Trabajo Práctico 3

Introducción

Como si la riqueza del idioma español no fuera suficiente para expresar aquello que queremos decir, muy frecuentemente los argentinos recurrimos a palabras o expresiones que, sin contexto, carecen de significado o transmiten algo completamente distinto al uso que les damos.

Si de palabras se trata, sobran los ejemplos: perro, bife, mango, cana, puchero, panqueque, pavo, chorro, bondi y rata son algunos de ellos. Tampoco escasean frases que, inevitablemente, confunden a aquellos que nunca han pisado suelo argento: tomar el palo, hacer la cama, mandar fruta, comer vidrio, estar en pañales, pararse de manos o sacar el cuero.

El presente trabajo práctico gira alrededor de una palabra clave: masacre. La palabra "masacre" se utiliza, generalmente, para referirse a la matanza violenta e indiscriminada de un gran número de personas. Sin embargo, y siguiendo la línea de los párrafos introductorios, no la vamos a usar por su significado mas obvio, aunque sí por uno muy cercano.

El caso

Comenzar una carrera en estadística puede llevarnos a lugares impensados (algunos dirán que se converge, casi seguramente, a un estado de máxima confusión). Quien puede dar prueba de esto es Guido, un estudiante de estadística que, habiendo siendo fanático de *CSI: Crime Scene Investigations*, nunca imaginó que iba a cumplir su sueño de formar parte la policía científica de Córdoba.

Pero no todo es color de rosas en el camino de Guido. Al poco tiempo de instalado en la capital del cuarteto, una madrugada de miércoles, su unidad de trabajo fue convocada de manera urgente por el comisario de Salsipuedes para investigar una crimen que, aparentemente, había sido recién cometido.

¡Qué masacre! Fue lo único que pudo a decir al llegar al lugar. El caos se extendía por toda la habitación. Muebles volcados y destrozados. Utensillos de cocina desparramados y manchados con un líquido carmesí. La ventana, con sus vidrios estallados, daba paso a la brisa matutina y la débil luz de los móviles policiales que dejaban ver que, hacia un extremo del salón, el cuerpo de Sergio Contreras yacía en un charco de sangre.

Abundan las tareas que los investigadores deben realizar en un crimen de estas características. Nuestro protagonista, Guido, quedó encargado de determinar la hora en que se produjo la muerte. En un marco tan desolador, Guido se alegró de encontrarse, al fin, frente a un caso de aplicación basado en datos reales.

La metodología

La medicina forense dispone de un gran abanico de métodos para estimar la hora del fallecimiento. Estos estudian diferentes características, como por ejemplo la rigidez corporal, la presencia de livideces (manchas en el cuerpo), el nivel de descomposición, etc.

Una de las estrategias mas utilizadas se basa en el estudio de la temperatura corporal. Durante las primeras horas después de la muerte ocurre el enfriamiento del cuerpo, que se conoce como enfriamiento postmortem o *algor mortis*.

La temperatura es una medida del grado de agitación de las partículas de un cuerpo. Un sólido (o líquido, o gas) está *más caliente* que otro si sus partículas tienen (en promedio) mayor grado de agitación. Sabemos por evidencia empírica que si un cuerpo se pone en contacto con otro que tiene una temperatura menor, hay una transferencia de energía que hace que el primero se enfríe y el segundo se caliente, hasta que alcanzan el denominado equilibrio térmico.

De manera similar, esto es lo que ocurre con el cuerpo de Sergio que yace en el living de su casa: en algún momento, llega al equilibrio térmico con el ambiente. La salvedad necesaria acá es que, como el ambiente es grande, no aumenta su temperatura con la energía que pierde el cuerpo.

Ahora bien, el ritmo con el cual el cuerpo pierde energía no es constante. Físicamente, mientras mayor sea la diferencia de temperatura entre dos cuerpos, más rápido fluirá la energía (y más rápido cambiará la temperatura). Si estudiamos la temperatura de un cuerpo en función del tiempo, notaremos que el ritmo con el que cambia decrece a medida con el que transcurre el tiempo.

La lectura del párrafo anterior debería permitir asociar el concepto de *ritmo de cambio* con la noción matemática de derivada. En efecto, la derivada de la temperatura respecto al tiempo varía con el tiempo. En otras palabras, la pendiente no es constante.

Las leyes que rigen el universo pueden muchas veces formularse en términos de lo que en matemática se conoce como ecuación diferencial. En este caso, la temperatura del cuerpo de Segio satisface la siguiente ley:

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = r[T_{\text{amb}} - T(t)]$$

donde T_{amb} es la temperatura ambiente (un valor fijo y conocido), r es una constante y $T(t)$ es la función (en principio desconocida) que describe la temperatura del cuerpo en función del tiempo.

No se trata de una ecuación algebraica donde la solución es un valor numérico sino de una ecuación donde la solución es una función. Buscamos una función $T(t)$ que satisfaga la ecuación: su derivada debe cambiar con el valor que toma la función.

Una función que satisface esa ecuación es:

$$T(t) = T_{\text{amb}} + (T_i - T_{\text{amb}})e^{-rt}$$

siendo T_i la temperatura a la que está inicialmente el agua en el termo (un valor fijo y conocido).

Bayes al rescate

WIP

1. Verificar que la función anterior satisface la ecuación diferencial
2. Grafique $T(t)$ para $T_{\text{amb}} = 20$ C° y $T_i = 37$ C°, para dos valores de r, $r_1 = 0.1$ y $r_2 = 0.3$. ¿Qué representa r?
3. Según su experiencia con termos, ¿cuál es un valor realista de r? Dar alguna información que diga a que hora el cuerpo en general ya está "frio"

Estudiaremos a continuación un conjunto de mediciones de temperatura de agua en un termo en función del tiempo transcurrido.

Leonel tiene un termo Estanli™ que compró por Amason y se dispone a despejar la duda de cualquier usuario de termos Estanli™: ¿cuánto dura el agua caliente? Pone agua en la pava eléctrica, la vierte en el termo y registra la temperatura en algunos momentos posteriores. Ese día, el reporte meteorológico indica una temperatura de $T_{\text{amb}} = 23$ C°. Las temperaturas que registró Leonel son las siguientes:

t (h:mm)	T (°C)

1:20	92.0
2:30	90.5
4:00	81.4
5:15	80.8
8:30	74.2

Para simplificar la construcción de un modelo, en lugar de considerar la temperatura del agua en el termo, se considerará la diferencia entre la temperatura del agua y la temperatura ambiente $T - T_{\text{amb}}$. Además, se llamará T_{diff} a la diferencia de temperatura entre la temperatura inicial del agua y la temperatura ambiente $T_i - T_{\text{amb}}$.

$$T(t) - T_{\text{amb}} = T_{\text{diff}} e^{-rt}$$

4. Verifique que el logaritmo natural de la nueva variable $(T(t) - T_{\text{amb}})$ es una función lineal de t. ¿Qué representan el intercepto y la pendiente? Llámelos β_0 y β_1.

Se propone ajustar un modelo lineal normal utilizando los datos transformados.

5. En función del enunciado del problema y de su conocimiento de termos, elija una distribución *a priori* para β_0, β_1 y σ. ¿Cuáles son las implicancias de sus distribuciones *a priori*? Realice pruebas predictivas *a priori*.
6. Ajuste el modelo lineal utilizando `R`.
7. Encontrar el *posterior* de r, de T_{diff} y de la temperatura inicial del agua T_i.
8. Predecir la temperatura a la que estará el agua transcurridas 12:00 h del inicio de la experiencia.