

Méthodes de Monte Carlo et principes de réduction de variance

Restitution séance 1

9 février 2026

Plan

- 1 Rappel sur la méthode de Monte Carlo
- 2 Méthodes de Réduction de Variance
- 3 Variables de Contrôle
- 4 Génération de Variables Aléatoires
- 5 Mouvement Brownien

Objectif

Estimer des quantités δ en utilisant la simulation de variables aléatoires

Formulation du problème

Problème général

On cherche à estimer :

$$\delta = \mathbb{E}_\nu[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\nu(dx)$$

où $X \sim \nu$ et $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Estimateur de Monte Carlo

Simuler $(X_n)_{n \geq 1}$ variables i.i.d. suivant ν , puis estimer :

$$\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(X_k)$$

Vitesse de Convergence

Erreur quadratique moyenne

Si h est de carré intégrable par rapport à ν :

$$\mathbb{E} [(\bar{h}_n - \mathbb{E}[h(X)])^2] = \frac{\sigma^2}{n}$$

où $\sigma^2 = \text{Var}[h(X)]$

Vitesse de convergence

- Vitesse en $O(n^{-1/2})$
- Chaque chiffre significatif supplémentaire nécessite 100 fois plus de simulations !

Théorème Central Limite

Theorem (TCL)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi ν telle que $h(X_1)^2$ soit ν -intégrable. Alors :

$$\sqrt{n}(\bar{h}_n - \mathbb{E}[h(X_1)]) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Conséquence pratique

L'erreur est aléatoire mais peut être quantifiée via un intervalle de confiance

IC au niveau $1 - \alpha$

$$IC_{1-\alpha} = \left[\bar{h}_n - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{h}_n + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \right]$$

avec $\Phi(q_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

Trois estimateurs possibles

- ❶ $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y}_n)^2$
- ❷ $\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y}_n)^2$ (sans biais)
- ❸ $\hat{\sigma}_{2n}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (Y_{2k-1} - Y_{2k})^2$

Théorème de Slutsky

La convergence en loi du TCL est préservée lorsque σ^2 est remplacée par $\hat{\sigma}_n^2$

Pourquoi la méthode de Monte Carlo ?

Méthodes déterministes

Pour $\delta = \int_0^1 h(x)dx$:

- Méthode des trapèzes ($h \in C^2$) : erreur en $O(n^{-2})$
- Méthode de Simpson ($h \in C^4$) : erreur en $O(n^{-4})$

Inconvénient de Monte Carlo

Pour la même précision qu'une méthode déterministe avec n points :

- Trapèzes : Monte Carlo nécessite $\sim n^4$ tirages
- Simpson : Monte Carlo nécessite $\sim n^8$ tirages !

Pourquoi la méthode de Monte Carlo : avantage en Grande Dimension

Problème en dimension d

Pour $\delta = \int_{[0,1]^d} h(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$

- **Simpson** : erreur en $O(n^{-4/d}) \rightarrow$ inefficace si d grand
- **Sommes de Riemann** : coût $T = n^d$ pour précision $T^{-1/d}$
- **Monte Carlo** : précision $T^{-1/2}$ indépendante de d !

Conclusion

Monte Carlo est avantageux à partir de $d \geq 3$

Conclusion

Facteurs influençant les performances

L'erreur dépend uniquement de deux facteurs :

- Le nombre de simulations n
- La variance $\sigma^2 = \text{Var}[h(X)]$

Deux stratégies pour réduire l'erreur

- 1 **Augmenter** n : coût de calcul plus élevé
- 2 **Réduire** σ^2 : méthodes de réduction de variance

Méthode de réduction de variance

Objectif et Efficacité Relative

Objectif

Construire un estimateur $\hat{\delta}_n$ tel que :

$$\mathbb{E}[\hat{\delta}_n] = \delta \quad \text{et} \quad \text{Var}[\hat{\delta}_n] < \text{Var}[\bar{h}_n]$$

Efficacité Relative

$$R(\bar{h}_n, \hat{\delta}_n) = \frac{C\sigma^2}{C_1\sigma_1^2}$$

- $R > 1$: méthode efficace
- Plus R est grand, meilleur est le gain

Principe de la Méthode

Idée

Réduire la variance en utilisant une fonction auxiliaire h_0 dont l'espérance $m = \mathbb{E}[h_0(X)]$ est connue exactement

Estimateur

$$\hat{\delta}_n(b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{h(X_k) - b[h_0(X_k) - m]\}$$

- Sans biais : $\mathbb{E}[\hat{\delta}_n(b)] = \delta$
- b : coefficient de contrôle à optimiser

Variance et Coefficient Optimal

Variance

$$\text{Var}[\hat{\delta}_n(b)] = \text{Var}[\bar{h}_n] + \frac{1}{n} \{ b^2 \text{Var}[h_0(X)] - 2b \text{Cov}[h(X), h_0(X)] \}$$

Coefficient optimal b^*

$$b^* = \frac{\text{Cov}[h(X), h_0(X)]}{\text{Var}[h_0(X)]}$$

$$\text{Var}[\hat{\delta}_n(b^*)] = \text{Var}[\bar{h}_n](1 - \rho^2)$$

où $\rho = \text{Corr}[h(X), h_0(X)]$

Condition d'Efficacité

Réduction de variance garantie

$$\rho \neq 0 \Rightarrow \text{Var}[\hat{\delta}_n(b^*)] < \text{Var}[\bar{h}_n]$$

Efficacité relative

$$R(\bar{h}_n, \hat{\delta}_n(b)) = \frac{C}{C + nC(h_0)} \cdot \frac{1}{1 - \rho^2}$$

Méthode efficace si $R > 1$, i.e. :

$$|\rho| > \sqrt{\frac{C(h_0)}{C_\nu + C_h + C(h_0)}}$$

Variables de Contrôle Multiples

Généralisation

Avec s fonctions de contrôle h_1, \dots, h_s :

$$\hat{\delta}_n(\mathbf{b}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(X_k) - \langle \mathbf{b}, Z_k - \mathbb{E}[Z_k] \rangle$$

où $Z_k = (h_1(X_k), \dots, h_s(X_k))$

Coefficient optimal

$$\mathbf{b}^* = \Sigma_Z^{-1} \Sigma_{h(X), Z}$$

$$\text{Var}[\hat{\delta}_n(\mathbf{b}^*)] = \text{Var}[\bar{h}_n] \left(1 - \frac{\Sigma_{h(X), Z}^T \Sigma_Z^{-1} \Sigma_{h(X), Z}}{\text{Var}[h(X)]} \right)$$

Avantages

- Réduction garantie si $\rho \neq 0$ (signe indifférent)
- Meilleure quand $|\rho| \rightarrow 1$
- Généralisation à plusieurs variables de contrôle

Limitations

- Nécessite de trouver h_0 corrélée avec h et d'espérance connue
- Estimation de b^* peut introduire un biais
- Coût supplémentaire d'évaluation de h_0

En pratique

- Chercher h_0 fortement corrélée avec h
- Privilégier stratégie 2 (full sample) pour n grand
- Vérifier que $R(\bar{h}_n, \hat{\delta}_n) > 1$

Générateurs de nombres

Méthode de la Fonction Inverse

Principe

Si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$ et F est la fonction de répartition de X , alors :

$$F^{\leftarrow}(U) \sim X$$

où $F^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$ (inverse généralisé)

Exemples classiques

- **Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda) : X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) = -\frac{1}{\lambda} \ln(U)$
- **Weibull** $W(\lambda, k) : X = \lambda \{-\ln(U)\}^{1/k}$
- **Binomiale** $\mathcal{B}(n, p) : X = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{U_i \leq p\}}$

Limitation

Nécessite F^{\leftarrow} explicite (pas le cas pour $\mathcal{N}(0, 1)$ par exemple)

Méthode d'Acceptation-Rejet

Principe

Pour simuler $X \sim f$:

- ➊ Choisir densité instrumentale g facile à simuler
- ➋ Trouver $M \geq 1$ tel que $f(x) \leq Mg(x)$ pour tout x
- ➌ Répéter :
 - Simuler $Y \sim g$ et $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$
 - Si $U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}$, accepter $X = Y$
 - Sinon, rejeter et recommencer

Probabilité d'acceptation

$$\mathbb{P}[\text{acceptation}] = \frac{1}{M}$$

Nombre moyen d'essais : $\mathbb{E}[T] = M$

Acceptation-Rejet : Choix de g et M

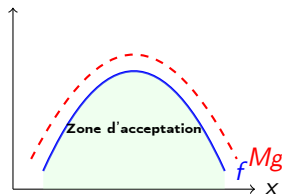
Conditions

- $\text{supp}(f) \subseteq \text{supp}(g)$
- g facile à simuler
- M petit pour efficacité

Optimisation

$$M^* = \sup_x \frac{f(x)}{g(x)}$$

Plus M est proche de 1, plus la méthode est efficace



Autres Transformations

Box-Muller : Génération de Gaussiennes

Si $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}([0, 1])$ i.i.d., alors :

$$X_1 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2), \quad X_2 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2)$$

sont i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, 1)$

Vecteur Gaussien Multivarié

Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ avec $\Sigma = LL^T$ (Cholesky) :

- 1 Simuler $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ avec $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i.i.d.
- 2 Poser $X = \mu + LZ$

Dimension 2

Si $\rho \in [-1, 1]$: $X_1 = \mu_1 + \sigma_1 Z_1$, $X_2 = \mu_2 + \sigma_2(\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2)$

Définition du Mouvement Brownien

Définition

Un processus stochastique $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard si :

- 1 $W_0 = 0$ presque sûrement
- 2 Trajectoires continues
- 3 Accroissements indépendants
- 4 Accroissements stationnaires : $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ pour $s < t$

Propriétés statistiques clés

- $\mathbb{E}[W_t] = 0$ et $\text{Var}[W_t] = t$
- $\text{Cov}[W_s, W_t] = \min(s, t)$

Simulation d'une Trajectoire Brownienne

Méthode : Forward Simulation

Pour simuler $(W_{t_0}, W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$:

- ❶ Poser $W_0 = 0$
- ❷ Pour $k = 1, \dots, n$:
 - Simuler $Z_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i.i.d.
 - Calculer $W_{t_k} = W_{t_{k-1}} + \sqrt{t_k - t_{k-1}} \cdot Z_k$

Justification

$$W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1}) = \sqrt{t_k - t_{k-1}} \cdot \mathcal{N}(0, 1)$$

Application : Modèle de Black-Scholes

Prix d'un actif

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}$$

où :

- r : taux d'intérêt sans risque
- σ : volatilité du prix de l'option
- $(W_t)_{t \geq 0}$: mouvement brownien standard

Valorisation d'option d'achat

$$\delta = \mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+]$$

Simuler $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$ pour estimer δ par Monte Carlo