Inferencia Bayesiana

El problema de las urnas

Se cuenta con 11 urnas etiquetadas según $u = 0, 1, \ldots, 10$*, que contienen diez bolas cada una. La urna* u *contiene* u *bolas azules y* $10 - u$ *bolas blancas. Fede elige una urna* u *al azar y extrae con reposición* N *bolas, obteniendo* n_A *azules y* $N - n_A$ *blancas. Nico, el amigo de Fede, observa atentamente. Si después de* $N = 10$ *extracciones resulta* $n_A = 3$*, ¿cuál es la probabilidad de que la urna que Fede está usando sea la* u*?*

La teoría de las probabilidades permite predecir una distribución sobre posibles valores de un resultado dado cierto conocimiento (o estado) del universo: **probabilidad hacia adelante**

La teoría de las probabilidades permite predecir una distribución sobre posibles valores de un resultado dado cierto conocimiento (o estado) del universo: **probabilidad hacia adelante**

Por el contrario, muchas veces estamos interesados en realizar inferencias sobre el estado del universo a partir de observaciones: **probabilidad inversa**.

La teoría de las probabilidades permite predecir una distribución sobre posibles valores de un resultado dado cierto conocimiento (o estado) del universo: **probabilidad hacia adelante**

Por el contrario, muchas veces estamos interesados en realizar inferencias sobre el estado del universo a partir de observaciones: **probabilidad inversa**.

$$p(\mathcal{H} \mid E) = \frac{p(E \mid \mathcal{H}) p(\mathcal{H})}{p(E)}$$

$$p(\mathcal{H} \mid E) \propto p(E \mid \mathcal{H}) p(\mathcal{H})$$

Conociendo N, si conociéramos u podríamos calcular las probabilidades de los diferentes n_A: **probabilidad hacia adelante**.

Conociendo N, si conociéramos u podríamos calcular las probabilidades de los diferentes n_A: **probabilidad hacia adelante**.

Aquí observamos un n_A y queremos calcular las probabilidades de los posibles valores de u: **probabilidad inversa**.

Conociendo N, si conociéramos u podríamos calcular las probabilidades de los diferentes n_A: **probabilidad hacia adelante**.

Aquí observamos un n_A y queremos calcular las probabilidades de los posibles valores de u: **probabilidad inversa**.

$$p(u \mid n_A, N) = \frac{p(n_A \mid u, N)p(u)}{p(n_A \mid N)}$$

- N es una cantidad fija
- n_A es otra cantidad fija: lo que observamos al realizar el experimento
- u es la cantidad desconocida

Probabilidad conjunta de las cantidades observables (datos) y cantidades no observables (parámetros):

Probabilidad conjunta de las cantidades observables (datos) y cantidades no observables (parámetros):

$$p(u, n_A \mid N) = p(n_A \mid u, N) p(u)$$

Probabilidad conjunta de las cantidades observables (datos) y cantidades no observables (parámetros):

$$p(u, n_A \mid N) = p(n_A \mid u, N)p(u)$$

Podemos escribir la probabilidad de u condicionada a n_A:

$$\begin{aligned} p(u \mid n_A, N) &= \tfrac{p(u, n_A \mid N)}{p(n_A \mid N)} \\ &= \tfrac{p(n_A \mid u, N)p(u)}{p(n_A \mid N)} \end{aligned}$$

Probabilidad conjunta de las cantidades observables (datos) y cantidades no observables (parámetros):

$$p(u, n_A \mid N) = p(n_A \mid u, N)p(u)$$

Podemos escribir la probabilidad de u condicionada a n_A:

$$\begin{aligned} p(u \mid n_A, N) &= \tfrac{p(u,n_A|N)}{p(n_A|N)} \\ &= \tfrac{p(n_A|u,N)p(u)}{p(n_A|N)} \end{aligned}$$

Es la probabilidad de cada valor de u luego de haber observado $n_A = 3$ bolas azules

La probabilidad marginal de u es

La probabilidad marginal de u es

$$p(u) = \frac{1}{11}$$

Es la probabilidad inicial de haber tomado la urna u

La probabilidad de n_A dado u (y N) es:

La probabilidad de n_A dado u (y N) es:

$$p(n_A \mid u, N) = \binom{N}{n_A} \left(\frac{u}{10}\right)^{n_A} \left(1 - \frac{u}{10}\right)^{N-n_A}$$

La probabilidad de n_A dado u (y N) es:

$$p(n_A \mid u, N) = \binom{N}{n_A} \left(\frac{u}{10}\right)^{n_A} \left(1 - \frac{u}{10}\right)^{N-n_A}$$

Como $n_A = 3$ es fijo (¡son los datos observados!), $p(n_A \mid u, N)$ es una función de u. Indica qué tan compatibles son los datos observados con los distintos valores de u

El denominador, $p(n_A \mid N) = p(n_A)$, es

El denominador, $p(n_A \mid N) = p(n_A)$, es

$$
\begin{aligned}
p(n_A \mid N) &= \textstyle\sum_u p(u, n_A \mid N) \\
&= \textstyle\sum_u p(n_A \mid u, N) p(u) \\
&= \tfrac{1}{11} \textstyle\sum_u p(n_A \mid u, N)
\end{aligned}
$$

Finalmente, la probabilidad de interés $p(u \mid n_A, N)$ es

Finalmente, la probabilidad de interés $p(u \mid n_A, N)$ es

$$p(u \mid n_A, N) = \frac{p(n_A \mid u, N) p(u)}{p(n_A \mid N)}$$

Finalmente, la probabilidad de interés $p(u \mid n_A, N)$ es

$$p(u \mid n_A, N) = \frac{p(n_A \mid u, N)p(u)}{p(n_A \mid N)}$$

$$p(u \mid n_A, N) = \binom{N}{n_A} \left(\frac{u}{10}\right)^{n_A} \left(1 - \frac{u}{10}\right)^{N-n_A} \frac{1}{11} \frac{1}{p(n_A \mid N)}$$

Finalmente, la probabilidad de interés $p(u \mid n_A, N)$ es

$$p(u \mid n_A, N) = \frac{p(n_A \mid u, N)p(u)}{p(n_A \mid N)}$$

$$p(u \mid n_A, N) = \binom{N}{n_A} \left(\frac{u}{10}\right)^{n_A} \left(1 - \frac{u}{10}\right)^{N-n_A} \frac{1}{11} \frac{1}{p(n_A \mid N)}$$

- N es una cantidad fija
- n_A es 3, otra cantidad fija: lo que observamos al realizar el experimento
- u es la cantidad desconocida

Finalmente, la probabilidad de interés $p(u \mid n_A, N)$ es

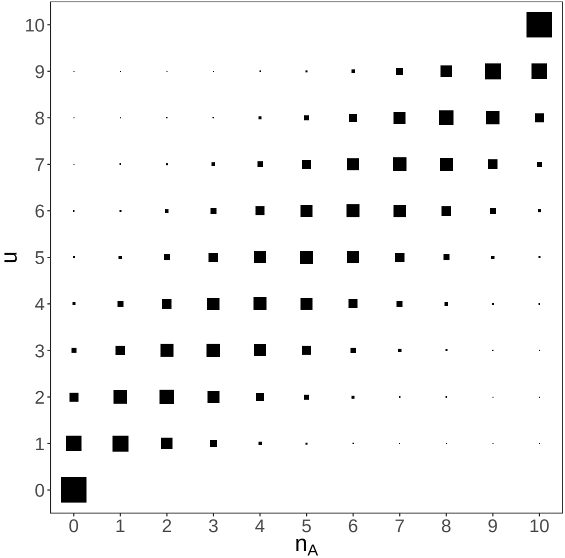
$$p(u \mid n_A, N) = \frac{p(n_A \mid u, N)p(u)}{p(n_A \mid N)}$$

$$p(u \mid n_A, N) = \binom{N}{n_A} \left(\frac{u}{10}\right)^{n_A} \left(1 - \frac{u}{10}\right)^{N-n_A} \frac{1}{11} \frac{1}{p(n_A \mid N)}$$

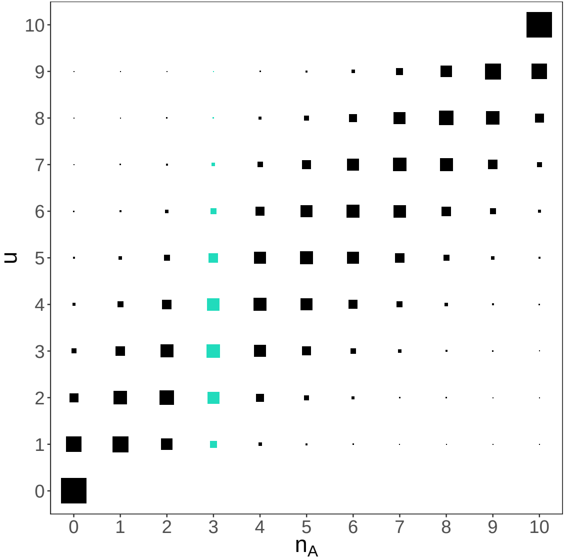
- N es una cantidad fija
- n_A es 3, otra cantidad fija: lo que observamos al realizar el experimento
- u es la cantidad desconocida

$p(u \mid n_A, N)$ es una función de u: es la credibilidad de los valores de u luego de observar los datos (es decir, condicionada a $n_A = 3$).

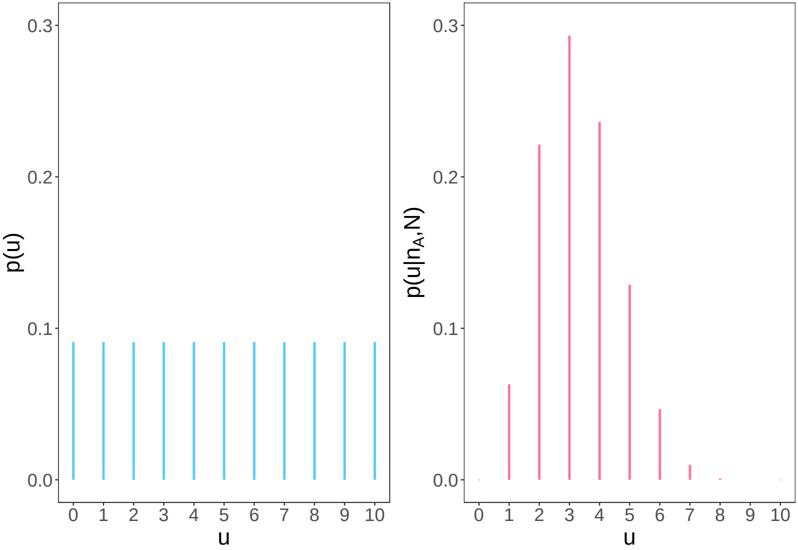
Gráficamente...



Gráficamente...



Pasamos de una credibilidad *a priori* antes de observar los datos, a una *a posteriori* luego de observar $n_A = 3$



Intolerancia al gluten

¿Pueden las personas alérgicas al gluten distinguir harina común de harina sin gluten en un ensayo ciego? En un experimento, de 35 sujetos, 12 identificaron correctamente la harina común y 23 se equivocaron o no supieron decir de qué harina se trataba.
Incluso si no hubiera alérgicos al gluten en el experimento, esperaríamos encontrar algunas identificaciones correctas...
Basándonos en el número de identificaciones correctas, ¿cuántos de los sujetos son alérgicos al gluten y cuántos estaban adivinando?

Intolerancia al gluten

¿Pueden las personas alérgicas al gluten distinguir harina común de harina sin gluten en un ensayo ciego? En un experimento, de 35 sujetos, 12 identificaron correctamente la harina común y 23 se equivocaron o no supieron decir de qué harina se trataba.
Incluso si no hubiera alérgicos al gluten en el experimento, esperaríamos encontrar algunas identificaciones correctas... Basándonos en el número de identificaciones correctas, ¿cuántos de los sujetos son alérgicos al gluten y cuántos estaban adivinando?

Supongamos que una persona alérgica al gluten tiene una probabilidad de 0.90 de detectar la harina común mientras que una persona sin alergia detecta harina común con una probabilidad de 0.40 (y con una probabilidad de 0.6 se equivoca o no sabe decir).

Llamemos:

Llamemos:

- N a la cantidad total de personas en el ensayo
- N_a al número de personas alérgicas al gluten
- π_a a la probabilidad de que un alérgico identifique correctamente
- π_f a la probabilidad de que un no alérgico identifique correctamente
- n_i al número de identificaciones correctas

Llamemos:

- N a la cantidad total de personas en el ensayo
- N_a al número de personas alérgicas al gluten
- π_a a la probabilidad de que un alérgico identifique correctamente
- π_f a la probabilidad de que un no alérgico identifique correctamente
- n_i al número de identificaciones correctas

¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Cuáles son las cantidades desconocidas? ¿Cómo es el modelo de probabilidad hacia adelante? ¿Cómo es el problema inverso?

Conociendo N, π_a y π_f, si conociéramos N_a podríamos calcular las probabilidades de los diferentes n_i: **probabilidad hacia adelante**

Conociendo N, π_a y π_f, si conociéramos N_a podríamos calcular las probabilidades de los diferentes n_i: **probabilidad hacia adelante**

Aquí observamos n_i y queremos realizar inferencias sobre N_a: **probabilidad inversa**

Digamos que *a priori* cualquier número de N_a es igualmente probable o esperable:

Digamos que *a priori* cualquier número de N_a es igualmente probable o esperable:

$$p(N_a) = \frac{1}{36}$$

¿Cómo construimos la verosimilitud de los diferentes valores de N_a $p(n_i \mid N_a)$?

¿Cómo construimos la verosimilitud de los diferentes valores de N_a $p(n_i \mid N_a)$?

Pensemos de forma **generativa** (con el modelo de **probabilidad hacia adelante**). Imaginemos que conocemos N_a (además de N, π_a y π_f), ¿podríamos escribir un programa que simule diferentes valores de n_i?

El número de identificaciones correctas n_i es la suma de las identificaciones correctas entre los N_a alérgicos (n_{ia}) y los $N - N_a$ no alérgicos (n_{if}). ¿Cuántas identificaciones habrá en cada grupo?

El número de identificaciones correctas n_i es la suma de las identificaciones correctas entre los N_a alérgicos (n_{ia}) y los $N - N_a$ no alérgicos (n_{if}). ¿Cuántas identificaciones habrá en cada grupo?

$$n_{ia} \sim Bi(N_a, \pi_a)$$

$$n_{if} \sim Bi(N - N_a, \pi_f)$$

$$n_i = n_{ia} + n_{if}$$

El número de identificaciones correctas n_i es la suma de las identificaciones correctas entre los N_a alérgicos (n_{ia}) y los $N - N_a$ no alérgicos (n_{if}). ¿Cuántas identificaciones habrá en cada grupo?

$$n_{ia} \sim Bi(N_a, \pi_a)$$
$$n_{if} \sim Bi(N - N_a, \pi_f)$$
$$n_i = n_{ia} + n_{if}$$

```r
N <- 35
pi_a <- 0.9
pi_f <- 0.4
N_a <- 10 # lo suponemos conocido para simular

n_ia <- rbinom(1, N_a, pi_a)
n_if <- rbinom(1, N-N_a, pi_f)

n_i <- n_ia + n_if
```

El número de identificaciones correctas n_i es la suma de las identificaciones correctas entre los N_a alérgicos (n_{ia}) y los $N - N_a$ no alérgicos (n_{if}). ¿Cuántas identificaciones habrá en cada grupo?

$$n_{ia} \sim Bi(N_a, \pi_a)$$

$$n_{if} \sim Bi(N - N_a, \pi_f)$$

$$n_i = n_{ia} + n_{if}$$

```
N <- 35
pi_a <- 0.9
pi_f <- 0.4
N_a <- 10 # lo suponemos conocido para simular

n_ia <- rbinom(1, N_a, pi_a)
n_if <- rbinom(1, N-N_a, pi_f)

n_i <- n_ia + n_if
```

Sabríamos calcular las probabilidades de los diferentes valores de n_{ia} y n_{if}, ¿no?.

Recordemos que no conocemos N_a. En nuestro caso, la verosimilitud de cada valor de N_a es la probabilidad de observar $n_i = 12$ para ese valor de N_a.

Recordemos que no conocemos N_a. En nuestro caso, la verosimilitud de cada valor de N_a es la probabilidad de observar $n_i = 12$ para ese valor de N_a.

$$
\begin{aligned}
p(n_i = 12 \mid N_a) \quad = \quad & p(n_{ia} = 0 \mid N_a)p(n_{if} = 12 \mid N_a) \\
& +p(n_{ia} = 1 \mid N_a)p(n_{if} = 11 \mid N_a) + \ldots
\end{aligned}
$$

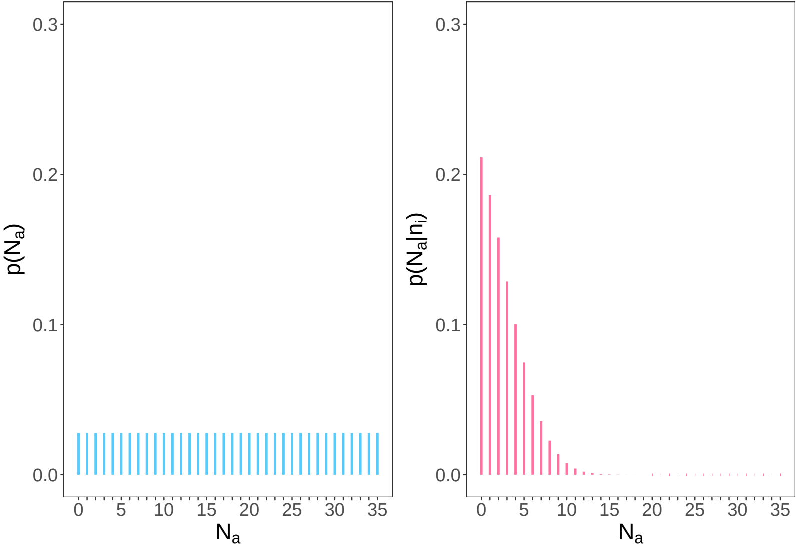
Recordemos que no conocemos N_a. En nuestro caso, la verosimilitud de cada valor de N_a es la probabilidad de observar $n_i = 12$ para ese valor de N_a.

$$\begin{aligned} p(n_i = 12 \mid N_a) &= p(n_{ia} = 0 \mid N_a)p(n_{if} = 12 \mid N_a) \\ &\quad + p(n_{ia} = 1 \mid N_a)p(n_{if} = 11 \mid N_a) + ... \end{aligned}$$

Queda como ejercicio calcular a mano $p(n_i \mid N_a)$ o, mejor aún, escribir un programita que calcule $p(n_i \mid N_a)$

Finalmente,

$$p(N_a \mid n_i) = \frac{p(n_i \mid N_a)p(N_a)}{p(n_i)}$$



0.3
0.2
0.1
0.0
p(N_a)
0 5 10 15 20 25 30 35
N_a
0.3
0.2
0.1
0.0
p(N_a|n_i)
0 5 10 15 20 25 30 35
N_a

Vocabulario limitado

Supongamos que existe un idioma con seis palabras:

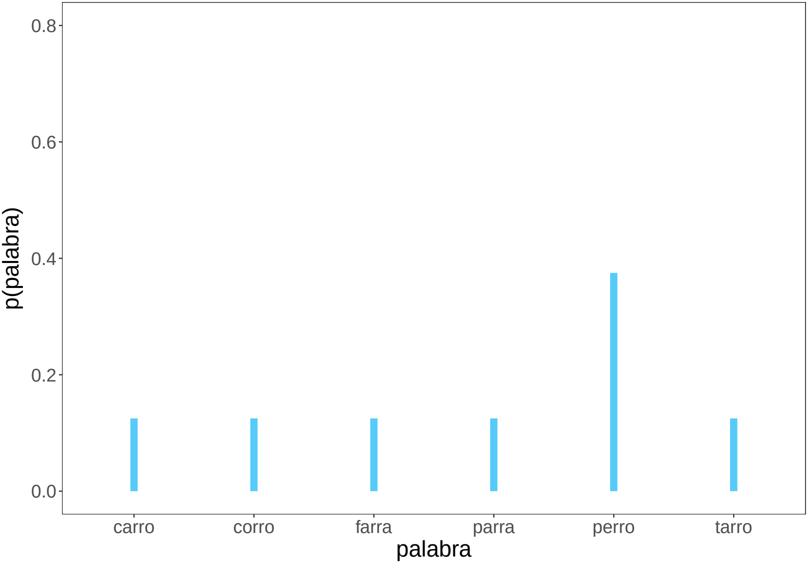
{perro, parra, farra, carro, corro, tarro}

- Todas las palabras son igualmente probables, excepto por 'perro', que es $\alpha = 3$ veces más probable que las otras.
- Cuando se tipean, un caracter se introduce erróneamente con probabilidad $\pi = 0.1$.
- Todas las letras tienen la misma probabilidad de producir un error de tipeo.
- Si una letra se tipeó mal, la probabilidad de cometer un error en otro caracter no cambia.
- Los errores son independientes a lo largo de una palabra.

i. ¿Cuál es la probabilidad de escribir correctamente ‘tarro’?
ii. ¿Cuál es la probabilidad de tipear ‘cerro’ o ‘curro’ al querer escribir ‘carro’?
iii. Desarrollar un corrector gramatical para esta lengua: para las palabras tipeadas ‘farra’, ‘birra’ y ‘locos’, ¿cuál es la palabra que se quiso escribir?

i. La probabilidad de escribir correctamente ‘tarro’ es $(1-\pi)^5$
ii. La probabilidad de escribir correctamente ‘cerro’ o ‘curro’ al querer escribir ‘carro’ es $\pi(1-\pi)^4$
iii. Allá vamos...

Estas son las probabilidades *a priori* de cada una de las palabras del vocabulario



Alguien escribe ‘farra’, ¿qué quiso escribir?

Alguien escribe ‘farra’, ¿qué quiso escribir?

¿Qué sería en este caso la verosimilitud?

Alguien escribe ‘farra’, ¿qué quiso escribir?

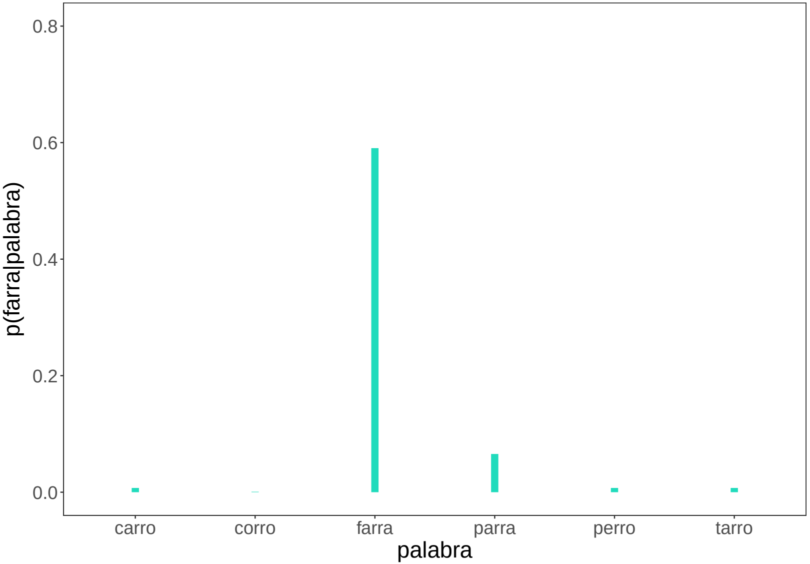
¿Qué sería en este caso la verosimilitud?

La verosimilitud de ‘perro’ es qué tan probable es escribir ‘farra’ cuando se quería escribir ‘perro’: $p(\mathrm{farra} \mid \mathrm{perro}) = \pi^3(1-\pi)^2$

Alguien escribe ‘farra’, ¿qué quiso escribir?

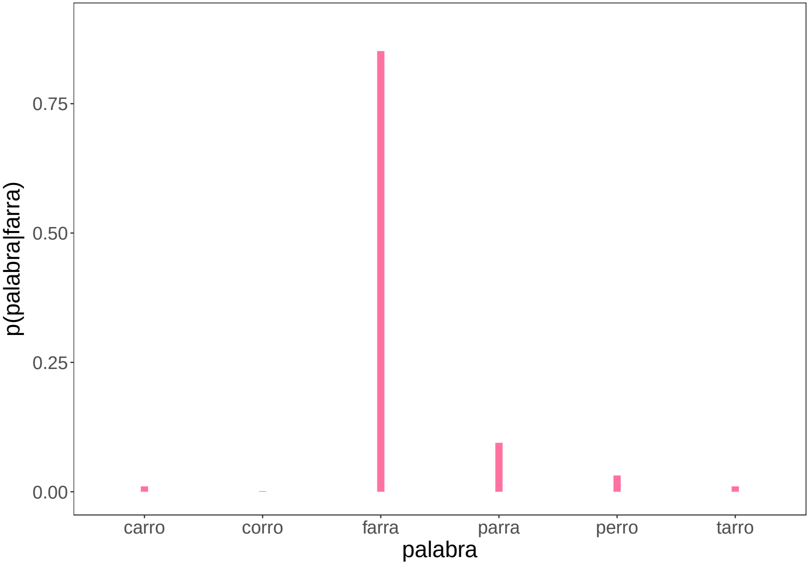
¿Qué sería en este caso la verosimilitud?

La verosimilitud de ‘perro’ es qué tan probable es escribir ‘farra’ cuando se quería escribir ‘perro’: $p(\text{farra} \mid \text{perro}) = \pi^3(1-\pi)^2$


p(farra|palabra)
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
carro
corro
farra
parra
perro
tarro
palabra

Para obtener la probabilidad *a posteriori* de cada palabra, necesitamos combinar la información *a priori* con los datos (¿cuáles son los datos?). Aplicamos la Regla de Bayes:

$$p(\text{palabra} \mid \text{farra}) = \frac{p(\text{farra} \mid \text{palabra})p(\text{palabra})}{p(\text{farra})}$$



p(palabra|farra)
0.75
0.50
0.25
0.00
carro
corro
farra
parra
perro
tarro
palabra

La inferencia bayesiana es la realocación de la credibilidad del conjunto de cantidades desconocidas (parámetros) de un modelo, una vez observado un conjunto de datos.

Pequeño mundo

Se desea estimar la proporción de agua que cubre el planeta Tierra. Para ello se arroja hacia arriba un "globo terráqueo antiestrés" y se registra la posición del dedo índice al volver a tomarlo.
Se arroja el globo 11 veces hacia arriba y se obtiene la siguiente secuencia:

$$TAAATTAATAA$$

Llamemos:

Llamemos:

- π a la proporción de agua en el planeta Tierra
- N al número de tiradas
- y al número de veces que salió agua

Llamemos:

- π a la proporción de agua en el planeta Tierra
- N al número de tiradas
- y al número de veces que salió agua

π es una cantidad continua entre 0 y 1. Esta vez no la discretizaremos.

Prior

Prior

¿Cómo asignamos una credibilidad *a priori* para los valores de π_a?

Prior

¿Cómo asignamos una credibilidad *a priori* para los valores de π_a?

Con una distribución de probabilidad.

Prior

¿Cómo asignamos una credibilidad *a priori* para los valores de π_a?

Con una distribución de probabilidad.

$$\pi \sim \mathrm{Beta}(a, b)$$

Prior

¿Cómo asignamos una credibilidad *a priori* para los valores de π_a?

Con una distribución de probabilidad.

$$\pi \sim \mathrm{Beta}(a, b)$$

$$p(\pi \mid a, b) = p(\pi) = \frac{\pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1}}{B(a, b)}$$

Prior

¿Cómo asignamos una credibilidad *a priori* para los valores de π_a?

Con una distribución de probabilidad.

$$\pi \sim \mathrm{Beta}(a, b)$$

$$p(\pi \mid a, b) = p(\pi) = \frac{\pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1}}{B(a,b)}$$

$$B(a,b) = \int_0^1 \pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1} d\pi = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Prior

¿Cómo asignamos una credibilidad *a priori* para los valores de π_a?

Con una distribución de probabilidad.

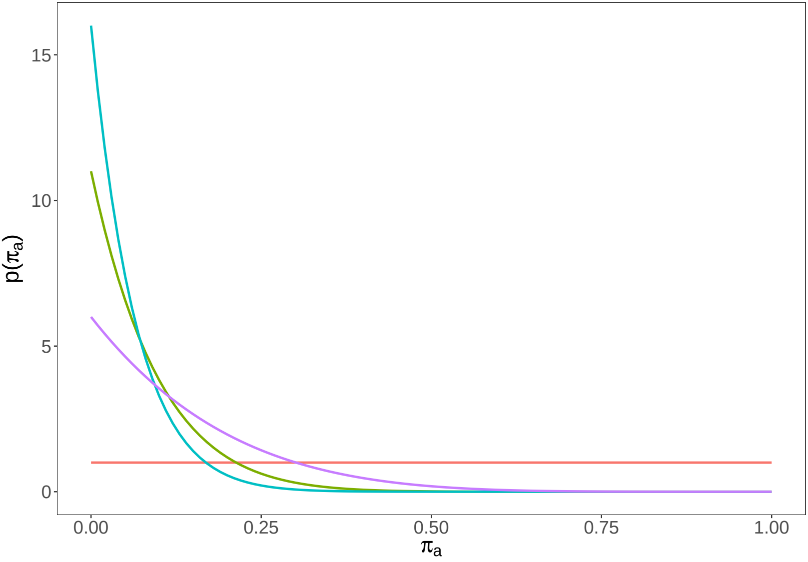
$$\pi \sim \mathrm{Beta}(a, b)$$

$$p(\pi \mid a, b) = p(\pi) = \frac{\pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1}}{B(a, b)}$$

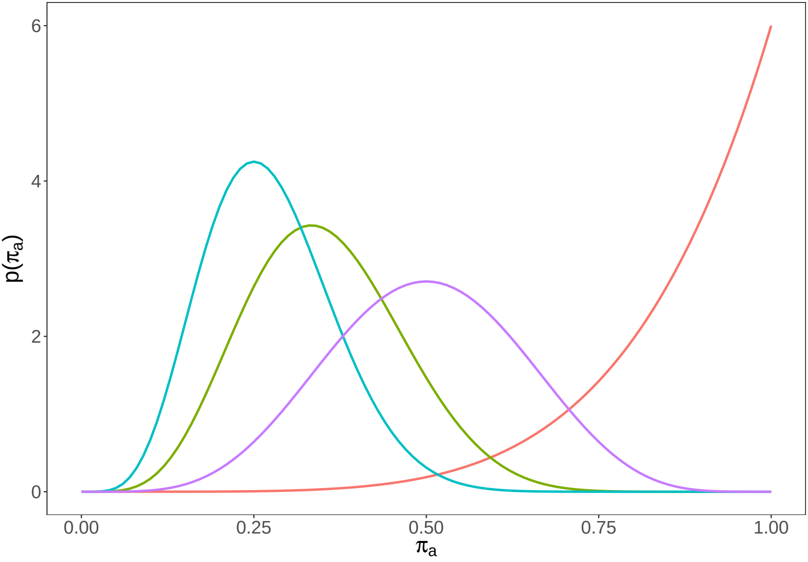
$$B(a, b) = \int_0^1 \pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1} d\pi = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$$

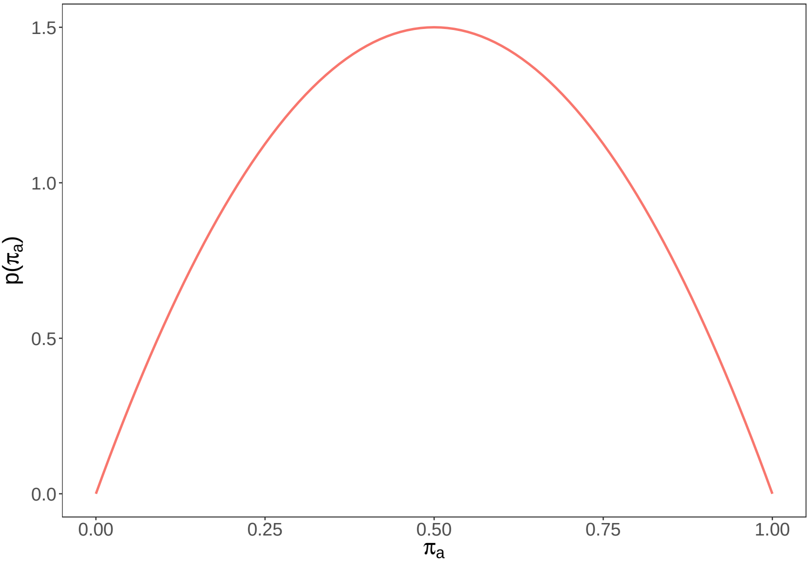
La distribución beta



La distribución beta



Una posible elección de valores para la distribución *a priori* es Beta$(2, 2)$



Likelihood

¿Cuál es la probabilidad de observar los datos que observamos para diferentes valores del parámetro?

Likelihood

¿Cuál es la probabilidad de observar los datos que observamos para diferentes valores del parámetro?

$$Y \mid \pi, N \sim Bi(N, \pi)$$

$$p(y \mid \pi, N) = \binom{N}{y} \pi^y (1 - \pi)^{N-y} = p(y \mid \pi)$$

Posterior

$$p(\pi \mid y) = \frac{p(y \mid \pi)p(\pi)}{p(y)}$$

Posterior

$$p(\pi \mid y) = \frac{p(y \mid \pi)p(\pi)}{p(y)}$$

$$p(\pi \mid y) = \frac{\binom{N}{y}\pi^{y}(1-\pi)^{N-y}\frac{\pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1}}{B(a,b)}}{\int p(y \mid \pi)p(\pi)d\pi}$$

Posterior

$$p(\pi \mid y) = \frac{p(y \mid \pi)p(\pi)}{p(y)}$$

$$p(\pi \mid y) = \frac{\binom{N}{y}\pi^y(1-\pi)^{N-y}\frac{\pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1}}{B(a,b)}}{\int p(y \mid \pi)p(\pi)d\pi}$$

La integral en el denominador suele ser un problema. Con dos parámetros es una integral doble, con tres parámetros, una triple, etc. Esta integral puede ser intratable (*intractable*) (no tener solución exacta, analítica, cerrada). No hay vaca vestida de uniforme que nos salve.

Recordando que:

$$\text{posterior} \propto \text{prior} \times \text{likelihood}$$

Recordando que:

$$\text{posterior} \propto \text{prior} \times \text{likelihood}$$

Resulta

$$p(\pi \mid y) \propto p(y \mid \pi) p(\pi)$$

Recordando que:

$$\text{posterior} \propto \text{prior} \times \text{likelihood}$$

Resulta

$$p(\pi \mid y) \propto p(y \mid \pi)p(\pi)$$

$$p(\pi \mid y) \propto \binom{N}{y}\pi^y(1-\pi)^{N-y}\frac{1}{B(a,b)}\pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1}$$

Recordando que:

$$\text{posterior} \propto \text{prior} \times \text{likelihood}$$

Resulta

$$p(\pi \mid y) \propto p(y \mid \pi)p(\pi)$$

$$p(\pi \mid y) \propto \binom{N}{y} \pi^{y}(1-\pi)^{N-y} \frac{1}{B(a,b)} \pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1}$$

$$p(\pi \mid y) \propto \binom{N}{y} \frac{1}{B(a,b)} \pi^{(y+a)-1}(1-\pi)^{(N-y+b)-1}$$

Recordando que:

$$\text{posterior} \propto \text{prior} \times \text{likelihood}$$

Resulta

$$p(\pi \mid y) \propto p(y \mid \pi)p(\pi)$$

$$p(\pi \mid y) \propto \binom{N}{y}\pi^{y}(1-\pi)^{N-y}\frac{1}{B(a,b)}\pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1}$$

$$p(\pi \mid y) \propto \binom{N}{y}\frac{1}{B(a,b)}\pi^{(y+a)-1}(1-\pi)^{(N-y+b)-1}$$

$$p(\pi \mid y) = KC\pi^{(y+a)-1}(1-\pi)^{(N-y+b)-1}$$

Recordando que:

$$\text{posterior} \propto \text{prior} \times \text{likelihood}$$

Resulta

$$p(\pi \mid y) \propto p(y \mid \pi)p(\pi)$$

$$p(\pi \mid y) \propto \binom{N}{y}\pi^y(1-\pi)^{N-y}\frac{1}{B(a,b)}\pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1}$$

$$p(\pi \mid y) \propto \binom{N}{y}\frac{1}{B(a,b)}\pi^{(y+a)-1}(1-\pi)^{(N-y+b)-1}$$

$$p(\pi \mid y) = KC\pi^{(y+a)-1}(1-\pi)^{(N-y+b)-1}$$

$$p(\pi \mid y) = K^*\pi^{(y+a)-1}(1-\pi)^{(N-y+b)-1}$$

Para que $\int_0^1 p(\pi \mid y) d\pi = 1$, debe ser

Para que $\int_0^1 p(\pi \mid y) d\pi = 1$, debe ser

$$K^* = \frac{1}{B(y+a, N-y+b)} = \frac{\Gamma\left[(y+a)+(N-y+b)\right]}{\Gamma(y+a)\Gamma(N-y+b)}$$

Para que $\int_0^1 p(\pi \mid y) d\pi = 1$, debe ser

$$K^* = \frac{1}{B(y+a, N-y+b)} = \frac{\Gamma\left[(y+a)+(N-y+b)\right]}{\Gamma(y+a)\Gamma(N-y+b)}$$

Por lo tanto, resulta que la distribución *a posteriori* es Beta de parámetros $y+a$ y $N-y+b$

$$p(\pi \mid y) = \frac{\pi^{(y+a)-1}(1-\pi)^{(N-y+b)-1}}{B(y+a, N-y+b)}$$

$$\pi \mid y \sim \text{Beta}(y+a, N-y+b)$$

¿Qué hicimos?

¿Qué hicimos?

Nos las arreglamos para encontrar la solución exacta al problema de inferir el parámetro de una distribución binomial a partir del número de éxitos observados.

¿Qué hicimos?

Nos las arreglamos para encontrar la solución exacta al problema de inferir el parámetro de una distribución binomial a partir del número de éxitos observados.

El *prior* y el *posterior* tienen la misma forma distribucional. Esto ocurre por la elección del *prior* y el *likelihood*.

Una distribución $\mathscr{F}$ se dice conjugada de una verosimilitud $\mathscr{L}$ si cuando la distribución *a priori* es $\mathscr{F}$, la distribución *a posteriori* también es $\mathscr{F}$

Pequeño mundo

Se desea estimar la proporción de agua que cubre el planeta Tierra. Para ello se arroja hacia arriba un "globo terráqueo antiestrés" y se registra la posición del dedo índice al volver a tomarlo.
Se arroja el globo 11 veces hacia arriba y se obtiene la siguiente secuencia:

$$TAAATTAATAA$$

Pequeño mundo

Se desea estimar la proporción de agua que cubre el planeta Tierra. Para ello se arroja hacia arriba un "globo terráqueo antiestrés" y se registra la posición del dedo índice al volver a tomarlo.
Se arroja el globo 11 veces hacia arriba y se obtiene la siguiente secuencia:

$$TAAATTAATAA$$

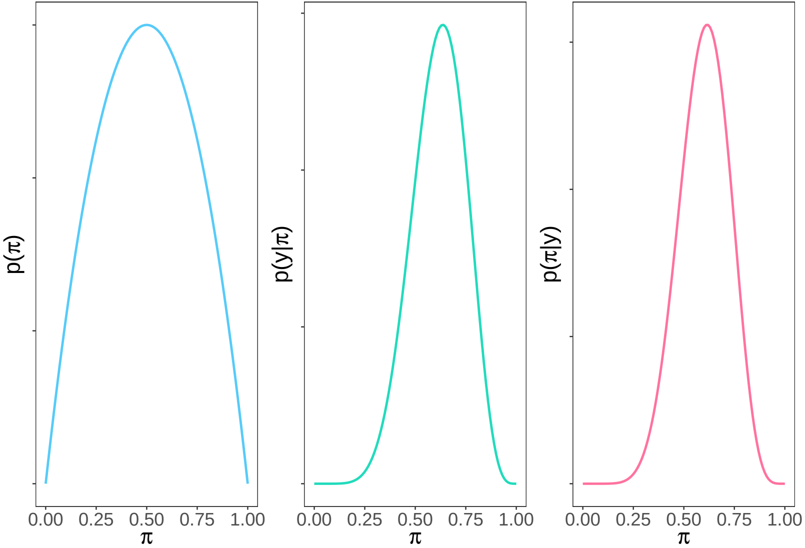
$$Y \mid \pi \sim \text{Binomial}(N, \pi)$$
$$\pi \sim \text{Beta}(a, b)$$

con $N = 11$, $a = 2$ y $b = 2$.

Al observar $y = 7$ resulta

$$\pi \mid y \sim \text{Beta}(a + y, b + N - y)$$

$$p(\pi \mid y) = \text{Beta}(2 + 7, 2 + 4)$$



p(π)
p(y|π)
p(π|y)
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
π

Más ejemplos

Queremos estimar la probabilidad π de que salga cara al arrojar una moneda.

Más ejemplos

Queremos estimar la probabilidad π de que salga cara al arrojar una moneda.

Credibilidad *a priori*: Beta$(2, 2)$

Más ejemplos

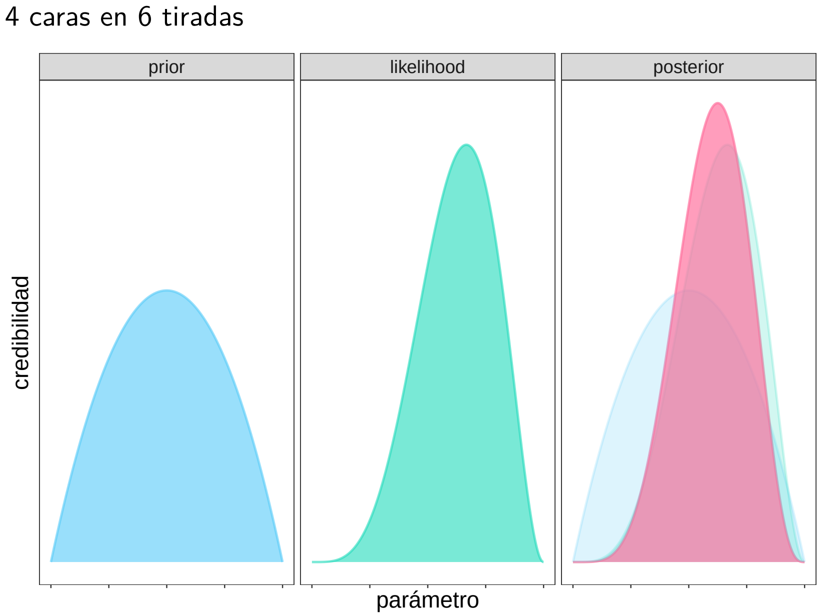
Queremos estimar la probabilidad π de que salga cara al arrojar una moneda.

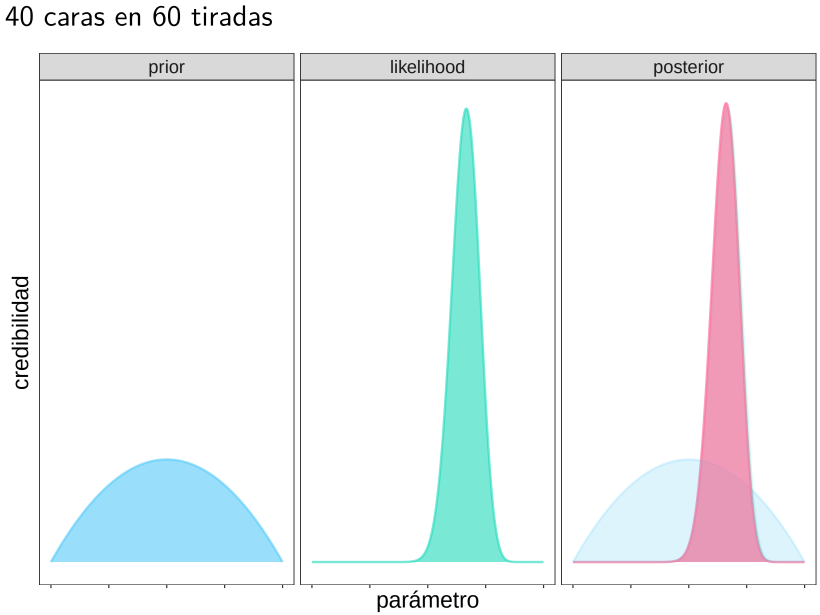
Credibilidad *a priori*: Beta$(2, 2)$

¿Cómo cambia nuestra creencia si...

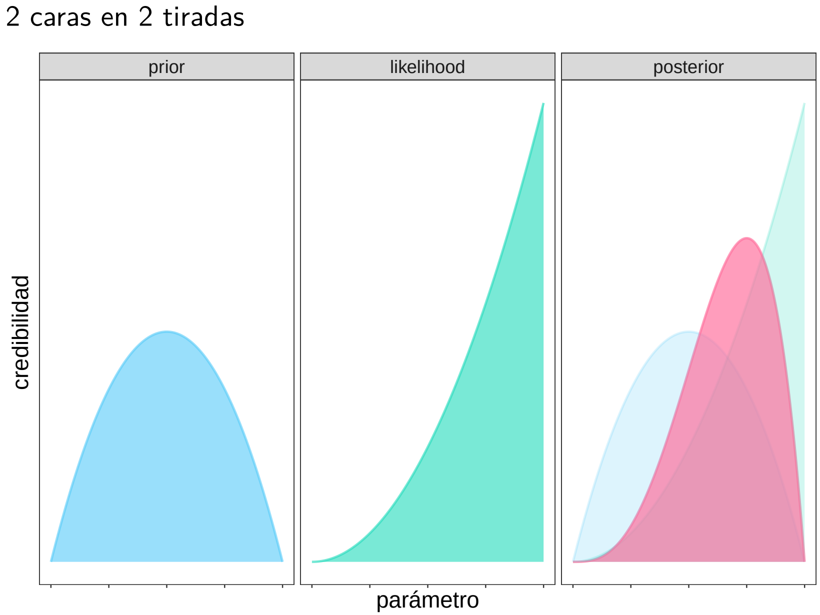
1. ...realizamos 6 tiradas y observamos 4 caras?
2. ...realizamos 60 tiradas y observamos 40 caras?
3. ...realizamos 2 tiradas y observamos 2 caras?
4. ...realizamos 40 tiradas y observamos 40 caras?
5. ...realizamos 4 tiradas y obtenemos 3 caras y luego realizamos 2 tiradas más y observamos 1 caras?

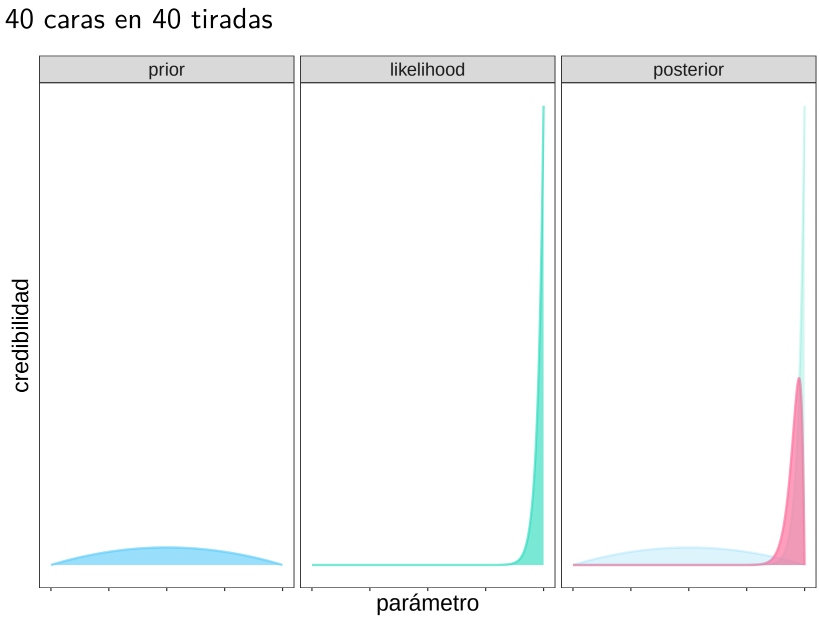
1. $\pi \mid y \sim \text{Beta}(2+4, 2+2)$
2. $\pi \mid y \sim \text{Beta}(2+40, 2+20)$
3. $\pi \mid y \sim \text{Beta}(2+2, 2+0)$
4. $\pi \mid y \sim \text{Beta}(2+40, 2+0)$
5. $\pi \mid y \sim \text{Beta}((2+3)+1, (2+1)+1)$


4 caras en 6 tiradas
prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro



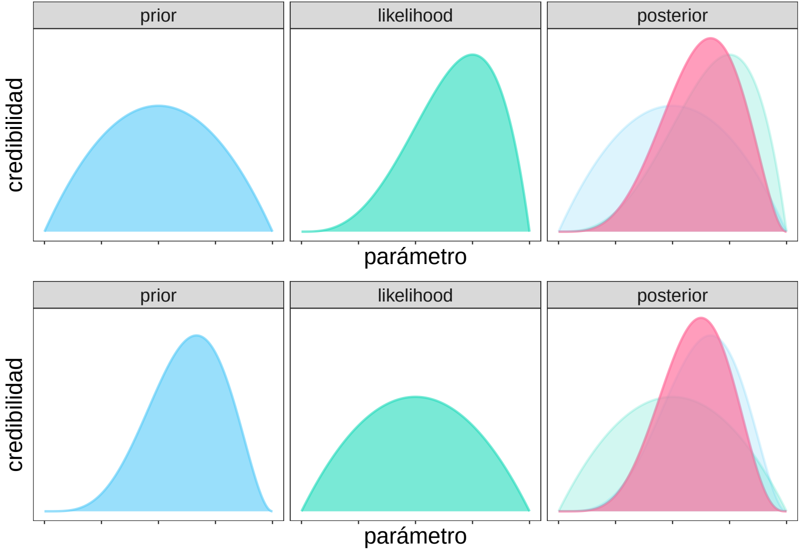
40 caras en 60 tiradas
prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro


2 caras en 2 tiradas
prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro



40 caras en 40 tiradas
prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro

3 caras en 4 tiradas, luego 1 cara en 2 tiradas



Características generales

La inferencia bayesiana presenta ciertas características que se repiten independientemente de las distribuciones elegidas.

Compromiso

Vamos a formalizar lo que observamos en el ejemplo para el modelo Beta–Binomial. Para esto será útil el siguiente resultado:

$$\text{Si } X \sim \text{Beta}(a, b)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b}$$

La distribución *a priori* es Beta(a, b) y la distribución *a posteriori* es Beta$(y + a, N - y + b)$.

La distribución *a priori* es Beta(a, b) y la distribución *a posteriori* es Beta$(y + a, N - y + b)$. La media del *posterior* es:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[p(\pi \mid y)] &= \frac{y + a}{a + b + N} \\
&= \frac{y}{a + b + N} + \frac{a}{a + b + N} \\
&= \frac{N}{a + b + N} \frac{y}{N} + \frac{a + b}{a + b + N} \frac{a}{a + b} \\
&= \frac{N}{a + b + N} \frac{y}{N} + \frac{a + b}{a + b + N} \mathbb{E}[p(\pi)]
\end{aligned}$$

La distribución *a posteriori* representa un balance (promedio ponderado o *combinación convexa*) entre la proporción observada y la proporción esperada *a priori*. Hay un *shrinkage* hacia la media del *prior*.

Secuencialidad

Si primero observamos y_1 en N_1 y luego observamos y_2 en N_2...
Con el primer conjunto de datos pasamos del *prior* al *posterior* y luego esa distribución se convierte en el nuevo *prior*:

Secuencialidad

Si primero observamos y_1 en N_1 y luego observamos y_2 en N_2...
Con el primer conjunto de datos pasamos del *prior* al *posterior* y luego esa distribución se convierte en el nuevo *prior*:

$$\text{Beta}(a, b) \rightarrow \text{Beta}(y_1 + a, N_1 - y_1 + b)$$

Secuencialidad

Si primero observamos y_1 en N_1 y luego observamos y_2 en N_2...
Con el primer conjunto de datos pasamos del *prior* al *posterior* y luego esa distribución se convierte en el nuevo *prior*:

$$\text{Beta}(a, b) \rightarrow \text{Beta}(y_1 + a, N_1 - y_1 + b)$$

$$\text{Beta}(y_1 + a, N_1 - y_1 + b) \rightarrow \text{Beta}(y_2 + y_1 + a, N_2 - y_2 + N_1 - y_1 + b)$$

Secuencialidad

Si primero observamos y_1 en N_1 y luego observamos y_2 en N_2...
Con el primer conjunto de datos pasamos del *prior* al *posterior* y luego esa distribución se convierte en el nuevo *prior*:

$$\text{Beta}(a, b) \rightarrow \text{Beta}(y_1 + a, N_1 - y_1 + b)$$

$$\text{Beta}(y_1+a, N_1-y_1+b) \rightarrow \text{Beta}(y_2+y_1+a, N_2-y_2+N_1-y_1+b)$$

$$\text{Beta}(a, b) \rightarrow \text{Beta}((y_1 + y_2) + a, (N_1 + N_2) - (y_1 + y_2) + b)$$

Secuencialidad

Si primero observamos y_1 en N_1 y luego observamos y_2 en N_2...
Con el primer conjunto de datos pasamos del *prior* al *posterior* y luego esa distribución se convierte en el nuevo *prior*:

$$\text{Beta}(a, b) \rightarrow \text{Beta}(y_1 + a, N_1 - y_1 + b)$$

$$\text{Beta}(y_1 + a, N_1 - y_1 + b) \rightarrow \text{Beta}(y_2 + y_1 + a, N_2 - y_2 + N_1 - y_1 + b)$$

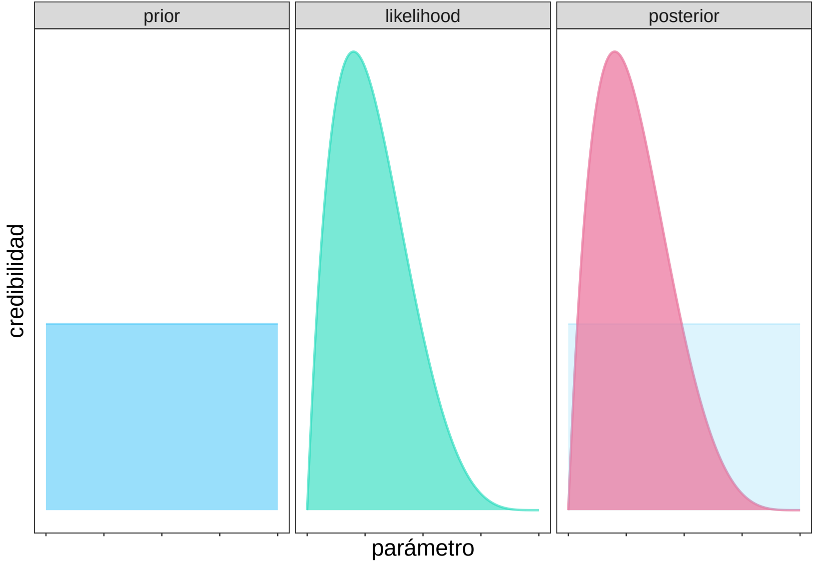
$$\text{Beta}(a, b) \rightarrow \text{Beta}((y_1 + y_2) + a, (N_1 + N_2) - (y_1 + y_2) + b)$$

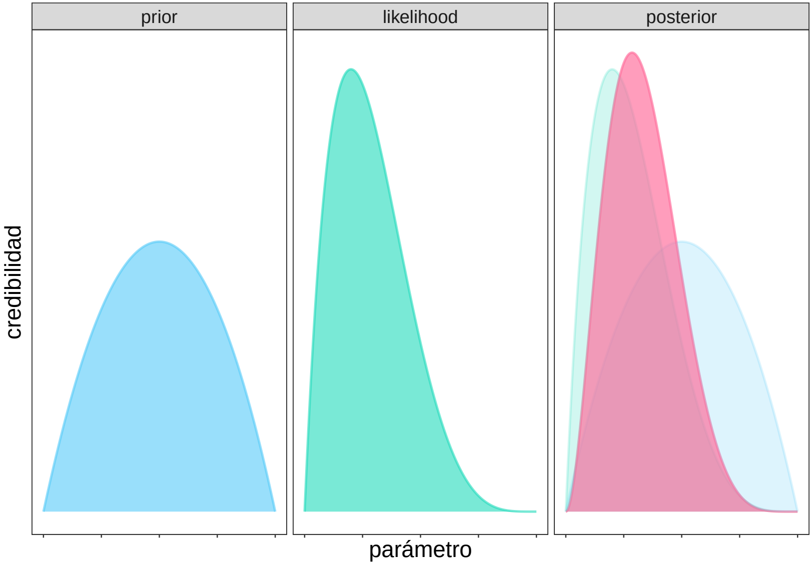
Es idéntico a observar $y_1 + y_2$ en $N_1 + N_2$

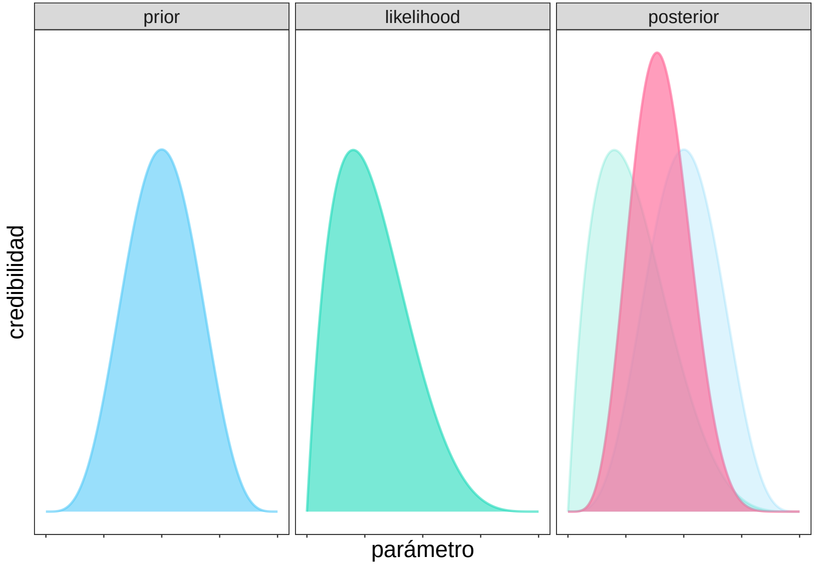
La Regla de Bayes permite combinar dos fuentes de información: la información *a priori* (lo que sabemos hasta el momento), y la nueva información (representada por la verosimilitud). La distribución *a posteriori* representa un compromiso entre la verosimilitud de los datos y la credibilidad *a priori*.

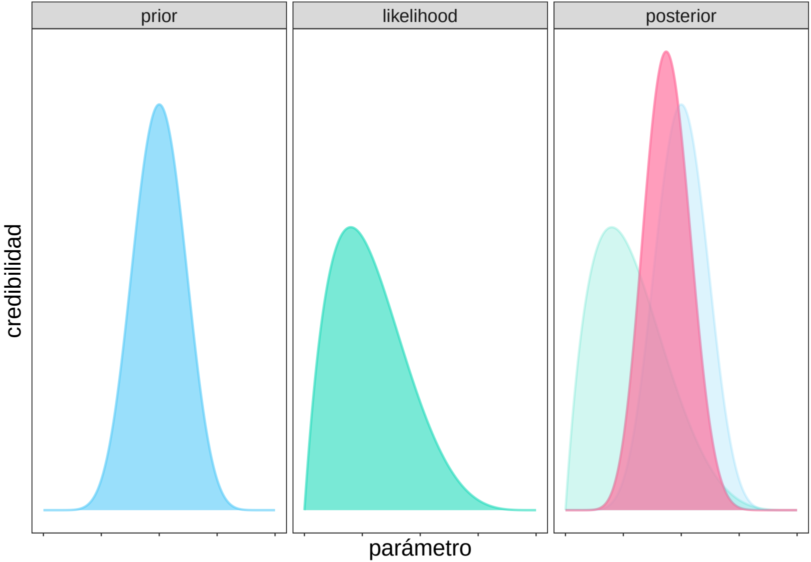
Más ejemplos

Más ejemplos

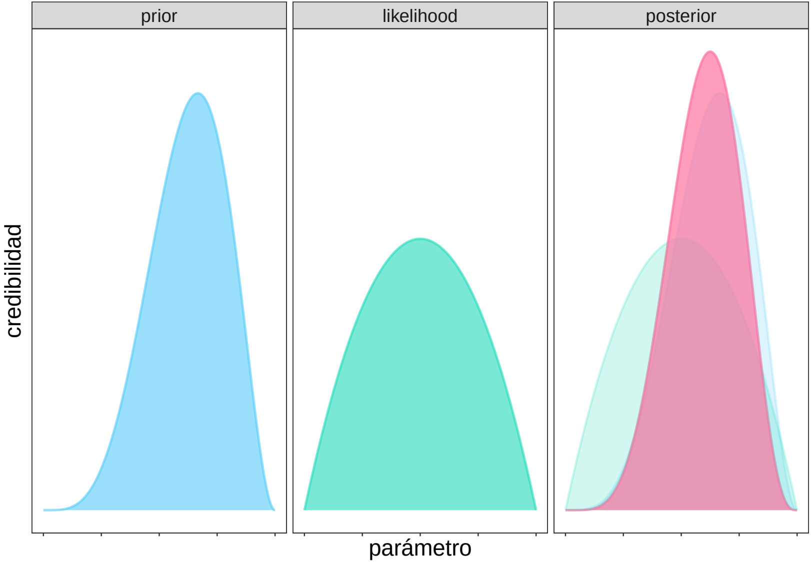


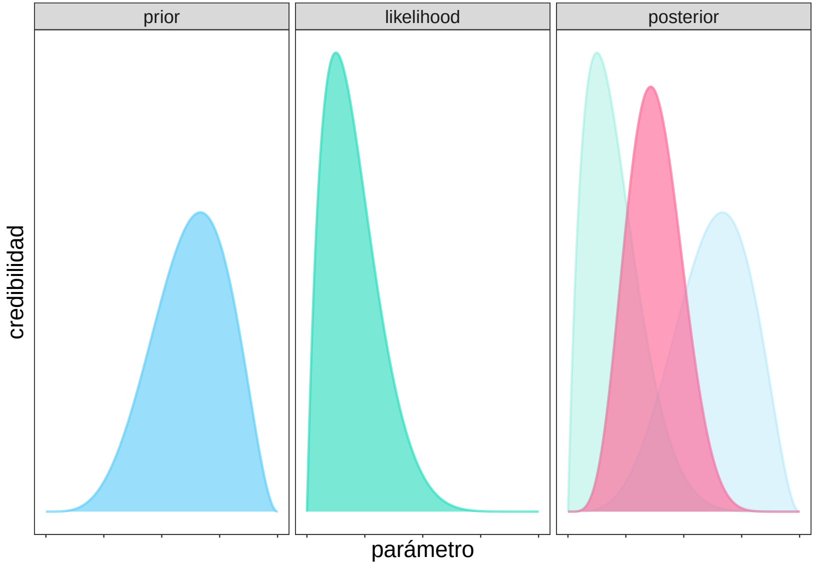

prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro


prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro

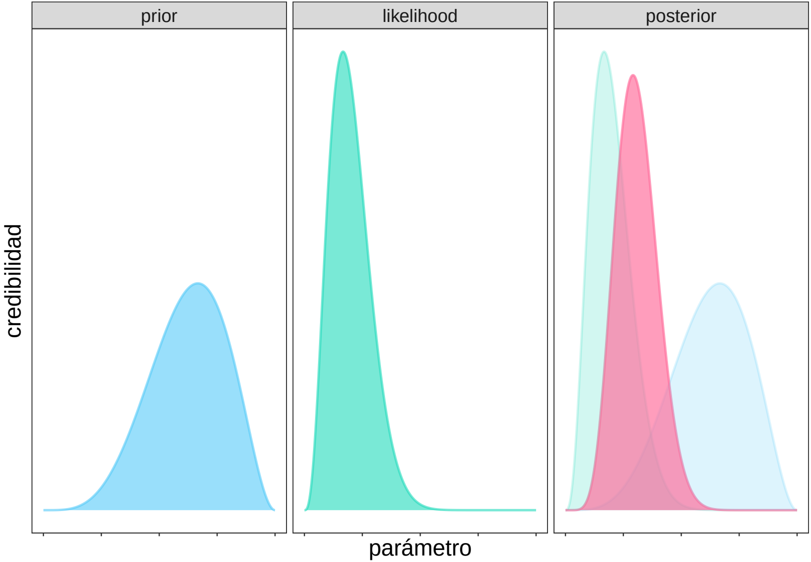


prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro

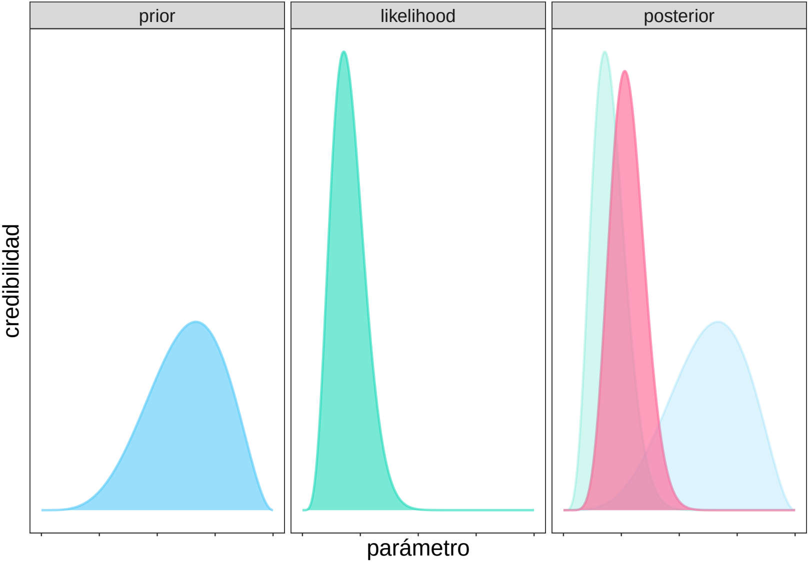

prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro



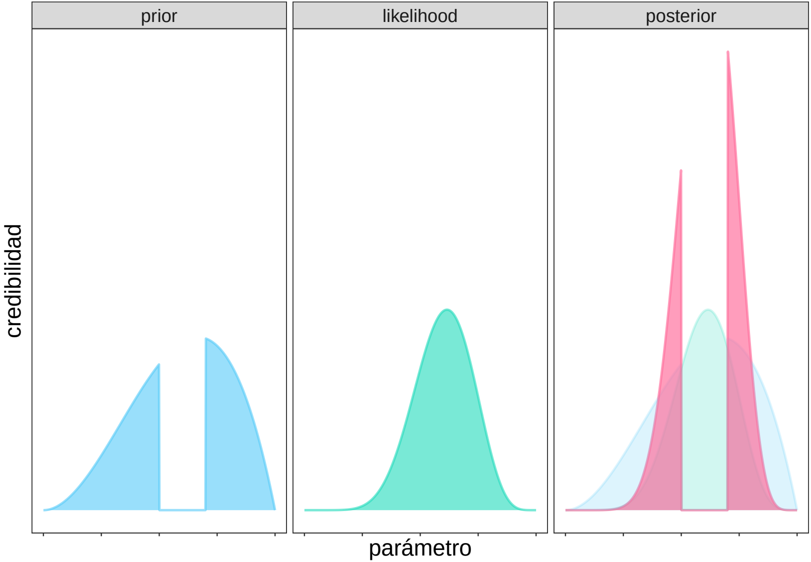
prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro



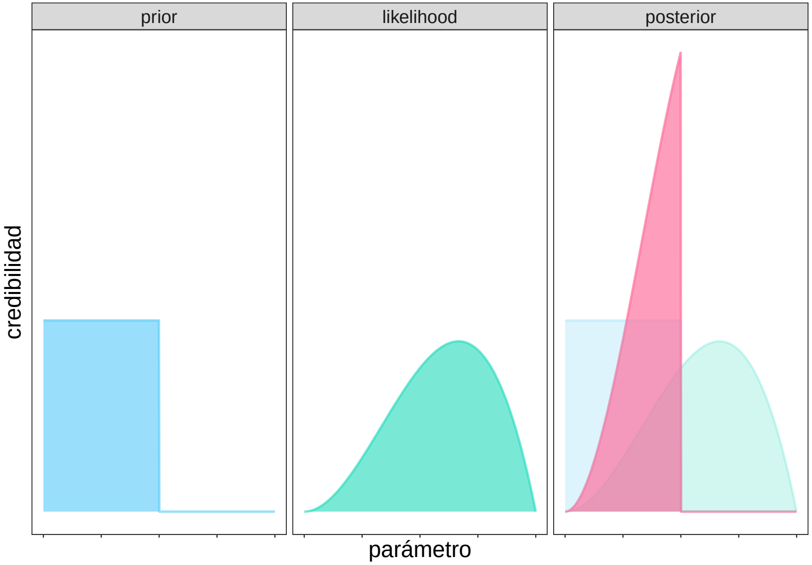
prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro



prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro



prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro


prior
likelihood
posterior
credibilidad
parámetro

Predicciones

Distribución predictiva *a posteriori* (también distribución posterior predictiva) (en inglés *posterior predictive distribution*): queremos predecir un valor futuro de la variable de interés, $\tilde{y}$. Más aún, interesa la distribución de $\tilde{y}$ *a posteriori*, es decir, luego de observar los datos y: $\tilde{y} \mid y$

$$p(\tilde{y} \mid y) = \int p(\tilde{y} \mid \pi) p(\pi \mid y) d\pi$$

- $\tilde{y}$ tiene una distribución de probabilidad
- Si π fuera fijo, la distribución de $\tilde{y}$ viene dada por $p(\tilde{y} \mid \pi)$ (la verosimilitud, aunque ahora es función de $\tilde{y}$)
- Pero ahora hay incertidumbre en π (tiene una distribución *a posteriori*), por lo tanto se hace una ponderación para los distintos valores de π (π varía en la integral anterior)
- Combinamos lo que no sabemos porque es aleatorio *per se*, con aquello que desconocemos (aunque podemos reducir nuestra incertidumbre recolectando más información)

Para el caso binomial que venimos estudiando, consideramos una realización más (tirar el globo terráqueo y agarrarlo). ¿Cuál es la probabilidad de obtener A (agua)?

$$
\begin{aligned}
p(\tilde{y} = 1 \mid y) &= \int_0^1 \pi p(\pi \mid x) d\pi = \mathbb{E}[p(\pi \mid x)] \\
&= \frac{y + a}{y + a + N - y + b} = \frac{y + a}{N + a + b}
\end{aligned}
$$

```r
muestras_pi <- rbeta(2000,a+y,b+N-y) # muestras del posterior
x_new <- rbinom(2000,1,muestras_pi) # predicciones para cada valor de pi
```

Consideremos un caso particular:

En una bolsa hay bolitas negras y blancas, queremos saber cuál es la probabilidad de sacar una bolita negra. A priori no sabemos nada. Sacamos (con reposición) tres veces una bolita. Las tres veces sale negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima bolita sea negra?

$$p(\tilde{y} = 1 \mid y) = \frac{y+1}{N+2}$$

Los parámetros tienen una distribución de probabilidad. Incorporar la incertidumbre en el valor de π nos permite no entusiasmarnos tanto con los datos, hacer predicciones más conservadoras con a pocos datos, regularizar.