Notes on IMU Preintegration

Gyubeom Edward Im*

November 30, 2024

Contents

1 Introduction

2 Preliminaries

3 IMU Model and Motion Integration

일반적으로 IMU 센서로부터 얻을 수 있는 정보에는 3축의 가속도와 3축의 각속도 정보가 포함된다. 가속도와 각속도의 측정값(measurement)에는 bias와 노이즈 성분이 포함되어 있기 때문에 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} {}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) &= {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(t) + \mathbf{b}^g(t) + \boldsymbol{\eta}^g(t) \\ {}_B\tilde{\mathbf{a}}(t) &= \mathbf{R}^{\intercal}_{WB}(t)({}_W\mathbf{a}(t) - {}_W\mathbf{g}) + \mathbf{b}^a(t) + \boldsymbol{\eta}^a(t) \end{aligned} \tag{1}$$

- ${}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t)$: 관측된(measured) 각속도
- ${}_B\tilde{\mathbf{a}}(t)$: 관측된(measured) 가속도
- ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(t)$: 실제(true) 각속도
- ${}_W\mathbf{a}(t)$: 실제(true) 가속도
- $\mathbf{b}^g(t), \mathbf{b}^a(t)$: 각속도와 가속도의 bias 값
- $\boldsymbol{\eta}^g(t), \boldsymbol{\eta}^a(t)$: 각속도와 가속도의 노이즈 값

기호 앞에 위치하는 B는 **"B(=IMU) 좌표계에서 바라본"** 것을 의미한다. IMU의 포즈는 $\{\mathbf{R}_{WB}, {}_W\mathbf{p}\}$에 의해 B에서 W로 변환되어 월드 좌표계 기준으로 표현된다. ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB} \in \mathbb{R}^3$는 B 좌표계에서 표현된 "W에서 본 B의" 순간적인 각속도(instantaneous angular velocity)를 의미한다. ${}_W\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$는 월드 좌표계에서 본 센서의 가속도를 의미하며 ${}_W\mathbf{g}$는 월드 좌표계에서 본 중력 벡터를 의미한다.

IMU 측정값으로 부터 아래와 같은 **IMU Kinematic Model**을 사용하면 IMU의 모션을 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{WB} &= \mathbf{R}_{WB}\, {}_B\boldsymbol{\omega}^{\wedge}_{WB} \\ {}_W\dot{\mathbf{v}} &= {}_W\mathbf{a} \\ {}_W\dot{\mathbf{p}} &= {}_W\mathbf{v} \end{aligned} \tag{2}$$

위 모델을 사용하면 시간에 따른 IMU의 포즈와 속도의 변화를 수식으로 나타낼 수 있다. $t + \Delta t$ 시간에 IMU

*blog: alida.tistory.com, email: criterion.im@gmail.com

포즈와 속도는 다음과 같이 (2)를 적분하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t)\cdot \mathrm{Exp}\left(\int_t^{t+\Delta t} {}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}(\tau)d\tau\right) \\
{}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{a}(\tau)d\tau \\
{}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{v}(\tau)d\tau + \int\int_t^{t+\Delta t} {}_W\mathbf{a}(\tau)d\tau^2
\end{aligned} \tag{3}$$

만약 가속도 ${}_W\mathbf{a}$와 각속도 ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$가 시간 $[t, t+\Delta t]$ 동안 일정(constant)하다고 가정하면 위 식은 다음과 같이 조금 더 간결하게 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t)\cdot \mathrm{Exp}({}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}\Delta t) \\
{}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{a}\Delta t \\
{}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}\Delta t + {}_W\mathbf{a}\Delta t^2
\end{aligned} \tag{4}$$

(1)에서 보다시피 실제 IMU 가속도와 각속도 ${}_W\mathbf{a}$, ${}_B\boldsymbol{\omega}_{WB}$는 IMU 측정값 ${}_W\tilde{\mathbf{a}}$, ${}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}$에 대한 함수이므로 위 식을 다시 고쳐쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{WB}(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_{WB}(t)\cdot \mathrm{Exp}(({}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{WB}(t) - \mathbf{b}^g(t) - \boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t) \\
{}_W\mathbf{v}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{v}(t) + {}_W\mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\
{}_W\mathbf{p}(t+\Delta t) &= {}_W\mathbf{p}(t) + {}_W\mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}{}_W\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}(t)({}_W\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2
\end{aligned} \tag{5}$$

아래 첨자로 붙은 좌표계는 자명하기 때문에 가독성을 위하여 이를 생략하여 나타낸다.

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathbf{R}(t+\Delta t) = \mathbf{R}(t)\cdot \mathrm{Exp}((\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) - \mathbf{b}^g(t) - \boldsymbol{\eta}^{gd}(t))\Delta t) \\
&\mathbf{v}(t+\Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{g}\Delta t + \mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t \\
&\mathbf{p}(t+\Delta t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{b}^a(t) - \boldsymbol{\eta}^{ad}(t))\Delta t^2
\end{aligned}} \tag{6}$$

- η^{gd}, η^{ad}: 이산화 시간(discrete-time) 버전 각속도, 가속도 노이즈

이산화 시간(discrete-time) 버전 노이즈 η^{gd}, η^{ad}의 공분산은 연속 시간 노이즈 η^g, η^a와 샘플링 주기 Δt와 관련 있기 때문에 이에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\eta^{gd}(t)) &= \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\eta^g(t)) \\
\mathrm{Cov}(\eta^{ad}(t)) &= \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\eta^a(t))
\end{aligned} \tag{7}$$

4 References

[1] Forster, Christian, et al. "On-manifold preintegration for real-time visual–inertial odometry." IEEE Transactions on Robotics 33.1 (2016): 1-21.

5 Revision log

- 1st: 2024-11-27
- 2nd: 2024-11-30