Zadania programistyczne
z matematycznych metod grafiki komputerowej

Zestaw **P1**
3 marca 2014 r.

Termin realizacji: **30 marca 2014 r.**
Punktacja (podana przy każdym zadaniu): **8, 10 albo 12 punktów**
Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez trzy osoby.

P1.1. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Niech dana będzie krzywa $G(t)$ $(t \in [a, b])$. Proszę wykorzystać interpolację wielomianową do rekonstrukcji tej krzywej: dla danego $n \in \mathbb{N}$ oraz układu węzłów $a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant b$ wyznaczyć krzywą $L_n(t)$ o własności $L_n(t_i) = G(t_i)$ dla $i - 0, 1, \ldots, n$. Program powinien rysować, na jednym wykresie, krzywe G i L_n. Wykonać eksperymenty m.in. dla krzywych: $G(t) = [r_1 \cos t, r_2 \sin t]$ $(t \in [0, 2\pi])$, $G(t) = [\sin t, \cos 3t]$ $(t \in [0, 2\pi])$, $G(t) = [t \cos t, t \sin t]$ $(t \in [0, 10\pi])$.

P1.2. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Dla danej krzywej $P(t)$ i węzłów $t_0, t_1, \ldots, t_n$, opracować metodę wyznaczania punktu na krzywej wielomianowej $R_n(t)$ stopnia n, spełniającej warunki $R_n(t_i) = P(t_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, korzystając z wzoru rekurencyjnego

$$R_n(t) = \frac{(t - t_0)Q_{n-1}(t) - (t - t_n)R_{n-1}(t)}{t_n - t_0}, \tag{1}$$

gdzie $Q_{n-1}(t)$ i $R_{n-1}(t)$ interpolują $P(t)$ odpowiednio w węzłach $t_1, t_2, \ldots, t_n$ i $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$. Sprawozdanie powinno zawierać opis opracowanej metody wraz z dowodem wzoru (1). Jaka jest złożoność obliczeniowa i pamięciowa metody? Wykonać eksperymenty dla kilku przykładowych krzywych.

P1.3. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Niech g będzie funkcją okresową, o okresie R: $g(x + R) = g(x)$. Po zamianie zmiennej $t = 2\pi\, x/R$ dostaniemy funkcję okresową $f(t) := g\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)$, o okresie 2π. Funkcję

$$S_n(t) := {\sum_{k=0}^{n}}{}' (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{2}$$

nazywamy *wielomianem trygonometrycznym* co najwyżej stopnia n. Można wykazać, że istnieje dokładnie jeden taki wielomian trygonometryczny postaci (2), że

$$S_n(t_i) = f(t_i), \quad \text{gdzie} \quad t_i := \frac{2i\pi}{2n+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2n), \tag{3}$$

o współczynnikach a_k i b_k zależnych w prosty sposób od wartości $f(t_i)$. Zobacz np. J.M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, str. 66.

Dla danej krzywej zamkniętej $G(t)$ $(t \in [0, 2\pi]$; $G(0) = G(2\pi))$ i danego $n \in \mathbb{N}$ skonstruować *krzywą interpolacyjną trygonometryczną* $S^*(t)$, o własności $S^*(t_i) = G(t_i)$, gdzie $t_i := \frac{2i\pi}{2n+1}$, $(i = 0, 1, \ldots, 2n)$. Program powinien rysować, na jednym wykresie, krzywe G i S^*. Wykonaj eksperymenty dla różnych krzywych, w tym dla: okręgu, elipsy, „znaku nieskończoności” $G(t) = [\cos t, \sin 2t]$ $(t \in [0, 2\pi])$ oraz krzywej Lissajous $G(t) = [\sin 2t, \cos 3t]$ $(t \in [0, 2\pi])$.

P1.4. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Dla danej krzywej otwartej $G(t)$ ($t \in [a,b]$), danego $n \in \mathbb{N}$ oraz układu węzłów $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ skonstruować następującą *krzywą sklejaną interpolacyjną* S, o własnościach:
a) w każdym z podprzedziałów $[t_{k-1},\, t_k]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) krzywa S jest identyczna z pewną krzywą wielomianową P_k stopnia co najwyżej trzeciego;
b) $S(t_k) = G(t_k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$);
c) $S''(a) = S''(b) = 0$.
Program powinien rysować, na jednym wykresie, krzywe G i S. Wykonać eksperymenty dla różnych krzywych, w tym dla cykloidy wydłużonej: $G(t) = [pt - q\sin t, p - q\cos t]$ ($q > p;\ t \in (-5\pi, 5\pi]$).

P1.5. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Dla danej krzywej zamkniętej $G(t)$ ($t \in [a,b];\ G(a) = G(b)$), danego $n \in \mathbb{N}$ oraz układu węzłów $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ skonstruować następującą *zamkniętą krzywą sklejaną interpolacyjną* $\widetilde{S}(t)$, o własnościach:
a) w każdym z podprzedziałów $[t_{k-1},\, t_k]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) krzywa $\widetilde{S}$ jest identyczna z pewną krzywą wielomianową $\widetilde{P}_k$ stopnia co najwyżej trzeciego;
b) $\widetilde{S}(t_k) = G(t_k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$);
c) $\widetilde{S}'(a) = \widetilde{S}'(b), \qquad \widetilde{S}''(a) = \widetilde{S}''(b)$.
Program powinien rysować, na jednym wykresie, krzywe G i $\widetilde{S}$. Wykonaj eksperymenty dla różnych krzywych, w tym dla: okręgu, elipsy, „znaku nieskończoności” $G(t) = [\cos t, \sin 2t]$ ($t \in [0, 2\pi]$) oraz krzywej Lissajous $G(t) = [\sin 2t, \cos 3t]$ ($t \in [0, 2\pi]$).

P1.6. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Dla danej krzywej otwartej $G(t)$ ($t \in [a,b]$), danego $n \in \mathbb{N}$ oraz układu węzłów $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ skonstruować następującą *krzywą sklejaną interpolacyjną* $\hat{S}$, o własnościach:
a) w każdym z podprzedziałów $[t_{k-1},\, t_k]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) krzywa $\hat{S}$ jest identyczna z pewną krzywą wielomianową P_k stopnia co najwyżej trzeciego;
b) $\hat{S}(t_k) = G(t_k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$);
c) $\hat{S}'(a) = \boldsymbol{s}_0, \quad \hat{S}'(b) = \boldsymbol{s}_1$ dla danych wektorów $\boldsymbol{s}_0$ i $\boldsymbol{s}_1$.
Program powinien rysować, na jednym wykresie, krzywe G i $\hat{S}$. Wykonać eksperymenty dla różnych krzywych, w tym dla cykloidy wydłużonej: $G(t) = [pt - q\sin t, p - q\cos t]$ ($q > p;\ t \in (-5\pi, 5\pi]$).

P1.7. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Niech będą dane: liczba naturalna n, węzły $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ($a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$) oraz funkcja f określona w przedziale $[a,b]$. Punkty

$$\tau_0 := t_1, \qquad \tau_i := \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1}) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1), \qquad \tau_n := t_n$$

nazywamy przegubami. Dowodzi się, że istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\sigma \in C^1[a,b]$, że
a) w każdym podprzedziale $[t_i, t_{i+1}]$ $\quad (1 \leqslant i \leqslant n-1)$ σ jest identyczna z pewnym wielomianem $q_i \in \Pi_2$;
b) $\sigma(\tau_k) = f(\tau_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$.
Dla $x \in [t_i, t_{i+1}]$ ($1 \leqslant i \leqslant n-1$) funkcja σ wyraża się wzorem

$$\sigma(x) = f(\tau_i) + \frac{1}{2}(m_{i+1} + m_i)(x - \tau_i) + \frac{1}{2h_i}(m_{i+1} - m_i)(x - \tau_i)^2,$$

gdzie $h_i := t_{i+1} - t_i$, a wielkości $m_i := \sigma'(t_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) są rozwiązaniem układu rownań

$$h_{i-1}m_{i-1} + 3(h_{i-1} + h_i)m_i + h_i m_{i+1} = 8(f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

gdzie przyjmujemy, że $h_0 := h_n := m_0 := m_{n+1} := 0$.
Wykorzystać opisaną wyżej metodę interpolacji do rekonstrukcji krzywej parametrycznej $G(t) = [g_x(t), g_y(t)]$ ($t \in [a,b]$), tzn. znaleźć dla węzłów $t_1, t_2, \ldots, t_n$ funkcje sklejane II-go stopnia σ_x, σ_y interpolujące funkcje g_x i g_y, odpowiednio. Poszukiwana krzywa ma parametryzację $S(t) := [\sigma_x(t), \sigma_y(t)]$ ($t \in [a,b]$). Program powinien rysować, na jednym wykresie, krzywe G i S. Wykonać eksperymenty dla różnych krzywych (patrz np. zadania **P1.1–P1.3**).

P1.8. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Dla danej liczby naturalnej n, danych węzłów $t_0, t_1, \ldots, t_n$ $(a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$, danej liczby rzeczywistej τ i danej funkcji f istnieje dokładnie jedna taka funkcja S_τ, zwana *funkcją sklejaną hiperboliczną*, że

1^o $S_\tau \in C^2[a, b]$,

2^o $S_\tau(t_k) = f(t_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$;

3^o w każdym z podprzedziałów (t_k, t_{k+1}) $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ funkcja S_τ spełnia warunek $S_\tau^{(4)}(t) - \tau^2 S_\tau''(t) = 0$;

4^o $S_\tau''(a) = S_\tau''(b) = 0$.

Zrealizować algorytm konstrukcji funkcji sklejanej hiperbolicznej, podany w książce D. Kincaida i W. Cheneya, *Analiza numeryczna*, WNT, 2005, s. 333–335. Sprawdzić doświadczalnie wpływ parametru τ na rozwiązanie.

Wykorzystać opisaną wyżej metodę interpolacji do konstrukcji krzywej sklejanej hiperbolicznej $\mathsf{S}_\tau(t)$ $(t \in [a, b])$, o własności $\mathsf{S}_\tau(t_i) = W_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, gdzie W_i są danymi punktami (np. leżącymi na pewnej krzywej $G(t)$). Program powinien rysować, na jednym wykresie, krzywe G i S_τ. Wykonać eksperymenty dla różnych krzywych (patrz np. zadania **P1.1**–**P1.3**).

P1.9. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Postać Hermite'a krzywej wielomianowej trzeciego stopnia jest określona przez dwa punkty końcowe P_0, P_1 i wartości pochodnych $\boldsymbol{s}_0$, $\boldsymbol{s}_1$ w końcach przedziału parametryzacji. Należy znaleźć takie wielomiany $h_i \in \Pi_3$ $(0 \leqslant i \leqslant 3)$, żeby krzywa

$$H(t) = P_0 h_0(t) + \boldsymbol{s}_0 h_1(t) + \boldsymbol{s}_1 h_2(t) + P_1 h_3(t),$$

spełniała następujące warunki:

$$\begin{aligned} H(0) &= P_0, \qquad & H'(0) &= \boldsymbol{s}_0, \\ H(1) &= P_1, \qquad & H'(1) &= \boldsymbol{s}_1. \end{aligned}$$

Jakie własności mają wielomiany h_i? Jak znaleźć postać Béziera krzywej $P(t)$? Opracować analogiczne metody wyznaczania krzywej wielomianowej stopnia piątego, dopasowanej do danych z wartościami pochodnych drugiego i trzeciego rzędu w końcach przedziału $[0, 1]$. Program powinien umożliwiać wygodną modyfikację krzywej Hermite'a, tzn. dawać możliwość przeciągania punktów skrajnych oraz pozwalać na zmianę wektorów stycznych w tych punktach poprzez przeciąganie strzałek.

Stanisław Lewanowicz