



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

DIPARTIMENTO DI FISICA

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea in

**FISICA**

Approccio semplificato all'analisi dei dati di onde  
gravitazionali

*Laureanda:*  
*Carolina Bresciani*

*Relatore:*  
*Prof. Edoardo Milotti*  
*Correlatrice:*  
*Dott.ssa Agata Trovato*

Anno accademico 2020-2021

## Sommario

L'analisi dei dati delle onde gravitazionali è spesso estremamente complessa. In alcuni casi tuttavia è possibile applicare un processo semplificato utilizzando solo la meccanica Newtoniana e una metodologia statistica semplificata. In questa tesi si applica questo approccio semplificato a cinque eventi del catalogo GWTC-1, due delle analisi sono riportate in dettaglio, le altre in breve nell'appendice. In tutti i casi si trova una *chirp mass* che differisce di poche masse solari da quella stimata con analisi più approfondite. Si stima anche con precisione discreta la massa totale del sistema e si deriva dal rapporto di compattezza che si ha a che fare con oggetti compatti.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione alle onde gravitazionali</b>	<b>2</b>
1.1	Generazione di onde gravitazionali . . . . .	2
1.2	Principi di rivelazione . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Stima di parametri con meccanica classica</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Esempi di applicazione</b>	<b>12</b>
3.1	GW150914 . . . . .	13
3.2	GW170814 . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Appendice</b>	<b>20</b>
5.1	GW170608 . . . . .	20
5.2	GW151226 . . . . .	21
5.3	GW170104 . . . . .	23
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>24</b>
	<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>25</b>

# 1 Introduzione alle onde gravitazionali

## 1.1 Generazione di onde gravitazionali

Secondo la fisica classica lo spazio può essere descritto come uno spazio euclideo tridimensionale considerando il tempo come un parametro che non viene influenzato da un cambio di sistema di riferimento. In fisica Newtoniana, inoltre, vale il principio di relatività galileiano: tutte le leggi della fisica hanno la stessa forma in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

Per descrivere l'elettromagnetismo questo quadro teorico è problematico: in particolare si trova una contraddizione tra il principio di relatività galileiano e la legge della velocità della luce, ossia il risultato sperimentale per cui  $c = c'$  in qualunque sistema di riferimento inerziale.

La relatività speciale nasce proprio per risolvere questa contraddizione: dando una definizione operativa di simultaneità e abbandonando il concetto di tempo assoluto si arriva alle trasformazioni di Lorentz, che riconciliano il principio di relatività e la legge della velocità della luce.

Questo nuovo sistema tuttavia non riesce a descrivere bene la gravità.

Per descrivere il campo gravitazionale si deve utilizzare la versione generalmente covariante della relatività, chiamata relatività generale.

Nel contesto della relatività generale lo spazio-tempo è una varietà quadridimensionale con una metrica pseudo-Riemanniana  $g$ . Questa varietà ha una curvatura associata alla metrica, che è determinata dalla distribuzione della massa e dell'energia attraverso l'equazione di Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

dove  $G_{\mu\nu}$  è il tensore di Einstein e  $T_{\mu\nu}$  il tensore energia-momento.

In un campo debole l'equazione di Einstein può essere vista come una piccola perturbazione  $h_{\mu\nu}$  alla metrica di Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2)$$

Nel vuoto, ossia quando  $T_{\mu\nu} = 0$ , si può sempre scegliere un gauge chiamato trasverso e *traceless* (TT): questo è tale che la traccia di  $h_{\mu\nu}$  rispetto alla metrica di Minkowski sia nulla. Utilizzando il gauge TT l'equazione di Einstein linearizzata si riduce all'equazione d'onda

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_{\mu\nu} = 0 \quad (3)$$

Le soluzioni di questa sono combinazioni lineari di onde piane con due diverse polarizzazioni e sono la rappresentazione matematica delle onde gravitazionali. Le onde gravitazionali viaggiano alla velocità della luce  $c$  e sono onde trasverse [1, 2].

Le onde gravitazionali sono quindi generate da variazioni nella distribuzione delle masse nello spazio-tempo, ovvero da masse in accelerazione. In linea di principio una qualunque massa in accelerazione dovrebbe creare un'onda gravitazionale, ma quello che si riscontra è che solo pochi fenomeni fisici riescono a produrre effetti misurabili.

In particolare per riuscire a generare un'onda gravitazionale rivelabile sono necessarie masse e accelerazioni molto maggiori di quelle presenti nel sistema solare.

Delle pulsar non perfettamente sferiche, per esempio, emettono delle onde gravitazionali a frequenza costante pari alla frequenza della rotazione; mentre dei sistemi binari di oggetti compatti (i.e. buchi neri o stelle di neutroni) perdono energia per emissione di onde gravitazionali a frequenza crescente fino alla coalescenza [3].

Le onde gravitazionali erano state predette da Einstein già nel 1916, ma le prime osservazioni a sostegno della teoria risalgono solo agli anni Settanta, e la prima osservazione diretta al 2015.

Nel 1974, infatti, venne osservato un sistema binario di pulsar, e dopo anni di osservazioni si determinò che le due stelle si erano avvicinate (ossia avevano perso energia) esattamente al ritmo predetto dalla relatività generale.

Il primo segnale diretto di un'onda gravitazionale, invece, è stato registrato dagli interferometri di LIGO il 14 settembre 2015, ed è indicato con il nome GW150914 (per *gravitational wave* 15-09-14) [4]. Dalle molteplici analisi dei dati è risultato che GW150914 è il segnale di una coalescenza di due buchi neri di circa  $30 M_{\odot}$ .

Ad oggi sono stati rivelati un totale di 90 eventi prodotti da onde gravitazionali [5], tra cui GW170817 [6, 7], generato dalla fusione di due stelle di neutroni osservata anche otticamente.

## 1.2 Principi di rivelazione

Il principio di rivelazione delle onde gravitazionali si basa sull'interferometria.

Un interferometro è uno strumento ottico costituito, nella sua forma più semplice, da una fonte di luce, solitamente laser, un *beam splitter*, due specchi e un fotorecettore.

Il laser viene puntato sul *beam splitter*, che lo divide in due fasci perpendicolari. Questi viaggiano fino ad incontrare ciascuno uno specchio. Le distanze tra il *beam splitter* e gli specchi definiscono i cosiddetti bracci dell'interferometro. Incontrati gli specchi la luce viene riflessa di nuovo verso il *beam splitter*: una parte della luce di ogni fascio verrà trasmessa in linea retta oltre oltre al *beam splitter*, e incontrerà il detector.

A seconda della differenza di lunghezza tra i due bracci le onde elettromagnetiche dei due fasci che si riincontrano dopo il *beam splitter* avranno fasi diverse. Dall'intensità del segnale rivelato dal fotorecettore si può risalire alla differenza di lunghezza dei bracci.

A questo set-up di base, chiamato interferometro di Michelson, si possono aggiungere altri elementi ottici a seconda dell'utilizzo che si vuole fare dello strumento. Ad esempio, si possono aggiungere altri due specchi lungo i bracci, in modo tale che le frequenze in risonanza tra i due specchi di uno stesso braccio ritornino al *beam splitter* intensificate. Sistemi come questo sono chiamati cavità di Fabry-Perot.

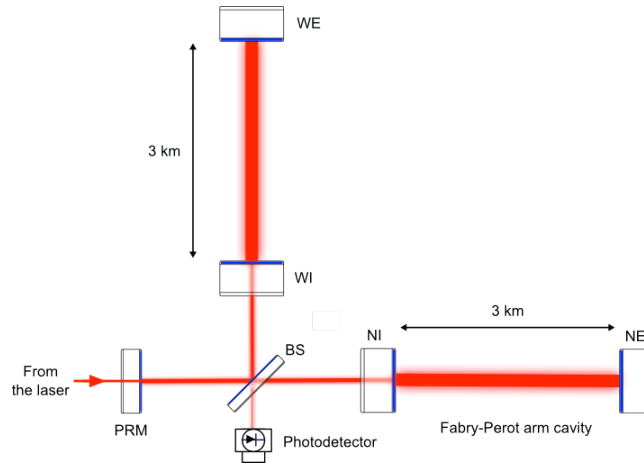


Figura 1: Schema base dell'interferometro Virgo [8]: BS indica il *beam splitter*, WE,WI,NE,NI sono invece specchi. Assieme WE con WI e NE con NI formano delle cavità di Fabry-Perot.

Si consideri un interferometro di Michelson, se ci si pone nella condizione in cui i due bracci sono uguali allora le onde riflesse verso il rivelatore interferiranno in maniera distruttiva e non si avrà un segnale in uscita.

Un minimo spostamento di uno dei due specchi causa uno sfasamento delle due onde una rispetto all'altra. In questa condizione l'interferenza non è più completamente distruttiva e quindi verrà rivelato un segnale luminoso in uscita.

L'effetto di un'onda gravitazionale è quello di deformare lo spazio nelle due direzioni perpendicolari a quella di propagazione dell'onda stessa, dilatando le lunghezze in una direzione e restringendole nell'altra. Se un'onda gravitazionale incontra sul suo cammino un interferometro come quello appena descritto, deforma i due bracci in due modi diversi, sfasando così i due fasci riflessi e portando alla registrazione di un segnale.

Tuttavia, misurare gli effetti delle onde gravitazionali non è così semplice: la forma "base" dell'interferometro di Michelson deve essere modificata non poco, riscalando le dimensioni e aggiungendo cavità di risonanza, filtri e sensori.

Oltre a un'ottica complessa, nella progettazione e costruzione di un rivelatore di onde gravitazionali ci sono altri effetti da considerare.

In primis, le dimensioni dello strumento dipendono dalla quantità da misurare: l'intensità della deformazione causata da un'onda gravitazionale, chiamata in gergo tecnico *strain*, è dell'ordine di  $h = \frac{\Delta L}{L} \sim 10^{-21}$ , questo vuol dire che per una lunghezza di riferimento  $L = 1$  m la variazione di lunghezza sarà  $\Delta L \sim (10^{-21}) \text{ m} = 1 \times 10^{-6} \text{ fm}$ , una lunghezza sostanzialmente impossibile da misurare. Per risolvere questo problema si usano interferometri con bracci molto più lunghi: quelli dei rivelatori LIGO arrivano a circa 4 km, portando la variazione di lunghezza a  $\Delta L \sim 4 \times 10^{-3} \text{ fm}$ .

LIGO, Virgo e KAGRA hanno bracci di qualche chilometro, un buon compromesso tra misurabilità dello strain ed esigenze tecnologiche.

Gli interferometri per la rivelazione di onde gravitazionali sono, inoltre,

affetti da varie sorgenti di rumore, le principali sono:

- il rumore sismico
- il rumore Newtoniano
- il rumore termico
- il rumore quantistico

Ogni componente è causata da un fenomeno diverso e ha quindi un diverso andamento al variare della frequenza.

La figura 2, tratta da [9], mostra tutti gli andamenti delle singole componenti e quello del rumore totale per i rilevatori di Hanford e Livingston.

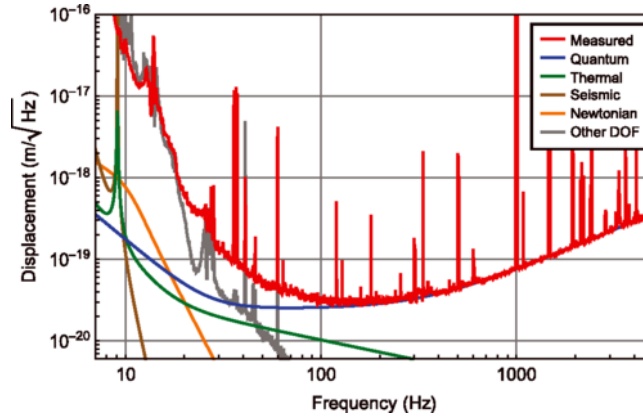


Figura 2: andamenti delle principali fonti di rumore e del rumore totale per i rivelatori LIGO durante la prima *run* di osservazione (figura 3 di [10]): la curva rossa indica il rumore totale misurato, la curva marrone il rumore sismico, quella arancio il rumore Newtoniano, quella verde il rumore termico, quella blu il rumore quantistico e quella grigia al rumore causato da altri gradi di libertà. Per altri rilevatori gli andamenti non sono identici, ma sono simili.

Il rumore sismico è dovuto alle vibrazioni del terreno, causate da fenomeni sismici, da temporali, dal passaggio di veicoli, dalle maree, ecc...

Per minimizzare l'effetto di questa componente, gli specchi non sono appoggiati a un supporto, bensì appesi ad una catena di pendoli.

Si consideri infatti una massa  $m$  sospesa tramite un cavo ad un supporto: applicando una forza sul supporto, la risposta della massa sarà determinata dal rapporto tra la frequenza  $\omega$  della sollecitazione e la frequenza di risonanza

$\omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$  caratteristica del sistema. Per  $\omega \ll \omega_0$  supporto e massa si muoveranno assieme; per  $\omega \sim \omega_0$  le oscillazioni della massa sono amplificate di un fattore  $Q = \frac{\omega_0 m}{\beta}$  dove  $\beta$  è il coefficiente di dissipazione; per  $\omega \gg \omega_0$  le vibrazioni sono invece attenuate con andamento  $\sim \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ . Considerando una catena di  $N$  pendoli, per  $\omega \gg \omega_0$  le oscillazioni saranno attenuate più velocemente, con un andamento  $\sim \frac{\omega_0^{2N}}{\omega^{2N}}$ .

Sospendendo quindi gli specchi a una catena di pendoli si ottiene un aumento del rumore per frequenze vicine alla frequenza di risonanza, ma una grande soppressione del rumore a frequenze più alte [11]. Con una scelta opportuna dei materiali, si riesce a ottenere una frequenza di risonanza tale da ridurre il rumore al di sopra della decina di Hz. Al di sotto della decina di Hz il rumore sismico resta ancora una delle principali componenti che limitano la sensibilità [12].

Il rumore Newtoniano è dovuto alle variazioni di densità della Terra, e di conseguenza di forza gravitazionale, nelle zone adiacenti alle masse di prova.

Il rumore termico è dovuto alle differenze di temperatura tra le diverse parti del sistema ed è dominato dal rumore termico del rivestimento degli specchi. Questi infatti sono resi il più riflettenti possibili alternando strati di silicio e strati di tantalio drogato con titanio, materiali che però non sono ottimi isolanti e quindi creano forte rumore termico.

Anche le sospensioni degli specchi contribuiscono al rumore termico, tuttavia sono in fibra di vetro e dunque il loro contributo risulta rilevante solo nelle basse frequenze, dove la sensibilità del sistema è già limitata dal rumore sismico.

Un modo per minimizzare il rumore termico è mantenere l'interferometro a basse temperature.

Per ora il rumore termico del rivestimento degli specchi è il principale fattore di limitazione della sensibilità a frequenze intermedie, attorno ai 100 Hz [12].

In ultimo si trova il rumore quantistico, che a sua volta ha due componenti, la *shot noise* e la *radiation pressure noise*.

La prima di queste due componenti è dovuta alle fluttuazioni nel numero di fotoni che raggiungono il fotorecettore in ogni dato istante. I tempi di arrivo dei fotoni seguono una distribuzione di Poisson, e quindi ci si aspetta di vedere delle fluttuazioni nell'intensità della luce. Questo limita la sensibilità dell'interferometro ad alte frequenze (sopra alcune centinaia di Hz).

La seconda componente, come dice il nome, è causata dalla pressione di radiazione sugli specchi: di solito questo fenomeno è irrilevante per sistemi macroscopici, ma non nel caso degli interferometri gravitazionali.

Se il rate di arrivo dei fotoni sugli specchi fosse costante, allora la pressione di radiazione sarebbe nota e potrebbe essere compensata. Ma i fotoni, come si è appena ricordato, seguono una statistica di Poisson, quindi in ogni istante la pressione di radiazione è diversa e ignota. Questa parte di rumore quantistico diminuisce all'aumentare della frequenza ed è quindi più importante a basse frequenze [11].

Nel grafico in figura 2, che mostra l'andamento del rumore, si distinguono anche linee di calibrazione, armoniche dovute alle sospensioni e linee date dall'interferenza dei cavi di alimentazione. In aggiunta a questi effetti stazionari, sono presenti anche delle fonti di rumore non stazionario di breve durata, chiamate *glitch*, che possono mimare il segnale delle onde gravitazionali.

Dato che gli specchi sono sospesi possono spostarsi leggermente e far variare le dimensioni della cavità di Fabry-Perot, che invece dovrebbero essere sempre fisse e tali da creare una risonanza. Per risolvere questo problema tutti gli in-



terferometri sono dotati di un sistema di feedback che usa il segnale agli estremi del fascio laser per determinare di quanto è distante lo specchio dalla posizione ottimale, dopodiché questo viene spostato tramite l'applicazione di un campo magnetico.

Questo processo, chiamato *locking* è necessario al funzionamento ottimale della strumentazione; migliorare la precisione e la durata del *locking* significa poter mantenere il sistema in modalità di osservazione per un tempo più lungo e quindi avere più probabilità di osservare segnali [12].

Per stimare la distanza delle sorgenti di segnale è necessaria una calibrazione della risposta dell'interferometro. Per ora si utilizza la pressione di radiazione di un laser e si arriva ad un'incertezza minore del 2% [13]. Migliore è la calibrazione meglio si possono stimare le distanze.

Sia per riuscire a localizzare la sorgente delle onde gravitazionali sia per avere più riconferme in caso di ricezione di un segnale si cerca di avere sempre almeno due interferometri in funzione durante i periodi di presa dati: per ora la rivelazione diretta di eventi dovuti a onde gravitazionali è stata effettuata con i rivelatori LIGO [9] negli Stati Uniti e Virgo [14] in Italia. Il molto più piccolo GEO [15], in Germania, è molto meno sensibile.

L'interferometro giapponese KAGRA [16] ha iniziato a prendere dati durante la primavera del 2020 [12].

Sono già in fase di progettazione e/o costruzione anche altri osservatori: LIGO India, che dovrebbe essere un terzo gemello dei rilevatori americani, il Cosmic Explorer (CE) [17], che dovrebbe aumentare la sensibilità di LIGO di un fattore dieci grazie a dei bracci di 40 km, e l'Einstein Telescope (ET) [18], il progetto europeo di un interferometro sotterraneo, criogenico e con conformazione a xylofono che raggiunga la stessa sensibilità di CE.

Per minimizzare il rumore e per cercare altri tipi di onde gravitazionali, come per esempio quelle di lunga durata emesse da pulsar non perfettamente sferici, si sta anche puntando in alto: la missione LISA (Laser Interferometer Space Antenna) dell'European Space Agency dovrebbe essere messa in orbita nel 2034 e sarebbe il primo interferometro per l'osservazione di onde gravitazionali nello spazio [19].

## 2 Stima di parametri con meccanica classica

Anche se le onde gravitazionali sono un fenomeno prettamente relativistico, si può tentare, con le dovute cautele, di analizzarne i segnali tramite la meccanica classica [20].

Si consideri l'output di un interferometro: una volta filtrato, se il rapporto segnale-rumore (detto in breve SNR per *signal to noise ratio*) è abbastanza grande, è possibile distinguere il segnale a occhio nudo. Questa condizione è soddisfatta per esempio per l'evento GW150914, per cui, dai dati di strain di LIGO-Hanford e LIGO-Livingston, si ottengono i grafici in figura 3.

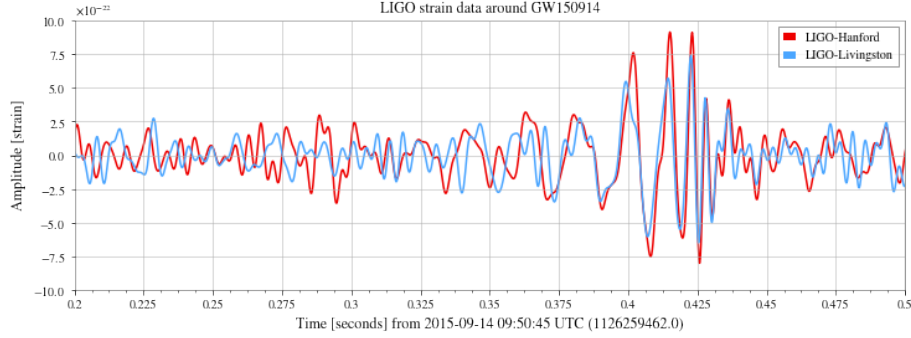


Figura 3: andamento dei dati di strain filtrati attorno all'evento GW150914. La traccia di LIGO-Livingston è invertita e traslata di +6.9 ms.

Le prime cose che si possono ricavare da questi dati sono delle approssimazioni per gli andamenti dell'ampiezza e della frequenza nel tempo: misurando infatti gli intervalli di tempo  $\Delta t$  tra gli zeri del grafico si può stimare  $f_{GW} = \frac{1}{2\Delta t}$  senza bisogno di ipotizzare una forma d'onda per il segnale, mentre l'ampiezza visto che il segnale ha un'alta SNR è chiaramente visibile. All'inizio si nota un aumento sia della frequenza che dell'ampiezza, dopodiché, nelle ultime oscillazioni distinguibili prima della fine del segnale, la prima si stabilizza mentre la seconda decade velocemente.

Una volta approssimate la frequenza e l'ampiezza del segnale in funzione del tempo, si può trovare anche la frequenza  $f_{GW}|_{max}$  corrispondente al picco del segnale.

Da queste prime stime si possono già ricavare alcune informazioni sul sistema di origine delle onde gravitazionali osservate. In particolare, visto che i dati mostrano diverse oscillazioni con un aumento di ampiezza e frequenza, si può dedurre che il sistema di origine è in oscillazione ma non attorno a un punto di equilibrio, perché in tal caso si avrebbe una frequenza circa costante con un'ampiezza che decresce. L'unica spiegazione compatibile con i dati è un sistema che perda energia solo per emissione gravitazionale, ossia una coppia di oggetti in orbita l'uno attorno all'altro che raggiungano una fase di *inspiral* e *merging* che porti all'equilibrio.

Se si considera questo sistema come sorgente delle onde gravitazionali e si approssimano le orbite come Kepleriane, si ottiene che la frequenza angolare orbitale è

$$\omega_{Kep} = \frac{2\pi f_{GW}}{2} \quad (4)$$

e in particolare che la frequenza angolare orbitale massima è  $\omega_{Kep}|_{max} = \frac{2\pi f_{GW}|_{max}}{2}$ . Appurato che il sistema è formato inizialmente da due masse, si possono definire alcuni parametri utili. Si indica con  $m_1$  la maggiore tra le due masse, con  $m_2$  la minore, con  $M = m_1 + m_2$  la massa totale iniziale del sistema, con  $q = \frac{m_1}{m_2} \geq 1$  il rapporto tra le masse e con

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}} \quad (5)$$

una grandezza detta *chirp mass*. La *chirp mass* è legata alla frequenza dell'onda gravitazionale e alla sua derivata rispetto al tempo dalla formula

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left( \left( \frac{5}{96} \right)^3 \pi^{-8} (f_{GW})^{-11} (\dot{f}_{GW})^3 \right)^{\frac{1}{5}} \quad (6)$$

Integrando questa relazione si ottiene:

$$(f_{GW})^{-\frac{8}{3}}(t) = \frac{(8\pi)^{\frac{8}{3}}}{5} \left( \frac{G\mathcal{M}}{c^3} \right)^{\frac{5}{3}} (t_c - t) \quad (7)$$

dove  $t_c$  indica l'istante della coalescenza.

Dunque graficando  $(f_{GW})^{-\frac{8}{3}}(t)$  si può ottenere una stima della *chirp mass* attraverso un semplice fit lineare.

La perdita di energia porta i due corpi sempre più vicini, perché le orbite si restringono, tuttavia nei dati si distinguono diverse oscillazioni, dunque i due corpi devono potersi orbitare senza collidere per almeno un numero di cicli pari alla metà del numero di oscillazioni osservate: si ottiene quindi un limite, che può essere stimato attraverso la *chirp mass*, per le dimensioni dei due oggetti. Si supponga infatti che le masse dei due corpi siano uguali, ossia che  $m_1 = m_2 = m$ . La *chirp mass*, che si è visto può essere stimata e quindi si considera nota, sarà pari a

$$\mathcal{M} = \frac{m^{\frac{6}{5}}}{(2m)^{\frac{1}{5}}} = 2^{-\frac{1}{5}} m \quad (8)$$

Invertendo questa formula si ottiene una stima del valore delle masse  $m$ .

Ora che  $m$  è nota si può approssimare il moto delle masse ad un moto Kepleriano, e quindi imporre che la forza gravitazionale sia uguale alla forza centripeta, ossia che

$$\frac{Gm^2}{R^2} = \frac{m^2}{2m} \omega_{Kep}^2 R \quad (9)$$

riordinando i termini e semplificando si ottiene:

$$R = \left( \frac{GM}{\omega_{Kep}^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (10)$$

dove  $R$  è la distanza tra i due centri ed  $M$  è ancora la massa totale.

Attorno al picco in ampiezza dell'onda gravitazionale la frequenza angolare assumerà il valore, noto,  $\omega_{Kep}|_{max}$ , da cui si potrà stimare la distanza minima  $R$  prima della coalescenza.

Note  $m$  ed  $R$  è possibile farsi un'idea di quali tipi di corpi siano coinvolti: da queste grandezze, infatti, è possibile definire un parametro, detto rapporto di compattezza, come  $\mathcal{R} = \frac{R}{(r_{1min} + r_{2min})}$ , dove  $R$  è la distanza tra i centri dei due corpi e  $r_{min}$  è il minimo raggio possibile per la massa del corpo che si sta considerando (i.e. per una massa maggiore del limite di Oppenheimer-Volkof il raggio di Schwarzschild o di Kerr associato alla massa, per una massa minore il raggio della stella di neutroni o della nana associato alla massa stessa).

Le formule per i vari raggi minimi dipendono soltanto da massa e spin del corpo che si prende in considerazione, dunque se si considerano i corpi privi di spin

è possibile calcolare  $r_{min}$  e da questo  $\mathcal{R}$  per il sistema sorgente. Comparando il valore del rapporto di compattezza per il sistema considerato e sistemi noti composti da diversi tipi di corpi è possibile capire da che oggetti è formato il sistema.

In particolare da questa prima analisi risulta che la sorgente può essere composta solo da oggetti compatti, ossia da stelle di neutroni o buchi neri. Se il rapporto di compattezza risulta  $\mathcal{R} \lesssim 2$ , allora si possono escludere anche le stelle di neutroni.

Si arriva quindi alle stime di  $\mathcal{M}$  ed  $\mathcal{R}$  e alla conclusione che si sta osservando un sistema composto da due oggetti compatti che orbitano uno attorno all'altro perdendo energia per emissione gravitazionale fino a collassare in un unico oggetto e raggiungere l'equilibrio, ma per giungere a questo punto sono state fatte diverse approssimazioni ed è quindi importante verificare se queste sono applicabili e se allentando le restrizioni imposte al sistema si giunge allo stesso risultato.

La prima assunzione che si può provare a rilassare è quella di considerare orbite circolari: se si considerano orbite ellittiche, con eccentricità  $e > 0$ , la  $R$  che compare nella terza legge di Keplero non denota più il raggio dell'orbita, bensì il suo semiasse maggiore. Questo comporta che la distanza minima tra i due corpi sia  $r = (1 - e)R < R$ , da cui si ricava un rapporto di compattezza minore rispetto a quello ottenuto per le orbite circolari: se già per le seconde si arrivava alla conclusione di aver a che fare con oggetti compatti, allora a maggior ragione varrà lo stesso per le prime.

L'eccentricità dell'orbita porta anche ad una correzione di un fattore  $l(e) = (1 - e^2)^{-\frac{7}{2}}(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4) \geq 1$  alla luminosità del segnale, da cui deriva una diminuzione della *chirp mass*: tuttavia questa correzione risulta rilevante solo per eccentricità elevate, che porterebbero anche ad una visibile modulazione del segnale. Se la modulazione fosse visibile non si potrebbe supporre un'orbita circolare e quindi non si proverebbe nemmeno ad analizzare il segnale con questi metodi, dunque si può ignorare questa correzione.

Ora si può andare a vedere cosa succede se si considerano due masse  $m_1$  e  $m_2$  diverse; per farlo conviene esprimere le due masse in termini di  $q$  ed  $\mathcal{M}$ , ossia come  $m_1 = \mathcal{M}(1 + q)^{\frac{1}{5}}q^{\frac{2}{5}}$  e  $m_2 = \mathcal{M}(1 + q)^{\frac{1}{5}}q^{-\frac{3}{5}}$ . Da queste si ottiene l'espressione della massa totale

$$M = m_1 + m_2 = \mathcal{M}(1 + q)^{\frac{6}{5}}q^{-\frac{3}{5}} \quad (11)$$

Ora bisogna riscrivere  $\mathcal{R}$  in termini della *chirp mass*: per prima cosa si consideri che la distanza minima tra i due corpi è data da  $r_{Schwar}(M) = r_{Schwar}(m_1) + r_{Schwar}(m_2)$ , data la definizione di raggio di Schwarzschild

$$r_{Schwar}(m) = \frac{2Gm}{c^2} \quad (12)$$

si ottiene che

$$\mathcal{R} = \frac{R}{r_{Schwar}(M)} = \frac{c^2}{2(\omega_{Kep}|_{max}GM)^{\frac{2}{3}}} = \frac{c^2}{2(\pi f_{GW}|_{max}G\mathcal{M})^{\frac{2}{3}}} \frac{q^{\frac{2}{5}}}{(1 + q)^{\frac{4}{5}}} \quad (13)$$

Plottando l'andamento di  $\mathcal{R}$  in funzione di  $q$ , con  $\mathcal{M}$  ed  $f_{GW}|_{max}$  fissate, si vede chiaramente che al crescere di  $q$ ,  $\mathcal{R}$  diminuisce, ossia che all'aumentare della differenza di massa anche la compattezza del sistema aumenta, di conseguenza le conclusioni valide per sistemi di masse uguali rimangono valide anche per sistemi con masse diverse.

Da questi dati inoltre si può trovare un valore massimo per  $q$ , ossia un valore minimo per  $m_2$ : oltre una certa  $q_{max}$ , infatti, il sistema diventerebbe così compatto da essere costretto all'interno di  $r_{Schwar}(M)$  e formerebbe direttamente un unico buco nero di massa  $M$ . Da  $q_{max}$  si può ricavare  $m_{2min}$ : se questa è maggiore di circa  $3 M_\odot$  si avrà una conferma che il sistema è composto da due buchi neri.

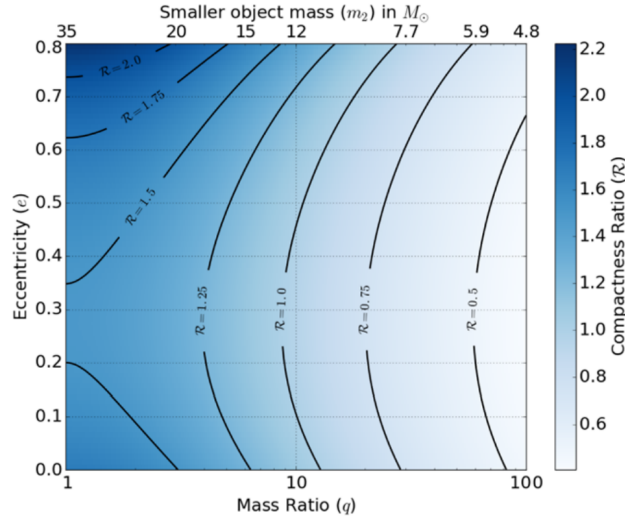


Figura 4: andamento di  $\mathcal{R}$  al variare di  $e$ ,  $q$  ed  $m_2$  per l'evento GW150914, figura 5 di [20].

In precedenza sono stati considerati solo corpi privi di spin, tuttavia lo spin può essere presente ed ha un effetto notevole sulla struttura di un corpo. Se si considera una massa  $m$ , infatti, il raggio minimo che può raggiungere se priva di spin è il suo raggio di Schwarzschild, ma se ruota su se stessa può essere compressa molto di più: se si definisce il parametro di spin

$$\chi = \frac{c}{G} \frac{S}{m^2} \quad (14)$$

si ottiene che il raggio minimo per  $m$  varia tra il raggio di Schwarzschild per  $\chi = 0$  fino a  $r_{EK} = \frac{r_{Schwar}}{2}$  quando  $\chi = 1$ .

A questo punto si può ripetere tutto il ragionamento precedente sostituendo ai raggi di Schwarzschild il raggio di un buco nero di Kerr con  $\chi = 1$ : anche se i limiti per  $q$  ed  $m_2$  cambiano, si arriva comunque alle stesse conclusioni.

l'ultima importante domanda da porsi è se l'utilizzo della meccanica classica sia giustificato.

La meccanica Newtoniana altro non è che un'approssimazione a basse velocità e/o a deboli campi gravitazionali della relatività generale: per un sistema binario queste due condizioni sono equivalenti e si può definire un parametro, detto parametro post-Newtoniano, per quantificare quanto si è vicini al limite classico. Il parametro post-Newtoniano è

$$x = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{GM}{c^2 r} \quad (15)$$

dove  $r$  è la distanza tra i due corpi. Tutte le correzioni alla dinamica classica possono essere espresse in termini di  $x$  elevato ad una certa potenza, per  $x = 0$  la correzione è nulla.

Il parametro post-Newtoniano può anche essere riscritto in termini di  $\mathcal{R}$ , e risulta che  $x \sim (2\mathcal{R})^{-1}$ : finchè  $\mathcal{R}$  è dell'ordine di qualche unità, dunque,  $x < 1$  e quindi la meccanica classica risulta una buona approssimazione.

Se i corpi del sistema avessero spin potrebbero esserci effetti di accoppiamento spin-orbita, tuttavia anche questi sono soppressi per  $x < 1$ .

In conclusione si ottiene che tutte le approssimazioni fatte sono giustificate e quindi che i risultati dell'analisi sono validi, a patto che la SNR sia abbastanza grande: se il segnale non è chiaramente distinguibile dal rumore tutto il processo di analisi descritto non è adatto.

### 3 Esempi di applicazione

Per realizzare l'analisi descritta in [20] è stato utilizzato un programma scritto in Python con l'ausilio delle librerie gwosc e GWpy.

I dati di LIGO-Hanford (H1) sono sempre plottati in rosso, quelli di LIGO-Livingston (L1) in azzurro.

Per sovrapporre le due tracce dei rivelatori LIGO i dati di L1 sono stati invertiti e se necessario traslati.

Per calcolare le *chirp mass*, le distanze tra i centri e i raggi di Schwarzschild si sono considerati i seguenti valori:

$G$	$6.67259 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
$c$	$299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
$M_\odot$	$1.98847 \times 10^{30} \text{ kg}$

Nei grafici  $f_{GW}^{-\frac{8}{3}} - t$  i tempi associati ad ogni dato corrispondono al punto medio dell'intervallo di tempo da cui si è ricavata la frequenza. Gli errori di questi plot, sia in ascissa che in ordinata, sono stati ricavati ripetendo il calcolo per ogni evento con undici filtri passa banda simili e mediando i risultati ottenuti. Le barre d'errore rappresentano la deviazione standard di questi valori. Nei casi in cui l'errore è risultato nullo o troppo piccolo perché il computer riuscisse a distinguerlo da zero nei calcoli, si è aggiunto manualmente un errore

pari a  $1 \times 10^{-14}$ , di almeno cinque ordini di grandezza minore rispetto agli altri errori, per evitare una divisione per zero nella funzione di fit.

Per tutti gli eventi si è utilizzato un filtro apposito per rimuovere le linee di rumore a 60 Hz, 120 Hz e 180 Hz, mentre il filtro passabanda utilizzato è indicato caso per caso. L'andamento dei segnali infatti è tale che risultano rivelabili solo nella banda di frequenze fra qualche decina e qualche centinaio di Hz, inoltre ogni segnale ha un forma diversa quindi l'esatto range di visibilità cambia. Questo è mostrato graficamente per tre eventi d'esempio, GW150914, GW151226, e LVT151012, nella figura 5, che riporta l'andamento in frequenza dei tre segnali sovrapposto alla curva di rumore degli strumenti. Per la spiegazione della normalizzazione delle curve si veda la referenza [21].

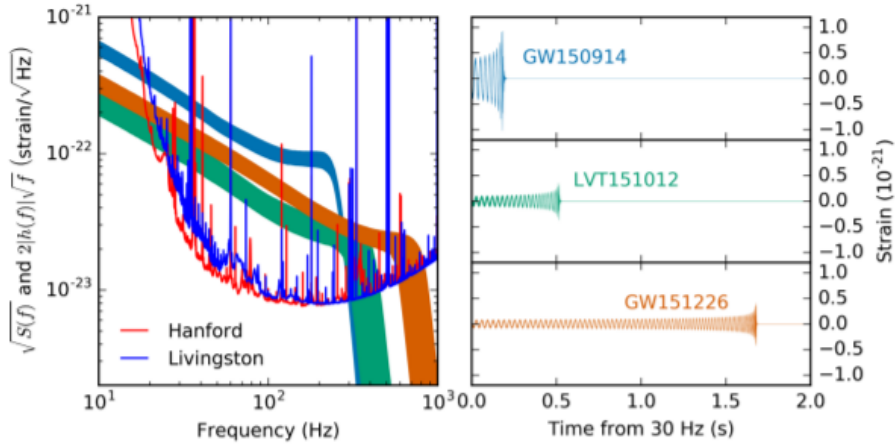


Figura 5: Sulla sinistra curve di rumore di H1 ed L1 sovrapposte agli andamenti in frequenza di GW150914, GW151226, e LVT151012, sulla destra le forme d'onda degli stessi segnali; figura 1 di [21].

Ciò giustifica empiricamente le scelte dei vari range di frequenza per i filtri discussi nei prossimi paragrafi.

Sono riportate in completo le analisi per due eventi (GW150914 e GW170814) di GWTC-1. Gli altri eventi del catalogo per cui si è riusciti ad applicare questo metodo di analisi sono tre: GW170608, GW151226 e GW170104. I risultati e i grafici relativi a questi eventi sono riportati in appendice.

Per il segnale GW170817 non si è potuta eseguire l'analisi perché il segnale era troppo lungo e a frequenze troppo alte, quindi non si riusciva a visualizzare chiaramente nel dominio dei tempi. Gli altri eventi del catalogo non sono stati analizzati perché la SNR era troppo bassa.

### 3.1 GW150914

Il segnale GW150914 è stato il primo segnale di onde gravitazionali mai osservato, è stato registrato solo dagli osservatori LIGO, perché Virgo non era ancora

online.

Filtrando con un filtro passa basso a 50 HZ e un passa alto a 250 HZ il segnale di *strain* di H1 e L1 attorno al tempo GPS  $t = 1126259462.4$  s si ottiene il grafico in figura 3, in cui il segnale è chiaramente distinguibile dal rumore.

Per identificare meglio i cicli da considerare nel fit si sono sovrapposte le forme d'onda calcolate per questo segnale in [22] ai dati filtrati. Si sono ottenute così le figure 6 e 7.

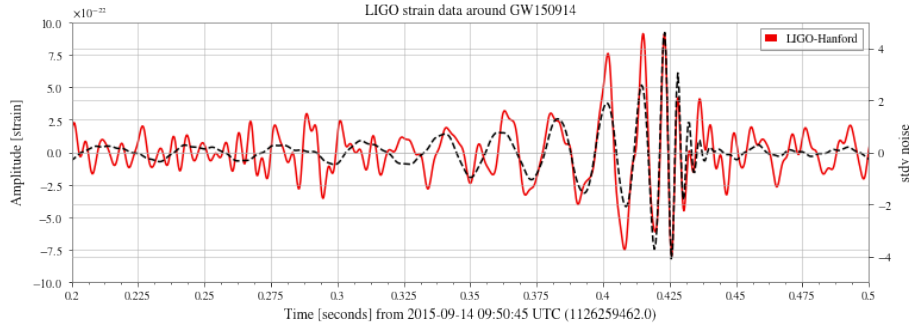


Figura 6: andamento dei dati filtrati di strain di H1 sovrapposti alla forma d'onda per GW150914.

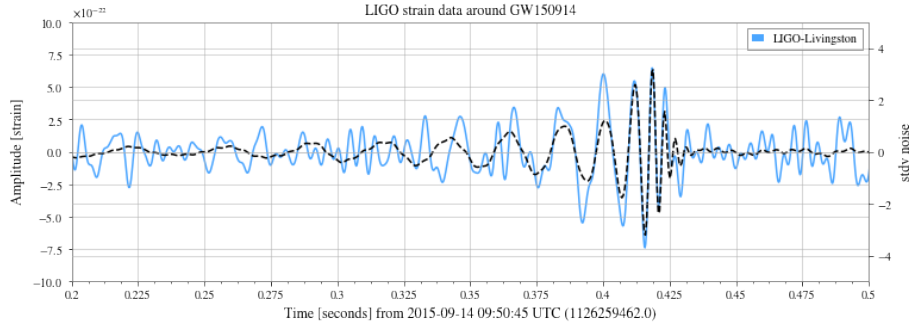


Figura 7: andamento dei dati filtrati di strain di L1 sovrapposti alla forma d'onda per GW150914.

Rispettivamente in figura 8 e 9 sono riportati i risultati del fit a retta della frequenza elevata alla  $-\frac{8}{3}$  per H1 ed L1 attorno all'evento. In questo caso gli undici filtri utilizzati per ricavare gli errori sono i seguenti:



<i>limite inferiore</i>	<i>limite superiore</i>
50 Hz	250 Hz
48 Hz	250 Hz
46 Hz	250 Hz
44 Hz	250 Hz
42 Hz	250 Hz
40 Hz	250 Hz
50 Hz	252 Hz
50 Hz	254 Hz
50 Hz	256 Hz
50 Hz	258 Hz
50 Hz	260 Hz

Il primo di questi filtri è quello usato per ottenere tutti i grafici tempo-*strain*.

Dai dati di Hanford risulta una *chirp mass*  $\mathcal{M}_{H1} = 20.6 M_{\odot}$ , più bassa di quella che si ricava dai dati di Livingston, pari a  $\mathcal{M}_{L1} = 32.6 M_{\odot}$ . Facendo la media dei due risultati si ottiene  $\mathcal{M} = 26.6 M_{\odot}$ : questa stima non è uguale a quella ottenuta da [20], tuttavia gli errori non sono stati stimati allo stesso modo e gli autori di [20] non dicono che filtro sia stato usato sui dati.

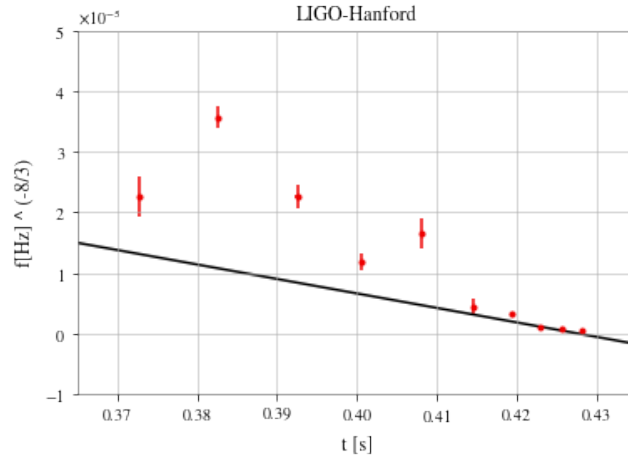


Figura 8: Fit lineare della frequenza elevata alla  $-8/3$  per l'evento GW150914 registrato da H1.

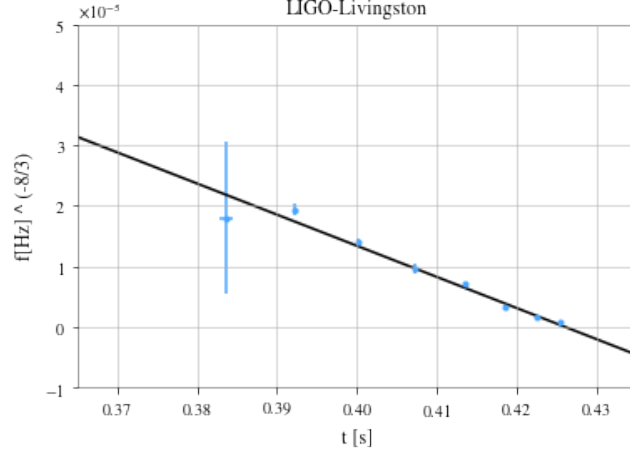


Figura 9: Fit lineare della frequenza elevata alla  $-8/3$  per l'evento GW150914 registrato da L1.

La stima ottenuta non è nemmeno uguale al valore misurato,  $\mathcal{M} = 28.6^{+1.7}_{-1.5}$  [1], tuttavia differisce solo di poche masse solari, una buona precisione se si considera la quantità di tempo e risorse impiegati per ottenerla.

Utilizzando la *chirp mass* ricavata e considerando uguali le masse dei due corpi si può applicare la formula 8. Si ottiene così che ognuno dei due corpi ha una massa pari a  $m = 30.5 M_{\odot}$ . Questo valore è molto vicino ai valori misurati, ossia  $m_1 = 35.6^{+4.7}_{-3.1} M_{\odot}$  ed  $m_2 = 30.6^{+3.0}_{-4.4} M_{\odot}$ .

Dal valore  $m$  ricavato per le due masse si può ricavare la separazione minima tra i due corpi applicando 10. Per stimare la frequenza orbitale  $\omega_{Kep|max}$  si sono definiti i cicli con ampiezza massima per i due rivelatori, si sono prese le frequenze corrispondenti a questi e se ne è fatta una media. Questo valore medio è stato usato per ricavare  $\omega_{Kep|max}$  attraverso l'equazione 4. Si ottiene che la distanza di separazione minima tra i due corpi è  $R = 365$  km.

Calcolando il raggio di Schwarzschild per  $m$  attraverso l'equazione 12 si può calcolare anche il rapporto di compattezza. Risulta che  $\mathcal{R} = \frac{R}{2r_{Schwar}(m)} = 2.0$ : si ha quindi una riconferma di avere a che fare con una coppia di buchi neri.

### 3.2 GW170814

L'evento GW170814 è stato il primo evento rivelato sia dagli osservatori di LIGO che dall'osservatorio Virgo. I dati di Virgo tuttavia sono molto più rumorosi, perciò in questa analisi si è preferito non utilizzarli.

Nella figura 10 è riportato il grafico dello *strain* attorno al tempo dell'evento: il segnale si trova tra  $t = 0.53$  s e  $t = 0.54$  s.

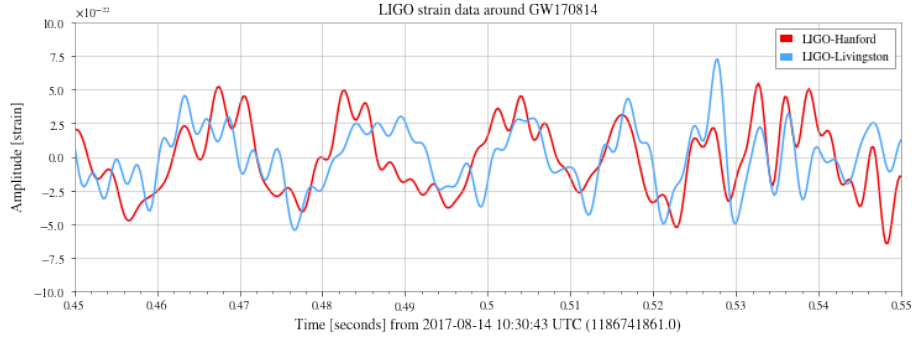


Figura 10: andamento dei dati di strain filtrati attorno all'evento GW170814. La traccia di LIGO-Livingston è invertita e traslata di +8.5 ms.

In questo caso gli undici filtri utilizzati per ricavare gli errori sono i seguenti:

<i>limite inferiore</i>	<i>limite superiore</i>
30 Hz	380 Hz
28 Hz	380 Hz
29 Hz	380 Hz
32 Hz	380 Hz
33 Hz	380 Hz
34 Hz	380 Hz
30 Hz	378 Hz
30 Hz	376 Hz
30 Hz	374 Hz
30 Hz	372 Hz
30 Hz	370 Hz

Il primo di questi filtri è quello usato per ottenere i grafici 10, 11 e 12.

Il segnale si può distinguere dal rumore già in figura 10, ma è molto più facile farlo nelle figure 11 e 12, in cui si sono sovrapposte ai dati le forme d'onda fornite nella documentazione di [22].

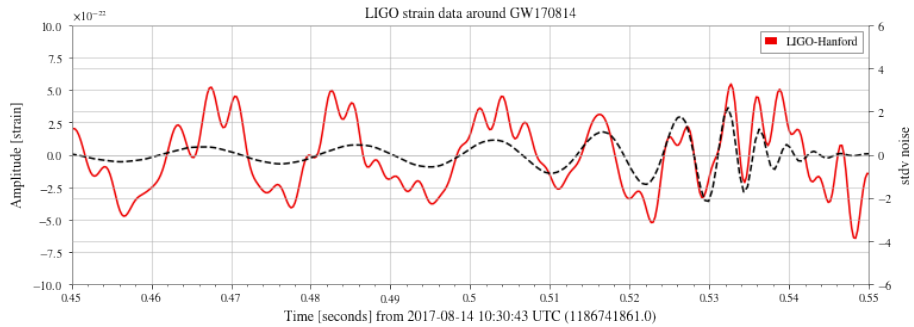


Figura 11: andamento dei dati filtrati di strain di H1 sovrapposti alla forma d'onda per GW170814.

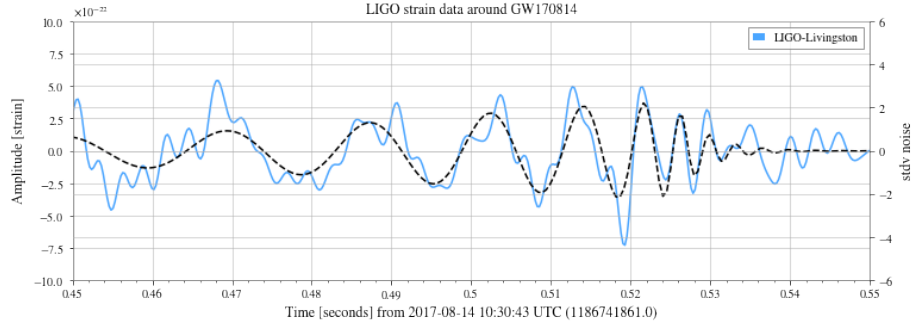


Figura 12: andamento dei dati filtrati di strain di L1 sovrapposti alla forma d'onda per GW170814.

Anche in questo caso si sono ricavate le frequenze e da queste si sono creati i grafici nelle figure 13 e 14: sia per i dati di LIGO-Hanford (13) che per quelli LIGO-Livingston (14) si può distinguere un andamento lineare per qualche centesimo di secondo prima di  $t = 0.54$  s.

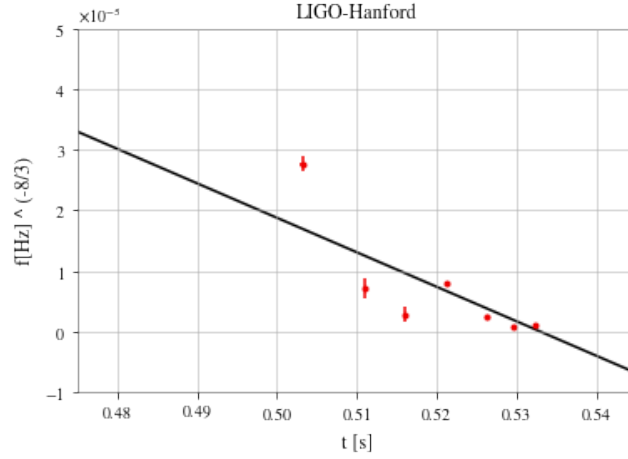


Figura 13: Fit lineare della frequenza elevata alla  $-8/3$  per l'evento GW170104 registrato da H1.

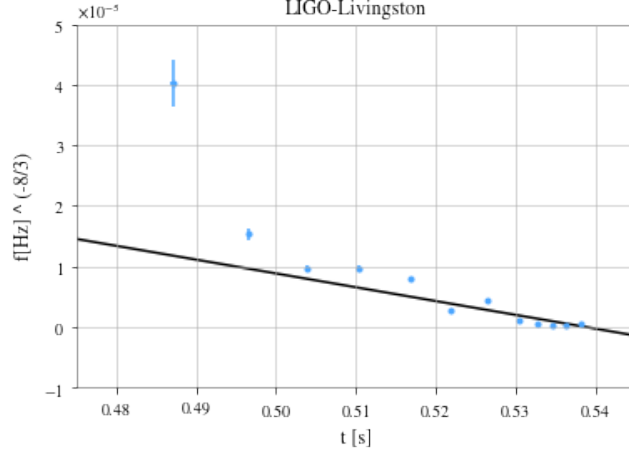


Figura 14: Fit lineare della frequenza elevata alla  $-8/3$  per l'evento GW170104 registrato da L1.

Dal fit dei dati di H1 si ottiene una *chirp mass*  $\mathcal{M}_{H1} = 34.6 M_{\odot}$ , da quello dei dati di L1 si ricava invece  $\mathcal{M}_{L1} = 20.0 M_{\odot}$ , per una media di  $\mathcal{M} = 27.3 M_{\odot}$ . Il valore misurato della *chirp mass* per GW170104 è  $\mathcal{M} = 21.4^{+2.2}_{-1.8} M_{\odot}$ , in questo caso si trova dunque una differenza di circa  $6 M_{\odot}$  tra il valore misurato e quello stimato.

Anche per GW170814 si è ripetuta l'analisi descritta per GW150914. Per questo evento si ottiene  $m = 31.4 M_{\odot}$ , mentre i valori misurati per le due masse sono  $m1 = 30.6^{+5.6}_{-3.0} M_{\odot}$  ed  $m2 = 25.2^{+2.8}_{-4.0} M_{\odot}$ . Il valore stimato si avvicina quindi alla massa maggiore, mentre per la massa minore la stima è peggiore. Questo comporta una sovrastima di qualche massa solare per la massa totale del sistema.

La separazione minima risulta  $R = 356$  km, mentre il rapporto di compattezza vale  $\mathcal{R} = 1.9$ , quindi anche in questo caso la sorgente del segnale è un sistema binario formato da due buchi neri.

## 4 Conclusioni

In conclusione, per gli eventi considerati in questa tesi si ottengono delle buone stime per la *chirp mass*, con differenze di qualche massa solare.

Si ottengono anche delle buone stime per le masse degli oggetti del sistema, e quindi per la sua massa totale.

Si può in oltre stimare il rapporto di compattezza  $\mathcal{R}$  e quindi inferire la natura compatta del sistema.

Questo procedimento inoltre è un ottimo strumento didattico per l'introduzione alle onde gravitazionali, in quanto non richiede di padroneggiare la matematica della relatività generale, ma soltanto di applicare qualche concetto di meccanica Newtoniana.

Il metodo utilizzato per trovare le stime, tuttavia, è estremamente limitato dalla

SNR dell'evento, dal numero di cicli registrati dagli interferometri e dalla chiarezza con cui si riesce a rappresentare il segnale nel dominio dei tempi: queste caratteristiche escludono molti degli eventi rivelati.

## 5 Appendice

In questa sezione sono riportati i grafici e i risultati relativi agli altri eventi del catalogo GWTC-1 per cui si è riusciti a eseguire l'analisi.

### 5.1 GW170608

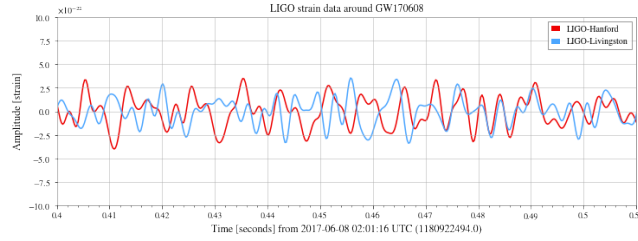
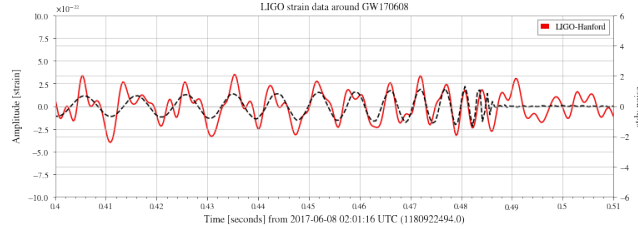
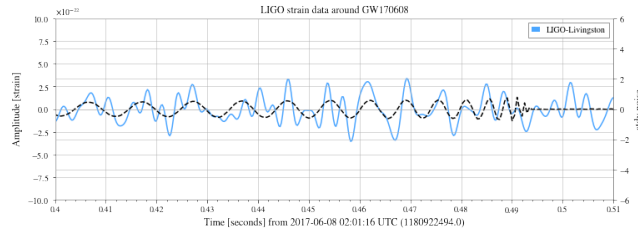


Figura 15: andamento dei dati di strain filtrati attorno all'evento GW170608. La traccia di LIGO-Livingston è invertita e traslata di  $-2.5$  ms.



(a) H1



(b) L1

Figura 16: andamento dei dati filtrati di strain sovrapposti alla forma d'onda per GW170608.

<i>parametri</i>	<i>valori stimati</i>
$\mathcal{M}$	$5.2 M_{\odot}$
$m$	$6.0 M_{\odot}$
$R$	120 km
$\mathcal{R}$	3.4

Tabella 1: Valori stimati di *chirp mass*, massa dei corpi, distanza minima prima della coalescenza e rapporto di compattezza per il segnale GW170608.

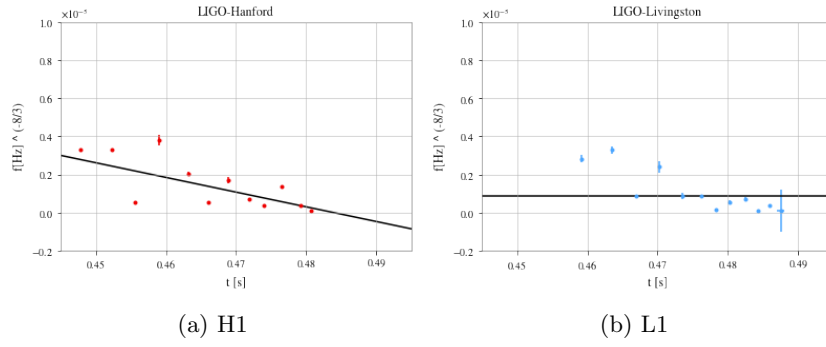


Figura 17: Fit lineare della frequenza elevata alla  $-8/3$  per l'evento GW170608.

## 5.2 GW151226

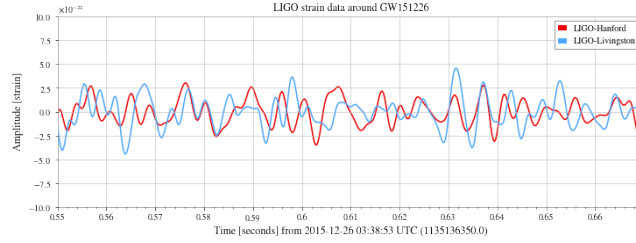
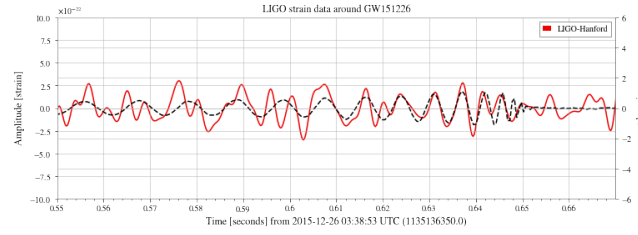


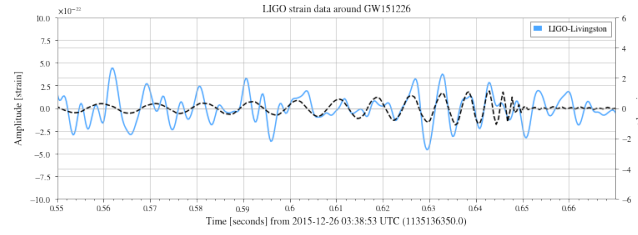
Figura 18: andamento dei dati di strain filtrati attorno all'evento GW151226. La traccia di LIGO-Livingston è invertita e traslata di +2 ms.

<i>parametri</i>	<i>valori stimati</i>
$\mathcal{M}$	$5.5 M_{\odot}$
$m$	$6.3 M_{\odot}$
$R$	166 km
$\mathcal{R}$	4.5

Tabella 2: Valori stimati di *chirp mass*, massa dei corpi, distanza minima prima della coalescenza e rapporto di compattezza per il segnale GW151226.

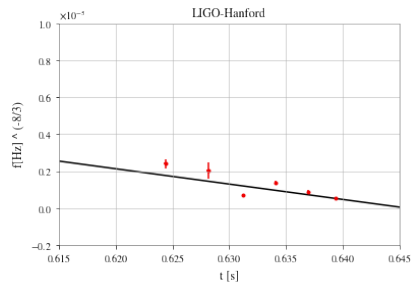


(a) H1

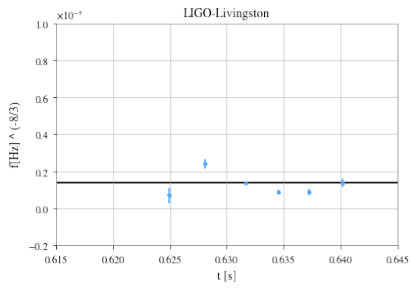


(b) L1

Figura 19: andamento dei dati filtrati di strain sovrapposti alla forma d'onda per GW151226.



(a) H1



(b) L1

Figura 20: Fit lineare della frequenza elevata alla  $-8/3$  per l'evento GW151226.



### 5.3 GW170104

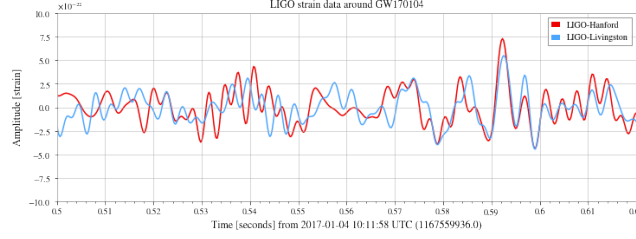
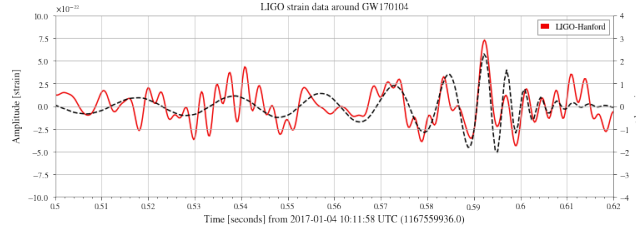
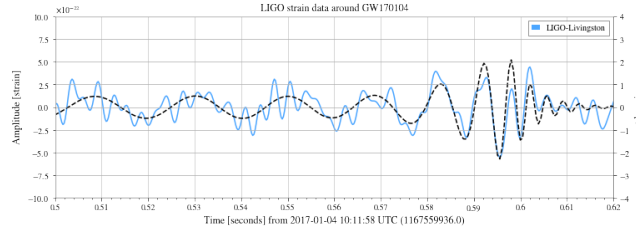


Figura 21: andamento dei dati di strain filtrati attorno all'evento GW170104. La traccia di LIGO-Livingston è invertita e traslata di  $-3$  ms.

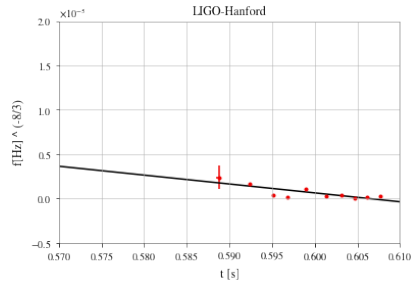


(a) H1

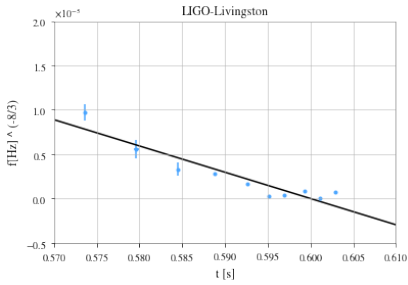


(b) L1

Figura 22: andamento dei dati filtrati di strain sovrapposti alla forma d'onda per GW170104.



(a) H1



(b) L1

Figura 23: Fit lineare della frequenza elevata alla  $-8/3$  per l'evento GW170104.

<i>parametri</i>	<i>valori stimati</i>
$\mathcal{M}$	$17.8 \text{ M}_{\odot}$
$m$	$20.5 \text{ M}_{\odot}$
$R$	$295 \text{ km}$
$\mathcal{R}$	$2.4$

Tabella 3: Valori stimati di *chirp mass*, massa dei corpi, distanza minima prima della coalescenza e rapporto di compattezza per il segnale GW170104.

## Ringraziamenti

Lo studio disponeva di dati, software e/o strumenti web del Gravitational Wave Open Science Center (<https://www.gw-openscience.org/>), un servizio LIGO Laboratory, della LIGO Scientific Collaboration e della Virgo Collaboration.

LIGO Laboratory e Advanced LIGO sono finanziati dalla United States National Science Foundation (NSF), dal Science and Technology Facilities Council (STFC) del Regno Unito e dalla Max-Planck-Society (MPS); inoltre, la Bassa Sassonia/Germania ha sostenuto la costruzione di Advanced LIGO e la costruzione e l'operazione del rilevatore GEO600.

Ulteriore supporto ad Advanced LIGO è stato dato dall'Australian Research Council.

Virgo è finanziato, tramite l'European Gravitational Observatory (EGO), dal Centre National de Recherche Scientifique (CNRS) francese, dall'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN) italiano e dal Nikhef olandese; forniscono il loro contributo istituzioni belghe, tedesche, greche, ungheresi, irlandesi, giapponesi, monegasche, polacche, portoghesi e spagnole [1].

## Riferimenti bibliografici

- [1] R. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Open data from the first and second observing runs of advanced ligo and advanced virgo. *SoftwareX*, 13:100658, Jan 2021. doi:[10.1016/j.softx.2021.100658](https://doi.org/10.1016/j.softx.2021.100658).
- [2] M. Maggiore. *Gravitational waves vol.1 Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2008.
- [3] LIGO Caltech. Sources and types of gravitational waves, 2021. URL: <https://www.ligo.caltech.edu/page/gw-sources>.
- [4] LIGO Caltech. What are Gravitational Waves?, 2021. <https://www.ligo.caltech.edu/page/what-are-gw>.
- [5] Abbott, R. et al.(The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, and the KAGRA Collaboration). GWTC-3: Compact binary coalescences observed by ligo and virgo during the second part of the third observing run, 2021. [arXiv:2111.03606](https://arxiv.org/abs/2111.03606).
- [6] Abbott, B.P. and Abbott, R. and Abbott, T.D. and Acernese, F. and Ackley, K. and Adams, C. and Adams, T. and Addesso, P. and Adhikari, R.X. and Adya, V.B. et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Physical Review Letters*, 119(16), Oct 2017. doi:[10.1103/physrevlett.119.161101](https://doi.org/10.1103/physrevlett.119.161101).
- [7] Abbott, B. P. and Abbott, R. and Abbott, T. D. and Acernese, F. and Ackley, K. and Adams, C. and Adams, T. and Addesso, P. and Adhikari, R. X. and Adya, V. B. et al. Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. *The Astrophysical Journal*, 848(2):L12, Oct 2017. doi:[10.3847/2041-8213/aa91c9](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa91c9).
- [8] EGO and The Virgo Collaboration. L'interferometro virgo, 2021. URL: <http://public.virgo-gw.eu/linterferometro-virgo/>.
- [9] Aasi, J. and Abbott, B.P. and Abbott, R. and Abbott, T. and Abernathy, M.R. and Ackley, K. and Adams, C. and Adams, T. and Addesso, P. et al. Advanced LIGO. *Classical and Quantum Gravity*, 32(7):074001, Mar 2015. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/7/074001>.
- [10] B.P. et al. Abbott. GW150914: The Advanced LIGO Detectors in the Era of First Discoveries. *Phys. Rev. Lett.*, 116:131103, Mar 2016. doi:[10.1103/PhysRevLett.116.131103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.131103).
- [11] Peter R. Saulson. *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*. WORLD SCIENTIFIC, 2nd edition, 2017. doi:[10.1142/10116](https://doi.org/10.1142/10116).
- [12] GW Open Data Workshop 4.
- [13] Abbott, B.P. et al. Calibration of the advanced LIGO detectors for the discovery of the binary black-hole merger GW150914. *Phys. Rev. D*, 95:062003, Mar 2017. doi:[10.1103/PhysRevD.95.062003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.062003).

- [14] Acernese, F. et al. Advanced virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector. *Classical and Quantum Gravity*, 32(2):024001, dec 2014. [doi:10.1088/0264-9381/32/2/024001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/2/024001).
- [15] Dooley, K.L. et al. Geo 600 and the geo-hf upgrade program: successes and challenges. *Classical and Quantum Gravity*, 33(7):075009, Mar 2016. [doi:10.1088/0264-9381/33/7/075009](https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/7/075009).
- [16] T. Akutsu et al. Overview of KAGRA: Detector design and construction history, 2020. [arXiv:2005.05574](https://arxiv.org/abs/2005.05574).
- [17] Evans, M. et al. A horizon study for cosmic explorer: Science, observatories, and community, 2021. [arXiv:2109.09882](https://arxiv.org/abs/2109.09882).
- [18] Punturo, M. et al. The einstein telescope: a third-generation gravitational wave observatory. *Classical and Quantum Gravity*, 27(19):194002, sep 2010. [doi:10.1088/0264-9381/27/19/194002](https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/19/194002).
- [19] Amaro-Seoane, P. et al. Laser interferometer space antenna, 2017. [arXiv:1702.00786](https://arxiv.org/abs/1702.00786).
- [20] LIGO Scientific and VIRGO Collaborations et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914. *Annalen der Physik*, 529(1-2):1600209, 2017. [doi:https://doi.org/10.1002/andp.201600209](https://doi.org/10.1002/andp.201600209).
- [21] Abbott, B.P. et al. Binary black hole mergers in the first advanced ligo observing run. *Phys. Rev. X*, 6:041015, Oct 2016. [doi:10.1103/PhysRevX.6.041015](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.041015).
- [22] Abbott, B.P. and Abbott, R. and Abbott, T.D. and Abraham, S. and Acernese, F. and Ackley, K. and Adams, C. and Adhikari, R.X. and Adya, V.B. and Affeldt, C. et al. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs. *Physical Review X*, 9(3), Sep 2019. [doi:10.1103/physrevx.9.031040](https://doi.org/10.1103/physrevx.9.031040).