

# Notes on IMU Preintegration

Gyubeom Edward Im\*

November 30, 2024

## Contents

1	Introduction	1
2	Preliminaries	1
3	IMU Model and Motion Integration	1
4	IMU Preintegration On Manifold	2
5	References	3
6	Revision log	3

## 1 Introduction

## 2 Preliminaries

## 3 IMU Model and Motion Integration

일반적으로 IMU 센서로부터 얻을 수 있는 정보에는 3축의 가속도와 3축의 각속도 정보가 포함된다. 가속도와 각속도의 측정값(measurement)에는 bias와 노이즈 성분이 포함되어 있기 때문에 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} {}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) &= {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(t) + \mathbf{b}^g(t) + \boldsymbol{\eta}^g(t) \\ {}_B\tilde{\mathbf{a}}(t) &= \mathbf{R}_{WB}^\top(t)({}_W\mathbf{a}(t) - {}_W\mathbf{g}) + \mathbf{b}^a(t) + \boldsymbol{\eta}^a(t) \end{aligned} \quad (1)$$

- ${}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t)$ : 관측된(measured) 각속도
- ${}_B\tilde{\mathbf{a}}(t)$ : 관측된(measured) 가속도
- ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(t)$ : 실제(true) 각속도
- ${}_W\mathbf{a}(t)$ : 실제(true) 가속도
- $\mathbf{b}^g(t), \mathbf{b}^a(t)$ : 각속도와 가속도의 bias 값
- $\boldsymbol{\eta}^g(t), \boldsymbol{\eta}^a(t)$ : 각속도와 가속도의 노이즈 값

기호 앞에 위치하는 B는 "**B(=IMU) 좌표계에서 바라본**" 것을 의미한다. IMU의 포즈는  $\{\mathbf{R}_{WB}, {}_W\mathbf{p}\}$ 에 의해 B에서 W로 변환되어 월드 좌표계 기준으로 표현된다.  ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB} \in \mathbb{R}^3$ 는 B 좌표계에서 표현된 "W에서 본 B의" 순간적인 각속도(instantaneous angular velocity)를 의미한다.  ${}_W\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ 는 월드 좌표계에서 본 센서의 가속도를 의미하며  ${}_W\mathbf{g}$ 는 월드 좌표계에서 본 중력 벡터를 의미한다.

IMU 측정값으로부터 아래와 같은 **IMU Kinematic Model**을 사용하면 IMU의 모션을 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{WB} &= \mathbf{R}_{WB} {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}^\wedge \\ {}_W\dot{\mathbf{v}} &= {}_W\mathbf{a} \\ {}_W\dot{\mathbf{p}} &= {}_W\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2)$$

---

\*blog: alida.tistory.com, email: criterion.im@gmail.com

위 모델을 사용하면 시간에 따른 IMU의 포즈와 속도의 변화를 수식으로 나타낼 수 있다.  $t + \Delta t$  시간에 IMU 포즈와 속도는 다음과 같이 (2)를 적분하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{WB}(t + \Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t) \cdot \text{Exp}\left(\int_t^{t+\Delta t} {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(\tau)d\tau\right) \\ {}_W\mathbf{v}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{a}(\tau)d\tau \\ {}_W\mathbf{p}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{v}(\tau)d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{\tau} {}_W\mathbf{a}(\tau)d\tau^2\end{aligned}\quad (3)$$

만약 가속도  ${}_W\mathbf{a}$ 와 각속도  ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$ 가 시간  $[t, t + \Delta t]$  동안 일정(constant)하다고 가정하면 위 식은 다음과 같이 조금 더 간결하게 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{WB}(t + \Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t) \cdot \text{Exp}({}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}\Delta t) \\ {}_W\mathbf{v}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{a}\Delta t \\ {}_W\mathbf{p}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}\Delta t + {}_W\mathbf{a}\Delta t^2\end{aligned}\quad (4)$$

(1)에서 보다시피 실제 IMU 가속도와 각속도  ${}_W\mathbf{a}$ ,  ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$ 는 IMU 측정값  ${}_W\tilde{\mathbf{a}}$ ,  ${}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}$ 에 대한 함수이므로 위 식을 다시 고쳐쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{WB}(t + \Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t) \cdot \text{Exp}(({}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) - {}_B\mathbf{b}^g(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t) \\ {}_W\mathbf{v}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}_{WB}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - {}_B\mathbf{b}^a(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\ {}_W\mathbf{p}(t + \Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}{}_W\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_{WB}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - {}_B\mathbf{b}^a(t) - {}_B\boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2\end{aligned}\quad (5)$$

아래 첨자로 붙은 좌표계는 자명하기 때문에 가독성을 위하여 이를 생략하여 나타낸다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t + \Delta t) &= \mathbf{R}(t) \cdot \text{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) - \mathbf{b}^g(t) - \boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t) \\ \mathbf{v}(t + \Delta t) &= \mathbf{v}(t) + \mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\ \mathbf{p}(t + \Delta t) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2\end{aligned}$$

(6)

-  $\eta^{gd}, \eta^{ad}$ : 이산화 시간(discrete-time) 버전 각속도, 가속도 노이즈

이산화 시간(discrete-time) 버전 노이즈  $\eta^{gd}, \eta^{ad}$ 의 공분산은 연속 시간 노이즈  $\eta^g, \eta^a$ 와 샘플링 주기  $\Delta t$ 와 관련 있기 때문에 이에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\eta^{gd}(t)) &= \frac{1}{\Delta t} \text{Cov}(\eta^g(t)) \\ \text{Cov}(\eta^{ad}(t)) &= \frac{1}{\Delta t} \text{Cov}(\eta^a(t))\end{aligned}\quad (7)$$

## 4 IMU Preintegration On Manifold

(6)을 자세히 보면  $t$  시간과  $t + \Delta t$  시간의 사이의 상태 변수에 대한 관계적인 것을 알 수 있다. 따라서 (6)를 사용하면 IMU 측정값(measurement)가 들어올 때마다 다음 스텝의 상태 변수를 추정(estimation)할 수 있다.

두 키프레임  $i, j$ 가 주어졌을 때 두 키프레임 사이에 존재하는 모든 IMU 측정값들을 누적하면 하나의 측정값으로 합칠 수 있으며 이를 **preintegrated IMU 측정값(measurement)**이라고 정의한다. IMU는 카메라와 시간적으로 동기화되어 있다고 가정하고 임의의 이산 시간  $k$ 에 대한 측정값을 매 순간 얻는다고 할 때 (6)을  $k = i$ 부터  $k = j$  까지 누적한 preintegration IMU 측정값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_j &= \mathbf{R}_i \Pi_{k=i}^{j-1} \text{Exp}\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \eta_k^{gd}\right)\Delta t\right) \\ \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_i + \mathbf{g}\Delta t_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{R}_k \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}\right)\Delta t \\ \mathbf{p}_j &= \mathbf{p}_i + \sum_{k=i}^{j-1} \left[\mathbf{v}_k\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_k \left(\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad}\right)\Delta t^2\right]\end{aligned}\quad (8)$$

-  $\Delta t_{ij} \doteq \sum_{k=i}^{j-1} \Delta t$ : 키프레임  $i$  부터  $j - 1$ 까지 모든  $\Delta t$ 를 더한 값  
- 가독성을 위해  $(\cdot)(t_i)$ 를  $(\cdot)_i$ 로 표기하였다

(8)를 사용하면 두 키프레임  $i$ 와  $j$  사이의 IMU 측정값들을 누적하여 둘 사이의 상대적인 모션을 추정할 수 있다. 하지만 최적화 과정에서 비선형 상태 변수  $\mathbf{R}_i$ 가 업데이트 될 때마다  $[i, j]$  구간의 모든 비선형 상태 변수를 선형화 (linearization)하는 과정에서 반복적인 연산을 수행해야 한다. 예를 들어  $\mathbf{R}_i$ 가 변하면 이에 따른  $\mathbf{R}_k, k = i, \dots, j-1$  또한 모두 다시 계산해야 한다.

이러한 비효율적인 계산을 피하기 위해 (8)을 바로 사용하는 것이 아닌 아래와 같은 **두 키프레임  $i$ 와  $j$ 의 상대적인 모션 증가량(relative motion increments)**을 정의하여  $t_i$  시간의 포즈와 속도에 대해 독립적이 되도록 만든다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\top \mathbf{R}_j &= \Pi_{k=i}^{j-1} \text{Exp} \left( \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_k^g - \eta_k^{gd} \right) \Delta t \right) \\ \Delta \mathbf{v}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\top (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g} \Delta t_{ij}) &= \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \mathbf{R}_{ik} \left( \tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad} \right) \Delta t \\ \Delta \mathbf{p}_{ij} &\doteq \mathbf{R}_i^\top (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{g} \Delta t^2) &= \sum_{k=i}^{j-1} \left[ \Delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{R}_{ik} \left( \tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_k^a - \eta_k^{ad} \right) \Delta t^2 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

위 식에서 주목해야할 부분은  $\Delta \mathbf{v}_{ij}$ 와  $\Delta \mathbf{p}_{ij}$ 는 **실제 속도와 실제 위치의 물리적 변화를 의미하지 않는다는 사실이다**. 두 물리량은 (9) 식의 맨 오른쪽 부분을  $t_i$  시간의 상태 변수로부터 독립으로 만들기 위해 임의로 정의한 값이다. 식을 자세히 보면 맨 오른쪽 식은 중력 효과 또한 없는 것을 알 수 있다. (9)을 사용하면  $t_i$ 에 상관없이 IMU의 측정값으로부터 바로 두 키프레임 사이의 preintegration IMU 측정값을 구할 수 있다.

엄밀하게 말하면 (9)에서 IMU의 bias 값은 매 순간마다 변화해야 하지만 계산의 편의를 위해 두 키프레임  $i, j$  사이의 시간은 충분히 짧은 시간이기 때문에 bias 값을 상수로 가정한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^g &= \mathbf{b}_{i+1}^g = \dots = \mathbf{b}_{j-1}^g \\ \mathbf{b}_i^a &= \mathbf{b}_{i+1}^a = \dots = \mathbf{b}_{j-1}^a \end{aligned} \quad (10)$$

## 5 References

- [1] Forster, Christian, et al. "On-manifold preintegration for real-time visual-inertial odometry." IEEE Transactions on Robotics 33.1 (2016): 1-21.

## 6 Revision log

- 1st: 2024-11-27
- 2nd: 2024-11-30