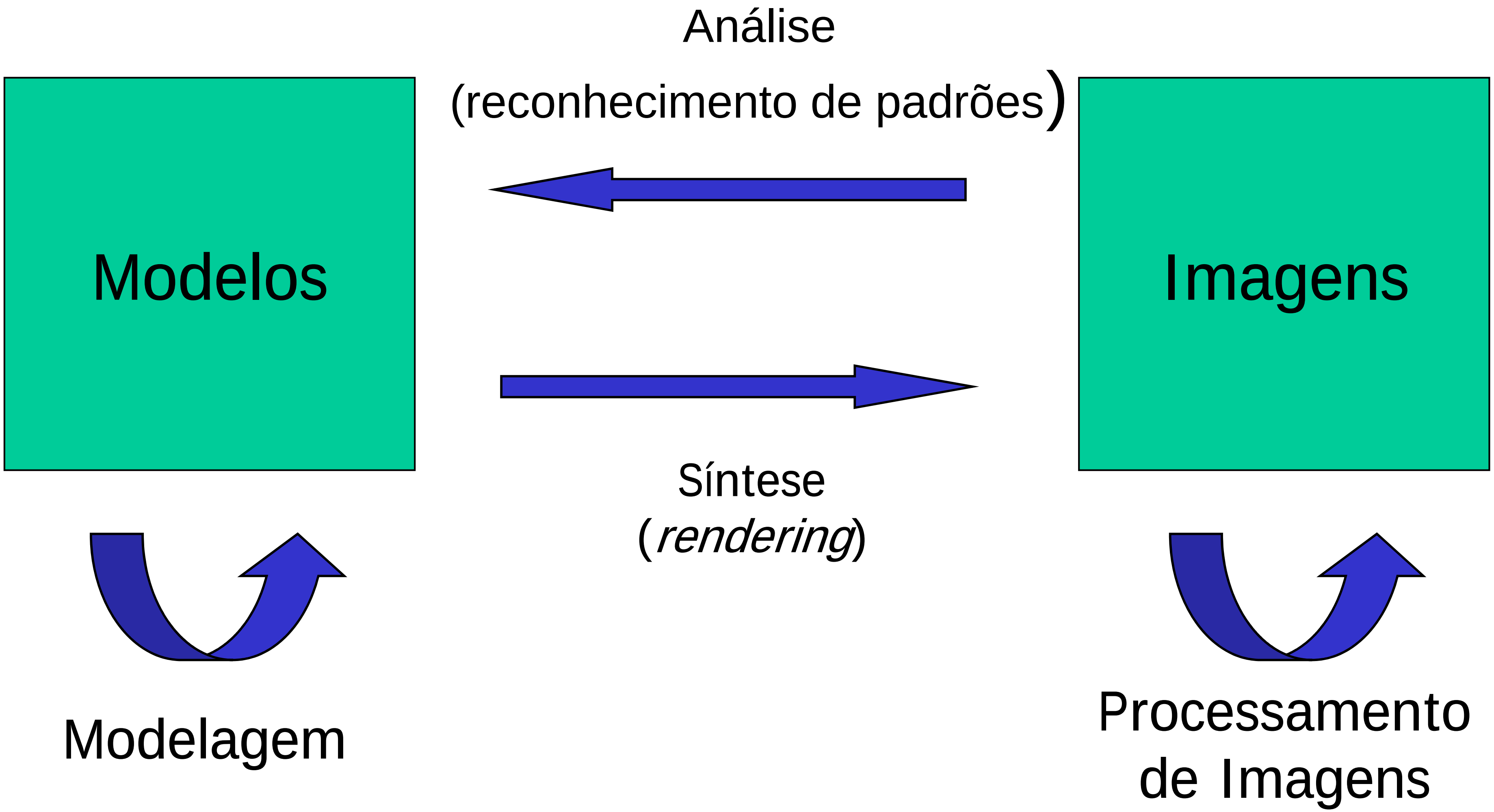
Computação Gráfica

Curva de Bézier

Professor: Luciano Ferreira Silva, Dr.

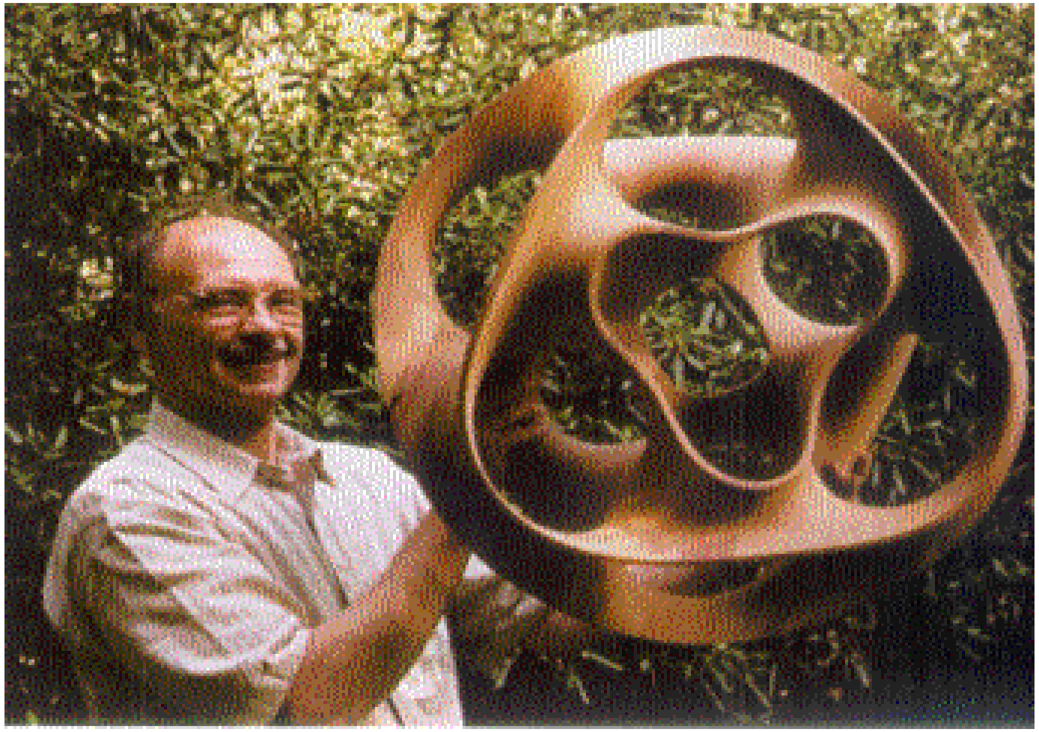
Aula 12

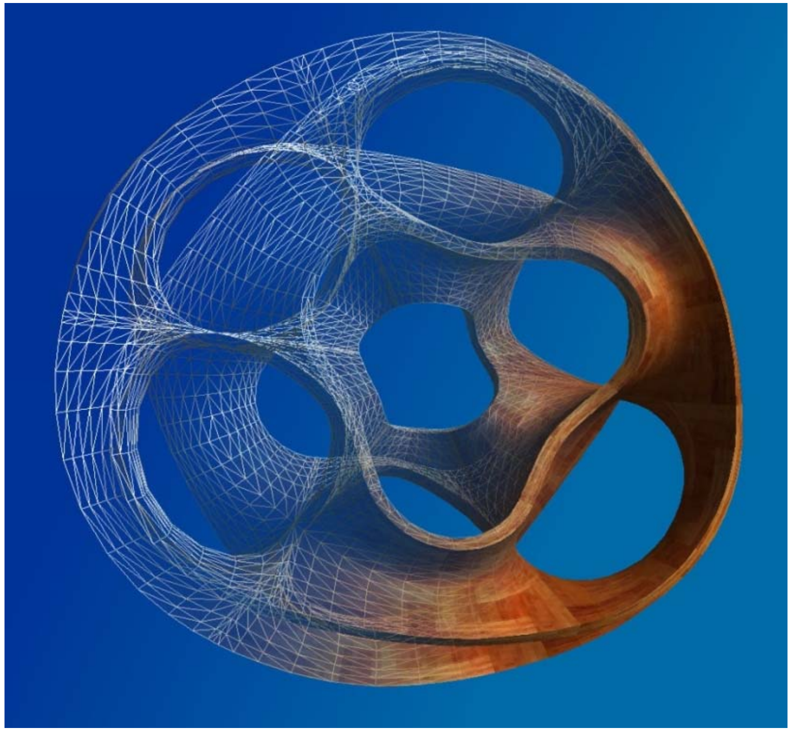
Computação Gráfica



Modelagem

- A modelagem na CG consiste em todo o processo de descrever um modelo, objeto ou cena, de forma que se possa desenhá-lo;





Métodos de Modelagem Geométrica

- **Podemos dividir as técnicas de modelagem em três formas:**
  - ✓ modelagem manual, automática ou matemática.
- **A modelagem automática é a mais sofisticada, mais rápida e poderosa.**
  - ✓ Através de equipamentos especiais como scanners 3D, podemos obter o modelo tridimensional de quase tudo.

Modelagem manual

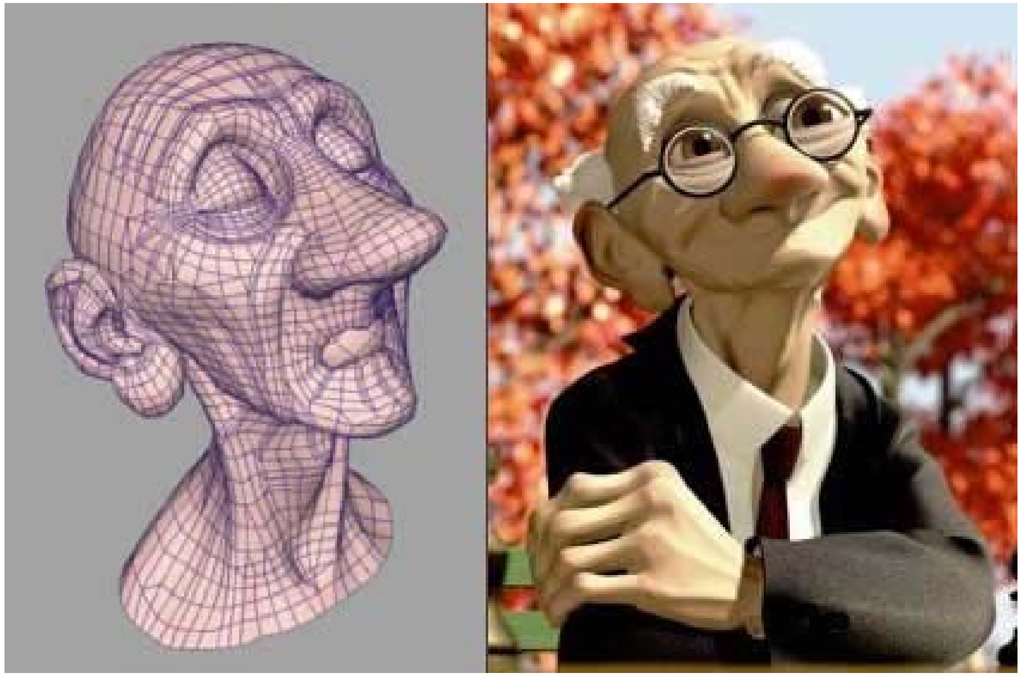
- A modelagem manual é, sem dúvida, o método mais fácil, barato e antigo que utiliza basicamente as medidas de um modelo real e a intuição do modelador.

Aproximação de superfícies e Malhas poligonais

- **Os métodos de aproximação empregam duas operações básicas:**
  - ✓ Amostragem, que consiste em obter pontos na superfície para produzir os retalhos. Temos os métodos *uniformes* e *adaptativos*.
  - ✓ Estruturação, que envolve a colagem dos retalhos para formar uma malha.

Malha de Polígonos

- **Coleções de polígonos (ou faces) que, juntos, formam a "pele" ou "casca" do objeto;**
  - ✓ B-Rep;
  - ✓ Forma rápida e prática para representar objetos



Método Matemático

- O método matemático de modelagem usa uma descrição matemática e algoritmos para gerar um objeto.

Splines VRML

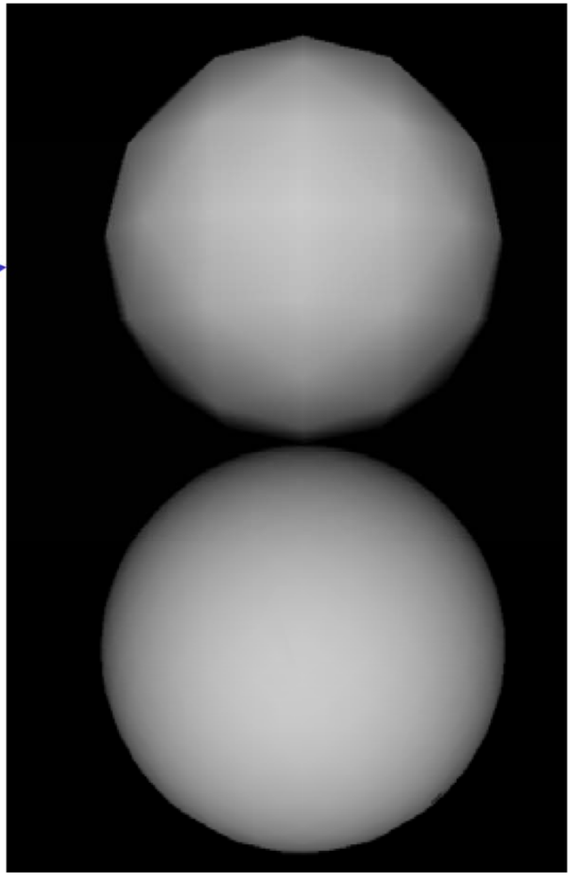
Splines VRML (Extensão Cortona)

```
#VRML V2.0 utf8
Viewpoint { description "Initial view" position 0 0 9 }
NavigationInfo { type "EXAMINE" }

# No Spline
Transform {
  children Shape {
    appearance Appearance { material Material { } }
    geometry Sphere {
      radius 2
    }
  }
}

# Spline - Cortona Extension
Transform {
  translation 0 -4 0
  children Shape {
    appearance Appearance { material Material { } }
    geometry SplineSphere {
      radius 2
      distance 5
      quality [1 0.5]

    }
  }
}
```



Alberto Raposo – PUC-Rio

Método Matemático

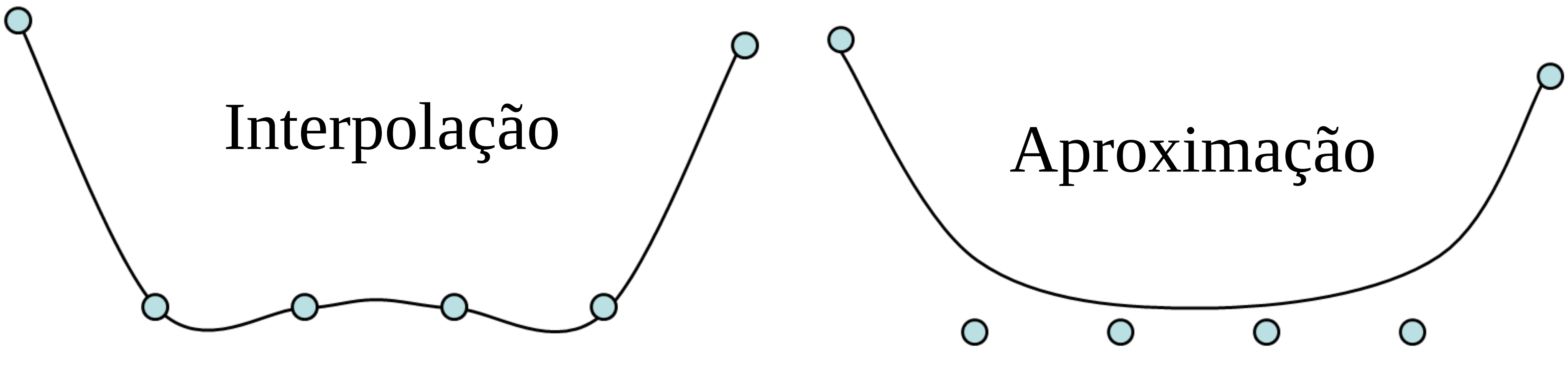
- **Motivação: representar curvas suaves do mundo real.**
- **A representação por malha poligonal é uma aproximação:**
  - ✓ A curva é aproximada por uma sequência de segmentos lineares.
  - ✓ Grande quantidade de dados (vértices) para obter a curva com precisão.
  - ✓ Difícil manipulação para mudar a forma da curva, i.e. necessário posicionar vários pontos com precisão.

Curvas de Bézier

- **O conceito matemático foi desenvolvido pelo francês Pierre Bézier para a indústria automobilística (Renault), nos anos 60.**
- **Casteljau formulou, nesta época, sem contato com Bézier, um método de geração desta curva, de modo diferente de Bézier, para Citroen.**
- **Definições preliminares: Interpolação x Aproximação e *Representações de curvas;***

Interpolação x Aproximação

- **É natural querermos modelar uma curva suave que passa por um conjunto de pontos dados;**
- **Entretanto, o resultado nem sempre é o esperado (oscilações);**
- **É mais comum querermos curvas que "passem perto" dos pontos dados, isto é, *aproximações*;**



Representação de Curvas

- Existem basicamente 3 formas de representação para curvas:
  - ✓a explícita,
  - ✓a implícita;
  - ✓ e a paramétrica.

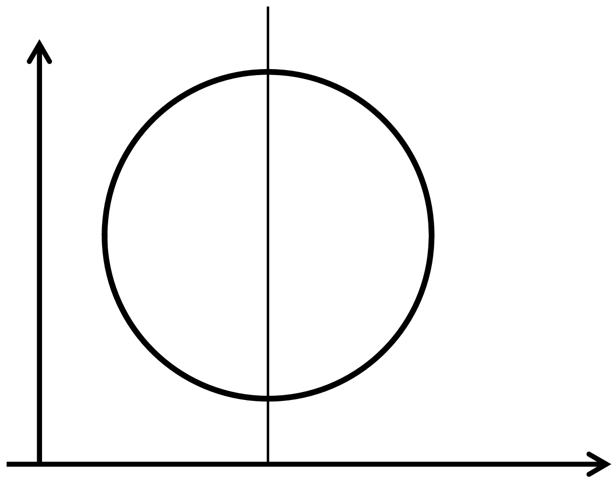
Representação explícita

- Ocorre quando dado explicitamente uma das posições da coordenada se obtém um único valor para as demais posições, y = f(x) e z = g(x). Ex.:

$$r: y = 2x - 1$$

$$s: \; y = x + 4$$

$$z = 2$$



- só existe um valor de *y* para cada valor de *x ou Z*
- Inviabiliza a representação de curvas fechadas

Representação implícita

- As curvas são soluções de equações da seguinte forma *f(x,y,z) = 0. Ex.*

  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ (Circunferência);

  $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ (Esfera)

- Há dificuldade em estabelecer a direção da tangente no ponto de encontro de duas curvas;
- Não se apresente distribuída uniformemente;
- Explícita e implícita dependem dos eixos

Representação paramétrica

- O valor de cada variável espacial *x*, *y* e *z* em função de uma variável independente *t*, que é chamada de parâmetro;

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t);$$

- Esta representação é usada na curva de Bézier;

Intuição sobre a curva de Bézier

- ***"Como criar uma curva que começa em um ponto, termina em outro, e a sua forma depende de pontos de controle, que irão "puxar" ou "afastar" a curva de suas proximidades?".***

Intuição sobre a curva de Bézier

- **Uma resposta plausível para esta questão seria que temos de construir uma função que estabeleça o "peso" que cada ponto de controlo em cada momento ao longo da curva.**
- **Funções utilizadas para esse efeito é o *Polinómio de Bernstein*.**

Polinómio de Bernstein

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

- **Onde:**
  - ✓ $\binom{n}{i}$ é o binômio de Newton dado por . $\binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$
  - ✓ $i = 0, 1, 2, \ldots n$, representa o índice do ponto de controlo;
  - ✓ o parâmetro $t \in [0,1]$.
  - ✓ Define-se que $0^0 = 1$.

Curvas de Bézier

- **São dadas, em notação reduzida, por:**

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t).P_i$$

- **Com:** $C(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)]$

- **Notação expandida:**

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t).x_i \\ y(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t).y_i \\ z(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t).z_i \end{cases}$$

Curvas de Bézier Lineares

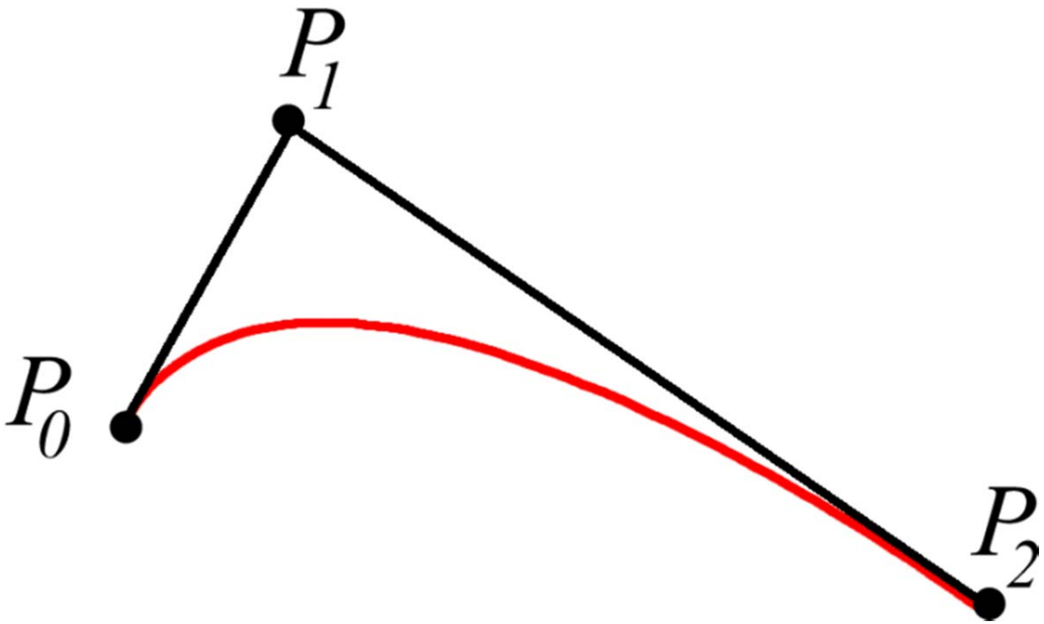
- **São de grau 1 (*n* = *1*), utilizam dois pontos de controle P_0 e P_1, e são dadas pela equação**

$$C(t) = (1-t)P_0 + tP_1$$

Curvas de Bézier Quadráticas

- **São de grau 2 (*n* = 2), utilizam três pontos de controle P_0, P_1 e P_2, e são dadas pela equação**

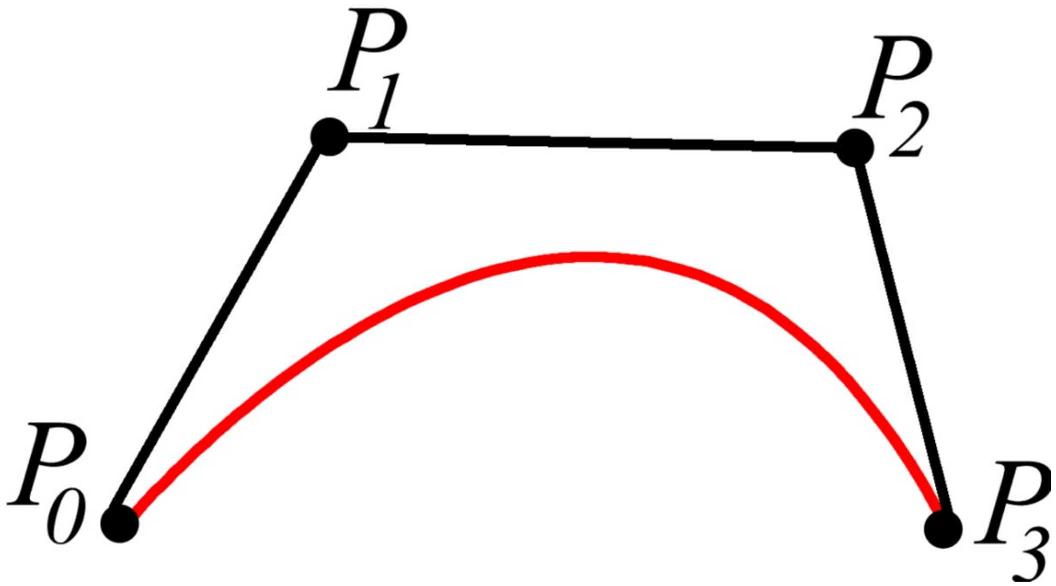
$$C(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$



Curvas de Bézier Cúbicas

- **São de grau 3 ($n = 3$), utilizam quatro pontos de controle P_0, P_1, P_2 e P_3, e são dadas pela equação:**

$$C(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3^2 t(1-t) P_2 + t^3 P_3$$



- **São as mais usadas.**

Notação Matricial

$$C(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3] \times M_B \times \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Com

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Observações

- A soma dos coeficientes que compõem sua equação matemática da curva de Bézier, os polinômios de Bernstein, é sempre igual a 1;

- Essa propriedade é chamada de *propriedade normalizante;*

- A curva gerada fica inteiramente dentro de uma figura convexa definida pelos pontos de controle P_i, denominado de *polígono convexo de Bézier;*

- Se o primeiro e o último ponto de controle de uma curva coincidem, então temos uma curva de Bézier fechada.

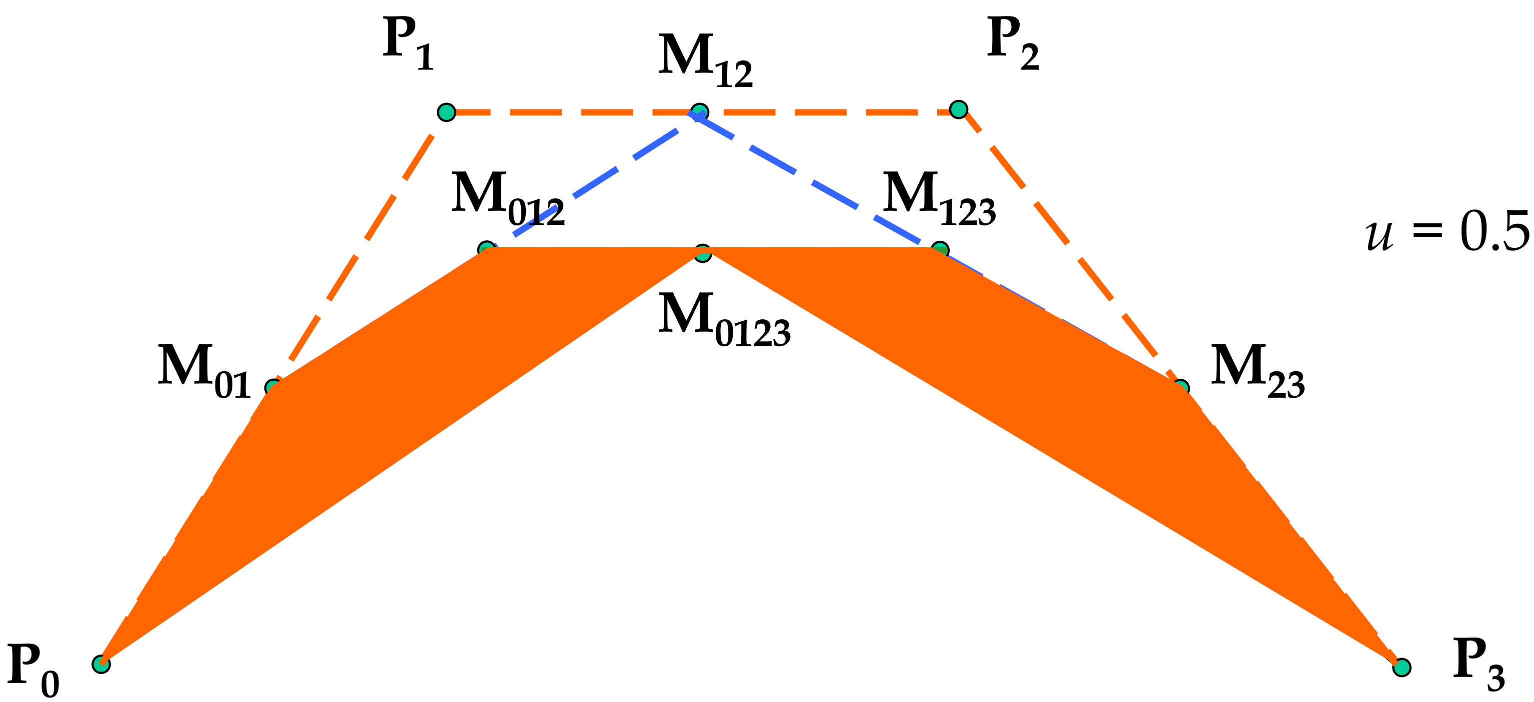
Desenhando a curva

- **Graficamente os pontos das curvas de Bézier podem ser obtidos pela simples variação do parâmetro *t*, de 0 a 1, na função paramétrica *C(t)*.**

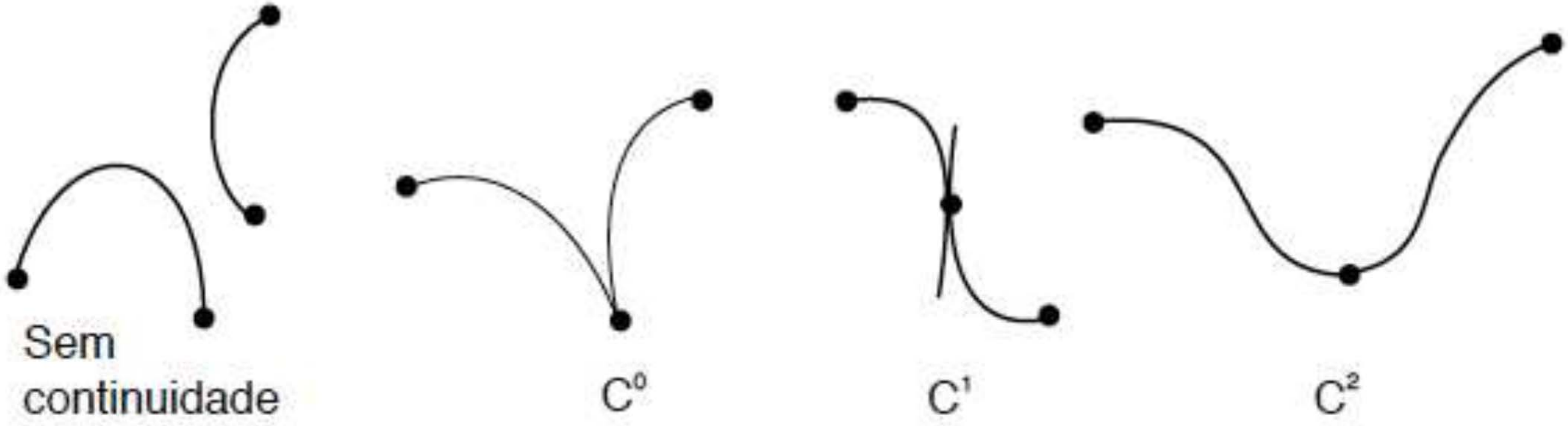
- **No entanto para as curvas cúbicas tem-se um método que apresenta maior eficiência computacional, o *algoritmo de Casteljau*.**

Algoritmo de Casteljau

- Baseia-se na subdivisão recursiva dos segmentos medianos de reta criados a partir da união dos pontos de controle da curva



Conectividade e continuidade das curvas de Bézier



- **Continuidade de ordem:**
  - ✓ 0 indica que as curvas se encontra no ponto,
  - ✓ 1 que há continuidade na derivada primeira;
  - ✓ 2 que há continuidade na derivada segunda;

Exercício

- Implemente um programa que construa graficamente a curva de Bézier por meio da equação paramétrica e através do algoritmo de Casteljau.