



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

DIPARTIMENTO DI FISICA

Corso di Laurea Triennale Interateneo in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Funzionamento dell'interferometro di Michelson come
rilevatore di onde gravitazionali**

Laureando:
Nicole Busdon

Relatore:
Prof. Edoardo Milotti

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

Abstract

In questa tesi ho studiato nel dettaglio il funzionamento di un interferometro di Michelson per la rilevazione delle onde gravitazionali. Per prima cosa ho ricavato la risposta di un semplice interferometro al passaggio di un'onda gravitazionale che modifica le lunghezze dei bracci. In seguito ho analizzato il funzionamento delle cavità di Fabry-Perot e il modo in cui esse vengono utilizzate per incrementare il cammino ottico del fascio luminoso. La parte principale della tesi riguarda i metodi di recycling necessari per aumentare la sensibilità dell'interferometro, limitata in generale da varie sorgenti di rumore. In particolare mi sono concentrata sulle tecniche di power recycling e signal recycling utilizzate per ridurre gli effetti del rumore shot che limitano la sensibilità soprattutto ad alte frequenze. Infine ho esposto brevemente i metodi utilizzati per monitorare la stabilità dei parametri dei principali componenti dell'interferometro, in particolare la posizione degli specchi e la frequenza del laser.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Scelta dell'interferometro di Michelson	3
2	Nullled lock-in detection	5
2.1	Null-point	5
2.2	Lock-in detection	6
3	Incremento della lunghezza dei bracci	9
3.1	Caratteristiche di una cavità di Fabry-Perot	9
3.2	Incremento della lunghezza dei bracci	11
4	Metodi di recycling	15
4.1	Shot Noise e minima ampiezza rilevabile	15
4.2	Broadband o standard recycling	18
4.3	Resonant recycling	19
4.4	Dual Recycling	21
4.5	Sistema di controllo dell'interferometro	25
	Conclusioni	27
	Appendice A	28
	Appendice B	31
	Appendice C	33
	Bibliografia	37

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Introduzione

L'esistenza delle onde gravitazionali (GW) è stata predetta per la prima volta nella teoria della Relatività Generale di Einstein nel 1916. Le onde gravitazionali sono perturbazioni dello spaziotempo causate da masse in accelerazione, si propagano alla velocità della luce e causano la deformazione dello spazio perpendicolarmente alla loro direzione di polarizzazione. Il processo di sviluppo tecnologico che ha portato alla dimostrazione dell'esistenza delle GW è stato molto lungo e complesso siccome persino fenomeni violenti come esplosioni di supernove o coalescenze di buchi neri producono effetti estremamente piccoli, che richiedono quindi rilevatori incredibilmente sensibili per poter essere misurati. Infatti, l'ampiezza di una GW è dell'ordine di 10^{-21} o inferiore e quindi un interferometro subisce una deformazione minore di un millesimo del diametro di un protone. Per questi motivi per molti anni le onde gravitazionali sono state ritenute troppo deboli per poter essere misurate in modo diretto.

I loro effetti sono stati osservati per la prima volta in maniera indiretta nel 1974 grazie allo studio del sistema binario PSR 1913+16, composto da una pulsar e da una stella di neutroni. I due Premi Nobel Hulse e Taylor, cronometrando il periodo della pulsar, furono in grado di misurare sperimentalmente l'orbita binaria del sistema e stimare in modo quantitativo l'energia persa sotto forma di radiazione gravitazionale. Questa perdita di energia causa un decadimento dell'orbita che negli anni seguenti è stato misurato ripetutamente ed è risultato essere in perfetto accordo con quanto previsto dalla Teoria della Relatività Generale [1].

Il primo esperimento con l'obiettivo di rilevare in modo diretto le onde gravitazionali venne condotto da Weber nel 1960. Il rilevatore utilizzato consisteva in un cilindro di alluminio di circa 1.5 tonnellate munito di una serie di cristalli piezoelettrici posti sulla superficie laterale dello strumento. Il sistema era sospeso e posto nel vuoto in modo da diminuire le vibrazioni dovute all'ambiente esterno. Si supponeva che il passaggio di una GW dovesse far vibrare il cilindro ad una determinata frequenza di risonanza; di conseguenza i cristalli avrebbero dovuto rilevare la deformazione meccanica e trasformarla in un segnale elettrico. Purtroppo le misurazioni basate su questo metodo e condotte da vari gruppi sia in Europa che negli USA non fornirono risultati positivi, e di conseguenza si

passò allo sviluppo di nuovi tipi di rilevatori. Gli sforzi si concentrarono principalmente sugli interferometri che, rispetto alle barre di Weber, erano in grado di coprire un range di frequenze più ampio e dunque avevano una probabilità maggiore di poter osservare un evento [2].

Il primo progetto di un interferometro moderno venne ideato nei primi anni 70 da Rainer Weiss (Premio Nobel nel 2017) e prevedeva la costruzione di uno strumento con bracci di lunghezza di vari chilometri che dovevano essere percorsi più volte da un fascio luminoso tramite l'utilizzo di delay lines. Contemporaneamente in Europa vennero testati alcuni interferometri di lunghezza di alcune decine di metri ma, al posto delle delay lines, furono inserite delle cavità di Fabry-Perot. Siccome i test sulle sorgenti di rumore diedero esito positivo, all'inizio degli anni 80 venne finalmente avviata la costruzione dei due interferometri di LIGO in America e, una decina di anni più tardi, iniziò anche la realizzazione dell'interferometro Virgo in Italia. Entrambe le collaborazioni hanno in seguito sottoposto gli interferometri a delle modifiche in modo da raggiungere sensibilità più alte.

Il 14 settembre 2015 i due interferometri di LIGO hanno rilevato, ad una distanza di 6.9 ms, il primo segnale generato dal passaggio di un'onda gravitazionale. L'evoluzione temporale della frequenza e dell'ampiezza del segnale (Figura 1.1) hanno portato a concludere che la GW sia stata generata dalla coalescenza di due buchi neri con massa di 30 e 35 volte la massa solare. Purtroppo la risoluzione spaziale degli interferometri non è particolarmente elevata e dunque non è stato possibile determinare con esattezza la posizione della sorgente. In seguito, durante i primi due periodi di osservazione di LIGO e Virgo identificati come O1 e O2, sono stati osservati altri 11 eventi. Successivamente i miglioramenti

apportati agli interferometri hanno permesso di osservare altri 39 eventi durante il periodo O3a, ovvero da aprile ad ottobre 2019. In totale quindi sono state rilevate 50 onde gravitazionali, probabilmente generate da coalescenze di buchi neri, stelle di neutroni binarie e sistemi binari formati da buchi neri e stelle di neutroni.

In generale, è possibile suddividere le sorgenti di onde gravitazionali in quattro gruppi e ad ogni tipo di sorgente corrisponde una determinata banda di frequenze (Figura 1.2). Gli interferometri realizzati fino ad ora osservano in un range di frequenze compatibile con sorgenti quali sistemi binari oppure stelle di neutroni e supernove che si trovino all'interno

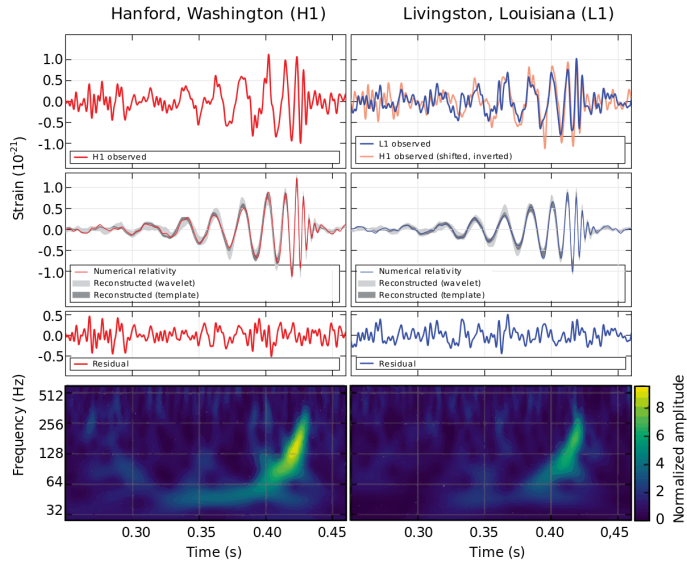


Figura 1.1: L'evento GW150914 registrato dall'interferometro LIGO Hanford (H1) ed in seguito da LIGO Livingston (L1).

della nostra galassia. Progetti futuri come LISA e DECIGO prevedono la realizzazione di interferometri spaziali, che quindi permetteranno di osservare sorgenti in un diverso range di frequenza.

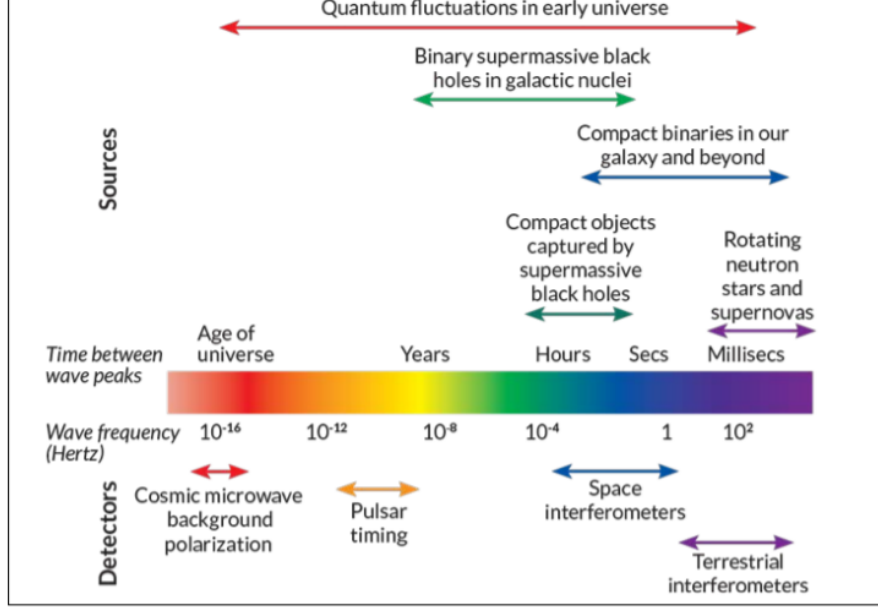


Figura 1.2: Sorgenti di onde gravitazionali [2]

1.2 Scelta dell'interferometro di Michelson

L'equazione delle onde gravitazionali si ottiene dalla linearizzazione delle equazioni di campo di Einstein tramite la formula:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

La soluzione generale è una sovrapposizione di onde piane:

$$h_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}$$

Dove $A_{\mu\nu}$ è il tensore che rappresenta l'azione spaziale dell'onda gravitazionale. Dall'equazione si deduce che le GW sono onde trasversali che si propagano a velocità c e possono avere due polarizzazioni ortogonali. [3]

Se si suppone che la GW si propaghi in direzione z , allora essa indurrà un allungamento dell'oggetto lungo l'asse x e una compressione lungo l'asse y . Dopo mezzo periodo l'oggetto verrà allungato lungo la direzione y e compresso lungo la x . Questo tipo di polarizzazione si indica con "+", mentre ruotando gli assi di 45° si ottiene la polarizzazione identificata con "×". La deformazione causata dal campo gravitazionale risulta proporzionale alla lunghezza dell'oggetto e all'intensità dell'onda. Se ad esempio si suppone che

la GW introduca una variazione di lunghezza pari a $\delta L = L - L_0$ allora, nel caso in cui l'orientamento dell'oggetto sia ottimale, si ottiene:

$$\frac{\delta L}{L_0} = \frac{h}{2}$$

Per questo motivo, essendo l'interferometro di Michelson costituito da due bracci ortogonali, esso risulta lo strumento ideale per la rilevazione delle onde gravitazionali. Nella sua configurazione base questo tipo di interferometro consiste in un laser il cui fascio viene diviso da un beam-splitter. I due fasci risultanti percorrono i due bracci dello strumento, vengono riflessi da uno specchio posto alle estremità e si ricombinano nuovamente al beam-splitter (Figura 1.3). L'interferenza generata dalla sovrapposizione dei due fasci viene osservata con un fotorilevatore e, siccome essa dipende dalla differenza di fase tra i due fasci, può essere associata alla differenza di lunghezza tra i percorsi secondo la relazione:

$$\delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta L = \frac{2\pi}{c}\nu\delta L$$

Per massimizzare l'azione dell'onda gravitazionale i bracci dell'interferometro hanno una lunghezza di qualche chilometro, in particolare 3 km per Virgo e 4 km per LIGO. Essendo però l'ampiezza della GW dell'ordine di 10^{-21} , anche in questo modo lo spostamento degli specchi è pari a circa un millesimo del diametro di un protone. Affinché lo strumento raggiunga una sensibilità adatta a rilevare un segnale così debole, diviene quindi necessario ridurre al minimo il rumore generato dallo strumento e dall'elettronica e modificare la struttura di base dell'interferometro con i metodi che verranno descritti nei prossimi paragrafi.

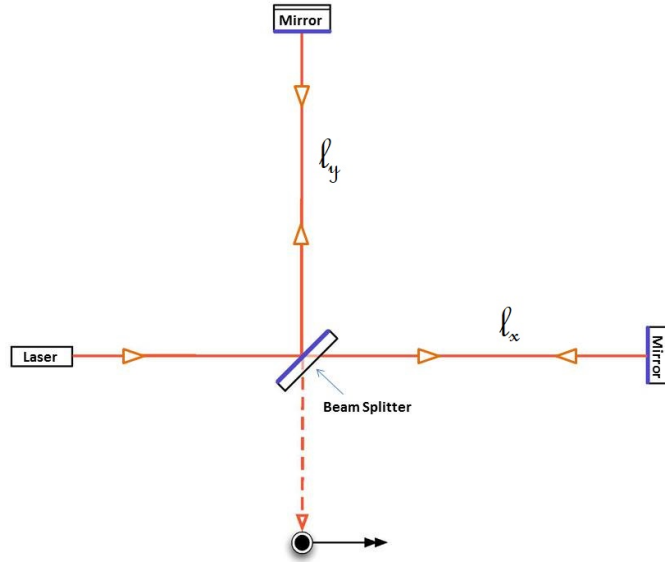


Figura 1.3: Struttura base dell'interferometro di Michelson [4]

Capitolo 2

Nullled lock-in detection

In questo capitolo verrà presentato nel dettaglio il funzionamento dell'interferometro di Michelson, considerando inizialmente solo la sua struttura di base. Verranno poi evidenziate le prime modifiche da apportare allo strumento per incrementare la sua capacità di rilevare le onde gravitazionali.

2.1 Null-point

Si consideri un semplice interferometro di Michelson con un campo elettrico in input pari a E_{in} .

Come si è detto in precedenza, la radiazione viene divisa dal beam-splitter e i due fasci risultanti percorrono i due bracci di lunghezze l_x e l_y (Figura 1.3). Al beam-splitter i due fasci si ricompongono nuovamente e il campo elettrico in output può essere rappresentato come la somma dei due campi elettrici che hanno seguito percorsi diversi:

$$E_{out} = \frac{E_{in}}{2} (r_x e^{ik2l_x} - r_y e^{ik2l_y}) \quad (2.1)$$

Supponendo che gli specchi siano perfettamente riflettenti si pongono i coefficienti di riflessione pari a $r_x = r_y = -1$. La potenza misurata dal detector, ricavata come il modulo al quadrato del campo elettrico, dipende in modo sinusoidale dalla differenza di lunghezza tra i due percorsi seguiti dalla radiazione: $\Delta l = l_x - l_y$.

Un'onda gravitazionale modifica le lunghezze dei bracci introducendo una variazione di lunghezza δl_x per l_x e δl_y per l_y . In tal caso si può scrivere la deformazione totale causata dalla GW come:

$$h = \frac{\delta l_x - \delta l_y}{l}$$

dove l è la lunghezza media dei bracci dello strumento [5].
Di conseguenza la potenza rilevata dal detector sarà pari a:

$$P_{out} = P_{in} \sin^2[k(\Delta l + lh)]$$

con $P_{in} = |E_{in}|^2$.

Assumendo che la perturbazione indotta dalla GW sia tale che $klh \ll 1$ e fissando un'asimmetria in condizioni normali pari a Δl , si può sviluppare la potenza in serie di Taylor in $k\Delta l$:

$$P_{out} \simeq P_{in} \sin^2(k\Delta l) + P_{in} \sin(2k\Delta l)(klh)$$

Si vede dunque che per massimizzare la risposta dell'interferometro sarà necessario operare nel punto in cui la derivata è massima, cioè in $k\Delta l = \frac{\pi}{4}$. In questo caso, approssimando la potenza al primo ordine in h si ottiene:

$$P_{out} \simeq \frac{P_{in}}{2}(1 + 2klh)$$

È evidente come il termine costante possa fluttuare in seguito a perturbazioni di Δl , anche se queste non dovessero essere causate da una GW, ma bensì da una perturbazione di origine sismica. Lo stesso termine è inoltre proporzionale a P_{in} , che può fluttuare a causa di variazioni della radiazione emessa dal laser. Per questo motivo è necessario introdurre degli accorgimenti che permettano di eliminare il termine costante e contemporaneamente potenziare il segnale.

Per eliminare il termine costante si può procedere scegliendo Δl in modo da operare in una configurazione per cui l'interferenza al detector sia distruttiva. In questo modo la misurazione del segnale non può essere compromessa da eventuali fluttuazioni di P_{in} . Tenendo conto di questa condizione ed utilizzando l'equazione (2.1) si ricava che in presenza di una GW il campo elettrico al detector risulta:

$$E_{out} = -iE_{in}e^{ik2l}\sin(klh)$$

In questo modo si elimina il termine costante ma allo stesso tempo, agendo nel punto di minimo, si annulla anche il termine dipendente da h . In definitiva quindi si ottiene in output una potenza proporzionale al quadrato di h :

$$P_{out} \simeq P_{in}k^2l^2h^2$$

Si è detto però che la deformazione h è dell'ordine di 10^{-21} , dunque la potenza in ingresso dovrebbe essere troppo elevata per permettere di rilevare un segnale così debole. È quindi necessario agire in modo da ristabilire nuovamente un segnale lineare in h .

2.2 Lock-in detection

La tecnica descritta in questo paragrafo prende il nome di lock-in detection e si basa sulla modulazione del fascio in input. La modulazione viene eseguita tramite l'utilizzo delle celle di Pockels, cioè un materiale dielettrico il cui indice di rifrazione cambia a seconda del campo elettrico applicato alla cella. Variando in modo sinusoidale questo campo elettrico esterno è quindi possibile modulare la fase della radiazione elettromagnetica che attraversa la cella. Supponendo che la luce emessa dal laser oscilli come $E_0e^{i\omega t}$ si potrà esprimere il

campo elettrico dopo la modulazione tramite le funzioni di Bessel. Tralasciando i termini di ordine superiore al primo si ottiene:

$$E_{in} = E_0 e^{i(\omega t + \beta \sin \Omega t)} \simeq E_0 [J_0(\beta) e^{i\omega t} + J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t}]$$

dove Ω è la frequenza della modulazione.

Il primo termine dell'equazione, che oscilla alla frequenza iniziale ω , è detto portante, gli altri due termini sono le bande laterali. Siccome queste tre componenti hanno frequenze diverse è necessario calcolare in modo distinto la risposta dell'interferometro. Il campo elettrico finale di ogni componente sarà quindi dato dalla relazione $E_{out} = t E_{in}$, usando la corretta funzione di trasferimento t .

La funzione di trasferimento per la portante in assenza di una GW si ricava immediatamente dall'equazione (2.1) ed è pari a:

$$t_p = -i e^{ik(l_x + l_y)} \sin(k\Delta l)$$

Le funzioni di trasferimento per le bande laterali si ricavano facilmente sostituendo al vettore d'onda k della portante il corretto vettore d'onda per le bande laterali: $k_{\pm} = \frac{\omega \pm \Omega}{c} = k \pm k_{mod}$.

A questo punto, ricordando che l'obiettivo della modulazione è quello di ottenere un segnale lineare in h , si sceglie la differenza $\Delta l = l_x - l_y$ in modo tale da avere interferenza distruttiva per la portante ma non per le bande laterali. Questa differenza Δl prende il nome di asimmetria di Schnupp.

In presenza di un'onda gravitazionale, assumendo $klh \ll 1$ e approssimando il seno al primo ordine, le funzioni di trasferimento di portante e bande laterali risultano:

$$t_p \simeq -i e^{ik(l_x + l_y)} klh \quad t_{\pm} = \mp i e^{ik_{\pm}(l_x + l_y)} \sin\left(2\pi \frac{\Delta l}{\lambda_{mod}}\right) \quad (2.2)$$

Nella funzione t_{\pm} si sta trascurando la variazione di Δl dovuta alla GW.

Per il processo esposto nel seguito verranno delineati soltanto i passaggi principali, mentre il procedimento completo verrà illustrato nell'appendice A.

Utilizzando quanto trovato fin ora si ricava che il campo elettrico in output vale:

$$E_{out} = E_{in} e^{ik(l_x + l_y)} \left[i J_0(\beta) 2\pi \frac{l}{\lambda} h + 2i J_1(\beta) \sin(k_{mod} \Delta l) \cos\left(\Omega t + 4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}\right) \right]$$

Ad esso corrisponde una potenza $P_{out} = |E_{out}|^2$ composta da quattro termini: due termini non oscillanti, un termine che oscilla con frequenza 2Ω e uno che oscilla a frequenza Ω . Quasi ultimo vale:

$$P_{in} J_0(\beta) J_1(\beta) 4\pi \frac{l}{\lambda} h \sin(k_{mod} \Delta l) \cos\left(\Omega t + 4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}\right)$$

Essendo l'unico addendo proporzionale ad h è il solo termine che si è interessati ad estrarre e misurare. È quindi necessario capire come eliminare i termini indesiderati.

Il fotorilevatore fornisce una risposta proporzionale a P_{out} , in particolare in output si ottiene: $V_{ph} = RP_{out}$. A questo punto è necessario estrarre da V_{ph} il termine indicato precedentemente. Per farlo si utilizza un procedimento che consiste nell'utilizzo di un mixer e di un filtro passa basso (Figura 2.1). Il mixer permette di moltiplicare V_{ph} con un segnale esterno che in questo caso deve avere frequenza Ω , mentre l'uso del filtro equivale ad eseguire una media temporale.

Il segnale in output ottenuto in questo modo equivale a:

$$V_{signal} = \langle V_{ph} \cos(\Omega t + \Phi) \rangle = R \langle P_{out} \cos(\Omega t + \Phi) \rangle$$

In questo modo, la media temporale elimina i due termini non oscillanti e il termine con frequenza 2Ω mentre il termine proporzionale ad h viene rettificato. Per massimizzare il segnale si sceglie un valore della fase pari a: $\Phi = -4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}$.

In output si misura quindi un segnale pari a:

$$V_{signal} = 2\pi RP_{in} J_0(\beta) J_1(\beta) \frac{l}{\lambda} \sin(k_{mod} \Delta l) h \quad (2.3)$$

L'obiettivo di avere un segnale proporzionale ad h e nullo in assenza di GW è quindi raggiunto.

Si osserva che l'intensità del segnale dipende dalla lunghezza dei bracci l , dalla potenza iniziale del laser P_{in} e dal valore scelto per l'asimmetria di Schnupp Δl . Per massimizzare il segnale conviene quindi prendere $\Delta l = \frac{\lambda_{mod}}{4}$, ma allo stesso tempo è anche necessario aumentare il più possibile la lunghezza dei bracci e potenziare l'intensità del segnale in ingresso. Le tecniche utilizzate per soddisfare queste ultime due richieste saranno presentate nei prossimi capitoli.

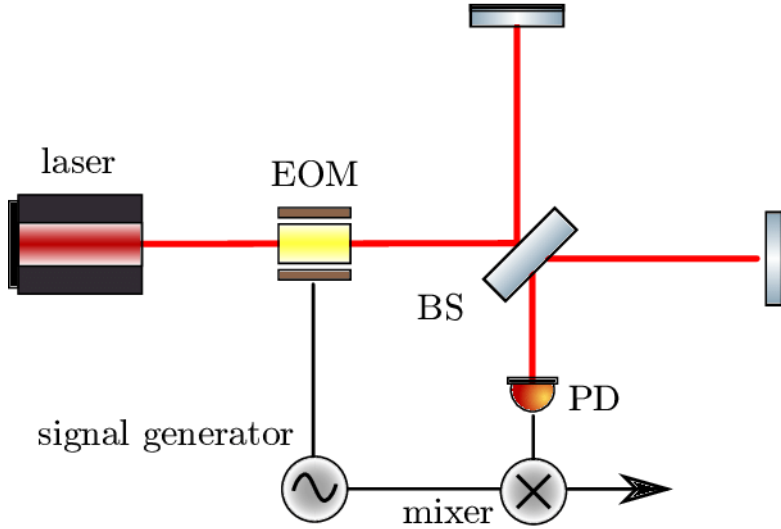


Figura 2.1: Meccanismo di modulazione e demodulazione del segnale [6]

Capitolo 3

Incremento della lunghezza dei bracci

Nel paragrafo precedente, l'equazione (2.3) evidenzia la dipendenza del segnale in output dalla lunghezza l dei bracci, conseguentemente risulta necessario aumentare tale lunghezza per massimizzare l'intensità V_{signal} . Tuttavia la realizzazione di un interferometro con un'estensione superiore ai 4 km potrebbe far emergere delle difficoltà legate alla precisione dell'apparato strumentale che inficerebbero l'accuratezza della misura. Per ovviare a questo problema si introducono delle cavità di Fabry-Perot nei bracci dello strumento, ottenendo i risultati che verranno esposti in questo capitolo.

3.1 Caratteristiche di una cavità di Fabry-Perot

Una cavità ottica è un dispositivo in grado di confinare al suo interno luce ad una certa frequenza e, in particolare, un interferometro di Fabry-Perot è costituito da una cavità delimitata da due specchi con un coefficiente di riflessione molto elevato. Quando il fascio luminoso raggiunge lo specchio di input viene in gran parte riflesso verso il beam splitter, ma una parte della luce penetra all'interno della cavità e inizia a circolare in essa. Se la cavità rispetta la condizione di risonanza, la luce che ha percorso un round trip risulta essere in fase con la nuova radiazione in ingresso e dunque le ampiezze si sommano. In questo modo l'intensità della radiazione nella cavità aumenta e risulta comparabile a quella della radiazione che viene riflessa immediatamente dallo specchio di input.

Si suppone ora che il primo specchio della cavità abbia un coefficiente di riflessione r_1 e un coefficiente di trasmissione t_1 . Analogamente i coefficienti di riflessione e trasmissione del secondo specchio saranno rispettivamente r_2 e t_2 . Indicando con E_{in} il campo elettrico incidente sullo specchio di input e con L la lunghezza della cavità, è possibile scrivere il campo totale riflesso come:

$$E_r = E_{in} \left(\frac{r_1 - r_2(r_1^2 + t_1^2)e^{ik2L}}{1 - r_1r_2e^{ik2L}} \right) \quad (3.1)$$

Dove L è la lunghezza della cavità e il termine tra parentesi rappresenta il coefficiente di riflessione $r(\omega)$ della cavità di Fabry-Perot. Se si suppone che il sistema sia ideale,

allora: $r_1^2 + t_1^2 = 1$.

Si vuole sottolineare che il campo riflesso E_r è costituito dalla somma di due contributi: il primo è il campo riflesso dallo specchio di input verso il beam splitter mentre il secondo è il campo uscente dalla cavità attraverso lo specchio di input.

Ovviamente si può scrivere il campo elettrico trasmesso attraverso il secondo specchio come:

$$E_t = E_{in} \left(\frac{t_1 t_2 e^{ikL}}{1 - r_1 r_2 e^{ik2L}} \right)$$

In questo caso il termine tra parentesi rappresenta la funzione di trasferimento della cavità.

Si definiscono ora alcuni parametri che caratterizzano la cavità [3]:

Condizione di risonanza

Se la differenza di fase dopo un round trip corrisponde ad un multiplo intero di 2π si ottiene interferenza costruttiva all'interno della cavità e si dice che la cavità è in risonanza. In particolare si deve avere: $2kL = 2n\pi$, cioè $2L = n\lambda$.

In questo caso la potenza della radiazione nella cavità è massima e la potenza riflessa è minima, di conseguenza questa configurazione permette alla luce di compiere il numero massimo di round trips. Siccome la cavità deve essere sfruttata per incrementare il cammino ottico della radiazione nell'interferometro le cavità utilizzate opereranno proprio in condizione di risonanza.

Free Spectral Range

É la differenza in frequenza tra due picchi consecutivi

$$FSR = \Delta\nu = \frac{c}{2L}$$

Larghezza di banda

É l'ampiezza a metà altezza del massimo (FWHM). Per ricavare la FWHM si suppone che il massimo della potenza trasmessa si trovi in corrispondenza della frequenza $\omega = 0$ e si impone:

$$P_t(\omega_{1/2}) = \frac{P_t(\omega = 0)}{2}$$

Dove $\omega_{1/2}$ è la frequenza alla quale la potenza trasmessa è pari a metà della potenza massima.

Con alcuni passaggi si ricava che la FWHM è data da:

$$\delta\nu = \frac{2\omega_{1/2}}{2\pi} = \frac{FSR}{\pi} \arccos \left(-\frac{1 + r_1^2 r_2^2 - 4r_1 r_2}{2r_1 r_2} \right)$$

Per cavità con un coefficiente di riflessione alto, cioè $r_1 r_2 \sim 1$ si può utilizzare l'approssimazione per piccoli angoli $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ ottenendo:

$$\delta\nu \simeq \frac{FSR(1 - r_1 r_2)}{\pi \sqrt{r_1 r_2}}$$

Allora la larghezza di banda dipende dai coefficienti di riflessione degli specchi. In particolare la FWHM diminuisce quando r_1 e r_2 si avvicinano all'unità, cioè quando la radiazione compie più round trips nella cavità.

Finesse

Questo coefficiente rappresenta il rapporto tra la distanza fra due picchi e la larghezza di un picco, quindi è definito come il rapporto tra free spectral range e FWHM:

$$F = \frac{FSR}{\delta\nu} \simeq \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}$$

La finesse permette di quantificare quanto la cavità è sensibile a variazioni della lunghezza L o della lunghezza d'onda λ della radiazione.

Storage Time

È il tempo medio che un fotone passa all'interno della cavità prima di essere trasmesso da uno degli specchi. Dipende dalla finesse ed equivale a:

$$\tau_s = \frac{2Nl}{c} = \frac{2Fl}{\pi c}$$

Dove N è il numero di round trips eseguiti

3.2 Incremento della lunghezza dei bracci

Dallo studio delle proprietà appena esposte si può intuire come una cavità di Fabry Perot possa essere sfruttata per raggiungere l'obiettivo di incrementare il cammino ottico del fascio senza però allungare fisicamente i bracci dell'interferometro. Verranno esposte ora le caratteristiche che la cavità deve presentare per ottimizzarne la funzione. In seguito si descriverà il comportamento del fascio modulato dopo l'introduzione delle due cavità nei bracci.

È importante notare che i coefficienti di riflessione degli specchi r_1 e r_2 influenzano il comportamento della cavità. Se infatti si rappresenta il coefficiente di riflessione $r(\omega)$ della cavità nel piano complesso [7], si osserva che al variare di λ o L esso traccia una circonferenza con centro sull'asse reale (Figura 3.1). Le caratteristiche di tale circonferenza dipendono dalle proprietà della cavità, ed in particolare dai valori di r_1 e r_2 . Se la cavità si trova lontano dalla condizione di risonanza allora $r(\omega)$ ha sempre un valore vicino a -1, indipendentemente da r_1 e r_2 . In tal caso la fase della radiazione non viene influenzata da cambiamenti di λ o di L . Se al contrario la condizione di risonanza è rispettata, $r(\omega)$ giace sempre sull'asse reale, ma all'estremo opposto della circonferenza. In questo caso la fase della radiazione è molto sensibile

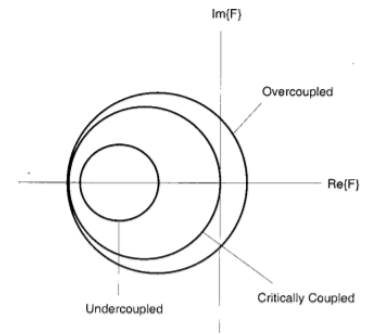


Figura 3.1: Rappresentazione di $r(\omega)$ nel piano complesso.

a cambiamenti di λ o di L , ma le proprietà del fascio riflesso dipendono dai coefficienti r_1 e r_2 . Si nota che solo quando la cavità è critically coupled l'intensità riflessa è nulla in condizione di risonanza.

Si possono in particolare definire tre situazioni distinte:

Cavità critically coupled

È il caso in cui $r_1 = r_2$.

Allora in condizione di risonanza $r(\omega) = 0$ perché la radiazione uscente dalla cavità ha la stessa intensità della radiazione riflessa esternamente dallo specchio di input ma, essendo i due fasci sfasati di π , l'interferenza è distruttiva.

Cavità undercoupled

Gli specchi sono tali per cui $r_1 \gg r_2$.

In questa situazione, l'ampiezza della radiazione riflessa esternamente dallo specchio di input è maggiore di quella della radiazione uscente dallo stesso specchio, quindi la sensibilità della cavità a variazioni della lunghezza L è bassa.

Cavità overcoupled

In questo caso $r_2 \gg r_1$.

In tal caso il coefficiente di trasmissione della cavità è molto basso, quindi tra i due specchi si accumula molta energia e l'ampiezza dell'onda uscente dallo specchio di input è maggiore di quella dell'onda riflessa esternamente. Di conseguenza il campo riflesso netto risulta diverso da zero, e la componente dominante è quella uscente dalla cavità. Per questo motivo la fase della radiazione è particolarmente sensibile a variazioni di L . (Figura 3.2)

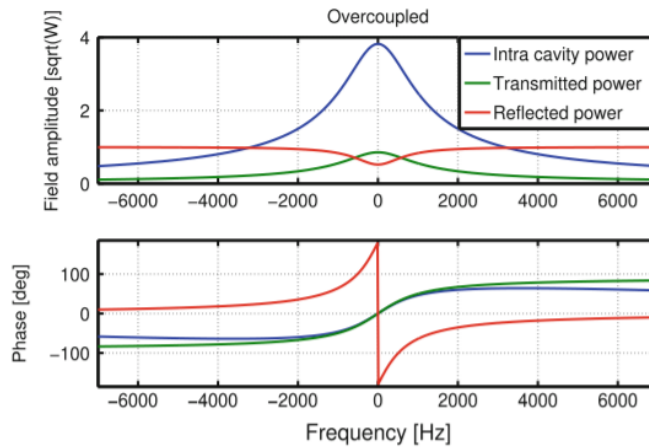


Figura 3.2: Il primo grafico rappresenta le intensità del campo nella cavità, del campo trasmesso e del campo riflesso. Il secondo grafico rappresenta la discontinuità nella fase della radiazione in corrispondenza del punto di risonanza. [3]

Siccome lo scopo dell'interferometro è quello di rilevare variazioni di lunghezza, è facile dedurre che la cavità introdotta nei bracci dello strumento dovrà essere di tipo overcoupled. Questo tipo di configurazione rende inoltre possibile l'implemento del power recycling, che verrà descritto nel prossimo capitolo.

Per capire in che modo la presenza della cavità modifica l'intensità del segnale in output è necessario calcolare nuovamente le funzioni di trasferimento dell'interferometro tenendo conto del contributo fornito dalle cavità risonanti.

Innanzitutto si suppone che, in assenza di un'onda gravitazionale, entrambe le cavità siano di lunghezza L e si indicano le distanze tra il beam splitter e gli specchi di input con l_x ed l_y (Figura 3.3). Si assume inoltre che $l_{x,y} \ll L$. A questo punto si utilizzano le funzioni di trasferimento già definite precedentemente nell'equazione (2.2), sostituendo però i coefficienti di riflessione r_x e r_y con i coefficienti di riflessione delle cavità. In particolare si suppone che le bande laterali del segnale modulato non siano in risonanza nella cavità, dunque i loro coefficienti di riflessione sono $r_x = r_y = -1$ e la funzione di trasferimento t_{\pm} rimane invariata. Allora la differenza di lunghezza Δl tra i due bracci, corrispondente all'asimmetria di Schnupp, può essere introdotta variando solo la distanza tra il beam splitter e lo specchio di input.

La portante al contrario deve essere in risonanza nella cavità, di conseguenza la funzione di trasmissione deve essere ricalcolata [5].

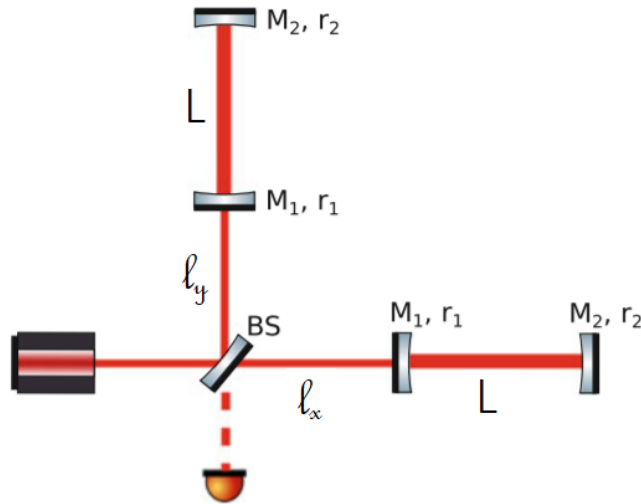


Figura 3.3: Interferometro di Michelson con cavità di Fabry Perot nei bracci

Si procede ora a calcolare il coefficiente di riflessione della cavità a partire dall'equazione (3.1) e si considerano anche le perdite di intensità a cui la luce è soggetta quando si trova all'interno della cavità. Si indica con ϵ l'intensità persa ad ogni round trip, ma si mantiene $\epsilon < t_i$ affinché la cavità possa essere considerata overcoupled. Per quantificare

l'effetto delle perdite bisogna considerare il numero di round trips compiuti dalla luce nella cavità. Questi si possono esprimere in funzione della finesse come $N = \frac{F}{\pi}$. Di conseguenza le perdite totali saranno pari a $\frac{F}{\pi}\epsilon$. In più si suppone che la lunghezza della cavità vari di δL rispetto alla condizione di risonanza per effetto di una GW. Infine, essendo la cavità overcoupled, si considera $r_2 \simeq 1$ e $r_1 \ll r_2$ e si ottiene:

$$r_{x,y} = \left(1 - \frac{F}{\pi}\epsilon\right) \left[1 + i4F \frac{\delta L_{x,y}}{\lambda}\right]$$

Allora, utilizzando questo coefficiente di riflessione, la funzione di trasferimento per la portante si ricava con alcuni passaggi esplicitati nell'appendice B e risulta:

$$t_p = i2e^{ik(l_x+l_y)} \left(1 - \frac{F}{\pi}\epsilon\right) \frac{L}{\lambda} Fh$$

Mentre come spiegato precedentemente le funzioni di trasferimento per le bande laterali rimangono:

$$t_{\pm} = \mp i e^{ik_{\pm}(l_x+l_y)} \sin\left(2\pi \frac{\Delta l}{\lambda_{mod}}\right)$$

Il processo per demodulare il segnale rilevato dal detector rimane analogo a quello esposto nel capitolo (2.2) e consiste cioè nell'utilizzo in successione di un mixer e di un filtro passa basso. In definitiva si ottiene in output un segnale pari a:

$$V_{signal} = 4RP_{in}J_0(\beta)J_1(\beta) \left(1 - \frac{F}{\pi}\epsilon\right) \sin(k_{mod}\Delta l) \frac{L}{\lambda} Fh$$

Dove Δl è il valore dell'asimmetria di Schnupp e h è la deformazione indotta dall'onda gravitazionale.

Si può dunque osservare che l'introduzione delle cavità di Fabry-Perot nei bracci dell'interferometro corrisponde ad un aumento del cammino ottico di un fattore pari alla finesse F . Conseguentemente anche l'intensità finale del segnale aumenta dello stesso fattore. Nel primo interferometro di Virgo la finesse era pari a $F = 150$ mentre in Advanced Virgo il livello di Finesse raggiunto è di $F = 450$.

Capitolo 4

Metodi di recycling

In questa sezione si vogliono definire i concetti di rumore shot e sensibilità, necessari per comprendere i metodi che permettono di incrementare l'intensità del segnale in modo da poter osservare onde gravitazionali sempre più deboli.

4.1 Shot Noise e minima ampiezza rilevabile

Come già detto precedentemente, le ampiezze delle onde gravitazionali che devono essere rilevate tramite l'interferometro sono molto piccole, nello specifico l'ordine di grandezza è di circa 10^{-21} . Si può definire la sensibilità di uno strumento come il minimo segnale misurabile dallo strumento. Ovviamente il rumore limita la sensibilità, ed è quindi fondamentale avere una buona conoscenza delle sorgenti di rumore per poterne ridurre gli effetti.

Nel caso dell'interferometro si possono distinguere tre principali sorgenti di rumore:

- Rumore sismico: una vibrazione del terreno può perturbare la posizione degli specchi simulando l'effetto di un'onda gravitazionale.
- Rumore termico: interessa sia gli specchi che le loro sospensioni siccome il sistema si trova a temperatura ambiente.
- Rumore quantistico: comprende la pressione di radiazione, cioè lo spostamento degli specchi dovuto alla forza esercitata dai fotoni incidenti, e il rumore shot.

Le prime due sorgenti di rumore possono essere ridotte agendo sulla struttura e sulla geometria dell'interferometro e scegliendo in modo appropriato il materiale degli specchi e delle sospensioni. Il rumore quantistico è invece una conseguenza della natura quantistica della luce e per il momento non può essere mitigato, tuttavia lo sviluppo di nuove tecniche come lo squeezing potrà sicuramente portare miglioramenti anche in questo campo.

Si vuole ora esporre il modo in cui il rumore shot influenza la potenza misurata dal fotorilevatore. Si può scrivere il numero di fotoni rilevati dal fotodiodo come:

$$N = \frac{P_{det} t}{h\nu}$$

dove t è il tempo, h è la costante di Planck e P_{det} è la potenza della luce che entra nel detector. La misurazione del numero di fotoni segue la distribuzione di Poisson, quindi il rumore shot diventa dominante quando il numero di particelle che trasportano energia è così piccolo che le fluttuazioni dovute alla distribuzione di Poisson sono significative. Per questo tipo di distribuzione l'incertezza è pari a \sqrt{N} , di conseguenza l'incertezza sulla potenza misurata è data da:

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{h\nu P_{det}}{t}}$$

Ciò significa che, per poter essere rilevata, un'onda gravitazionale deve causare una variazione di potenza tale che $\delta P_{det} > \sigma_P$ [3]. Quando un'onda gravitazionale agisce sull'interferometro ne modifica la lunghezza L dei bracci. Basandosi su quanto detto precedentemente è quindi possibile dedurre che questa variazione causa una differenza di fase totale tra i due fasci provenienti dai due bracci pari a $2\Delta\Phi$. Questa differenza di fase a sua volta produce una fluttuazione dell'intensità rilevata dal fotodiodo pari a: $\frac{\delta I}{I_0} = 4\Delta\Phi$. Quindi, tenendo conto della statistica del detector definita precedentemente, si conclude che la differenza di fase deve essere tale da rispettare la seguente condizione:

$$4\eta I_0 \Delta\Phi > \sqrt{e\eta I_0 \Delta\nu}$$

Dove $\eta = \frac{e\epsilon}{\omega h}$ è un parametro che caratterizza il fotorilevatore e corrisponde al rapporto tra l'efficienza del fotodiodo e la potenza in input [8]. La variazione di fase minima deve dunque essere:

$$\Delta\Phi_{min} = \sqrt{\frac{\omega h \Delta\nu}{16e I_0}} \quad (4.1)$$

Si considera ora la variazione di lunghezza che un'onda gravitazionale induce nei bracci di un interferometro:

$$\frac{\delta L}{L} = \frac{1}{2} h e^{i\omega_g t}$$

Dove ω_g è la frequenza angolare dell'onda gravitazionale e h la sua ampiezza. Come conseguenza ognuno dei due fasci è soggetto ad una variazione della fase che si può calcolare come:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2} k h c \int_{-\tau_s}^0 e^{i\omega_g t} dt = \frac{h\omega}{\omega_g} \sin\left(\frac{\omega_g \tau_s}{2}\right) e^{-i\frac{\omega_g \tau_s}{2}}$$

dove ω è la frequenza del laser, k è il vettore d'onda della radiazione e τ_s è lo storage time della cavità risonante nel braccio dell'interferometro. Si può quindi vedere che la variazione $\Delta\Phi$ è massima quando τ_s è pari a metà del periodo dell'onda gravitazionale. Questo è un risultato effettivamente corretto siccome dopo mezzo periodo il segno dell'onda gravitazionale si inverte, causando dunque una variazione di fase opposta a quella appena ottenuta. Le cavità risonanti nei bracci hanno quindi lo scopo di accoppiare il periodo della GW con lo storage time, in modo da massimizzare la variazione $\Delta\Phi$.

Come già spiegato precedentemente, le cavità di Fabry-Perot utilizzate sono di tipo over-coupled, allora nel campo riflesso domina la componente uscente dalla cavità e di conseguenza c'è uno sfasamento di 180° rispetto al campo incidente.

La luce prodotta dalla sorgente laser viene modulata ed in seguito, dopo aver attraversato il beam splitter, percorre i bracci dell'interferometro. Le cavità di Fabry-Perot sono tali per cui solo la portante è in risonanza, mentre le bande laterali vengono riflesse dallo specchio di input. La variazione di lunghezza della cavità causata dalla GW ha quindi l'effetto di produrre sulla portante delle bande laterali con frequenza che dipende dalla frequenza della GW. Queste bande laterali trasportano il segnale e una volta raggiunto il beam splitter vengono trasmesse in direzione del detector. Si vedrà in seguito che un ulteriore specchio può essere aggiunto tra il laser e il beam splitter con l'obiettivo di formare una "power recycling cavity". In questa cavità sono in risonanza sia la portante che le bande laterali prodotte dalla modulazione elettronica. È importante ricordare che solo le bande laterali vengono trasmesse verso il detector (Figura 4.1).

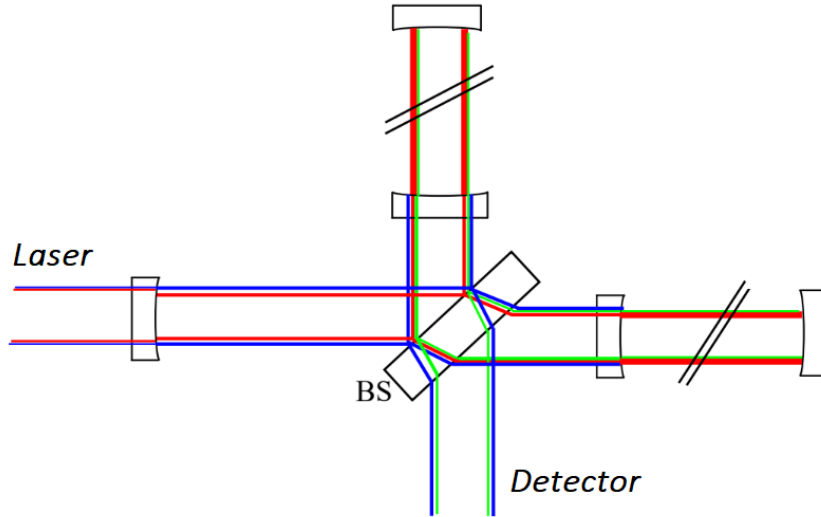


Figura 4.1: Si possono osservare in rosso il fascio alla frequenza del laser, in blu le bande laterali dovute alla modulazione e in verde le bande laterali generate dalla GW.

Si assumerà nel seguito che l'effetto dell'onda gravitazionale deformi le cavità producendo una deviazione dalla lunghezza di risonanza molto lenta se confrontata con lo storage time τ_s . Si suppone quindi che l'interferometro operi in condizione di risonanza e si assume che la lunghezza della cavità L sia piccola se comparata con la lunghezza d'onda della GW, cioè $\omega_g \ll \nu_0$. La variazione di fase risultante corrisponde quindi a:

$$\Delta\Phi = \frac{\alpha_c}{2} \frac{h\omega}{\omega_g} \frac{\omega_g \tau_s}{\sqrt{1 + (\omega_g \tau_s)^2}} \quad (4.2)$$

dove $\alpha_c = \frac{t_1^2 r_2}{(1-r_1 r_2)}$ è il fattore che quantifica l'incremento di intensità tra il campo entrante nella cavità e quello uscente [9]. Il procedimento completo per ricavare la (4.2) è indicato nell'appendice C.

È possibile sostituire le cavità di Fabry-Perot con delle delay lines, il cui funzionamento non si discosta molto da quello delle cavità risonanti, ma in questo caso la differenza di fase risultante sarebbe più grande di un fattore due. Questo risultato si ottiene perché all'interno della delay line c'è un unico fascio che continua a circolare per un tempo pari a $\tau_g/2$ ed è quindi soggetto ad una variazione di fase con segno fissato. Al contrario la luce uscente da una cavità risonante è formata dalla sovrapposizione di più fasci, alcuni dei quali potrebbero essere rimasti all'interno della cavità più a lungo di $\tau_g/2$ e dunque aver subito variazioni di fase di segno opposto. La somma di queste variazioni ha quindi l'effetto di smorzare la variazione di fase complessiva.

Usando quindi le formule (4.1) e (4.2) si ottiene la minima ampiezza di una GW rilevabile dall'interferometro con cavità di Fabry-Perot nei bracci:

$$h_{min} = \left[\frac{\hbar \lambda [1 + (\omega_g \tau_s)^2] \Delta \nu_g}{4 \pi c \epsilon I_0 \tau_s^2} \right]^{1/2} \quad (4.3)$$

Dove $\Delta \nu_g$ è la banda di frequenze osservabili e I_0 è l'intensità iniziale del laser. Verranno ora esposti dei metodi con cui incrementare la sensibilità dello strumento e dunque diminuire il minimo valore visibile di h .

4.2 Broadband o standard recycling

La tecnica che si vuole esporre ora sfrutta il fatto che l'interferometro opera in una configurazione di interferenza distruttiva per il detector. Siccome la legge di conservazione dell'energia deve essere rispettata, dopo aver percorso i bracci dell'interferometro, la portante viene trasmessa nuovamente in direzione del laser. Ovviamente una certa quantità di luce che è possibile quantificare viene persa all'interno dello strumento a causa delle perdite degli specchi. Se si suppone che le perdite di una cavità siano $A^2 \ll 1$, allora l'intensità totale riflessa dalla cavità si può scrivere come:

$$R_{eff}^2 = 1 - \frac{4F}{\pi} \frac{A^2}{1 + F' \sin^2(\delta/2)}$$

Dove F è la finesse della cavità e F' è il coefficiente di finesse pari a $F' = 4F^2/\pi^2$. Allora supponendo che la lunghezza della cavità sia dell'ordine del chilometro, che $A^2 \sim 10^{-4}$ e che lo storage time sia $\tau_s = \frac{1}{2}\tau_g \simeq 0.5$ ms, si trova che le perdite sono pari al 1.5% dell'intensità in ingresso. Essendo quindi le perdite molto basse diventa vantaggioso riciclare la luce che torna verso il laser e per farlo si inserisce uno specchio aggiuntivo tra il laser ed il beam splitter. Questo specchio forma una nuova cavità detta cavità di power recycling. Siccome la radiazione è in risonanza nella cavità di power recycling, l'intensità della radiazione trasmessa all'interferometro aumenta e di conseguenza diminuisce l'incertezza dovuta al rumore shot. In particolare l'intensità aumenta di un fattore proporzionale

al numero di volte in cui la radiazione viene riciclata, ma bisogna ricordare che tale incremento è comunque limitato dalle perdite della cavità, in particolare da fenomeni di assorbimento e scattering. Quindi il massimo guadagno in intensità si può scrivere come:

$$P_g = \frac{1}{1 - R_{eff}^2}$$

È importante scegliere accuratamente lo storage time in modo da massimizzare il guadagno e allo stesso tempo minimizzare le perdite. Per una cavità risonante si pone quindi $\omega_g \tau_s = 1$. Il guadagno per la sensibilità è pari alla radice quadrata del guadagno per la potenza e supponendo $\delta = 0$ si trova:

$$S_g = \sqrt{\frac{\pi \nu_g}{4 \nu_0 A^2}}$$

Di conseguenza l'ampiezza minima rilevabile diminuisce di un fattore pari all'inverso della sensibilità e partendo dall'equazione (7) si ottiene:

$$h_{min} = \left[\frac{\hbar \lambda A^2 \nu_g \Delta \nu_g}{\pi \epsilon I_0 l} \right]^{1/2}$$

L'implementazione del broadband recycling permette dunque di incrementare l'intensità della radiazione che circola nell'interferometro, e per questo motivo è anche detto power recycling. L'aumento di sensibilità che deriva da questa nuova configurazione permette di rilevare onde gravitazionali con un ampiezza minima dell'ordine di 10^{-24} .

4.3 Resonant recycling

Come si può osservare nel paragrafo precedente, la tecnica di broadband recycling non impone limiti alla larghezza di banda del segnale rilevabile dall'interferometro. Questo è sicuramente positivo quando capita di osservare sorgenti inattese o onde gravitazionali generate da eventi non ancora modellizzati. Esistono tuttavia dei casi in cui è sufficiente utilizzare una larghezza di banda ridotta, ad esempio quando lo scopo è quello di osservare onde gravitazionali generate da pulsar o dalla coalescenza di sistemi binari. In tal caso è possibile utilizzare una tecnica detta "resonant recycling" che permette di riciclare il segnale piuttosto che l'intensità della radiazione. In questo modo il guadagno in sensibilità è pari circa al quadrato del guadagno ottenibile con il broadband recycling.

All'inizio di questo capitolo si è visto che, per massimizzare la differenza di fase indotta da una GW, la luce deve rimanere all'interno di un braccio dell'interferometro per un tempo pari a metà del periodo dell'onda: $\tau_s = \frac{\tau_g}{2}$. Allora ponendo uno specchio parzialmente riflettente al posto del beam splitter si costringe la radiazione uscente da un braccio dopo il tempo τ_s ad entrare nel braccio perpendicolare. Siccome però in questo tempo l'onda gravitazionale ha cambiato segno, la fase della radiazione continuerà ad aumentare. L'utilizzo del nuovo specchio consente quindi di accoppiare i due bracci, formando una nuova cavità delimitata dallo specchio M_0 (Figura 4.2). La luce che invece esce dallo specchio M_0 viene suddivisa in due fasci che poi interferiscono al beam splitter: la radiazione alla

frequenza della portante viene trasmessa nuovamente verso il laser, dove può essere implementato il power recycling, mentre la radiazione che oscilla con la frequenza del segnale viene trasmessa verso il fotorilevatore.

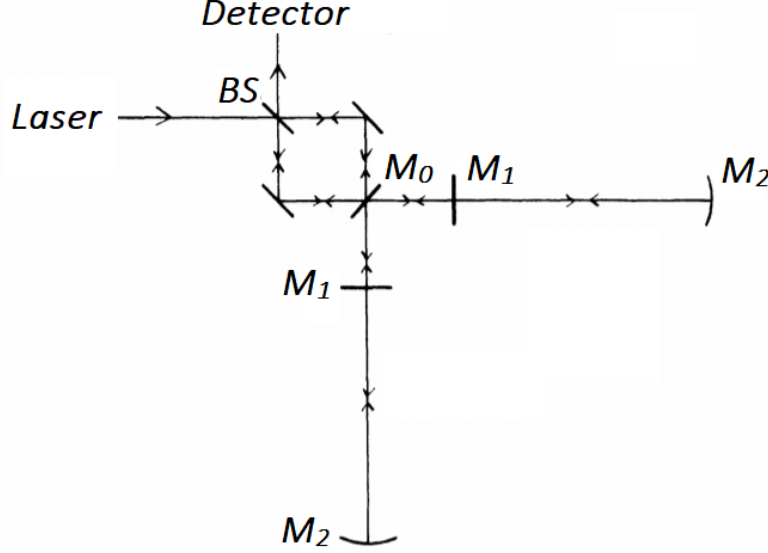


Figura 4.2: Schema del resonant recycling

Ovviamente quando la GW modifica la lunghezza delle cavità si formano due bande laterali a frequenza $\omega \pm \omega_g$, dove ω è la frequenza della portante. Soltanto una delle due sidebands può però essere risonante all'interno del sistema, che sarà allora caratterizzato da due modi normali: il primo corrispondente alla frequenza del laser e il secondo corrispondente alla frequenza del segnale. L'energia viene quindi trasferita parametricamente dalla portante alla banda laterale che contiene l'informazione sull'onda gravitazionale. Quantitativamente si può calcolare il modulo dello sfasamento dovuto all'onda gravitazionale in modo analogo a quanto fatto per l'equazione (4.2), questa volta però si deve tenere conto anche della presenza dello specchio M_0 e del fatto che la cavità non è perfettamente risonante, essendo sfasata di una quantità δ . Si ottiene quindi:

$$\Delta_\Phi = \frac{\alpha_c}{2} \frac{T_0^2}{(1 - R_0 R_p^2)(1 - R_0 R_s^2)} \frac{h\omega}{\omega_g} \frac{\omega_g \tau_s}{\sqrt{1 + F' \sin^2(\frac{\delta}{2})} \sqrt{1 + F' \sin^2(\frac{\delta - \omega_g/\nu_0}{2})}}$$

Dove T_0 ed R_0 sono i coefficienti di trasmissione e riflessione dello specchio M_0 , mentre R_p e R_s sono i coefficienti di riflessione della cavità di Fabry-Perot rispettivamente per la portante e la banda laterale.

Scegliendo un valore ottimale per il coefficiente T_0 è possibile massimizzare la sensibilità ad una determinata frequenza di un fattore pari a:

$$S_g = \frac{\pi\nu_g}{4\nu_0 A^2}$$

Come anticipato il guadagno risultante è quindi pari al quadrato del guadagno ottenibile tramite il power recycling, ma è ristretto ad una precisa banda di frequenza ricavabile da S_g e pari a $\Delta\nu_g = \frac{2\nu_0}{\pi} A^2$. Sfruttando questa tecnica di recycling si ricava dunque che la minima ampiezza rilevabile è pari a:

$$h_{min} = \left[\frac{2\hbar\lambda c}{\pi\epsilon I_0 \tau_{int}} \right]^{1/2} \frac{A^2}{l}$$

Dove τ_{int} è il tempo speso dalla radiazione all'interno del sistema prima di uscire dallo specchio M_0 .

È interessante osservare che è possibile regolare la frequenza di risonanza dell'interferometro variando la lunghezza delle due cavità di Fabry-Perot e di conseguenza modificando anche la lunghezza della cavità centrale, in modo che l'intensità continui ad essere massima. In particolare variando l'offset δ si possono ottenere frequenze di risonanza più alte rispetto a ω_g . Tuttavia un interferometro è caratterizzato da una precisa frequenza di risonanza e dunque, se questa viene aumentata di un fattore α , la sensibilità diminuisce dello stesso fattore α . Questo implica però che il resonant recycling può essere implementato in modo da lavorare con una banda più larga di frequenze, fino a raggiungere il valore $\Delta\nu_g \sim \nu_g$ e la stessa sensibilità garantita dal broadband recycling.

4.4 Dual Recycling

Quella che si vuole esporre ora è un'altra tecnica di signal recycling che sfrutta la presenza di un ulteriore specchio posto tra il beam splitter e il fotorilevatore. Questo specchio è indicato come M_3 e forma la cavità di signal recycling assieme agli specchi posti agli estremi dei bracci e indicati con M_2 (Figura 4.3). Grazie a questa nuova configurazione il segnale generato dall'onda gravitazionale e trasmesso dal beam splitter verso il detector, viene riflesso da M_3 e percorre nuovamente l'interferometro, sommandosi in modo coerente al nuovo segnale che viene continuamente prodotto. Lo specchio M_3 ha quindi la funzione di far corrispondere la fase del segnale entrante nel braccio con la fase della nuova banda laterale generata dalla GW. In totale quindi il segnale viene incrementato del numero totale di volte in cui percorre l'interferometro, anche nel caso in cui lo storage time dovesse essere maggiore del periodo dell'onda gravitazionale. Ovviamente la portante viene riciclata dallo specchio M_0 , quindi questa tecnica permette di sfruttare sia il power recycling che il signal recycling e dunque prende il nome di dual recycling.

In generale solo una delle due bande laterali può essere in risonanza nella cavità, altrimenti per garantire la risonanza di entrambe le frequenze $\nu \pm \nu_g$ sarebbe necessario continuare ad imporre la condizione $\tau_s = \frac{\tau_g}{2}$. Con questa configurazione lo sfasamento indotto dall'onda gravitazionale risulta pari a:

$$\Delta\Phi = \frac{h\omega}{4\omega_g} \omega_g \tau_s$$

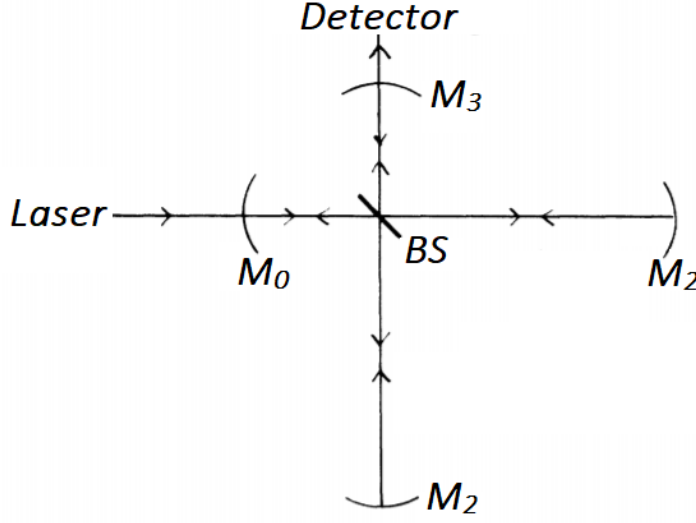


Figura 4.3: Schema del dual recycling

Il segnale trasmesso dallo specchio M_3 verso il fotorilevatore viene amplificato rispetto al valore iniziale di un fattore:

$$\frac{E_s}{E_{s0}} = \left[\frac{T_0 R_{int}}{1 - R_0 R_{int}} \right] \left[\frac{T_3 R_{int}}{1 - R_3 R_{int}} \right]$$

Dove E_{s0} è l'ampiezza iniziale della banda laterale che trasporta il segnale e con R_{int} si indica il coefficiente di riflessione del braccio dell'interferometro. Si può quindi notare che il segnale viene amplificato incrementando sia l'intensità della portante che della banda laterale. Si assume che per tutti gli specchi valga la relazione $R^2 + T^2 + A^2 = 1$ e che $R_{int} = 1 - \eta A^2$, con $\eta A^2 \ll 1$. Si può allora calcolare che l'ampiezza del segnale è massima quando $T_0^2 = T_3^2 = (\eta + 1)A^2$, ed in particolare essa vale:

$$\frac{E_s}{E_{s0}} = \frac{1}{(\eta + 1)A^2}$$

Il guadagno per la sensibilità dipende quindi da questo fattore e dallo sfasamento $\Delta\Phi$ e risulta:

$$S_g = \frac{\omega_g \tau_s}{4(\eta + 1)A^2}$$

Si può notare che se $\eta = 1$ si ottiene proprio il guadagno trovato nel caso del resonant recycling, infatti questa configurazione può essere considerata come un metodo alternativo per ottenere un sistema di cavità accoppiate in cui sia la portante che una delle bande laterali sono in risonanza.

Le bande laterali che non hanno la corretta frequenza di risonanza non saranno risonanti nella cavità e la loro ampiezza finale sarà ridotta di un fattore $[1 + (n_{eff} \delta\Phi)^2]^{1/2}$ rispetto

all'ampiezza dell'onda che oscilla con l'esatta frequenza di risonanza. Si è indicato con n_{eff} il numero totale di volte che la radiazione attraversa la cavità risonante delimitata dallo specchio M_3 e dal resto dell'interferometro, di conseguenza:

$$n_{eff} = \frac{R_3}{1 - R_3 R_{int}} = \frac{1}{(\eta + 1)A^2}$$

Dove si è scelto il coefficiente di trasmissione $T_3 = (\eta + 1)A^2$ in modo da massimizzare il guadagno. $\delta\Phi$ rappresenta invece lo sfasamento tra la radiazione a frequenza di risonanza e la radiazione non risonante dopo un round trip, in particolare esso vale: $\delta\Phi = \frac{2\pi\Delta\nu_g}{\nu_0}$. La larghezza di banda per il funzionamento ottimale del sistema è quindi determinata dalla condizione $n_{eff}\delta\Phi < 1$ e corrisponde a:

$$\Delta\nu_g = \frac{(\eta + 1)\nu_0 A^2}{\pi}$$

Si possono osservare due casi particolari:

- $\eta = 1$: in questo caso si ottiene $\Delta\nu_g = \frac{2\nu_0 A^2}{\pi}$, cioè la larghezza di banda del sistema con il resonant recycling.
- $n_{eff} = \frac{\nu_0}{\omega_g}$: questa condizione si ottiene aumentando il coefficiente di trasmissione dello specchio M_3 e permette di ottenere una larghezza di banda $\Delta\nu_g \sim \nu_g$, cioè pari a quella di un sistema con standard recycling. Ovviamente l'aumento della larghezza di banda causa una riduzione del guadagno.

Naturalmente a questo punto è possibile completare la struttura dell'interferometro aggiungendo le cavità di Fabry-Perot all'interno dei due bracci senza comunque modificare il funzionamento del dual recycling.

È interessante analizzare come variano la sensibilità e la larghezza di banda al variare del coefficiente di trasmissione T_3 (Figura 9). Si assume che la condizione di risonanza sia perfettamente rispettata ($\delta = 0$) e si fissa il valore dello storage time. Quando lo specchio M_3 non è inserito nell'interferometro si ottiene uno strumento ottimizzato a lavorare con un'ampia larghezza di banda (standard recycling). Ponendo lo specchio M_3 prima del detector si può notare che la sensibilità aumenta e contemporaneamente la larghezza di banda diminuisce. Si osserva inoltre che, al diminuire del coefficiente di trasmissione T_3 , il picco della sensibilità aumenta in corrispondenza di un determinato valore di frequenza, quindi lo strumento è ottimizzato a lavorare con una precisa banda di frequenze.

Nella configurazione di standard recycling l'interferometro è ottimizzato per lavorare ad una determinata frequenza, che in questo caso corrisponde a 200 Hz. Lo specchio M_3 può però essere scelto in modo che il picco della sensibilità si trovi ad una frequenza diversa da quella ottimale, in tal caso tuttavia il guadagno risulta essere minore.

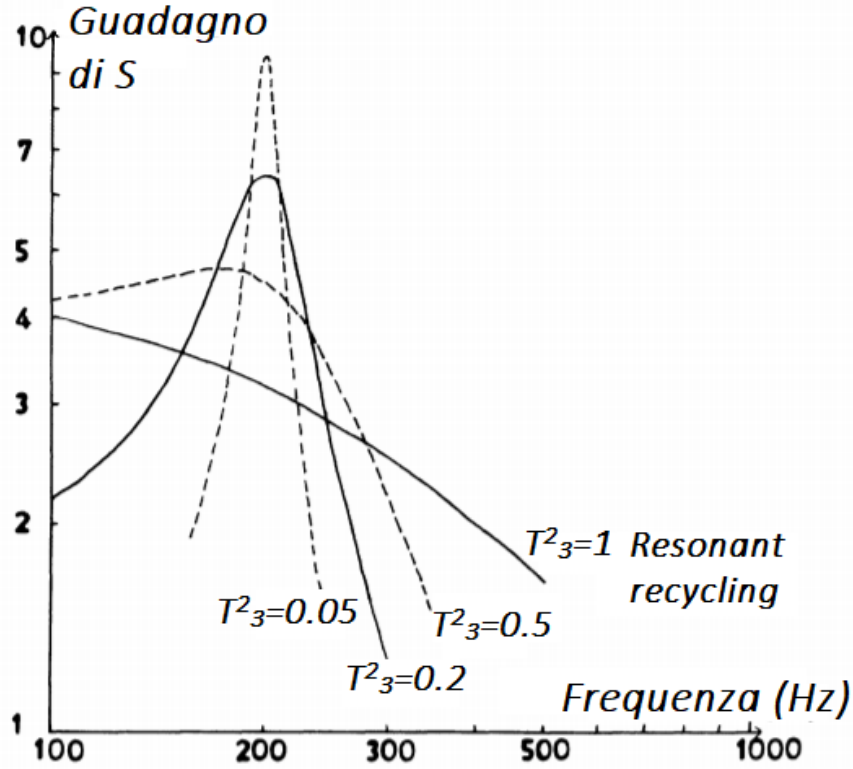


Figura 4.4: Il grafico illustra la dipendenza della del guadagno per la sensibilità S_g come una funzione della frequenza dell'onda gravitazionale ν_g . Si suppone di scegliere uno storage time ottimale per il standard recycling $\omega_g \tau_s = 1$ e si considerano inoltre $l = 1$ km e $A^2 = 10^{-4}$.

Riassumendo quanto spiegato fino ad ora, si può concludere che la sensibilità raggiunta con i tre metodi di recycling esposti non varia significativamente da un caso all'altro, tuttavia la tecnica del dual recycling presenta dei vantaggi rispetto alle altre due:

- Per massimizzare la sensibilità non è necessario che le cavità ottiche nei bracci dell'interferometro abbiano uno storage time comparabile con il periodo dell'onda gravitazionale.
- Il dual recycling permette di ottenere un buon livello di sensibilità anche a frequenze diverse da quella ottimale.
- Per modificare il rapporto tra sensibilità e larghezza di banda è sufficiente variare il coefficiente di trasmissione di un unico specchio.
- Con il dual recycling le imperfezioni geometriche nella struttura dell'interferometro hanno un impatto ridotto sulla sensibilità.

4.5 Sistema di controllo dell'interferometro

Analizzando le caratteristiche delle onde gravitazionali e studiando il funzionamento dell'interferometro è subito chiaro che la precisione nella struttura dello strumento è fondamentale per poter misurare una variazione di lunghezza pari a $1/10000$ del raggio di un protone. Risulta quindi necessario verificare costantemente che tutte le componenti ottiche mantengano le caratteristiche corrette. Il sistema utilizzato per svolgere questo controllo è particolarmente complesso e uno schema completo è visibile in Figura 4.5 [10].

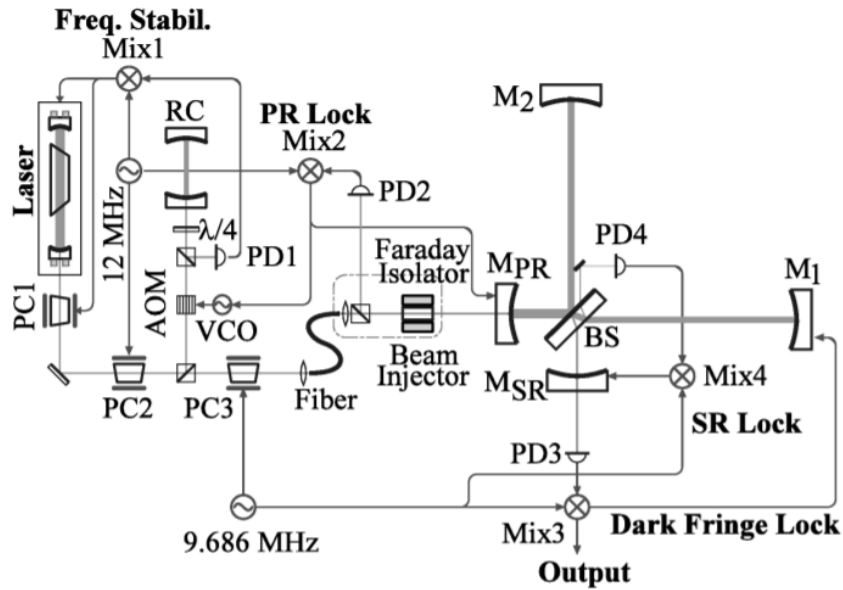


Figura 4.5: Schema del funzionamento del sistema di controllo dei gradi di libertà longitudinali dell'interferometro. RC è la reference cavity utilizzata per controllare la frequenza del laser, con PC sono indicate le celle di Pockels, con PD sono indicati i fotorilevatori e con Mix sono indicati i mixer. AOM è invece il modulatore acusto-ottico.

Ciò che non è visibile in figura è che tutti i componenti ottici dell'interferometro sono sospesi individualmente in modo da minimizzare l'effetto delle vibrazioni sismiche. In più l'intero strumento è posto nel vuoto in modo da evitare spostamenti inaspettati degli specchi, isolare gli stessi da rumori acustici ed eliminare possibili fluttuazioni dell'indice di rifrazione dell'aria. É inoltre necessario monitorare costantemente la posizione di ogni componente e in caso di necessità smorzarne il movimento tenendo conto di rilevamenti locali. In particolare si vuole ora presentare il metodo per il controllo dei gradi di libertà longitudinali, che sono la lunghezza della cavità per il power recycling, la lunghezza della cavità per il signal recycling e la differenza di lunghezza tra i due bracci dell'interferometro. Siccome queste lunghezze devono mantenere una determinata relazione con la lunghezza

d'onda della sorgente luminosa, è possibile monitorare un grado di libertà longitudinale, ad esempio la lunghezza della power recycling cavity, controllando la lunghezza d'onda del laser.

In pratica, una parte della luce prodotta dal laser viene estratta e modulata a 12 MHz, in modo da poter poi sfruttare il metodo di Pound-Drever-Hall per controllare la stabilità della frequenza (e quindi della lunghezza d'onda).

La parte della radiazione che deve essere immessa nell'interferometro viene invece modulata a frequenza $\nu_m = 9.7$ MHz tramite l'utilizzo di una fibra ottica monomodale. In questo modo è possibile sfruttare la cosiddetta Schnupp modulation per mantenere costante la differenza di lunghezza tra i bracci dell'interferometro (asimmetria di Schnupp). L'asimmetria di Schnupp garantisce infatti che, anche in condizione di interferenza distruttiva, le bande laterali prodotte dalla modulazione a 9.7 MHz vengano trasmesse verso il fotorilevatore. Allora, se il valore dell'asimmetria di Schnupp varia, la condizione di interferenza distruttiva non viene rispettata e ciò si ripercuote sul segnale a frequenza 9.7 MHz misurato dal detector. Demodulando questo segnale si ottiene l'informazione sull'errore da correggere.

La stessa modulazione a 9.7 MHz può essere utilizzata anche per regolare la posizione dello specchio M_3 per il signal recycling. Infatti le bande laterali vengono trasmesse attraverso il beam splitter in direzione del detector, e poi vengono nuovamente riflesse dallo specchio M_3 nuovamente nell'interferometro. Uno spostamento di M_3 dalla sua posizione ottimale causerebbe una variazione della fase relativa tra le bande laterali e la portante nei bracci dell'interferometro. Il sistema di controllo agisce prelevando una piccola quantità di luce (lo 0.1%) da uno dei bracci, misurandola con il detector indicato con PD4 e demodulando poi il segnale a frequenza 9.7 MHz.

In ognuno di questi tre casi i feedback vengono trasmessi agli attuatori magnetici che poi correggono la posizione degli specchi.

Un ulteriore vantaggio fornito dall'implementazione del dual recycling è il mode cleaning. Infatti, anche in condizione di interferenza distruttiva, il segnale rilevato dal detector non è nullo a causa della presenza di modi trasversali prodotti da imperfezioni ottiche nella struttura dello strumento e dalla modulazione della radiazione. È però possibile scegliere il raggio di curvatura dello specchio M_3 in modo da sopprimere le ampiezze dei modi di oscillazione di ordine più alto e garantire un minor impatto del rumore shot. È stato inoltre dimostrato che la presenza del signal recycling ha l'effetto di smorzare i problemi introdotti da un allineamento non perfetto degli specchi. Entrambi questi effetti sono stati effettivamente verificati utilizzando un dispositivo ad accoppiamento di carica che ha permesso di visualizzare il fascio in output (Figura 4.6).

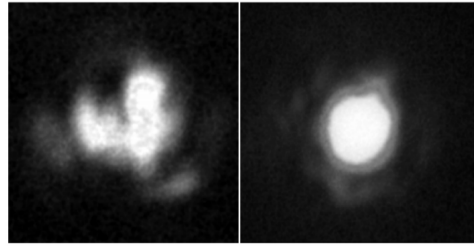


Figura 4.6: L'immagine a sinistra mostra la sezione del fascio quando viene utilizzato solamente il power recycling. A destra invece si vede il risultato ottenuto aggiungendo anche il signal recycling. È evidente che nel secondo caso la sezione del laser è molto simile a quella del modo Gaussiano fondamentale.

Conclusioni

I continui sviluppi tecnologici rendono possibile la rilevazione sempre più frequente delle onde gravitazionali. Questo è un risultato estremamente importante nel panorama scientifico siccome le onde gravitazionali permettono di osservare fenomeni che non potevano essere studiati tramite le onde elettromagnetiche o i raggi cosmici.

Nel prossimo futuro gli interferometri di LIGO e Virgo verranno potenziati per garantire una sensibilità sempre maggiore e dunque rendere ancora più efficace la rilevazione di GW. La modifica più importante consiste nell'introduzione dello squeezing, una tecnica che permetterà di ridurre il rumore shot ad alte frequenze senza dover necessariamente incrementare l'intensità della radiazione. Infatti il metodo utilizzato fino ad ora per migliorare il rapporto tra segnale e rumore consiste nell'aumentare l'intensità del fascio usando l'approccio classico esposto nel paragrafo riguardante il dual recycling. Tuttavia, un aumento incontrollato della potenza della radiazione aumenta il livello di rumore legato alla pressione di radiazione e può inoltre danneggiare i componenti ottici dell'interferometro. Il corretto funzionamento dello squeezing è già stato testato nell'interferometro GEO600 dove il rumore shot è stato ridotto di 6 dB (Figura 4.7) [12].

Contemporaneamente al potenziamento di LIGO e Virgo stanno continuando gli sviluppi di una nuova generazione di rilevatori. L'interferometro giapponese KAGRA dovrebbe iniziare le osservazioni nel 2022, mentre il progetto LIGO-India, nato da una collaborazione tra LIGO e tre istituzioni indiane, prevede la costruzione di un terzo interferometro che affiancherà i due interferometri di Hanford e Livingston, permettendo così una migliore localizzazione delle sorgenti di GW. Un progetto europeo propone invece la costruzione di un rilevatore di terza generazione: l'Einstein Telescope sarà un interferometro sotterraneo lungo 10 km ed includerà un sistema criogenico per mantenere i componenti ottici ad una temperatura di 10-20 K. L'inizio della costruzione è previsto per il 2026 mentre le osservazioni dovrebbero iniziare nel 2035. È stata inoltre pianificata la realizzazione di

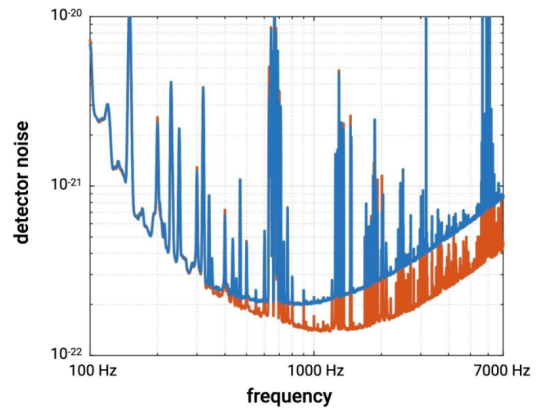


Figura 4.7: La curva blu rappresenta il rumore prima dell'introduzione dello squeezing, la curva rossa rappresenta il nuovo livello di rumore raggiunto tramite lo squeezing.

un rilevatore spaziale che utilizzerà un sistema di tre satelliti in orbita attorno al sole per rilevare onde gravitazionali di bassa frequenza e determinare con precisione la posizione delle sorgenti.

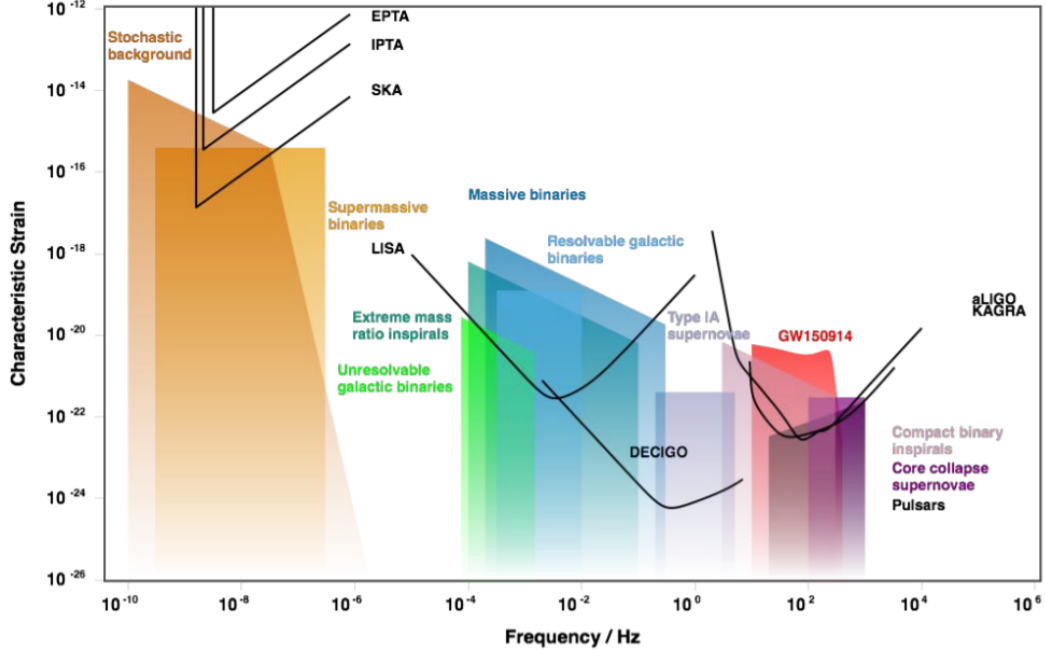


Figura 4.8: Nel grafico sono mostrate sensibilità e banda di frequenza dei prossimi rilevatori. Per coprire le frequenze più basse tra 10^{-9} Hz e 10^{-6} Hz vengono utilizzati i pulsar timing arrays.

I numerosi progetti per la realizzazione di nuovi rilevatori e il grande interesse dimostrato dalla comunità scientifica verso questo nuovo campo di ricerca anticipano i progressi che sicuramente avverranno nei prossimi anni nell'ambito dell'astrofisica delle onde gravitazionali. I continui sviluppi tecnologici che consentono di eseguire osservazioni sempre più rigorose permetteranno di osservare regioni dell'universo che fino ad ora sono rimaste inesplorate e amplieranno la nostra conoscenza in vari campi della fisica, dalla relatività generale alla meccanica quantistica.

Appendice A

Considerando l'equazione che esprime la modulazione del campo elettrico in ingresso E_{in} , il campo elettrico in output si ricava associando ad ogni componente la corretta funzione di trasferimento:

$$E_{out} = E_0 [t_p J_0(\beta) e^{i\omega t} + t_+ J_1(\beta) e^{i(\omega+\Omega)t} - t_- J_1(\beta) e^{i(\omega-\Omega)t}]$$

Si può procedere sommando innanzitutto i contributi delle bande laterali. Ricordando che $k_{\pm} = k \pm k_{mod}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} E_{out_side} = & i \sin(k_{mod} \Delta l) J_1(\beta) e^{ik_+(l_x+l_y)} e^{i(\omega+\Omega)t} \\ & + i \sin(k_{mod} \Delta l) J_1(\beta) e^{ik_-(l_x+l_y)} e^{i(\omega-\Omega)t} \end{aligned}$$

$$E_{out_side} = i \sin(k_{mod} \Delta l) J_1(\beta) e^{ik(l_x+l_y)} e^{i\omega t} (e^{ik_{mod} 2l + i\Omega t} + e^{-ik_{mod} 2l - i\Omega t})$$

$$E_{out_side} = 2i \sin(k_{mod} \Delta l) J_1(\beta) e^{ik(l_x+l_y)} e^{i\omega t} \cos\left(\Omega t + 4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}\right)$$

Di conseguenza inserendo si trova che il campo totale è dato da:

$$\begin{aligned} E_{out} = & E_{in} e^{ik(l_x+l_y)} \left[i J_0(\beta) 2\pi \frac{l}{\lambda} h \right. \\ & \left. + 2i J_1(\beta) \sin(k_{mod} \Delta l) \cos\left(\Omega t + 4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}\right) \right] \end{aligned}$$

La potenza rilevata dal detector è data dal modulo quadro di questa espressione:

$$\begin{aligned} P_{out} = & P_{in} J_0^2(\beta) 4\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} h^2 \\ & + 4P_{in} J_1^2(\beta) \sin^2(k_{mod} \Delta l) \cos^2\left(\Omega t + 4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}\right) \\ & + P_{in} J_0(\beta) J_1(\beta) 4\pi \frac{l}{\lambda} h \sin(k_{mod} \Delta l) \cos\left(\Omega t + 4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}\right) \end{aligned}$$

Usando la relazione $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)$ si può riscrivere il secondo termine di P_{out} ottenendo:

$$\begin{aligned} P_{out} = & P_{in} J_0^2(\beta) 4\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} h^2 + 2P_{in} J_1^2(\beta) \sin^2(k_{mod}\Delta l) + \\ & 2P_{in} J_1^2(\beta) \sin^2(k_{mod}\Delta l) \cos(2\Omega t + 8\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}) + \\ & P_{in} J_0(\beta) J_1(\beta) 4\pi \frac{l}{\lambda} h \sin(k_{mod}\Delta l) \cos(\Omega t + 4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}) \end{aligned}$$

A questo punto il segnale viene misurato da un fotorilevatore che in risposta genera un voltaggio pari a $V_{ph} = RP_{out}$.
Tramite l'utilizzo di un mixer che agisce a frequenza Ω e di un filtro passa basso il segnale viene modificato nel seguente modo:

$$V_{signal} = \langle V_{ph} \cos(\Omega t + \Phi) \rangle = R \langle P_{out} \cos(\Omega t + \Phi) \rangle$$

Per semplicità si considera singolarmente ogni termine di P_{out} :

I termine

$$\langle P_{in} J_0^2(\beta) 4\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} h^2 \cos(\Omega t + \Phi) \rangle = 0$$

II termine

$$\langle 2P_{in} J_1^2(\beta) \sin^2(k_{mod}\Delta l) \cos(\Omega t + \Phi) \rangle = 0$$

III termine Si risolve il prodotto:

$$\begin{aligned} & \langle \cos(2\Omega t + 8\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}) \cos(\Omega t + \Phi) \rangle = \\ & \frac{1}{2} \left[\langle \cos(\Omega t + 8\pi \frac{l}{\lambda_{mod}} - \Phi) \rangle + \langle \cos(3\Omega t + 8\pi \frac{l}{\lambda_{mod}} + \Phi) \rangle \right] = 0 \end{aligned}$$

IV termine Si risolve il prodotto:

$$\begin{aligned} & \langle \cos(\Omega t + 4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}) \cos(\Omega t + \Phi) \rangle = \\ & \frac{1}{2} \left[\langle \cos(4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}} - \Phi) \rangle + \langle \cos(2\Omega t + 4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}} + \Phi) \rangle \right] \end{aligned}$$

Scegliendo $\Phi = 4\pi \frac{l}{\lambda_{mod}}$ questo termine viene massimizzato e risulta essere l'unico non nullo.

Si ricava dunque l'equazione (2.3):

$$V_{signal} = 2\pi P_{in} J_0(\beta) J_1(\beta) \frac{l}{\lambda} \sin(k_{mod}\Delta l) h$$

Appendice B

Si consideri innanzitutto l'espressione del campo elettrico al beam splitter:

$$E_{out} = \frac{E_{in}}{2}(r_x e^{ik2l_x} - r_y e^{ik2l_y})$$

I coefficienti r_x e r_y corrispondono ai coefficienti di riflessione della due cavità, dunque sostituendo il valore indicato precedentemente si trova:

$$E_{out} = \frac{E_{in}}{2}\left(1 - \frac{F}{\pi}\epsilon\right)e^{ik2l}\left[\left(1 + i4F\frac{\delta L_x}{\lambda}\right)e^{ik\Delta l} - \left(1 + i4F\frac{\delta L_y}{\lambda}\right)e^{ik\Delta l}\right]$$

dove sono state utilizzate le due relazioni $l = \frac{l_x + l_y}{2}$ e $\Delta l = l_x - l_y$. Ovviamente δL_x e δL_y sono le variazioni di lunghezza della cavità risonante a causa del passaggio di una GW e dunque hanno segno opposto. Se si suppone che la GW modifichi solo la lunghezza L della cavità, lasciando invece invariate le lunghezze l_x e l_y , si può porre $\Delta l = 0$. Si ottiene quindi:

$$E_{out} = \frac{E_{in}}{2}\left(1 - \frac{F}{\pi}\epsilon\right)e^{ik2l}\left[i\frac{4F}{\lambda}(\delta L_x - \delta L_y)\right]$$

Ora ricordando che la deformazione dovuta alla GW è pari a

$$h = \frac{\delta L_x - \delta L_y}{L}$$

si ricava immediatamente che la funzione di trasferimento è data da:

$$t_p = i2e^{ik(l_x + l_y)}\left(1 - \frac{F}{\pi}\epsilon\right)\frac{L}{\lambda}Fh$$

Appendice C

Si considera una cavità di Fabry-Perot i cui specchi hanno coefficienti di trasmissione e riflessione pari a r_1 , t_1 e r_2 , t_2 e si suppone che la cavità sia sfasata di una quantità δ rispetto alla lunghezza di risonanza. Si indica il campo incidente alla cavità come $E_{in} = E_0 e^{i\omega t}$. Una parte della radiazione viene riflessa immediatamente dallo specchio di input e dunque possiamo scrivere il campo elettrico come:

$$E_{ext} = E_0 r_1 e^{i\omega t}$$

La parte di radiazione che viene trasmessa attraverso lo specchio di input percorre N volte la cavità prima di attraversare nuovamente lo specchio iniziale. Il campo si può quindi scrivere come:

$$E_N = -E_0 e^{i\omega t} t_1^2 r_2 (r_1 r_2)^{N-1} e^{iN\delta}$$

Sommando queste due componenti si ricava il campo totale fuori dalla cavità:

$$E_r = E_0 e^{i\omega t} \left[r_1 - t_1^2 r_2 \sum_{n=1}^{+\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{in\delta} \right]$$

Dove E_r è il campo totale riflesso. Risolvendo la serie geometrica si ottiene:

$$\frac{E_r}{E_{in}} = r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} \quad (4.4)$$

Si definisce il coefficiente di finesse della cavità come:

$$F' = \frac{4F}{\pi} = \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2}$$

Si può osservare che è possibile riscrivere la seguente quantità come:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} &= \frac{e^{i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} \frac{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} \\
&= \frac{e^{i\delta} - r_1 r_2}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta} - r_1 r_2 e^{-i\delta} + r_1^2 r_2^2} \\
&= \frac{e^{i\delta} - r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \left(\frac{1 - \cos \delta}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{e^{i\delta} - r_1 r_2}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}} \\
&= \frac{e^{i\delta} - r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{1}{1 + F' \sin^2 \frac{\delta}{2}}
\end{aligned}$$

Sfruttando questa relazione è quindi possibile riscrivere l'equazione (4.4) come:

$$\frac{E_r}{E_{in}} = r_1 - \frac{t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{e^{i\delta} - r_1 r_2}{1 + F' \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Questa equazione rappresenta quindi l'ampiezza del campo riflesso dalla cavità di Fabry-Perot nel caso in cui la condizione di risonanza non sia perfettamente rispettata. La lunghezza della cavità varia però in modo sinusoidale in seguito al passaggio di un'onda gravitazionale, causando quindi una modulazione della radiazione all'interno della cavità. Per calcolare il nuovo campo riflesso si parte nuovamente dall'equazione del campo all'interno della cavità, che ora risulta:

$$E_N = -E_0 e^{i\omega t} t_1^2 r_2 (r_1 r_2)^{N-1} e^{i\Phi_N}$$

Dove Φ_N è la fase accumulata in N round trips e include sia lo sfasamento δ che l'effetto dovuto alla modulazione. Si può dunque scrivere Φ_N come:

$$\Phi_N = N\delta + \beta(e^{i\eta N - \alpha})$$

Nel caso di un'onda gravitazionale abbiamo:

$$\beta = -i \frac{h\omega}{2\omega_g} e^{i\omega_g t} \quad \eta = \frac{2l\omega_g}{c} \quad \alpha = 1$$

Allora l'equazione del campo elettrico riflesso risulta:

$$E_r = E_0 e^{i\omega t} \left[r_1 - t_1^2 r_2 \sum_{n=1}^{+\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{in\delta} e^{i\beta(e^{i\eta n - \alpha})} \right]$$

A questo punto, supponendo che $\beta \ll 1$ e utilizzando le funzioni di Bessel al primo ordine è possibile scrivere l'ampiezza del campo riflesso rispetto a quello incidente come:

$$\frac{E_r}{E_{in}} = r_1 - \frac{t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \left[\frac{e^{i\delta} - r_1 r_2}{1 + F' \sin^2 \frac{\delta}{2}} \left(1 - \frac{i h \omega}{2 \omega_g} \sin \omega_g t \right) + \frac{h \omega e^{i \omega_g t}}{4 \omega_g} \frac{e^{i(\delta - \omega_g / \nu_0)} - r_1 r_2}{1 + F' \sin^2 \left(\frac{\delta - \omega_g / \nu_0}{2} \right)} - \frac{h \omega e^{-i \omega_g t}}{4 \omega_g} \frac{e^{i(\delta + \omega_g / \nu_0)} - r_1 r_2}{1 + F' \sin^2 \left(\frac{\delta + \omega_g / \nu_0}{2} \right)} \right]$$

Dove il primo termine definisce la portante e gli altri termini rappresentano le bande laterali.

Per calcolare $\Delta\Phi$ quando $\delta = 0$ si considera una sola delle due bande laterali e si calcola il modulo dello sfasamento rispetto alla portante. In particolare una banda laterale si può scrivere esplicitamente come:

$$\frac{t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \left[-\frac{h \omega e^{i \omega_g t}}{4 \omega_g} + \frac{h \omega e^{i \omega_g t}}{4 \omega_g} \frac{e^{-i \omega_g / \nu_0} - r_1 r_2}{1 + F' \sin^2 \left(\frac{\omega_g}{2 \nu_0} \right)} \right]$$

Supponendo che $\omega_g \ll \nu_0$ si approssima l'esponente come $e^{-i \omega_g / \nu_0} \simeq 1 - i \sin(\omega_g / \nu_0)$ e si ottiene:

$$\frac{t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \left[-\frac{\beta F' \sin^2(\omega_g / 2 \nu_0) (1 - r_1 r_2) + i \beta \sin(\omega_g / \nu_0)}{1 + F' \sin^2 \left(\frac{\delta - \omega_g / \nu_0}{2} \right) (1 - r_1 r_2)} \right]$$

La differenza di fase rispetto alla portante è data dal modulo di questa quantità e cioè da:

$$|\Delta\Phi|^2 = \left[\frac{\alpha_c \beta F' \sin^2(\omega_g / 2 \nu_0)}{1 + F' \sin^2 \left(\frac{\delta - \omega_g / \nu_0}{2} \right)} \right]^2 + \left[\frac{\alpha_c \beta \sin(\omega_g / \nu_0)}{1 + F' \sin^2 \left(\frac{\delta - \omega_g / \nu_0}{2} \right) (1 - r_1 r_2)} \right]^2$$

dove $\alpha_c = \frac{t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2}$.

Utilizzando la relazione:

$$1 + F' \sin^2 \left(\frac{\omega_g}{2 \nu_0} \right) \simeq 1 + \frac{4 F^2}{\pi^2} \frac{\omega_g^2}{4 \nu_0^2} = 1 + (\omega_g \tau_s)^2$$

Si ottiene infine:

$$\Delta\Phi = \frac{\alpha_c}{2} \frac{h \omega}{\omega_g} \frac{\omega_g \tau_s}{\sqrt{1 + (\omega_g \tau_s)^2}} \quad (4.5)$$

Bibliografia

- [1] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2017/weiss/lecture/>
- [2] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2017/advanced-information/>
- [3] J. Casanueva Diaz, 2018, *Control of the Gravitational Wave Interferometric Detector Advanced Virgo*, Springer.
- [4] <https://www.ligo.caltech.edu/page/what-is-interferometer>
- [5] Eric D. Black and Ryan N. Gutenkunst, 2002, *An introduction to signal extraction in interferometric gravitational wave detectors*, American Journal of Physics, Volume 71.
- [6] Bond, C., Brown, D., Freise, A. et al. Interferometer techniques for gravitational-wave detection. Living Rev Relativ 19, 3 (2016)
- [7] Eric D. Black, 2001, *An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization*, American Journal of Physics 69, 79 (2001).
- [8] B.J. Meers, 1983 *Some aspects of the development of an optically sensed gravitational-wave detector*, PhD thesis, University of Glasgow.
- [9] B.J. Meers, 1988, *Recycling in laser-interferometric gravitational-wave detectors*, Phys.Rev.D 38 (1988), 2317-2326.
- [10] Heinzl, Gerhard Strain, KA Mizuno, J. Skeldon, K. Willke, Benno Winkler, W. Schilling, R. Rüdiger, Albrecht Danzmann, Karsten, 1998, *Experimental Demonstration of a Suspended Dual Recycling Interferometer for Gravitational Wave Detection*, Physical Review Letters - PHYS REV LETT. 81. 5493-5496. 10.1103/PhysRevLett.81.5493.
- [11] David E McClelland, 1995, *An Overview of Recycling in Laser Interferometric Gravitational Wave Detectors*, Australian Journal of Physics 48(6) 953 - 970.
- [12] <https://www.mpg.de/16320165/geo600-reaches-6-db-of-squeezing>