Reliability Analysis Homework 1

110024516 邱繼賢

Problem 1

(a) 參考 *Example 1.2 Integrated Circuit Life Test Data* 的 *Table 1.2* 可以看到只是紀錄前 28 個 failed data ($\frac{28}{4156} \approx 0.67\%$) 就花費了 1370 個小時，若是要觀測到 50% 的 units 都 fail 掉，那將會花費大量的時間和金錢成本，而且有多數工業製品的 hazard function 都有著 bathtub 的圖形性質，故只要監測時間大於一開始非常不穩定的 Infant mortality 時期，接下來的失效風險就會進入相對穩定的時期。所以我們會更在乎 1% 產品失效的時間，而不是 50% 產品失效的時間。

(b) 在進行可靠度分析時對於 mean/standard deviation 比較不感興趣，是因為在收集 failure time data 常常會有大量的 right censored 的資料點，這些數據的實際 failure time 數值相對大，在計算 mean/standard deviation 時會嚴重影響其數值，而且我們真正關心的是那些在早期就已經失效的產品 (見上一小題)，所以在進行可靠度分析時往往會選擇更加 robust 的統計量 quantiles，再加上 quantiles 可以很直接的反應出 failure probabilities/rates，對於我們推估出 failure time empirical cdf/pdf 很有幫助。

(c) 對於 non-repairable 的物品，失效的 mean time 就是一個很重要的指標，因為這種產品常常用於 mission-critical system，這對於操作的成功非常重要，使得我們去探討他的平均失效時間就變得有意義。

Problem 2

(a) 汽車表面烤漆的 life time 是用 calender age 來衡量，因為汽車烤漆的 failure 是藉由時間而不是距離所影響，而我們定義烤漆的 failure 是由表面是否有出現氣泡、裂痕、剝落來判斷，外在因素如溫度、紫外線日照等也會加速表面烤漆的失效。

(b) 汽車 lead-acid battery 的 life time 是用電池使用的年限，或是電池充電/放電的循環次數來衡量，這兩者都會影響著電池的供電能力，當電池所需充電頻率提高到一定程度，即電池蓄電量有顯著下降，則定義為電池的 failure，在外界環境較為溫暖時，電池的壽命會較長。

(c) 汽車的雨刷的 life time 是用雨刷使用次數來衡量，當雨刷上的橡膠磨損到一定程度，即定義為 failure，外界的溫度較高或是日照皆會加速橡膠的損壞。

(d) 汽車輪胎的 life time 是用行駛的距離來衡量，可以藉由觀察胎痕的深度，若是深度小於一定的數值，即定義為 failure，外界的溫度較高、胎壓較高、負重較重等因素皆會加速輪胎的損壞。

(e) LED 燈泡的 life time 是用使用的小時數或者開/關的次數來衡量，通常 LED 燈泡變色、光衰 (亮度減弱) 或是不亮就被定義為 failure，外界的環境溫度越高會加速燈泡的損壞。

Problem 3

(a)

$$P(T < 150 \mid T > 120) \;=\; \frac{P(120 < T < 150)}{P(T > 120)} \;=\; \frac{F(150) - F(120)}{1 - F(120)} \;=\; \frac{exp\left[-\left(\frac{120}{130}\right)^{2.5}\right] - exp\left[-\left(\frac{150}{130}\right)^{2.5}\right]}{exp\left[-\left(\frac{120}{130}\right)^{2.5}\right]} \;\approx\; 0.4574$$

(b) The remaining-life cdf

$$G\,(u;120) \;=\; P\,(U \le u \mid T > 120) \;=\; P\,(T \le u + 120 \mid T > 120) \;=\; \frac{F(u+120) - F(120)}{1 - F(120)}$$

$$= \frac{exp\left[-\left(\frac{120}{130}\right)^{2.5}\right] - exp\left[-\left(\frac{120+u}{130}\right)^{2.5}\right]}{exp\left[-\left(\frac{120}{130}\right)^{2.5}\right]} \;=\; 1 - exp\left[\left(\frac{120}{130}\right)^{2.5} - \left(\frac{120+u}{130}\right)^{2.5}\right]$$

$$\Rightarrow\; G^{-1}\,(p;120) \;=\; 130\left[\left(\frac{120}{130}\right)^{2.5} \;-\; log(1-p)\right]^{\frac{1}{2.5}} \;-\; 120$$

$$median \;=\; u_{0.5} \;=\; G^{-1}\,(0.5;120) \;=\; 130\left[\left(\frac{120}{130}\right)^{2.5} \;-\; log(1-0.5)\right]^{\frac{1}{2.5}} \;-\; 120 \;\approx\; 33.3699 \text{ (thousand miles)}$$

Problem 4

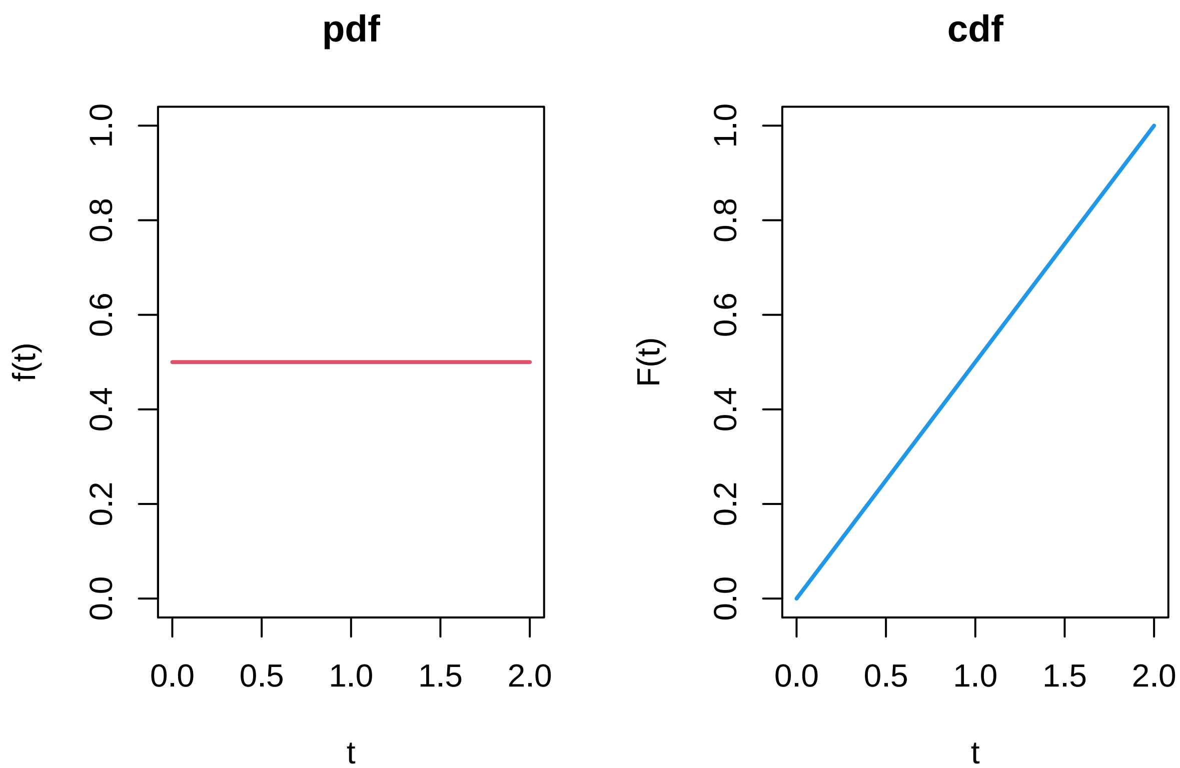
(a)

$$f(t) \;=\; \frac{dF(t)}{dt} \;=\; \frac{1}{2} \;\;,\;\; 0 < t \leq \; 2$$
$$h(t) \;=\; \frac{f(t)}{1-F(t)} \;=\; \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{t}{2}} \;=\; \frac{1}{2-t} \;\;,\;\; 0 < t < 2$$

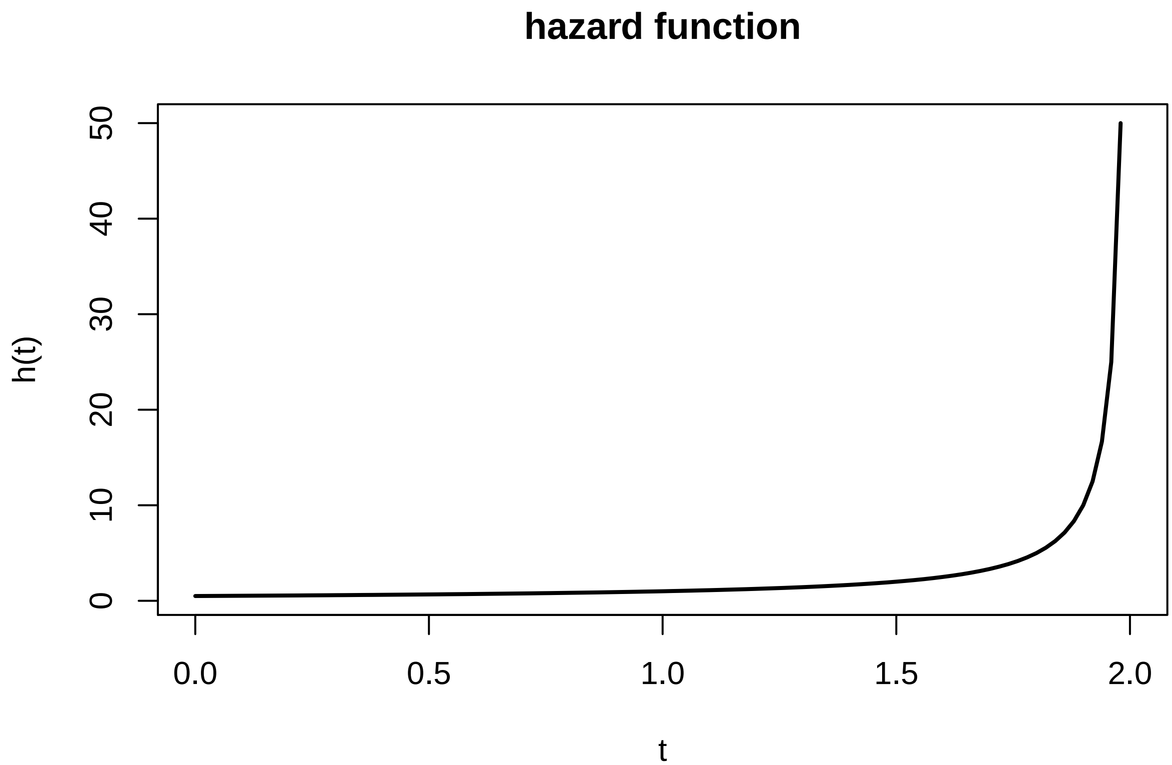
(b)

$$H(t) \;=\; \int_0^t h(x)\; dx \;=\; \int_0^t \frac{1}{2-x}\, dx \;=\; [-log(2-x)]_{x=0}^{t} \;=\; log\left(\frac{2}{2-t}\right) \;\;,\;\; 0 < t < 2$$
$$1 - exp[-H(t)] \;=\; 1 - \frac{2-t}{2} \;=\; \frac{t}{2} \;=\; F(t) \;\;,\;\; 0 < t \leq 2$$

(c)



(d)



直觀解釋：

因為所有產品的壽命就只到 $t = 2$ ，所以當 $t \to 2$ 時，所有的產品必須都失效，因此失效傾向 (propensity to fial) h(t) 的數值就會急速上升，趨近無限。

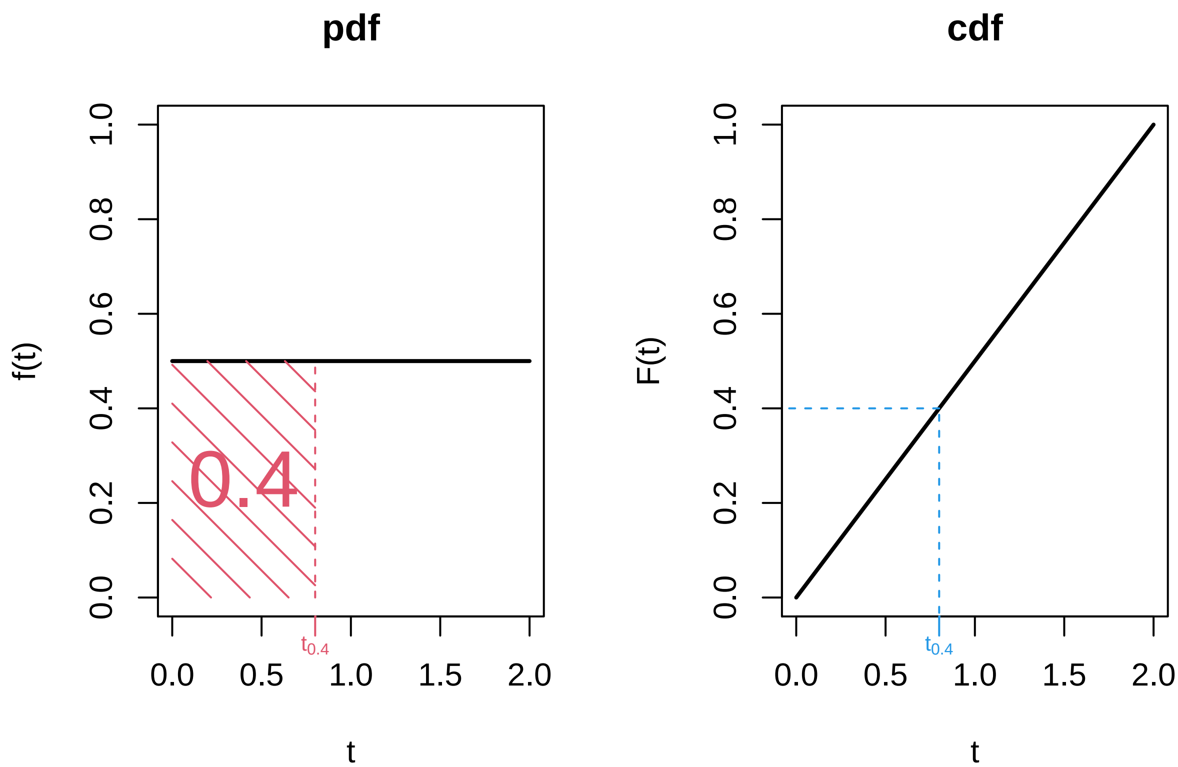
數學解釋：

$1 - F(t) \;\to\; 0$ as $t \to 2$, $\therefore\, h(t) \;=\; \frac{f(t)}{1-F(t)} \;\to\; \infty$ as $t \to 2$

(e)

$$p \;=\; P(T \;\leq\; t_p) \;=\; F(t_p) \;=\; \frac{t_p}{2} \;\Rightarrow\; t_p \;=\; F^{-1}(p) \;=\; 2p$$

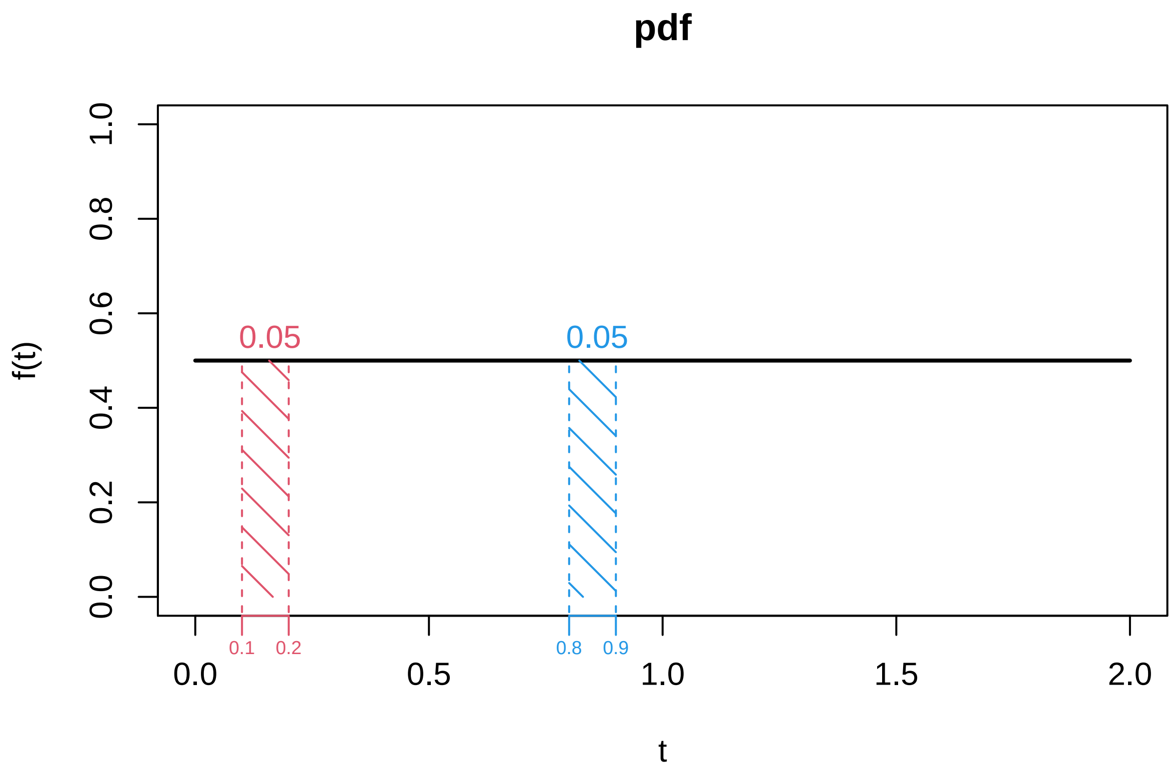
$$t_{0.4} \;=\; F^{-1}(0.4) \;=\; 2 \times 0.4 \;=\; 0.8$$



(f)

$$P(0.1 < T \leq 0.2) \;=\; \int_{0.1}^{0.2} f(t)\;dt \;=\; (0.2 - 0.1) \times 0.5 \;=\; 0.05$$

$$P(0.8 < T \leq 0.9) \;=\; \int_{0.8}^{0.9} f(t)\;dt \;=\; (0.9 - 0.8) \times 0.5 \;=\; 0.05$$



(g)

$$
\begin{aligned}
P(0.1 < T \leq 0.2 \mid T > 0.1) &= \frac{P(0.1 < T \leq 0.2)}{P(T > 0.1)} = \frac{F(0.2) - F(0.1)}{1 - F(0.1)} = 0.0526 \\
h(0.1) \times (0.2 - 0.1) &= 0.0526 = P(0.1 < T \leq 0.2 \mid T > 0.1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(0.8 < T \leq 0.9 \mid T > 0.8) &= \frac{P(0.8 < T \leq 0.9)}{P(T > 0.8)} = \frac{F(0.9) - F(0.8)}{1 - F(0.8)} = 0.0833 \\
h(0.8) \times (0.9 - 0.8) &= 0.0833 = P(0.8 < T \leq 0.9 \mid T > 0.8)
\end{aligned}
$$

(h)

因為 $f(x)$ 在此題為一個常數函數，所以

$$
h(t) \times \Delta t = \frac{f(t) \times \Delta t}{1 - F(t)} = \frac{\int_t^{t+\Delta t} f(t)\ dt}{1 - F(t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = P(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t)
$$

此近似值會正好跟實際值一樣 (不論 Δt 大小為何)，但是在一般的情況下，此近似式只會在 Δt 足夠小的時候才會成立。

Problem 5

75 FITs : 每小時每 10^9 個單位中有 75 個單位壞掉

$$\Rightarrow \; \frac{75}{10^9} \times (1500 \times 20) \times (2 \times 8760) \; = \; 39.42$$

Problem 6

(a)

$$p_i \; = \; P(t_{i-1} < T \le t_i \mid T > t_{i-1}) \; = \; \frac{P(t_{i-1} < T \le t_i)}{P(T > t_{i-1})} \; = \; \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{1 - F(t_{i-1})} \; = \; \frac{\pi_i}{S(t_{i-1})}$$

where

$$\pi_i \; = \; P(t_{i-1} < T \le t_i) \; = \; F(t_i) \; - \; F(t_{i-1})$$

(b)

Let's prove **(d)** first

$$p_i \; = \; \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{1 - F(t_{i-1})} \; \Rightarrow \; 1 - p_i \; = \; \frac{1 - F(t_i)}{1 - F(t_{i-1})}$$

$$\prod_{j=1}^{i} (1 - p_j) \; = \; [1 - F(t_1)] \times \frac{1 - F(t_2)}{1 - F(t_1)} \times \frac{1 - F(t_3)}{1 - F(t_2)} \times ... \times \frac{1 - F(t_{i-1})}{1 - F(t_{i-2})} \times \frac{1 - F(t_i)}{1 - F(t_{i-1})} \; = \; 1 - F(t_i) \; = \; S(t_i)$$

And by the result in **(a)**

$$\pi_1 \; = \; p_1 \times S(t_0) \; = \; p_1 \times S(0) \; = \; p_1 \times 1 \; = \; p_1$$

$$\pi_i \; = \; p_i \times S(t_{i-1}) \; = \; p_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - p_j) \;\; , \;\; i = 2, ..., m$$

$$\pi_{m+1} \; = \; p_{m+1} \times S(t_m) \; = \; P(t_m < T < \infty \mid T > t_m) \; \times \; S(t_m) \; = \; 1 \times \prod_{j=1}^{m} (1 - p_j) \; = \; \prod_{j=1}^{m} (1 - p_j)$$

(c)

已知 p_i 為一個機率值，故 $0 \le p_i \le 1 \;\; , \;\; \forall i = 1, 2, ..., m$，若是 $\pi_1 > 0, ..., \pi_{m+1} > 0$，且任意 π_i 都是 p_i 或 $1 - p_i$, $i = 1, ..., m$ 的乘積 (by (b) 小題)，所以 $p_i \ne 0 \;\; and \;\; (1 - p_i) \ne 0$, $\forall i = 1, ..., m \;\; \Rightarrow \;\; 0 < p_i < 1$, $\forall i = 1, ..., m$

(d)

We have shown in **(b)**

Problem 7

(a)

$$
\begin{aligned}
L(z) &= \frac{1}{1-F(z)} \int_z^{\infty} (1-F(u))\; du \\
L'(z) &= \frac{1}{\left[1-F(z)\right]^2} \left[(F(z)-1)(1-F(z)) + f(z) \int_z^{\infty} [1-F(z)]\; dz\right] = -1 + \frac{f(z)}{[1-F(z)]^2} \int_z^{\infty} [1-F(z)]\; dz
\end{aligned}
$$

$$
1 - exp\left[-\int_0^t \frac{1+L'(z)}{L(z)} dz\right] = 1 - exp\left[-\int_0^t \frac{f(z)}{1-F(z)} dz\right] = 1 - exp\left[log(1-F(t))\right] = F(t)
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
S(t) &= 1 - F(t) = exp\left[-\int_0^t \frac{1+L'(z)}{L(z)}\; dz\right] \\
f(t) &= \frac{dF(t)}{dt} = \frac{1+L'(t)}{L(t)} \times exp\left[-\int_0^t \frac{1+L'(z)}{L(z)}\; dz\right] \\
h(t) &= \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{1+L'(z)}{L(z)}
\end{aligned}
$$

Problem 8

With $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, and (u, l) are the upper and lower bound of parameter p, if $X = x$ is observed

$$
\begin{cases}
\dfrac{\alpha}{2} = P(X \le x \mid p = u) = P(Y_1 \ge u) \\
\dfrac{\alpha}{2} = P(X \ge x \mid p = l) = P(Y_2 \le l)
\end{cases}
$$

where $Y_1 \sim Beta(x+1, n-x)$ and $Y_2 \sim Beta(x, n-x+1)$

$\therefore u = qbeta(1-\frac{\alpha}{2}, x+1, n-x)$