字符串1

以下如果无特殊说明，字符串下标都是从1开始

字符串表面上就是只存字符的动态数组，即`vector<char>`，但它拥有一些普通数组不关心的问题，例如字符串匹配问题，回文问题，等等。同时，字符串之间还可以比较大小（我们一般不会关系普通数组之间的“大小”），该比较被称为“字典序”。两个字符串s和t的大小关系的比较方法如下：从左到右按次比较$s[i]$和$t[i]$，如果首次发现了$s[i] \neq t[i]$，那么谁小，哪个字符串就小；如果一直没发现$s[i] \neq t[i]$，那么哪个字符串短，哪个就小；否则就相等。容易验证，这个字典序是个偏序关系（这就导致了二叉搜索树Binary Search Tree里也可以直接存字符串。以后会介绍BST）。

字符串的题目可以很简单，也可以非常的难。这里不讨论非常进阶的字符串问题算法，只考虑比较简单的问题。

自动机模型

自动机有很多种。这里只介绍最简单的确定性有限自动机。

确定性有限自动机（Deterministic Finite Automaton，简称 DFA）是一种数学模型，用于描述一个具有有限个状态的系统，其中系统的状态转移完全由当前状态和输入符号唯一决定。DFA 是有限状态自动机的一种特殊形式，具有确定性的特点。

DFA 的组成要素：

1. **状态集合（States，记作 Q）**：系统可能处于的有限个状态的集合。
2. **输入字母表（Alphabet，记作 Σ）**：系统能够接收的输入符号的有限集合。
3. **转移函数（Transition Function，记作 δ）**：定义了状态和输入符号之间的关系，形式为$\delta : Q \times \Sigma \to Q$。
4. **初始状态（Start State，记作 q_0）**：系统开始时所处的状态，属于状态集合Q。
5. **接受状态集合（Accept States，记作 F）**：系统在这些状态下被认为接受输入串，是状态集合Q的子集。

DFA 的工作原理：

- **输入处理**：DFA从初始状态开始，依次读取输入串中的每一个符号。
- **状态转移**：在每一步，根据当前状态和当前输入符号，通过转移函数δ唯一确定下一个状态。
- **接受条件**：当输入串全部读取完毕后，如果最终状态属于接受状态集合F，则DFA接受该输入串；否则，拒绝。

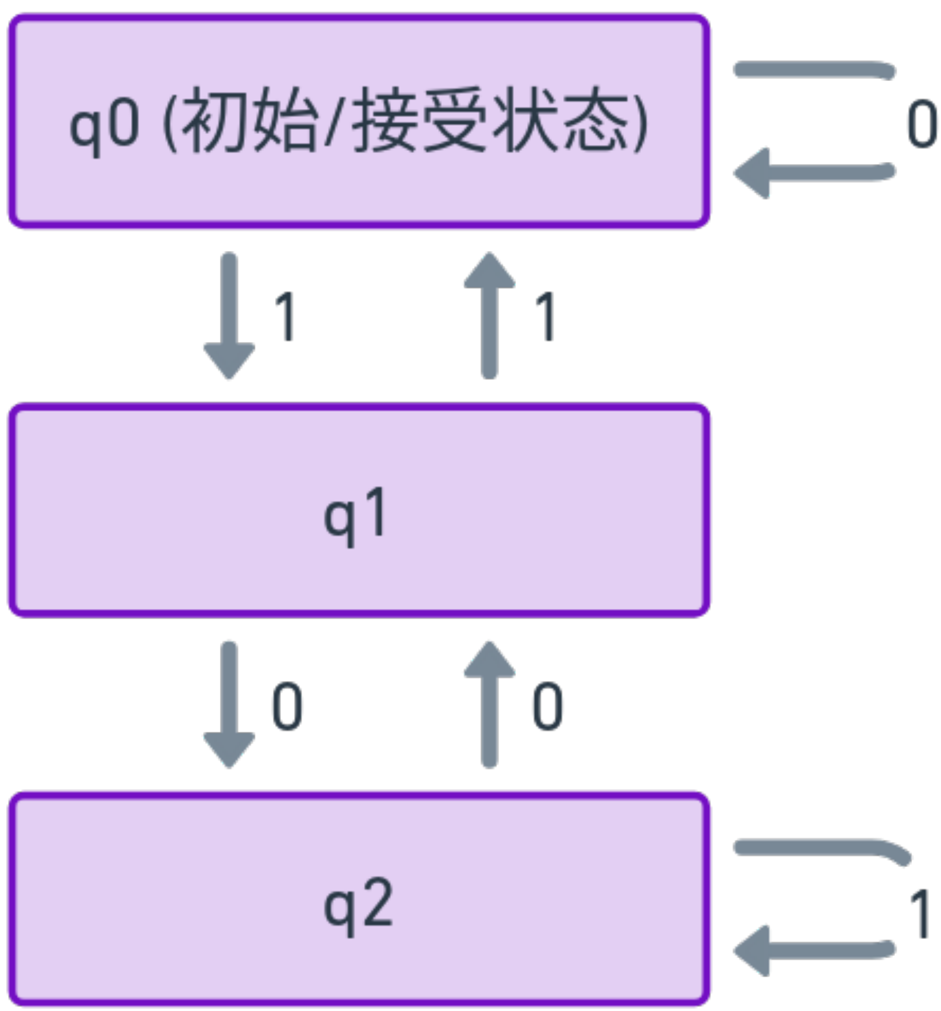
自动机的例子

假设需要构建一个DFA，用于识别所有能被3整除的二进制数。

- **状态集合**：$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$，分别表示当前余数为0、1、2。
- **输入字母表**：$\Sigma = \{0, 1\}$
- 转移函数：
  - $\delta(q_0, 0) = q_0$；$\delta(q_0, 1) = q_1$
  - $\delta(q_1, 0) = q_2$；$\delta(q_1, 1) = q_0$
  - $\delta(q_2, 0) = q_1$；$\delta(q_2, 1) = q_2$
- **初始状态**：q_0
- **接受状态集合**：$F = \{q_0\}$

在这个 DFA 中，每个状态表示当前读取的二进制数除以3的余数。通过状态转移，可以判断任意一个二进制串是否能被3整除。

示意图如下：



根据这个状态机，我们可以给几个例子：

例子1

输入：`110`（对应十进制的 6）

- 初始状态：**q0** （余数为 0，接受状态）
- 读取第一位 1
    - 当前状态：**q0**
    - 转移条件：`1`
    - 新状态：**q1** （`(0×2 + 1) % 3 = 1`）
- 读取第二位 1
    - 当前状态：**q1**
    - 转移条件：`1`
    - 新状态：**q0** （`(1×2 + 1) % 3 = 0`）
- 读取第三位 0
    - 当前状态：**q0**
    - 转移条件：`0`
    - 新状态：**q0** （`(0×2 + 0) % 3 = 0`）

最终状态：**q0**（接受状态）

结论：输入的二进制数 `110` 能被 3 整除。

例子2

输入：`101`（对应十进制的 5）

- 初始状态：**q0** （余数为 0，接受状态）
- 读取第一位 1
    - 当前状态：**q0**
    - 转移条件：`1`
    - 新状态：**q1** （`(0×2 + 1) % 3 = 1`）
- 读取第二位 0
    - 当前状态：**q1**
    - 转移条件：`0`
    - 新状态：**q2** （`(1×2 + 0) % 3 = 2`）
- 读取第三位 1
    - 当前状态：**q2**
    - 转移条件：`1`

- 新状态：**q2** （`(2×2 + 1) % 3 = 2`）

最终状态：**q2**（非接受状态）

结论：输入的二进制数 `101` 不能被 3 整除。

简单来说，DFA就是判断某个串是否满足某种条件的一个数学模型。

现在我们介绍一个关于字符串的最简单的DFA，序列自动机。

序列自动机

考虑一个非常简单的问题。设字符串s长n，给出若干询问，每次询问问某个串t是否是s的子序列。不妨假设t的长度是m。

如果只询问一次，算法是很简单的，只需要在s里依次寻找$t[1], t[2], \ldots$，如果能一直寻找到$t[m]$，则说明t是s的子序列。单次询问的时间复杂度是$O(n+m)$，不可能更低了。

如果询问多次，我们考虑能否构造一个数据结构，使得每次询问的时间复杂度降下来。我们定义$f[i][c]$为，字符c在$s[i+1:]$首次出现的位置，如果不出现则定义其为0。假设f已经全部求出，那么对于t，查询的过程如下：

1. 首先我们要看$t[1]$是否出现，于是看$f[0][t[1]]$，如果$f[0][t[1]] = -1$，那t不可能是s的子序列，返回false。否则令$x_1 = f[0][t[1]]$，说明$s[x_1] = t[1]$；
2. 接下来要看$s[x_1+1:]$里$t[2]$首次出现的位置，于是看$f[x_1][t[2]]$，如果其等于-1，那也返回false。否则令$x_2 = f[x_1][t[2]]$；
3. 以此类推，继续看$t[3], t[4], \ldots$，一直查询到$f[x_{m-1}][t[m]]$，如果依然不等于-1，那整个t查询完毕了，说明t确实是s的子序列。

我们可以看到，如果有$n+2$个状态分别记为$-1, 0, 1, 2, \ldots, n$，初始状态为0，那么f其实是定义了一个状态转移函数，每次读到一个t的字符，f就规定了下一个跳到的状态是什么。只要读完t之后，停留在了非-1的状态，那么都说明t是s的子序列，即非-1状态就是接受状态集；而-1其实是一个“死亡状态”，即一旦进入了这个状态，那之后再也出不来了。算法里我们可以直接加入if判断，如果走到了-1即返回false。注意到按照这种定义，空串也算是s的子序列。

接下来考虑该DFA的转移函数f怎么构建。首先$\forall c, f[n][c] = -1$。接着对于下标k，如果$s[k+1] = c$，那么显然$f[k][c] = k+1$，而$\forall d \neq c, f[k][d] = f[k+1][d]$。其含义是非常显然的。假设所有字符串都只含英文小写字母，那么程序可以这么写：

```
vector<vector<int>> buildDFA(string& s) {
  int n = s.size();
  // 为了让s下标从1开始，这里前面加一个空格
  s = " " + s;
  vector<vector<int>> dfa(n + 1, vector<int>(26, -1));
  for (int i = n - 1; i >= 0; i--)
    for (char ch = 'a'; ch <= 'z'; ch++)
      dfa[i][ch] = s[i + 1] == ch ? i + 1 : dfa[i + 1][ch];
  return dfa;
}
```

而回答询问的函数可以这么写：

```
bool query(string& t) {
  int x = 0;
  for (char ch : t)
    if (!~(x = dfa[x][ch])) return false;
  return true;
}
```

预处理时间复杂度$O(n|\Sigma|)$，Σ是字母表集合（上面例子里Σ就是全体英文小写字母）。每次询问时间$O(m)$，比单次询问时间快很多。

作业

实现序列自动机。上面是用vector实现的，当然还可以用unordered_map来实现以达到空间的节省。

Leetcode 1055