



NACIONES UNIDAS



Metodología para la Estimación de la Matriz Insumo-Producto Extendida Ambientalmente y Huella de Carbono Colombia 2017, 2019 y 2021

18 de octubre de 2025

Índice

1. Objetivos y Alcance	5
1.1. Objetivo General	5
1.2. Objetivos Específicos	5
1.3. Alcance	5
1.3.1. Alcance Temporal	5
1.3.2. Alcance Sectorial	5
1.3.3. Alcance Geográfico	5
1.3.4. Alcance Ambiental	5
2. Conceptos Básicos, Variables, Indicadores y Clasificaciones	6
2.1. Matriz Insumo-Producto (MIP)	6
2.1.1. Estructura Básica	6
2.1.2. Balance Básico	7
2.2. Modelo de Leontief (Encadenamientos hacia Atrás)	7
2.2.1. Coeficientes Técnicos Directos	7
2.2.2. Ecuación Fundamental de Leontief	8
2.2.3. Matriz Inversa de Leontief	8
2.3. Modelo de Ghosh (Encadenamientos hacia Adelante)	8
2.3.1. Coeficientes de Distribución	8
2.3.2. Matriz Inversa de Ghosh	9
2.4. Extensión Ambiental de la MIP	9
2.4.1. Matriz de Presiones Ambientales Totales	9
2.4.2. Coeficientes de Intensidad Ambiental Directa	9
2.4.3. Multiplicadores Ambientales Totales (Enfoque Consumidor)	10
2.4.4. Matriz Extendida Economía-Ambiente	10
2.5. Agregación de Indicadores Ambientales	10
2.5.1. Emisiones de Gases de Efecto Invernadero (GEI)	10
2.5.2. Coeficientes de Intensidad Sectorial	10
2.6. Multiplicadores Ambientales por Enfoque	11
2.6.1. Multiplicadores Tipo Leontief (Backward Linkages)	11
2.6.2. Multiplicadores Tipo Ghosh (Forward Linkages)	11
2.7. Índices de Encadenamiento Ambiental	11
2.7.1. Backward Linkage Ambiental (BL)	11
2.7.2. Forward Linkage Ambiental (FL)	12
2.8. Huella de Carbono	12
2.8.1. Definición General	12
2.8.2. Huella de Carbono por Componente de Demanda	12
2.9. Desagregación Doméstica e Importada	13
2.9.1. Matrices de Transacciones	13
2.9.2. Coeficientes Técnicos Desagregados	13
2.10. Ponderadores y Vectores Auxiliares	14
2.10.1. Ponderadores de Demanda Final	14
2.10.2. Ponderadores de Consumo Intermedio	14
2.11. Resumen de Notación	14

3. Resultados Esperados	15
3.1. Matrices y Vectores Fundamentales	15
3.1.1. Matrices Económicas	15
3.1.2. Vectores Económicos	15
3.1.3. Matrices Ambientales	16
3.1.4. Vectores Ambientales	16
3.2. Indicadores y Métricas	16
3.2.1. Huella de Carbono	16
3.2.2. Encadenamientos Productivos	16
3.2.3. Encadenamientos Ambientales	17
3.3. Análisis Temporal (2017-2019-2021)	18
3.3.1. Descomposición Estructural (SDA)	18
3.4. Evolución de multiplicadores:	18
3.4.1. Identificación de Tendencias	18
3.5. Tendencias sectoriales:	19
3.6. Archivos de Salida	19
3.6.1. Archivos Excel	19
3.6.2. Informes Técnicos	19
4. Metodología	21
4.1. Consideraciones Básicas	21
4.2. Modelo de Leontief: Fundamentos y Desarrollo Completo	21
4.2.1. Marco General	21
4.2.2. Componentes del Sistema	21
4.2.3. Desarrollo del Sistema de Leontief	23
4.2.4. Teoremas Fundamentales	24
4.2.5. Multiplicadores de Producción	26
4.3. Modelo de Ghosh: Multiplicadores de Distribución	27
4.3.1. Marco Conceptual	27
4.3.2. Estructura del Modelo	27
4.4. Extensión Ambiental de la Matriz Insumo-Producto (MIP-EA)	27
4.5. Marco Conceptual de la MIP-EA y Cuentas Satélite	27
4.6. Contabilización de Impactos por Contaminación	27
4.6.1. Matriz de Coeficientes de Impacto Directo (D)	27
4.6.2. Emisiones Totales Directas	28
4.6.3. Coeficientes de Impacto Total	29
4.7. Estimación de la Huella de Carbono y Responsabilidad del Consumidor	29
4.7.1. Huella de Carbono Basada en la Producción (E_P)	29
4.7.2. Responsabilidad del Productor (Enfoque Territorial)	30
4.7.3. Coeficientes de Intensidad de Emisiones	30
4.7.4. Multiplicadores de Emisiones	30
4.7.5. Huella de Carbono Basada en el Consumo (E_C)	31
4.7.6. Desagregación por Componentes de Demanda Final	31
4.7.7. Emisiones Incorporadas en las Exportaciones (EIE)	32
4.7.8. Emisiones Incorporadas en las Importaciones (EII)	32
4.7.9. Balance de Responsabilidad	33
4.7.10. Indicadores Derivados	34
4.7.11. Contribución Sectorial a la Huella	34

4.7.12. Matriz de Responsabilidades Cruzadas	34
4.7.13. Responsabilidad Compartida	35
4.7.14. Resumen de Fórmulas Clave	35
5. Plan de Actividades y Cronograma	36
5.1. Resumen Ejecutivo del Cronograma	36
5.2. Cronograma Detallado por Fases	36
5.2.1. Fase 1: Detección y Análisis de Necesidades	36
5.2.2. Fase 2: Diseño	36
5.2.3. Fase 3: Construcción	36
5.2.4. Fase 4: Acopio	37
5.2.5. Fase 5: Procesamiento	37
5.2.6. Fase 6: Análisis	38
5.2.7. Fase 7: Difusión	38
5.2.8. Fase 8: Evaluación	38
5.3. Hitos Críticos del Proyecto	39
5.4. Recursos Necesarios	39
5.5. Entregables Principales	39

1. Objetivos y Alcance

1.1. Objetivo General

Estimar las matrices insumo-producto (MIP) extendidas ambientalmente para Colombia correspondientes a los años 2017, 2019 y 2021, integrando cuentas de emisiones de gases de efecto invernadero (GEI) para el cálculo de la huella de carbono por actividades económicas en Colombia.

1.2. Objetivos Específicos

1. Construir las matrices insumo-producto simétricas producto-producto para los años 2017, 2019 y 2021.
2. Calcular los multiplicadores ambientales y la intensidad de carbono por unidad monetaria de producción para cada actividad económica.
3. Analizar la evolución temporal de la intensidad de carbono y la estructura productiva entre 2017 y 2021.
4. Identificar las actividades clave en términos de emisiones directas e indirectas de GEI.

1.3. Alcance

1.3.1. Alcance Temporal

El estudio abarca tres años de análisis: 2017, 2019 y 2021, permitiendo evaluar la evolución pre-pandemia, durante la pandemia y en la recuperación económica.

1.3.2. Alcance Sectorial

Se trabajará con la clasificación del DANE para las Cuentas Nacionales bajo 68 actividades económicas (según CIIU Rev. 4 A.C.).

1.3.3. Alcance Geográfico

Se tiene un alcance Nacional (Colombia), sin contemplar desagregación regional.

1.3.4. Alcance Ambiental

- Emisiones de CO_2 por combustión de energía
- Emisiones de CH_4 (metano) convertidas a CO_2eq
- Emisiones de N_2O (óxido nitroso) convertidas a CO_2eq

2. Conceptos Básicos, Variables, Indicadores y Clasificaciones

2.1. Matriz Insumo-Producto (MIP)

2.1.1. Estructura Básica

Sea $n = 68$ el número de actividades económicas en la economía colombiana, la MIP se compone de:

Matriz de consumo intermedio:

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (1)$$

donde z_{ij} es el valor monetario del producto de la actividad i utilizado como insumo por la actividad j .

Vector de producción total:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{68} \quad (2)$$

donde x_i representa la producción bruta total del sector i .

Matriz diagonal de producción:

$$\hat{X} = \text{diag}(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (3)$$

Vector de demanda final: El **Vector de Demanda Final** (y) es el conjunto de demandas que impulsan la producción total. Se define como:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{68} \quad (4)$$

donde $y_i = C_i + G_i + I_i + X_i - M_i$ para cada sector i .

A continuación, se detalla cada componente:

- **Consumo de Hogares** (C_i): Valor de los bienes y servicios del sector i comprados por los hogares. Es el componente clave de la demanda interna y el punto de origen de la **Responsabilidad del Consumidor** en el análisis ambiental.

- **Consumo del Gobierno** (G_i): Gasto de las administraciones públicas en bienes y servicios del sector i para la provisión de servicios colectivos (ej. defensa, seguridad, justicia).
- **Inversión** (I_i): Gasto en la Formación Bruta de Capital Fijo (FBCF), que incluye la adquisición de activos duraderos (maquinaria, equipo, construcción) del sector i . Representa la demanda destinada a aumentar la capacidad productiva futura.
- **Exportaciones** (X_i): Demanda del resto del mundo por bienes y servicios del sector i . Es un impulso **positivo** para la producción doméstica y clave para calcular las EIE (Emisiones Incorporadas en las Exportaciones).
- **Importaciones** ($-M_i$): Valor de los bienes del sector i comprados en el exterior. Se **restan** porque el modelo MIP doméstico solo contempla la tecnología y producción nacional, ajustando la demanda final para que sea satisfecha exclusivamente por la producción local.

2.1.2. Balance Básico

El equilibrio general de la economía establece que la producción total debe igualar el consumo intermedio más la demanda final:

$$x_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} + y_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

En forma matricial:

$$x = Z \cdot \mathbf{1} + y \quad (6)$$

donde $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$ es un vector columna de unos, que hace las veces de vector identidad.

2.2. Modelo de Leontief (Encadenamientos hacia Atrás)

2.2.1. Coeficientes Técnicos Directos

Los coeficientes técnicos representan la cantidad de insumo del sector i requerida para producir una unidad monetaria del sector j :

$$a_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_j} \quad (7)$$

Matriz de coeficientes técnicos:

$$A = Z \cdot \hat{X}^{-1} \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (8)$$

Interpretación: a_{ij} indica cuántas unidades monetarias del producto i se necesitan para producir una unidad monetaria del producto j .

2.2.2. Ecuación Fundamental de Leontief

La producción total se puede expresar como:

$$x = A \cdot x + y \quad (9)$$

Reordenando:

$$(I - A) \cdot x = y \quad (10)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{68 \times 68}$ es la matriz identidad.

2.2.3. Matriz Inversa de Leontief

Despejando la producción en función de la demanda final:

$$x = (I - A)^{-1} \cdot y = L \cdot y \quad (11)$$

donde:

$$L = (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (12)$$

Interpretación: l_{ij} representa la producción total directa e indirecta del sector i requerida para satisfacer una unidad de demanda final del sector j .

Los elementos de L incluyen:

- **Efectos directos:** cuando $i = j$ (diagonal principal)
- **Efectos indirectos:** cuando $i \neq j$ (efectos en cadena productiva)

2.3. Modelo de Ghosh (Encadenamientos hacia Adelante)

Mientras que el modelo de Leontief analiza los efectos de la demanda (backward linkages), el modelo de Ghosh se centra en los efectos de la oferta (forward linkages).

2.3.1. Coeficientes de Distribución

La matriz de coeficientes de distribución B muestra cómo se distribuye la producción del sector i entre los diferentes sectores consumidores:

$$b_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_i} \quad (13)$$

Matriz de coeficientes de distribución:

$$B = \hat{X}^{-1} \cdot Z \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (14)$$

Interpretación: b_{ij} es la proporción de la producción del sector i que se destina al sector j como insumo.

2.3.2. Matriz Inversa de Ghosh

$$G = (I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (15)$$

Interpretación: g_{ij} muestra cómo un cambio en la oferta primaria del sector i se distribuye hacia el sector j a través de toda la cadena productiva.

2.4. Extensión Ambiental de la MIP

2.4.1. Matriz de Presiones Ambientales Totales

Sea $k = 7$ el número de indicadores ambientales considerados. La matriz de presiones ambientales absolutas se define como:

$$D_1 = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & d_{kn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{7 \times 68} \quad (16)$$

donde d_{ki} representa la presión ambiental total del tipo k generada por el sector i . Los 7 indicadores ambientales incluyen:

1. Emisiones de Dióxido de carbono (tCO_2)
2. Emisiones de CH_4 (tCO_2eq)
3. Emisiones de N_2O (tCO_2eq)
4. Monóxido de Carbono(CO)
5. óxidos de nitrógeno (NO_x)
6. Compuestos Orgánicos Volátiles No Metánicos ($COVNM$)
7. Metano (CH_4)

2.4.2. Coeficientes de Intensidad Ambiental Directa

Los coeficientes de intensidad ambiental directa miden la presión ambiental por unidad monetaria de producción:

$$d_{kj}^{\text{int}} = \frac{d_{kj}}{x_j} \quad (17)$$

Matriz de coeficientes ambientales directos:

$$D = D_1 \cdot \hat{X}^{-1} \in \mathbb{R}^{7 \times 68} \quad (18)$$

Interpretación: d_{kj}^{int} indica la cantidad de presión ambiental k generada por cada unidad monetaria producida por el sector j .

Verificación:

$$D \cdot x = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n d_{1j}^{\text{int}} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n d_{kj}^{\text{int}} \cdot x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n d_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n d_{kj} \end{bmatrix} \quad (19)$$

2.4.3. Multiplicadores Ambientales Totales (Enfoque Consumidor)

Los multiplicadores ambientales tipo Leontief capturan tanto los efectos directos como los indirectos en toda la cadena productiva:

$$D_a = D \cdot L = D \cdot (I - A)^{-1} \in \mathbb{R}^{7 \times 68} \quad (20)$$

Interpretación: El elemento (k, j) de D_a representa la presión ambiental total del tipo k (directa + indirecta) generada por una unidad monetaria de demanda final en el sector j .

2.4.4. Matriz Extendida Economía-Ambiente

Enfoque Productor (Intensidades Directas):

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} D \\ L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{75 \times 68} \quad (21)$$

Impactos totales:

$$s = \mathcal{G} \cdot x = \begin{bmatrix} D \cdot x \\ L \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Emisiones totales (7 indicadores)} \\ \text{Producción total (68 sectores)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Enfoque Consumidor (Multiplicadores Totales):

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} D_a \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \cdot L \\ L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{75 \times 68} \quad (23)$$

2.5. Agregación de Indicadores Ambientales

2.5.1. Emisiones de Gases de Efecto Invernadero (GEI)

$$\Gamma_1 = \sum_{k=1}^3 D_1[k, :] = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} \\ \gamma_{1,2} \\ \vdots \\ \gamma_{1,n} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{1 \times 68} \quad (24)$$

donde $\gamma_{1,j}$ son las emisiones totales de GEI del sector j (suma de CO_2 , CH_4 y N_2O en tCO_2eq).

2.5.2. Coeficientes de Intensidad Sectorial

Intensidad de GEI por sector:

$$\alpha_1 = \text{diag} \left(\frac{\gamma_{1,1}}{x_1}, \frac{\gamma_{1,2}}{x_2}, \dots, \frac{\gamma_{1,n}}{x_n} \right) \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (25)$$

Intensidad de otros indicadores por sector:

$$\alpha_2 = \text{diag} \left(\frac{\gamma_{2,1}}{x_1}, \frac{\gamma_{2,2}}{x_2}, \dots, \frac{\gamma_{2,n}}{x_n} \right) \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (26)$$

2.6. Multiplicadores Ambientales por Enfoque

2.6.1. Multiplicadores Tipo Leontief (Backward Linkages)

Los multiplicadores Leontief responden a la pregunta: *¿Cuántas emisiones se generan si aumenta la demanda final del sector j ?*

Multiplicadores ambientales Leontief para GEI:

$$L_{\text{amb}}^{(1)} = \alpha_1 \cdot L \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (27)$$

Multiplicadores ambientales Leontief para otros indicadores:

$$L_{\text{amb}}^{(2)} = \alpha_2 \cdot L \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (28)$$

Interpretación: El elemento (i, j) de $L_{\text{amb}}^{(1)}$ representa las emisiones GEI totales del sector i generadas por una unidad de demanda final del sector j .

2.6.2. Multiplicadores Tipo Ghosh (Forward Linkages)

Los multiplicadores Ghosh responden a: *¿Cómo se distribuyen las emisiones si aumenta la oferta primaria del sector i ?*

Multiplicadores ambientales Ghosh para GEI:

$$G_{\text{amb}}^{(1)} = G \cdot \alpha_1^T \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (29)$$

Multiplicadores ambientales Ghosh para otros indicadores:

$$G_{\text{amb}}^{(2)} = G \cdot \alpha_2^T \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (30)$$

2.7. Índices de Encadenamiento Ambiental

2.7.1. Backward Linkage Ambiental (BL)

Mide la importancia relativa del sector como demandante de presiones ambientales a través de su cadena de proveedores:

$$BL_j^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^n l_{ij}^{\text{amb},(k)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{ij}^{\text{amb},(k)}} \quad (31)$$

Para GEI ($k = 1$):

$$BL_j^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{68} L_{\text{amb}}^{(1)}[i, j]}{\frac{1}{68} \sum_{i=1}^{68} \sum_{j=1}^{68} L_{\text{amb}}^{(1)}[i, j]} \quad (32)$$

Interpretación:

- $BL_j^{(1)} > 1$: El sector j tiene encadenamientos hacia atrás superiores al promedio (genera más emisiones indirectas cuando aumenta su demanda)
- $BL_j^{(1)} < 1$: El sector j tiene encadenamientos hacia atrás inferiores al promedio
- $BL_j^{(1)} = 1$: El sector j tiene encadenamientos promedio

2.7.2. Forward Linkage Ambiental (FL)

Mide la importancia del sector como distribuidor de presiones ambientales hacia adelante en la cadena productiva:

$$FL_i^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^n g_{ij}^{\text{amb},(k)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}^{\text{amb},(k)}} \quad (33)$$

Para GEI ($k = 1$):

$$FL_i^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^{68} G_{\text{amb}}^{(1)}[i, j]}{\frac{1}{68} \sum_{i=1}^{68} \sum_{j=1}^{68} G_{\text{amb}}^{(1)}[i, j]} \quad (34)$$

Interpretación:

- $FL_i^{(1)} > 1$: El sector i distribuye más emisiones que el promedio hacia sus clientes
- $FL_i^{(1)} < 1$: El sector i distribuye menos emisiones que el promedio
- $FL_i^{(1)} = 1$: El sector i tiene distribución promedio

2.8. Huella de Carbono

2.8.1. Definición General

La Huella de Carbono (CF) representa las emisiones totales de GEI incorporadas en la demanda final:

$$CF = \alpha_1 \cdot L \cdot y = m \cdot y = \sum_{j=1}^n m_j \cdot y_j \quad (35)$$

donde $m = \alpha_1 \cdot L$ es el vector fila de multiplicadores de emisiones.

Alternativamente:

$$CF = \Gamma_1 \cdot \hat{X}^{-1} \cdot L \cdot y \quad (36)$$

2.8.2. Huella de Carbono por Componente de Demanda

Huella del consumo de hogares:

$$CF_C = m \cdot C = \sum_{j=1}^n m_j \cdot C_j \quad (37)$$

Huella del consumo del gobierno:

$$CF_G = m \cdot G = \sum_{j=1}^n m_j \cdot G_j \quad (38)$$

Huella de la inversión:

$$CF_I = m \cdot I = \sum_{j=1}^n m_j \cdot I_j \quad (39)$$

Emisiones incorporadas en exportaciones (EIE):

$$CF_X = m \cdot X = \sum_{j=1}^n m_j \cdot X_j \quad (40)$$

Verificación:

$$CF = CF_C + CF_G + CF_I + CF_X - CF_M \quad (41)$$

donde CF_M son las emisiones incorporadas en importaciones (no calculadas con MIP doméstica).

2.9. Desagregación Doméstica e Importada

2.9.1. Matrices de Transacciones

Matriz de transacciones domésticas:

$$Z^d = B_d \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (42)$$

donde z_{ij}^d son las compras del sector j al sector i de origen doméstico.

Matriz de transacciones importadas:

$$Z^m = B_m \in \mathbb{R}^{68 \times 68} \quad (43)$$

donde z_{ij}^m son las compras del sector j al sector i de origen importado.

2.9.2. Coeficientes Técnicos Desagregados

Coeficientes técnicos domésticos:

$$A^d = B_d \cdot \hat{X}^{-1} \quad (44)$$

Coeficientes técnicos importados:

$$A^m = B_m \cdot \hat{X}^{-1} \quad (45)$$

Verificación de consistencia:

$$A = A^d + A^m \quad (46)$$

Esta desagregación es fundamental para:

- Calcular emisiones incorporadas en importaciones y exportaciones
- Analizar la dependencia tecnológica del exterior
- Estimar balanzas comerciales ambientales
- Implementar políticas de sustitución de importaciones

2.10. Ponderadores y Vectores Auxiliares

2.10.1. Ponderadores de Demanda Final

Sea F el vector de demanda final desagregado. El vector de ponderadores se define como:

$$p_F = \frac{|F|}{\sum_{i=1}^n |F_i|} \in \mathbb{R}^n \quad (47)$$

donde $\sum_{i=1}^n p_{F,i} = 1$.

2.10.2. Ponderadores de Consumo Intermedio

Sea U la matriz de consumos intermedios. Los ponderadores por sector son:

$$p_U = \frac{\sum_{i=1}^n u_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij}} \in \mathbb{R}^n \quad (48)$$

donde $\sum_{j=1}^n p_{U,j} = 1$.

2.11. Resumen de Notación

Símbolo	Descripción
$n = 68$	Número de sectores económicos
$k = 7$	Número de indicadores ambientales
Z	Matriz de consumos intermedios (68×68)
x	Vector de producción bruta (68×1)
y	Vector de demanda final (68×1)
\hat{X}	Matriz diagonal de producción (68×68)
A	Matriz de coeficientes técnicos (68×68)
L	Inversa de Leontief (68×68)
B	Matriz de coeficientes de distribución (68×68)
G	Inversa de Ghosh (68×68)
D_1	Matriz de presiones ambientales totales (7×68)
D	Matriz de coeficientes ambientales directos (7×68)
D_a	Matriz de multiplicadores ambientales totales (7×68)
Γ_1	Vector de emisiones GEI por sector (1×68)
α_1, α_2	Matrices diagonales de intensidad ambiental (68×68)
$L_{\text{amb}}^{(k)}$	Multiplicadores ambientales Leontief (68×68)
$G_{\text{amb}}^{(k)}$	Multiplicadores ambientales Ghosh (68×68)
$BL^{(k)}$	Índices de backward linkage ambiental (68×1)
$FL^{(k)}$	Índices de forward linkage ambiental (68×1)
CF	Huella de carbono total (escalar)
A^d, A^m	Coefficientes técnicos domésticos e importados (68×68)

Cuadro 1: Resumen de notación utilizada en el modelo MIP-EA

3. Resultados Esperados

3.1. Matrices y Vectores Fundamentales

Para cada año de análisis, se generarán los siguientes resultados:

3.1.1. Matrices Económicas

Objeto	Símbolo	Dimensión	Descripción
Consumos intermedios	Z	68×68	Transacciones intersectoriales totales
Transacciones domésticas	Z^d (o B_d)	68×68	Flujos de productos nacionales
Transacciones importadas	Z^m (o B_m)	68×68	Flujos de productos importados
Coeficientes técnicos	A	68×68	Requerimientos directos totales
Coef. técnicos domésticos	A^d	68×68	Requerimientos de productos nacionales
Coeficientes técnicos importados	A^m	68×68	Requerimientos de productos importados
Inversa de Leontief	L	68×68	Requerimientos totales (directos + indirectos)
Coef. de distribución	B	68×68	Proporción de ventas por destino
Inversa de Ghosh	G	68×68	Distribución acumulada hacia adelante

Cuadro 2: Matrices económicas por año

3.1.2. Vectores Económicos

Objeto	Símbolo	Dimensión	Descripción
Producción bruta	x	68×1	Valor bruto de la producción sectorial
Demanda final total	y	68×1	$y = C + G + I + X - M$
Consumo de hogares	C	68×1	Gasto de consumo final de hogares
Consumo del gobierno	G	68×1	Gasto de consumo público
Inversión	I	68×1	Formación bruta de capital fijo
Exportaciones	X	68×1	Demanda externa de productos
Importaciones	M	68×1	Oferta externa utilizada

Cuadro 3: Vectores económicos por año

3.1.3. Matrices Ambientales

Objeto	Símbolo	Dimensión	Descripción
Presiones totales	D_1	7×68	Valores absolutos de 7 indicadores ambientales
Coef. ambientales directos	D	7×68	Intensidad ambiental directa por sector
Multiplicadores ambientales	D_a	7×68	Impacto total (directo + indirecto)
Matriz extendida productor	\mathcal{G}	75×68	$\begin{bmatrix} D \\ L \end{bmatrix}$
Matriz extendida consumidor	\mathcal{H}	75×68	$\begin{bmatrix} D_a \\ L \end{bmatrix}$
Intens. diagonal GEI	α_1	68×68	Matriz diagonal de intensidad GEI
Intens. diagonal otros	α_2	68×68	Matriz diagonal otros indicadores
Multip. Leontief GEI	$L_{\text{amb}}^{(1)}$	68×68	Efectos hacia atrás de GEI
Multip. Leontief otros	$L_{\text{amb}}^{(2)}$	68×68	Efectos hacia atrás otros indic.
Multip. Ghosh GEI	$G_{\text{amb}}^{(1)}$	68×68	Efectos hacia adelante de GEI
Multip. Ghosh otros	$G_{\text{amb}}^{(2)}$	68×68	Efectos hacia adelante otros indic.

Cuadro 4: Matrices ambientales por año

3.1.4. Vectores Ambientales

Objeto	Símbolo	Dimensión	Descripción
Emisiones GEI totales	Γ_1	1×68	Suma de CO ₂ , CH ₄ y N ₂ O por sector
Otros indicadores totales	Γ_2	1×68	Suma de agua, residuos, energía, materiales
Impactos totales	s	75×1	$s = \mathcal{G} \cdot x$ (enfoque productor)

Cuadro 5: Vectores ambientales agregados por año

3.2. Indicadores y Métricas

3.2.1. Huella de Carbono

Para cada año se calcularán los siguientes indicadores de huella de carbono:

3.2.2. Encadenamientos Productivos

Para análisis de la estructura económica pura (sin considerar ambiente):

Clasificación de sectores:

Indicador	Fórmula	Descripción
Huella total	$CF = m \cdot y$	Emisiones totales incorporadas en demanda final
Huella consumo	$CF_C = m \cdot C$	Responsabilidad del consumo de hogares
Huella gobierno	$CF_G = m \cdot G$	Responsabilidad del sector público
Huella inversión	$CF_I = m \cdot I$	Emisiones de formación de capital
Emis. en exportaciones	$CF_X = m \cdot X$	Emisiones incorporadas exportadas (EIE)
Huella per cápita	$CF_{pc} = CF/N$	Emisiones por habitante (tCO ₂ eq/hab)
Intensidad del PIB	$IC_{PIB} = \frac{CF \times 1000}{PIB}$	kgCO ₂ eq por millón de pesos

Cuadro 6: Indicadores de huella de carbono

Índice	Fórmula	Interpretación
Backward Linkage	$BL_j = \frac{\sum_{i=1}^n l_{ij}}{\frac{1}{n} \sum_{i,j} l_{ij}}$	Poder de arrastre hacia atrás (demanda)
Forward Linkage	$FL_i = \frac{\sum_{j=1}^n g_{ij}}{\frac{1}{n} \sum_{i,j} g_{ij}}$	Poder de impulso hacia adelante (oferta)

Cuadro 7: Encadenamientos productivos económicos

- **Sectores clave:** $BL > 1$ y $FL > 1$ (alta influencia en ambas direcciones)
- **Sectores estratégicos hacia atrás:** $BL > 1$ y $FL < 1$
- **Sectores estratégicos hacia adelante:** $BL < 1$ y $FL > 1$
- **Sectores independientes:** $BL < 1$ y $FL < 1$

3.2.3. Encadenamientos Ambientales

Para cada tipo de indicador ambiental ($k = 1$ para GEI, $k = 2$ para otros):

Índice	Fórmula	Interpretación
$BL^{(k)}$ ambiental	$BL_j^{(k)} = \frac{\sum_i L_{amb}^{(k)}[i,j]}{\bar{L}_{amb}^{(k)}}$	Cuántas emisiones induce la demanda del sector j
$FL^{(k)}$ ambiental	$FL_i^{(k)} = \frac{\sum_j G_{amb}^{(k)}[i,j]}{\bar{G}_{amb}^{(k)}}$	Cómo distribuye emisiones el sector i

Cuadro 8: Encadenamientos ambientales

donde $\bar{L}_{amb}^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} L_{amb}^{(k)}[i,j]$ y $\bar{G}_{amb}^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} G_{amb}^{(k)}[i,j]$.

Outputs esperados:

- Vector $BL^{(1)}$ de encadenamiento hacia atrás para GEI (68×1)
- Vector $BL^{(2)}$ de encadenamiento hacia atrás para otros indicadores (68×1)
- Vector $FL^{(1)}$ de encadenamiento hacia adelante para GEI (68×1)
- Vector $FL^{(2)}$ de encadenamiento hacia adelante para otros indicadores (68×1)
- Promedios: $\overline{BL^{(1)}}$, $\overline{BL^{(2)}}$, $\overline{FL^{(1)}}$, $\overline{FL^{(2)}}$

Clasificación bidimensional (matriz 2x2):

	$FL^{(1)} < 1$	$FL^{(1)} > 1$
$BL^{(1)} > 1$	Sectores demandantes	Sectores clave ambientales
$BL^{(1)} < 1$	Sectores independientes	Sectores distribuidores

Cuadro 9: Clasificación de sectores según encadenamientos ambientales

3.3. Análisis Temporal (2017-2019-2021)

3.3.1. Descomposición Estructural (SDA)

La Descomposición Estructural de Análisis (Structural Decomposition Analysis) permite identificar los factores que explican los cambios en las emisiones entre períodos:

$$\Delta CF = CF_{t+1} - CF_t = \Delta CF_\alpha + \Delta CF_L + \Delta CF_y \quad (49)$$

donde:

- ΔCF_α : Efecto de cambios en intensidad de emisiones (tecnología)
- ΔCF_L : Efecto de cambios en estructura productiva (encadenamientos)
- ΔCF_y : Efecto de cambios en demanda final (volumen y composición)

Descomposiciones esperadas:

1. **2017-2019:** Cambio en huella de carbono del primer período
2. **2019-2021:** Cambio en huella de carbono del segundo período (incluye efectos COVID-19)
3. **2017-2021:** Cambio total en el período de análisis

3.4. Evolución de multiplicadores:

- Serie temporal de $m = \alpha_1 \cdot L$ para cada sector
- Cambios en efectos indirectos entre períodos
- Análisis de sectores con mayor variabilidad

3.4.1. Identificación de Tendencias

Tendencias en emisiones totales:

- Trayectoria de emisiones totales: $\Gamma_{1,2017}, \Gamma_{1,2019}, \Gamma_{1,2021}$
- Tasa de crecimiento compuesta: $TCCA = \left(\frac{\Gamma_{1,2021}}{\Gamma_{1,2017}} \right)^{1/4} - 1$
- Proyección tendencial para 2023-2025 (si es lineal o exponencial)

3.5. Tendencias sectoriales:

- Sectores en auge ambiental (crecimiento de emisiones ¿promedio)
- Sectores en declive ambiental (crecimiento ¿promedio o decrecimiento)
- Sectores estables (variación cercana a cero)
- Sectores transformadores (grandes cambios en α o L)

Tendencias de encadenamientos ambientales:

- Evolución de índices promedio: $\overline{BL^{(1)}}_t, \overline{FL^{(1)}}_t$
- Sectores que se volvieron más/menos centrales ambientalmente
- Cambios en la clasificación de sectores clave (matriz 2x2)

Análisis de puntos de quiebre:

- Identificación de cambios estructurales entre 2019-2021 (pandemia COVID-19)
- Comparación pre-pandemia (2017-2019) vs. pandemia (2019-2021)
- Recuperación o nueva normalidad en estructura productiva y ambiental

3.6. Archivos de Salida

3.6.1. Archivos Excel

- MIP_Colombia_2017.xlsx: Todas las matrices para 2017
- MIP_Colombia_2019.xlsx: Todas las matrices para 2019
- MIP_Colombia_2021.xlsx: Todas las matrices para 2021
- indicadores_comparativos.xlsx: Resumen de indicadores 2017-2021
- rankings_sectoriales.xlsx: Rankings por diferentes criterios
- huella_carbono_resultados.xlsx: Detalle de CF por sectores y componentes

3.6.2. Informes Técnicos

1. Informe MIP-EA 2019 en Python

- Metodología implementada
- Resultados principales
- Comparación con resultados en R
- Validación y pruebas de calidad

2. Informe MIP-EA 2021 en Python

- Resultados actualizados
- Análisis de cambios 2019-2021

- Efectos de la pandemia COVID-19

3. Informe Huella de Carbono 2019-2021

- Evolución temporal de la huella
- Descomposición estructural
- Tendencias y proyecciones
- Recomendaciones de política

4. Boletín Técnico MIP-EA + HC

- Resumen ejecutivo para público general
- Principales hallazgos
- Gráficos y visualizaciones clave

4. Metodología

La matriz insumo-producto (MIP) refleja los encadenamientos económicos. Muchos investigadores han ampliado el marco de insumo-producto para dar cuenta de la generación y reducción de la contaminación ambiental asociada con la actividad interindustrial. El mismo Leontief (1970) aportó una de las claves metodológicas que desde entonces se ha aplicado ampliamente y ampliado aún más.

En las extensiones ambientales debemos incluir algunas condiciones adicionales para hacer cumplir la coherencia entre la producción interindustrial y la contaminación.

4.1. Consideraciones Básicas

1. **Modelos Generalizados de Insumo-Producto:** Se forman aumentando la matriz de coeficientes técnicos con filas y/o columnas adicionales para reflejar la generación de contaminación y actividades de reducción. Exploramos dos variaciones: una destinada al análisis de impactos y otra destinada a aplicaciones de planificación.
2. **Modelos Económico-Ecológicos:** Resultan de extender el marco interindustrial para incluir sectores de ecosistemas adicionales, donde se registran los flujos entre los sectores económico y ecosistémico.
3. **Modelos de producto por industria:** Expresan los factores ambientales como productos básicos en una tabla de insumo-producto de productos básicos por industria.

4.2. Modelo de Leontief: Fundamentos y Desarrollo Completo

4.2.1. Marco General

Un problema común en análisis de políticas públicas es analizar las implicaciones de un nuevo programa de gasto en una economía, no solo el análisis de impacto tradicional sobre el producto, sino un examen exhaustivo de una amplia variedad de factores asociados, como los impactos en el empleo, la contaminación o los gastos de capital.

Siguiendo el modelo clásico propuesto por Leontief (1970), con i productos para j actividades económicas, donde $i = j$ (modelo cuadrado), dentro del sistema descrito de la siguiente manera:

$$x = (I - A)^{-1}y = Ly \quad (50)$$

4.2.2. Componentes del Sistema

Vector de Producción Total

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{(n \times 1)} \quad (51)$$

donde x_i representa el total de la producción de la actividad económica i , expresado en millones de pesos corrientes o constantes.

Interpretación económica: x_i incluye tanto la producción destinada al consumo intermedio (insumos para otras actividades) como la producción destinada a la demanda final (consumo, inversión, exportaciones).

Matriz Identidad

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (52)$$

La matriz identidad de orden $n \times n$ tiene unos en la diagonal principal y ceros en el resto.

Matriz de Coeficientes Técnicos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (53)$$

donde cada elemento se define como:

$$a_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_j} \quad (54)$$

Definición formal: a_{ij} representa la cantidad de producto de la actividad i que se requiere como insumo directo para producir una unidad monetaria del producto de la actividad j .

Propiedades de A :

1. **No negatividad:** $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$
2. **Acotación:** $0 \leq a_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j$
3. **Productividad:** $\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1 \quad \forall j$

Esta última condición garantiza que cada actividad genera valor agregado positivo.

Construcción de la matriz A :

Partiendo de la matriz de transacciones intermedias $Z = [z_{ij}]$ donde z_{ij} es el valor monetario de la producción de la actividad i utilizada como insumo por la actividad j :

$$A = Z \cdot \text{diag}(x)^{-1} \quad (55)$$

donde $\text{diag}(x)$ es la matriz diagonal:

$$\text{diag}(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \quad (56)$$

Matriz Inversa de Leontief

$$L = (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (57)$$

Definición formal: El elemento l_{ij} representa el incremento en la producción total de la actividad i necesario (directa e indirectamente) debido a un aumento unitario en la demanda final de la actividad j .

Vector de Demanda Final

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{(n \times 1)} \quad (58)$$

donde y_i representa la demanda final del producto de la actividad i , que se descompone en:

$$y_i = C_i + G_i + I_i + X_i - M_i \quad (59)$$

Componentes:

- C_i : Consumo de hogares
- G_i : Consumo del gobierno
- I_i : Formación bruta de capital fijo (inversión)
- X_i : Exportaciones
- M_i : Importaciones (se restan en el modelo doméstico)

4.2.3. Desarrollo del Sistema de Leontief

Balance Económico Fundamental Para cada actividad económica i , la producción total debe igualar la suma del consumo intermedio más la demanda final:

$$x_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} + y_i \quad (60)$$

En forma matricial:

Sea \mathbf{i} un vector columna de unos $(n \times 1)$:

$$x = Z \cdot \mathbf{i} + y \quad (61)$$

Derivación del Modelo Paso 1: Expresar el consumo intermedio en función de los coeficientes técnicos:

$$z_{ij} = a_{ij} \cdot x_j \quad (62)$$

Paso 2: Sustituir en el balance:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \quad (63)$$

Paso 3: Forma matricial:

$$x = A \cdot x + y \quad (64)$$

Paso 4: Reordenar:

$$x - A \cdot x = y \quad (65)$$

Paso 5: Factorizar:

$$(I - A) \cdot x = y \quad (66)$$

Paso 6: Solución (si $(I - A)$ es invertible):

$$x = (I - A)^{-1} \cdot y = L \cdot y \quad (67)$$

4.2.4. Teoremas Fundamentales

Teorema 1: Existencia y Unicidad de la Solución Enunciado: La solución $x = (I - A)^{-1}y$ existe y es única si y solo si la matriz $(I - A)$ es no singular (invertible).

Condición necesaria y suficiente:

$$\det(I - A) \neq 0 \quad (68)$$

Condición de Hawkins-Simon:

La matriz $(I - A)$ es invertible si todos sus menores principales son positivos:

$$\det [1 - a_{11}] > 0 \quad (69)$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (70)$$

$$\vdots \quad (71)$$

$$\det(I - A) > 0 \quad (72)$$

Condición del radio espectral:

Una condición suficiente más práctica es:

$$\rho(A) < 1 \quad (73)$$

donde $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$ es el radio espectral (máximo valor propio en valor absoluto) de A .

Teorema 2: Expansión en Series de Neumann **Enunciado:** Si $\rho(A) < 1$, entonces:

$$L = (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + A^3 + \dots \quad (74)$$

Demostración:

Paso 1: Considerar la serie geométrica matricial:

$$S_K = \sum_{k=0}^K A^k = I + A + A^2 + \dots + A^K \quad (75)$$

Paso 2: Multiplicar ambos lados por $(I - A)$:

$$(I - A)S_K = (I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^K) \quad (76)$$

$$= I + A + A^2 + \dots + A^K - A - A^2 - \dots - A^{K+1} \quad (77)$$

$$= I - A^{K+1} \quad (78)$$

Paso 3: Reordenar:

$$S_K = (I - A)^{-1}(I - A^{K+1}) \quad (79)$$

Paso 4: Tomar el límite cuando $K \rightarrow \infty$:

Dado que $\rho(A) < 1$, se cumple que:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} A^{K+1} = 0 \quad (80)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} S_K = (I - A)^{-1}(I - 0) = (I - A)^{-1} \quad (81)$$

Esto implica:

$$L = (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad \blacksquare \quad (82)$$

Interpretación económica:

- I : Requerimientos directos (primer orden)
- A : Requerimientos indirectos de primer orden
- A^2 : Requerimientos indirectos de segundo orden
- A^k : Requerimientos indirectos de orden k

La actividad j requiere insumos de otras actividades (A), que a su vez requieren insumos (A^2), y así sucesivamente en una cadena infinita de efectos indirectos.

Teorema 3: Propiedades de la Matriz de Leontief **Enunciado:** Si $A \geq 0$ (no negativa) y $\rho(A) < 1$, entonces:

1. $(I - A)^{-1}$ existe y es única
2. $(I - A)^{-1} \geq 0$ (no negativa)
3. $l_{ij} \geq \delta_{ij}$ donde δ_{ij} es la delta de Kronecker
4. $\sum_{i=1}^n l_{ij} > 1$ para al menos un j

Demostración de (c):

De la expansión en series:

$$L = I + A + A^2 + \dots \quad (83)$$

Dado que $A \geq 0$, todos los términos son no negativos. El elemento diagonal de I es 1, por lo tanto:

$$l_{jj} \geq 1 \quad (84)$$

Para $i \neq j$, dado que todos los términos de la suma son no negativos:

$$l_{ij} \geq 0 \quad (85)$$

En forma compacta:

$$l_{ij} \geq \delta_{ij} \quad \blacksquare \quad (86)$$

4.2.5. Multiplicadores de Producción

Multiplicador Simple El multiplicador simple de producción de la actividad j se define como:

$$MP_j = \sum_{i=1}^n l_{ij} \quad (87)$$

Interpretación: MP_j indica cuántas unidades monetarias de producción total se generan en toda la economía para satisfacer una unidad monetaria de demanda final de la actividad j .

Encadenamientos hacia Atrás (Backward Linkages)

$$BL_j = \frac{MP_j}{MP} = \frac{\sum_{i=1}^n l_{ij}}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n l_{ij}} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n l_{ij}}{\sum_{i,j} l_{ij}} \quad (88)$$

Interpretación:

- Si $BL_j > 1$: La actividad j tiene encadenamientos hacia atrás superiores al promedio (demanda más insumos de otras actividades)
- Si $BL_j < 1$: Encadenamientos hacia atrás inferiores al promedio

4.3. Modelo de Ghosh: Multiplicadores de Distribución

4.3.1. Marco Conceptual

El modelo de Ghosh (1958) complementa el modelo de Leontief al enfocarse en los encadenamientos hacia adelante, es decir, cómo la producción de una actividad se distribuye como insumo para otras actividades.

4.3.2. Estructura del Modelo

Ecuación Fundamental

$$x' = v' \cdot (I - B)^{-1} = v' \cdot G \quad (89)$$

donde:

- x' : Vector fila de producción total ($1 \times n$)
- v' : Vector fila de valor agregado ($1 \times n$)
- B : Matriz de coeficientes de asignación ($n \times n$)
- G : Matriz inversa de Ghosh ($n \times n$)

Coeficientes de Asignación

$$b_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_i} \quad (90)$$

Definición formal: b_{ij} representa la proporción de la producción de la actividad i que se destina como insumo a la actividad j .

Construcción de la matriz B :

$$B = \text{diag}(x)^{-1} \cdot Z \quad (91)$$

4.4. Extensión Ambiental de la Matriz Insumo-Producto (MIP-EA)

4.5. Marco Conceptual de la MIP-EA y Cuentas Satélite

La MIP-EA se fundamenta en la construcción de *Cuentas Satélite Ambientales*, las cuales vinculan el marco monetario de las Cuentas Nacionales (MIP) con las cuentas físicas de flujos ambientales (emisiones, residuos, uso de recursos). Esta integración se logra a través de la **Matriz de Coeficientes de Impacto Directo**.

4.6. Contabilización de Impactos por Contaminación

4.6.1. Matriz de Coeficientes de Impacto Directo (D)

Un enfoque para contabilizar la generación de contaminación asociada con la actividad interindustrial es asumir una matriz de coeficientes de impacto directo:

$$D = [d_{kj}]_{(m \times n)} \quad (92)$$

donde:

- m : número de tipos de contaminantes (ej. CO₂, CH₄, NO_x)
- n : número de actividades económicas
- d_{kj} : cantidad de contaminante tipo k generado por unidad monetaria de producción de la actividad j

Construcción de la matriz D :

$$d_{kj} = \frac{e_{kj}}{x_j} \quad (93)$$

donde e_{kj} es la emisión total del contaminante k generada por la actividad j , y x_j es la producción total de la actividad j .

Para Gases de Efecto Invernadero (GEI):

$$D_{\text{GEI}} = \begin{bmatrix} d_{\text{CO}_2,1} & \cdots & d_{\text{CO}_2,n} \\ d_{\text{CH}_4,1} & \cdots & d_{\text{CH}_4,n} \\ d_{\text{N}_2\text{O},1} & \cdots & d_{\text{N}_2\text{O},n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad (94)$$

medido en unidades físicas (ej. Gg de CO₂eq) por unidad monetaria de producción (x_j).

Propiedades de D :

1. **No negatividad:** $d_{kj} \geq 0 \quad \forall k, j$
2. **Estabilidad tecnológica:** Los coeficientes d_{kj} se asumen constantes en el corto plazo, reflejando la estructura tecnológica de la economía.
3. **Proporcionalidad:** Se asume una relación lineal entre producción y emisiones (hipótesis de Leontief extendida al ámbito ambiental).

4.6.2. Emisiones Totales Directas

El nivel de contaminación asociado con un vector dado de producción total se expresa como:

$$x^* = D \cdot x \quad (95)$$

donde $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*]'$ es el vector ($m \times 1$) de niveles de contaminación por tipo. Esta es la base para el inventario de emisiones **Basado en la Producción**.

Interpretación por elemento:

$$x_k^* = \sum_{j=1}^n d_{kj} \cdot x_j \quad (96)$$

representa el total de emisiones del contaminante k generadas por todas las actividades económicas.

4.6.3. Coeficientes de Impacto Total

Al sustituir la producción total ($x = Ly$) en la ecuación anterior, obtenemos las emisiones totales en función de la demanda final:

$$x^* = D \cdot L \cdot y = D^* \cdot y \quad (97)$$

La matriz clave para el análisis es:

$$D^* = D \cdot L = D \cdot (I - A)^{-1} \quad (98)$$

Esta es la **matriz de coeficientes de impacto total**, donde cada elemento d_{kj}^* cuantifica la contaminación k total (directa e indirecta) generada para satisfacer una unidad de demanda final del producto j .

Descomposición de efectos:

Utilizando la expansión en series de Neumann de L :

$$D^* = D \cdot (I + A + A^2 + A^3 + \dots) \quad (99)$$

- **Efecto Directo** ($D \cdot I = D$): Emisiones liberadas directamente por la actividad j para producir su bien final.
- **Efecto Indirecto de primer orden** ($D \cdot A$): Emisiones de los proveedores directos de j .
- **Efecto Indirecto de segundo orden** ($D \cdot A^2$): Emisiones de los proveedores de los proveedores de j .
- **Efecto Indirecto de orden k** ($D \cdot A^k$): Emisiones en el k -ésimo nivel de la cadena de suministro.

Formalización:

$$d_{kj}^* = d_{kj} + \sum_{i=1}^n d_{ki} a_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n d_{kh} a_{hi} a_{ij} + \dots \quad (100)$$

4.7. Estimación de la Huella de Carbono y Responsabilidad del Consumidor

La extensión ambiental de la MIP es la herramienta estándar para el cálculo de la **Huella de Carbono Basada en el Consumo (HCC)** y la formalización de la **Responsabilidad del Consumidor** sobre las emisiones globales.

4.7.1. Huella de Carbono Basada en la Producción (E_P)

Corresponde a las emisiones generadas físicamente dentro del territorio nacional. Se obtiene directamente del inventario nacional de GEI.

Paso 1: Sumar las emisiones de GEI por sector:

$$\Gamma_1 = \sum_{k=1}^3 D_1[k, :] = \text{CO}_2 + \text{CH}_4 + \text{N}_2\text{O} \quad (101)$$

Paso 2: Sumar todas las emisiones territoriales:

$$E_P = \sum_{j=1}^n \gamma_{1,j} \quad (102)$$

donde $\gamma_{1,j}$ son las emisiones totales de GEI del sector j .

Interpretación: E_P representa el enfoque territorial tradicional de los inventarios nacionales de GEI (IPCC), donde se contabilizan todas las emisiones generadas dentro de las fronteras del país, independientemente del destino final de la producción.

4.7.2. Responsabilidad del Productor (Enfoque Territorial)

El enfoque de responsabilidad del productor asigna las emisiones a quien las genera físicamente.

Paso 1: Las emisiones de producción se destinan a dos usos:

$$E_P = E_P^{CI} + E_P^{DF} \quad (103)$$

donde:

- E_P^{CI} : Emisiones para consumo intermedio (insumos)
- E_P^{DF} : Emisiones para demanda final

Paso 2: Matriz de impactos directos (enfoque productor):

$$s = D \cdot x \quad (104)$$

donde D es la matriz de coeficientes ambientales directos y s contiene las presiones ambientales totales.

4.7.3. Coeficientes de Intensidad de Emisiones

Paso 1: Calcular intensidad directa por sector:

$$\alpha_j = \frac{\gamma_{1,j}}{x_j} \quad (105)$$

Paso 2: Formar el vector de intensidades:

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \quad (106)$$

Interpretación: α_j representa las toneladas de CO₂eq emitidas por cada millón de pesos producidos por el sector j .

4.7.4. Multiplicadores de Emisiones

Paso 1: Multiplicar intensidades por la inversa de Leontief:

$$m = \alpha \cdot L \quad (107)$$

Paso 2: Expandir el multiplicador del sector j :

$$m_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot l_{ij} \quad (108)$$

Paso 3: Descomponer en efectos directos e indirectos:

$$m_j = \alpha_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i \cdot l_{ij} \quad (109)$$

donde:

- α_j : Efecto directo (emisiones propias del sector j)
- $\sum_{i \neq j} \alpha_i \cdot l_{ij}$: Efecto indirecto (emisiones de proveedores)

Interpretación: m_j representa las emisiones totales (directas + indirectas) generadas en toda la economía para producir una unidad monetaria de demanda final del sector j .

4.7.5. Huella de Carbono Basada en el Consumo (E_C)

Representa las emisiones liberadas para satisfacer la demanda final. Asigna la responsabilidad al consumidor final.

Paso 1: Multiplicar multiplicadores por demanda final:

$$E_C = m \cdot y = \sum_{j=1}^n m_j \cdot y_j \quad (110)$$

Paso 2: Expandir usando la definición de m :

$$E_C = \alpha \cdot L \cdot y \quad (111)$$

Paso 3: Forma completa desde intensidades directas:

$$E_C = \frac{\Gamma_1}{x} \cdot L \cdot y \quad (112)$$

4.7.6. Desagregación por Componentes de Demanda Final

Paso 1: Descomponer la demanda final:

$$y = C + G + I + X \quad (113)$$

donde:

- C : Consumo de hogares
- G : Consumo del gobierno
- I : Inversión (FBCF)
- X : Exportaciones

Paso 2: Calcular huella por componente:

$$CF_C = m \cdot C = \sum_{j=1}^n m_j \cdot C_j \quad (114)$$

$$CF_G = m \cdot G = \sum_{j=1}^n m_j \cdot G_j \quad (115)$$

$$CF_I = m \cdot I = \sum_{j=1}^n m_j \cdot I_j \quad (116)$$

$$CF_X = m \cdot X = \sum_{j=1}^n m_j \cdot X_j \quad (117)$$

Paso 3: Verificar que suman la huella total:

$$E_C = CF_C + CF_G + CF_I + CF_X \quad (118)$$

Paso 4: Definir huella de consumo doméstico (sin exportaciones):

$$E_C^{\text{dom}} = CF_C + CF_G + CF_I \quad (119)$$

4.7.7. Emisiones Incorporadas en las Exportaciones (EIE)

Las EIE son las emisiones generadas internamente para producir bienes consumidos por el resto del mundo.

Paso 1: Calcular las EIE:

$$\text{EIE} = m \cdot X = \sum_{j=1}^n m_j \cdot X_j \quad (120)$$

Paso 2: Notar que:

$$\text{EIE} = CF_X \quad (121)$$

Interpretación: El país productor genera las emisiones (E_P), pero el país consumidor tiene la responsabilidad (E_C del importador).

Intensidad de carbono de las exportaciones:

$$IC_X = \frac{\text{EIE}}{\sum_{j=1}^n X_j} \quad (122)$$

4.7.8. Emisiones Incorporadas en las Importaciones (EII)

Las EII son las emisiones generadas en el resto del mundo para producir bienes consumidos internamente.

Método 1 - Supuesto de tecnología doméstica:

Paso 1: Aplicar multiplicadores domésticos a importaciones:

$$\text{EII}^{\text{dom}} = m \cdot M = \sum_{j=1}^n m_j \cdot M_j \quad (123)$$

Limitación: Asume que los bienes importados se producen con la misma tecnología que la doméstica.

Método 2 - Coeficientes internacionales:

Paso 1: Usar multiplicadores de los países de origen:

$$EII^{\text{int}} = m^{\text{socios}} \cdot M \quad (124)$$

Limitación: Requiere datos de MIP multi-regional (MRIO) no disponibles en modelo doméstico.

4.7.9. Balance de Responsabilidad

Relación fundamental:

Paso 1: Conectar enfoque productor y consumidor:

$$E_C = E_P - EIE + EII \quad (125)$$

Paso 2: Definir la Balanza Comercial de Emisiones:

$$BCE = EIE - EII \quad (126)$$

Paso 3: Reescribir la relación:

$$E_C = E_P - BCE \quad (127)$$

Interpretación según el signo de BCE:

- Si $BCE > 0$ (exportador neto de emisiones):

$$EIE > EII \quad \Rightarrow \quad E_C < E_P \quad (128)$$

El país produce más emisiones de las que consume.

- Si $BCE < 0$ (importador neto de emisiones):

$$EIE < EII \quad \Rightarrow \quad E_C > E_P \quad (129)$$

El país consume más emisiones de las que produce.

- Si $BCE = 0$ (balance equilibrado):

$$EIE = EII \quad \Rightarrow \quad E_C = E_P \quad (130)$$

Caso especial - Economía cerrada:

Si no hay comercio internacional ($X = 0$, $M = 0$):

$$y = C + G + I \quad (131)$$

$$E_C = E_P \quad (132)$$

4.7.10. Indicadores Derivados

Razón de responsabilidades Paso 1: Calcular el ratio:

$$RR = \frac{E_C}{E_P} \quad (133)$$

Interpretación:

- $RR > 1$: Mayor responsabilidad como consumidor
- $RR < 1$: Mayor responsabilidad como productor
- $RR = 1$: Responsabilidades equilibradas

4.7.11. Contribución Sectorial a la Huella

Paso 1: Calcular contribución del sector j :

$$\phi_j = \frac{m_j \cdot y_j}{E_C} \quad (134)$$

Paso 2: Verificar que suman 1:

$$\sum_{j=1}^n \phi_j = 1 \quad (135)$$

Paso 3: Contribución a la huella del consumo:

$$\phi_j^C = \frac{m_j \cdot C_j}{CF_C} \quad (136)$$

4.7.12. Matriz de Responsabilidades Cruzadas

Paso 1: Construir matriz productor-consumidor:

$$r_{ij} = \alpha_i \cdot l_{ij} \cdot y_j \quad (137)$$

donde r_{ij} son las emisiones del sector productor i causadas por la demanda del sector consumidor j .

Paso 2: Verificar propiedades:

Suma por filas (responsabilidad total del productor i):

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} = \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^n l_{ij} \cdot y_j \quad (138)$$

Suma por columnas (responsabilidad total del consumidor j):

$$\sum_{i=1}^n r_{ij} = m_j \cdot y_j \quad (139)$$

Suma total:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} = E_C \quad (140)$$

4.7.13. Responsabilidad Compartida

Ambas perspectivas son complementarias para diseñar políticas:

Responsabilidad del productor (E_P):

- Base para regulación industrial
- Impuestos a emisiones directas
- Estándares tecnológicos
- Permisos de emisión

Responsabilidad del consumidor (E_C):

- Políticas de consumo sostenible
- Educación ambiental
- Etiquetado de carbono
- Impuestos al consumo

4.7.14. Resumen de Fórmulas Clave

Concepto	Símbolo	Fórmula
Emisiones GEI totales	Γ_1	$\sum_{k=1}^3 D_1[k, :]$
Emisiones territoriales	E_P	$\sum_{j=1}^n \gamma_{1,j}$
Intensidad directa	α_j	$\gamma_{1,j}/x_j$
Multiplicadores	m	$\alpha \cdot L$
Huella total	E_C	$m \cdot y$
Huella del consumo	CF_C	$m \cdot C$
Huella del gobierno	CF_G	$m \cdot G$
Huella de inversión	CF_I	$m \cdot I$
Emis. en exportaciones	EIE	$m \cdot X$
Huella doméstica	E_C^{dom}	$CF_C + CF_G + CF_I$
Huella per cápita	CF_{pc}	E_C^{dom}/N
Intensidad del PIB	IC_{PIB}^C	$(E_C^{\text{dom}} \times 1000)/PIB$
Balance de emisiones	BCE	$EIE - EII$
Razón responsabilidades	RR	E_C/E_P

Cuadro 10: Resumen de fórmulas para huella de carbono

5. Plan de Actividades y Cronograma

5.1. Resumen Ejecutivo del Cronograma

Fase	Duración	Inicio	Fin	Productos
Fase 1: Detección y Análisis	2 semanas	Sem 1	Sem 2	4
Fase 2: Diseño	2 semanas	Sem 3	Sem 4	2
Fase 3: Construcción	10 semanas	Sem 5	Sem 14	10
Fase 4: Acopio	3 semanas	Sem 12	Sem 14	2
Fase 5: Procesamiento	4 semanas	Sem 15	Sem 18	4
Fase 6: Análisis	3 semanas	Sem 19	Sem 21	2
Fase 7: Difusión	2 semanas	Sem 22	Sem 23	4
Fase 8: Evaluación	1 semana	Sem 24	Sem 24	3
Total	24 semanas			31

Cuadro 11: Resumen general del cronograma por fases (6 meses)

5.2. Cronograma Detallado por Fases

5.2.1. Fase 1: Detección y Análisis de Necesidades

Duración: 2 semanas — Semanas 1-2 — Mes 1

Producto	Inicio	Fin	Duración	Dependencia	Resp.
Cronograma (PPT y Excel)	Sem 1	Sem 1	1 sem	-	Contratista
Presentación revisión MIP-EA 2017	Sem 1	Sem 1	1 sem	-	Contratista
Documento técnico lógica R	Sem 1	Sem 2	1 sem	P1.2	Contratista
Plan General	Sem 2	Sem 2	1 sem	P1.1-P1.3	Contratista
Hito 1: Plan General aprobado - Semana 2					

Cuadro 12: Fase 1: Detección y Análisis de Necesidades

5.2.2. Fase 2: Diseño

Duración: 2 semanas — Semanas 3-4 — Mes 1

Producto	Inicio	Fin	Duración	Dependencia	Resp.
Metodología y Ficha metodológica	Sem 3	Sem 4	2 sem	Fase 1	Contratista
Arquitectura Python OOP	Sem 3	Sem 4	2 sem	Fase 1	Contratista
Hito 2: Arquitectura técnica aprobada - Semana 4					

Cuadro 13: Fase 2: Diseño

5.2.3. Fase 3: Construcción

Duración: 10 semanas — Semanas 5-14 — Meses 2-3

Producto	Inicio	Fin	Duración	Dependencia	Resp.
Manual de acopio	Sem 5	Sem 6	2 sem	Fase 2	Contratista
Código Python migrado + validación	Sem 5	Sem 8	4 sem	Fase 2	Contratista
Testing R vs Python	Sem 8	Sem 9	2 sem	P3.2	Contratista
MIP-EA 2019 en Python	Sem 9	Sem 10	2 sem	P3.3	Contratista
MIP-EA 2021 en Python	Sem 10	Sem 11	2 sem	P3.4	Contratista
Informe Huella Carbono 2019-2021	Sem 11	Sem 12	2 sem	P3.4, P3.5	Contratista
Módulos y clases Python	Sem 9	Sem 11	3 sem	P3.2	Contratista
Endpoints (FastAPI/Flask)	Sem 11	Sem 12	2 sem	P3.7	Contratista
Pipeline procesamiento	Sem 12	Sem 13	2 sem	P3.8	Contratista
Informe pruebas calidad	Sem 13	Sem 14	2 sem	P3.9	Contratista
Hito 3: Sistema Python validado y funcional - Semana 14					

Cuadro 14: Fase 3: Construcción

5.2.4. Fase 4: Acopio

Duración: 3 semanas — Semanas 12-14 — Mes 3 (paralela a Fase 3)

Producto	Inicio	Fin	Duración	Dependencia	Resp.
Base datos fuentes (3 MIP + 3 CAEFM)	Sem 12	Sem 13	2 sem	P3.1, P3.7	Contratista
Validación equivalencias R-Python	Sem 13	Sem 14	2 sem	P4.1, P3.3	Contratista
Hito 4: Datos validados y listos para procesamiento - Semana 14					

Cuadro 15: Fase 4: Acopio

5.2.5. Fase 5: Procesamiento

Duración: 4 semanas — Semanas 15-18 — Mes 4

Producto	Inicio	Fin	Duración	Dependencia	Resp.
Dataset MIP-EA 2019/2021	Sem 15	Sem 16	2 sem	Fase 4	Contratista
Resultados iniciales HC	Sem 16	Sem 17	2 sem	P5.1	Contratista
Identificación tendencias	Sem 17	Sem 17	1 sem	P5.2	Contratista
Cálculo final MIP-EA + HC	Sem 17	Sem 18	2 sem	P5.2, P5.3	Contratista
Hito 5: Resultados MIP-EA y HC finalizados - Semana 18					

Cuadro 16: Fase 5: Procesamiento

5.2.6. Fase 6: Análisis

Duración: 3 semanas — Semanas 19-21 — Mes 5

Producto	Inicio	Fin	Duración	Dependencia	Resp.
Análisis comparativo sectorial	Sem 19	Sem 20	2 sem	Fase 5	Contratista
Documento análisis resultados	Sem 20	Sem 21	2 sem	P6.1	Contratista
Hito 6: Análisis completo documentado - Semana 21					

Cuadro 17: Fase 6: Análisis

5.2.7. Fase 7: Difusión

Duración: 2 semanas — Semanas 22-23 — Mes 5-6

Producto	Inicio	Fin	Duración	Dependencia	Resp.
Boletín técnico MIP-EA + HC	Sem 22	Sem 23	2 sem	Fase 6	Contratista
3 Presentaciones CEPAL	Sem 22	Sem 23	2 sem	Fase 6	Contratista
Presentación comité externo + acta	Sem 23	Sem 23	1 sem	P7.1, P7.2	Contratista
README y manual uso	Sem 22	Sem 23	2 sem	Fase 3	Contratista
Hito 7: Difusión y socialización completada - Semana 23					

Cuadro 18: Fase 7: Difusión

5.2.8. Fase 8: Evaluación

Duración: 1 semana — Semana 24 — Mes 6

Producto	Inicio	Fin	Duración	Dependencia	Resp.
Backup completo	Sem 24	Sem 24	1 sem	Fase 7	Contratista
Documento uso y mantenimiento	Sem 24	Sem 24	1 sem	Fase 7	Contratista
Validación final CEPAL	Sem 24	Sem 24	1 sem	P8.1, P8.2	Contratista
Hito Final: Proyecto cerrado y entregado - Semana 24					

Cuadro 19: Fase 8: Evaluación

5.3. Hitos Críticos del Proyecto

- **Hito 1 (Sem 2):** Plan General aprobado
- **Hito 2 (Sem 4):** Arquitectura técnica aprobada
- **Hito 3 (Sem 14):** Sistema Python validado y funcional
- **Hito 4 (Sem 14):** Datos validados y listos para procesamiento
- **Hito 5 (Sem 18):** Resultados MIP-EA y HC finalizados
- **Hito 6 (Sem 21):** Análisis completo documentado
- **Hito 7 (Sem 23):** Difusión y socialización completada
- **Hito Final (Sem 24):** Proyecto cerrado y entregado

5.4. Recursos Necesarios

Humanos: Contratista.

Técnicos: Computador 32GB RAM, Python 3.9+, NumPy, Pandas, FastAPI, Git

5.5. Entregables Principales

1. Matrices MIP-EA (68×68) 2017/2019/2021
2. Huella Carbono total y por componentes
3. Análisis SDA
4. Boletín técnico publicación
5. Código Python OOP documentado
6. Manual uso/mantenimiento

Bibliografía

1. Leontief, W. (1970). Environmental repercussions and the economic structure. *Review of Economics and Statistics*, 52(3), 262-271.
2. Miller, R. E., & Blair, P. D. (2009). *Input-output analysis: foundations and extensions*. Cambridge University Press.
3. Dietzenbacher, E., & Los, B. (1998). Structural decomposition techniques. *Economic Systems Research*, 10(4), 307-324.
4. Peters, G. P., & Hertwich, E. G. (2008). CO₂ embodied in international trade. *Environmental Science & Technology*, 42(5), 1401-1407.
5. IPCC. (2006). *2006 IPCC Guidelines for National Greenhouse Gas Inventories*. IGES.

6. DANE. (2020). *Sistema de Cuentas Nacionales - Cuadros de Oferta y Utilización*.
7. IDEAM. (2021). *Inventario Nacional de Gases Efecto Invernadero - Colombia*.
8. UPME. (2021). *Balance Energético Nacional (BECO)*.
9. Lenzen, M., et al. (2012). Mapping the structure of the world economy. *Environmental Science & Technology*, 46(15), 8374-8381.
10. Tukker, A., & Dietzenbacher, E. (2013). Global multiregional input-output frameworks. *Economic Systems Research*, 25(1), 1-19.
11. Hoekstra, R., & van den Bergh, J. C. (2003). Comparing structural decomposition analysis and index. *Energy Economics*, 25(1), 39-64.
12. Wiedmann, T. (2009). A review of multi-region input-output models. *Ecological Economics*, 69(2), 211-222.
13. Chang, Y. F. (2015). Comprehensive evaluation of industrial CO₂ emission. *Energy Policy*, 83, 162-173.
14. Rasmussen, P. N. (1958). *Studies in inter-sectoral relations*. North-Holland.
15. Hirschman, A. O. (1958). *The strategy of economic development*. Yale University Press.
16. United Nations. (2018). *Handbook on Supply, Use and Input-Output Tables*. UN.
17. Weber, C. L., & Matthews, H. S. (2008). American household carbon footprint. *Ecological Economics*, 66(2-3), 379-391.
18. Davis, S. J., & Caldeira, K. (2010). Consumption-based accounting. *PNAS*, 107(12), 5687-5692.
19. Ghosh, A. (1958). Input-output approach. *Economica*, 25(97), 58-64.
20. Minx, J. C., et al. (2011). China's CO₂ emissions. *Environmental Science & Technology*, 45(21), 9144-9153.