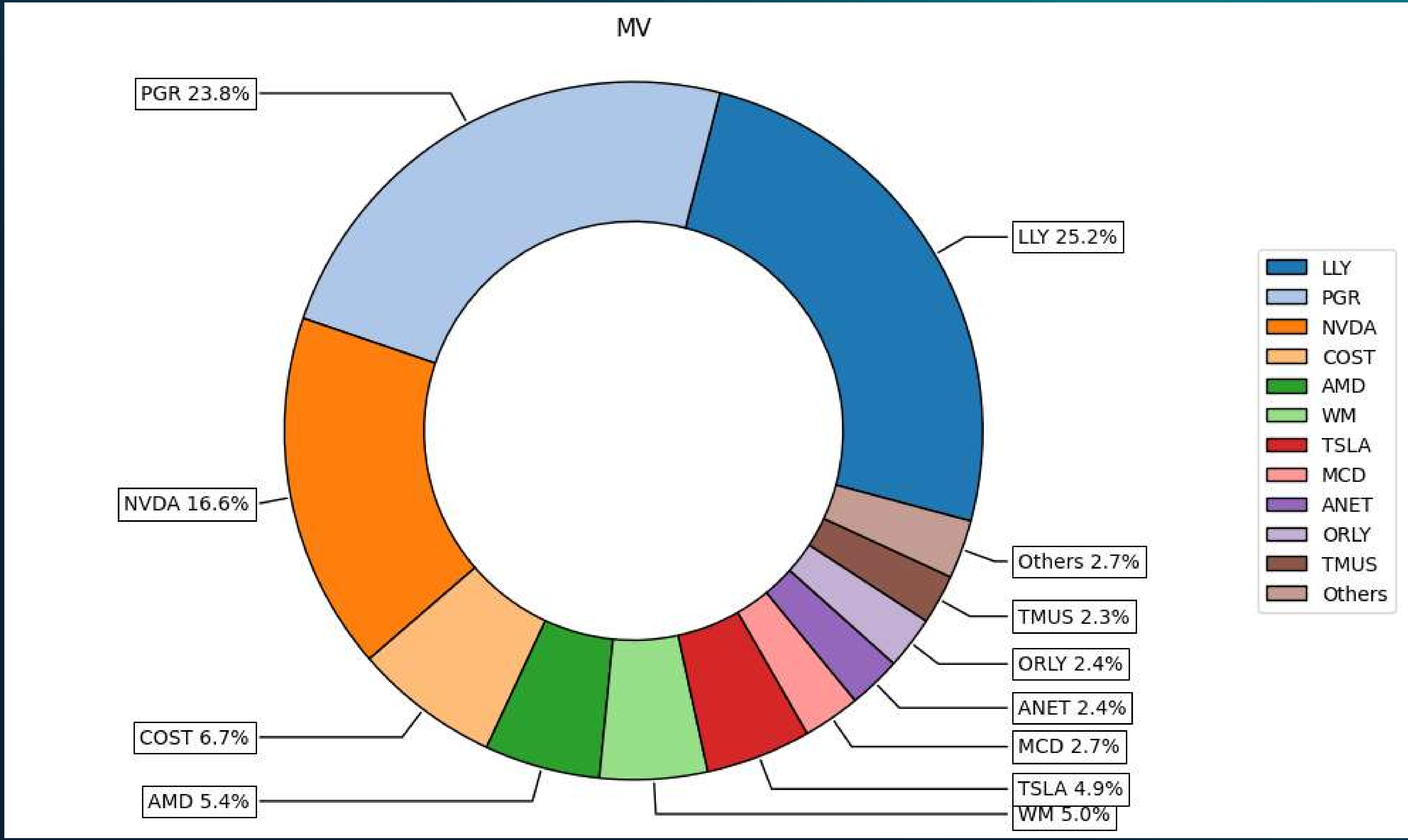
Fonction génératrice des moments

$$M_X(z) = \mathbb{E}\left[e^{zX}\right]$$

- EVaR : Mesure plus conservatrice
- L'EVaR est une mesure de risque plus conservatrice qui nous permet d'obtenir des limites de pertes plus élevées sans avoir besoin de réduire le niveau de signification

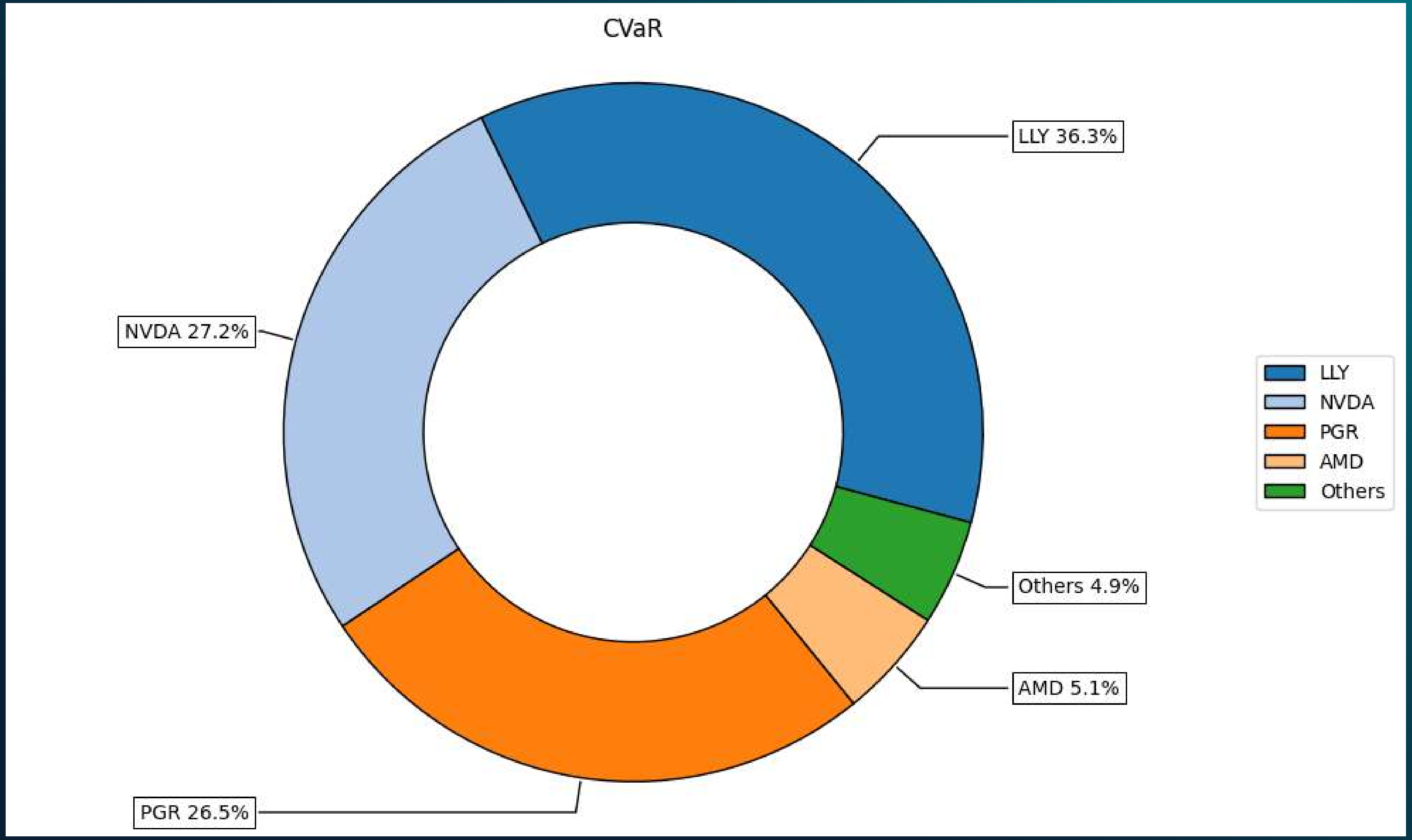
04. Analyse des risques

Portefeuille final avec Mean Variance



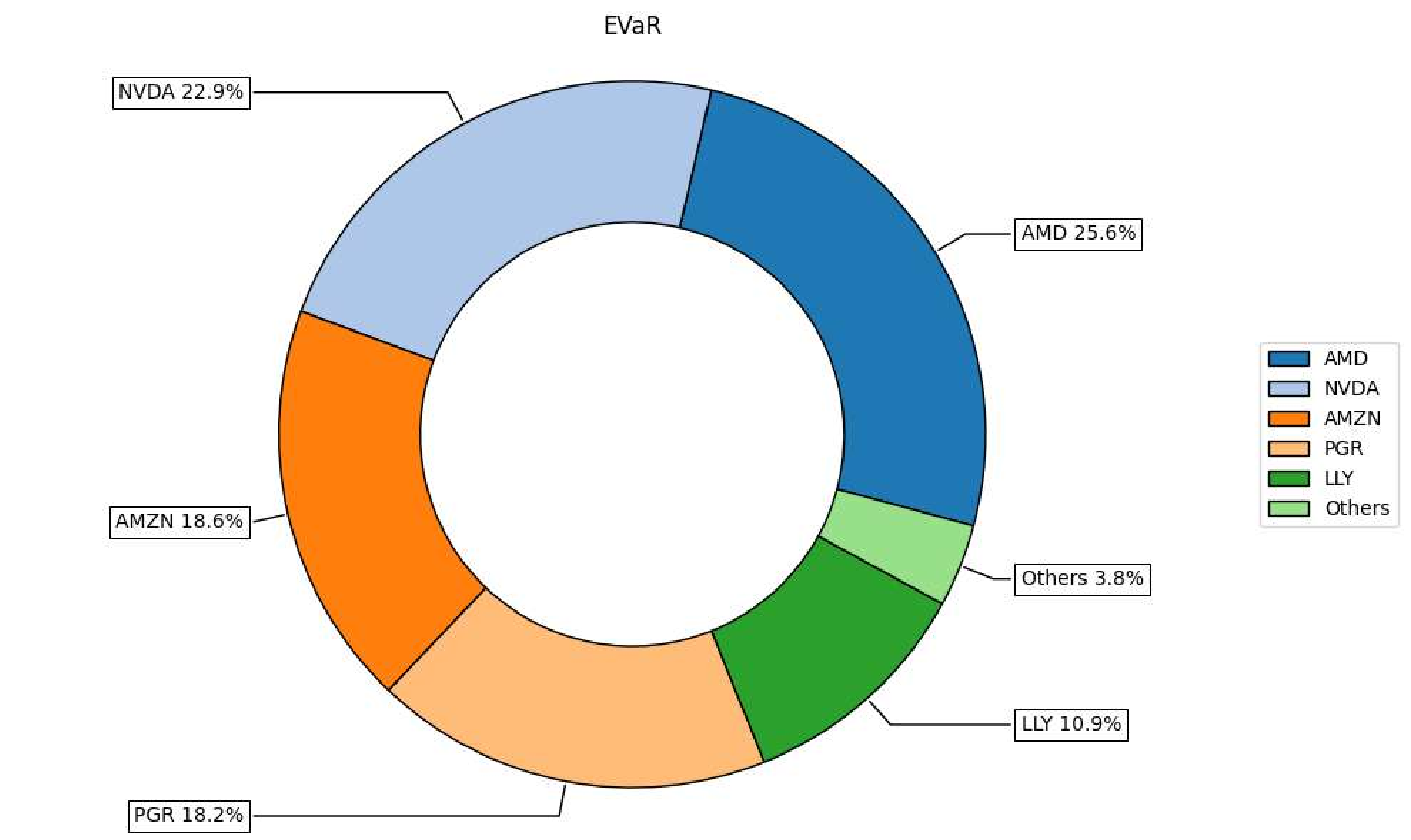
04. Analyse des risques

Portefeuille final avec CVaR



04. Analyse des risques

Portefeuille final avec EVaR



Optimized Risk Measure*	Mean Variance	CVaR	EVaR
Profitability			
Mean Return(%)	47.12	47.97	53.32
Compound Annual Growth Rate (CAGR)(%)	35.32	35.82	39.73
Risk Measures based on Returns			
Standard Deviation(%)	25.53	26.81	31.08
Value at Risk (VaR)(%)	36.20	36.67	44.89
Conditional Value at Risk (CVaR)(%)	55.74	54.99	63.99
Entropic Value at Risk (EVaR)(%)	66.61	65.15	75.22
Risk Measures based on Drawdowns			
Average Drawdown (ADD)(%)	3.38	3.57	5.32
Max Drawdown (MDD)(%)	30.23	26.41	29.40

Conclusion