Test de autoevaluare pentru U. I. nr. 1

1. Ecuații diferențiale cu variabile separate

1. $\dfrac{dy}{1+y^2}+\dfrac{dx}{1+x^2}=0$;
2. $2yy'=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x_0=1$, $y_0=1$;
3. $\dfrac{x^3+1}{x}dx+\dfrac{y^2-1}{y}dy=0$, $x_0=1$, $y_0=1$;

2. Ecuații diferențiale cu variabile separabile

1. $xdy-ydx=\sqrt{1+x^2}dy+\sqrt{1+y^2}dx$;
2. $1+y^2+xyy'=0$, $x_0=1$, $y_0=0$;
3. $\left(x^2+a^2\right)\left(y^2+b^2\right)+\left(x^2-a^2\right)\left(y^2-b^2\right)y'=0$;

3. Ecuații diferențiale omogene

1. $y'=\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$;
2. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$;
3. $y'=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$, $x_0=-1$, $y_0=0$;

4. Ecuații diferențiale reductibile la ecuații omogene

1. $2x+y=(4x-y)y'$;
2. $(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0$;
3. $(3x-7y-3)y'+7x-3y-7=0$;

5. Ecuații diferențiale de ordinul I liniare şi omogene

1. $y' + \dfrac{y}{x-2} = 0$;
2. $3y'\left(x^2 - 1\right) - 2xy = 0$;
3. $\left(1 + x^2\right)y' + y\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) = 0,\ x_0 = 0,\ y_0 = 1$;
4. $y' = (2y + 1)\dfrac{\cos x}{\sin x},\ x_0 = \dfrac{\pi}{4},\ y_0 = \dfrac{1}{2}$;
5. $y' - \dfrac{y}{\arcsin x\sqrt{1 - x^2}} = 0$.

6. Ecuații diferențiale de ordinul I liniare şi neomogene

1. $y' + y = 2e^x$;
2. $xy' - y = -\ln x,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$;
3. $y' + ay = be^{\lambda x}$;
4. $y' + y\cos x = \sin x\cos x,\ x_0 = 0,\ y_0 = 1$;
5. $\left(1 - x^2\right)y' + 2xy = 4x$;

7. Ecuații diferențiale de ordinul I neliniare, reductibile la ecuații liniare

7.1 Ecuații Bernoulli

1. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2y^2}$;
2. $y' - \dfrac{4y}{x} = x\sqrt{y},\ y \geq 0, x \neq 0$;
3. $y' = \dfrac{y}{x} - 2xy^2,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$;

7.2 Ecuații Riccati

1. $y' = y^2 - x^2 + 1,\ y_1(x) = x$;
2. $2\left(x - x^2\sqrt{x}\right)y' + 2\sqrt{x}y^2 - y - x = 0,\ y_1(x) = x$;

3. $y' + y^2 \sin x = 2\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $y_1(x) = \frac{1}{\cos x}$;

4. $x^2\left(y' + y^2\right) = a(xy - 1)$, $y_1(x) = \frac{a}{x}$, $y_2(x) = \frac{1}{x}$;

7.3 Ecuații Lagrange

1. $y = \frac{2a}{1 + y'^2}$;
2. $y = -\frac{x}{y' - 2}$;
3. $y = 2xy' - y'^2$;

7.4 Ecuații Clairaut

1. $y = xy' + \frac{1}{y'^2}$;
2. $y = xy' + y'^3$;
3. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$;

8. Să se integreze următoarele ecuații cu diferențiale totale:

1. $\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$;

2. $\left(-\frac{1}{x} + y + \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\frac{1}{y} + x - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$;

3. $\left(x^2 y + y^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + x\right)(x + 2y)dy = 0$, știind că admite un factor integrant de forma $\lambda = \lambda(x)$;

4. $(y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz = 0$;

5. $\left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz = 0$.

Test de autoevaluare pentru U.I. nr. 2

1. Să se construiască ecuațiile diferențiale liniare şi omogene care au soluțiile particulare indicate:

1. $y_1 = \sin x;\ y_2 = \cos x$;
2. $y_1 = \sin^2 x;\ y_2 = \cos^2 x$;
3. $y_1 = x;\ y_2 = x^2;\ y_3 = e^x$;

2. Să se determine un sistem fundamental de soluții pentru ecuațiile diferențiale liniare şi omogene următoare şi să se scrie soluția generală a fiecăreia:

1. $xy''' - y'' - xy' + y = 0$;
2. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, ştiind că admite soluția $y_1 = \frac{\sin x}{x}$;
3. $y'' + (tgx - 2ctgx)y' + 2yctg^2 x = 0$, ştiind că admite soluția $y_1 = \sin x$;

3. Să se determine soluția generală şi soluția problemei Cauchy (când se precizează) a următoarelor ecuații diferențiale liniare şi omogene, cu coeficienți constanți:

1. $y'' - y = 0; y(0) = 2, y'(0) = 0$;
2. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$;
3. $y'' + 2y' + y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1$;
4. $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0$;
5. $y''' - y'' + y' - y = 0$;

4. Să se determine soluția generală şi soluția problemei Cauchy (când se precizează) a următoarelor ecuații diferențiale liniare şi neomogene, cu coeficienți constanți:

1. $y'' - 2y' + 3y = a, a \in \mathbb{R}$, constantă;
2. $y'' + y' = 3$;
3. $y'' + y = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$;
4. $y'' - 4y' + 4y = 1 + e^x + e^{2x}$;
5. $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2, y(0) = 1, y'(0) = -1$;
6. $y''' - y'' = x; y(1) = 1, y'(1) = 0, y''(1) = -1$;

7. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\left(x^2 + x\right)$;

8. $y'' - 3y' + 2y = x^2 e^x$;

9. $y'' + 2y' = e^{-2x}\left(x^2 + x\right) + 2x - 1$;

10. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$;

Pentru exemplele următoare să se determine o soluție particulară a ecuației neomogene prin metoda lui Lagrange:

11. $y'' + y = tgx$;

12. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$;

5. Să se determine soluția generală şi soluția problemei Cauchy (când se precizează) a următoarelor ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili, reductibile la ecuații cu coeficienți constanți:

1. $x^2 y'' + xy' - y = 0$;
2. $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$;
3. $\left(1+x\right)^3 y'' + 3\left(1+x\right)^2 y' + \left(1+x\right) y = 6\ln\left(1+x\right)$;

Test de autoevaluare pentru U. I. nr. 3

1. Să se construiască sistemele de ecuații diferențiale liniare şi omogene care admit următoarele sisteme fundamentale de soluții:

1. $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix}; Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix};$

2. $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}; Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix};$

2. Să se determine soluția generală şi soluția problemei Cauchy (când se precizează) a următoarelor sisteme de ecuații diferențiale liniare şi omogene, cu coeficienți constanți:

1. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 4y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 \end{cases}; y_1(0) = 1, y_2(0) = -1;$

2. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -3y_1 - y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2 \end{cases};$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 8y + 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x + 14y - 6z \end{cases};$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + z \end{cases}; x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 1;$

5. $\begin{cases} y'' - 4y + z' = 0 \\ z'' - 10z' - z = 0 \end{cases}.$

3. Să se determine soluția generală şi soluția problemei Cauchy (când se precizează) a următoarelor sisteme de ecuații diferențiale liniare şi neomogene, cu coeficienți constanți:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 34y - 42z + 2e^{4t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 10y + 6z + 5e^{7t} \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x + 10y - 18z + 8e^{10t} \end{cases}$;

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 18y + 9z + 4 + 18t - 9t^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - 2z - 5t + 2t^2 \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x + 14y - 6z - 3 - 12t + 6t^2 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z + 3x^2 \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y - 2z + 8x \end{cases}$;

4. Să se determine soluția generală şi soluția problemei Cauchy a sistemului de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili, reductibil la un sistem de ecuații cu coeficienți constanți:

1. $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} = -y - 2z + x^4 \cos x \\ x\dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z \end{cases}$; $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0, z\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$;