关于电感的伏安特性

区艺锋

2024 年 7 月 25 日

下图是一个电路的示意图，画出了电源内部和外电路中的一段导体。

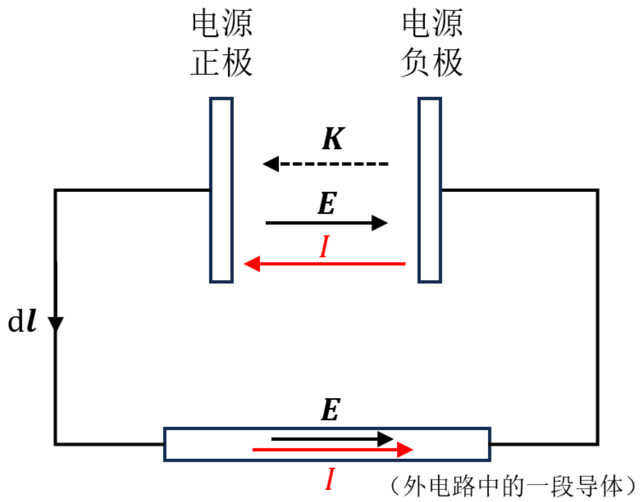

图 1: 电路示意图

在这个电路中，微分形式的欧姆定律写为

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K}) \tag{1}$$

$\boldsymbol{E}$ 指的是恒定电场的场强（恒定电场与静电场有着相同的性质），$\boldsymbol{K}$ 指的是这个电路中的电源所产生的非静电场强。

在外电路对 (1) 式进行积分，选取图中的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向（选取线元方向相当于规定坐标系）

$$\int_{out} \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{out} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{out} \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2}$$

$$IR = U + 0 \tag{3}$$

其中，R 为外电路总电阻，U 为路端电压。

在电源内部对 (1) 式进行积分

$$\int_{in} \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{in} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{in} \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4}$$

$$Ir = -U + E \tag{5}$$

其中，r 为电源内阻，E 为电源电动势。由恒定电场的环路定理 $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{out} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{in} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，所以 $\int_{in} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{out} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -U$，也就是说电源内部由恒定电场带来的电势差的大小等于路端电压。

将 (3) 式和 (5) 式相加即得全电路欧姆定律 $E = I(R+r)$，这是众所周知的。

现在来关注一下 (5) 式，<u>若电源内阻 $r=0$，那么就可以得到 $U=E$，即电源内部由恒定电场带来的电势差大小等于电源电动势，同时显而易见的在电源内部恒定电场的场强 $\boldsymbol{E}$ 方向与电源的非静电场强 $\boldsymbol{K}$ 方向相反。</u>有这个结论就可以分析电感的伏安特性了。

假如有下图这样的情况

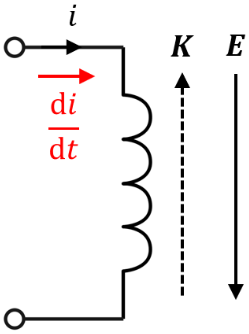

图 2: 电流变化率的一种情况

电流 i 沿图 2中的方向流动，且电流的变化率 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 也沿着这个方向（其实电流的方向对这里问题的分析没有什么用，只是因为直接说电流的变化率太突兀，所以标出了电流的方向）。根据法拉第电磁感应定律（或楞次定律，因为所产生的非静电场强 $\boldsymbol{K}$ 的方向与线圈的绕向无关，用楞次定律可以更快地得出下面一句话的结论），电感产生的非静电场强 $\boldsymbol{K}$ 沿图 2中的方向（这里电感产生的非静电场即涡旋电场）。

如果将电感视为理想电感，即忽略线圈的电阻，根据前面下划线的结论，则电感中似稳电场（似稳电场与恒定电场有着相同的性质）的场强 $\boldsymbol{E}$ 方向与电感产生的非静电场强 $\boldsymbol{K}$ 方向相反，且由似稳电场带来的电势差 u_L 的大小与电磁感应产生的电动势 e 的大小相等。

如果电流的变化率 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 调转，各物理量则有下图所示的方向。

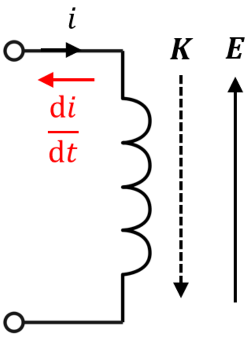

图 3: 电流变化率的另一种情况

可以看出，无论电流的变化率 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 沿什么方向，电感中似稳电场的场强 $\boldsymbol{E}$ 方向都与电流的变化率方向相同。

因此可以引入电感中似稳电场带来的电势差 u_L（也就是平时用的电压）与电流 i 的关联参考方向，如下图。

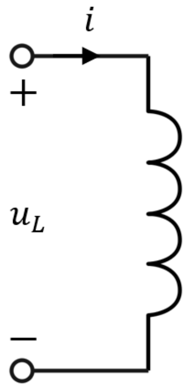

图 4: 电感中似稳电场带来的电势差 u_L 与电流 i 的关联参考方向

如果电流的变化率方向与图 4中所选的电流参考方向相同，则 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} > 0$。根据之前的分析，电感中似稳电场的场强 $\boldsymbol{E}$ 方向与电流的变化率方向相同。因此，在图 4中所选的电压参考方向下，似稳电场带来的电势差 $u_L > 0$。可以看出，这种情况下 u_L 和 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 同号。通过同样的分析可得，在图 4的关联参考方向下，若 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} < 0$，则会有 $u_L < 0$，两者也是同号的。也就是说，**在图 4的关联参考方向下，$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 与 u_L 的数值是相对正号的。**

根据法拉第电磁感应定律，可以计算 u_L 的大小

$$\begin{aligned} |u_L| &= |e| && (6) \\ &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} && (7) \end{aligned}$$

其中，e 是电磁感应产生的电动势。再根据 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 与 u_L 的数值相对正号，则

$$\boxed{u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} \tag{8}$$

(8) 式即电感的伏安特性公式，在图 4所规定的关联参考方向下成立。