Probabilidad

Lógica deductiva

$$A \Rightarrow B$$

A es verdadero, **por lo tanto** B es verdadero

B es falso, **por lo tanto** A falso

A: *Tom es un gato*

B: *Tom es un animal*

B es verdadero, **por lo tanto**...

Pero este no es el tipo de razonamiento que utilizamos en la vida cotidiana:

A*: va a llover a las 10 de la mañana*

B*: se nubla antes de las 10 de la mañana*

B es verdadero, **por lo tanto** A se vuelve más *plausible*

En una noche oscura, un policía camina por una calle aparentemente desierta. De repente, se escucha la alarma de un local. Se da vuelta y ve, en la vereda de enfrente, una joyería con la vidriera rota. Un hombre con una máscara sale agachado a través del vidrio roto, con una bolsa llena de joyas caras. El policía no duda en concluir que el hombre no tiene buenas intenciones.

El razonamiento del policía no fue una **deducción lógica**, ya que podría existir una explicación alternativa para lo ocurrido.

> *En una noche oscura, un policía camina por una calle aparentemente desierta. De repente, se escucha la alarma de un local. Se da vuelta y ve, en la vereda de enfrente, una joyería con la vidriera rota. Un hombre con una máscara sale agachado a través del vidrio roto, con una bolsa llena de joyas caras. El policía no duda en concluir que el hombre no tiene buenas intenciones.*

El razonamiento del policía no fue una **deducción lógica**, ya que podría existir una explicación alternativa para lo ocurrido.

Dada la evidencia, no podemos decir con seguridad que las intenciones del hombre no son buenas, pero sí que es extremadamente *plausible* que no lo sean.

Razonamiento plausible

El cerebro humano permanentemente determina si algo se vuelve más o menos *plausible*. Más aún, de alguna manera, evalúa el *grado de plausibilidad* de una proposición.

Razonamiento plausible

El cerebro humano permanentemente determina si algo se vuelve más o menos *plausible*. Más aún, de alguna manera, evalúa el *grado de plausibilidad* de una proposición.

> *La plausibilidad de que llueva a las 10 de la mañana depende fuertemente de la oscuridad de las nubes a las 9:45.*

Razonamiento plausible

El cerebro humano permanentemente determina si algo se vuelve más o menos *plausible*. Más aún, de alguna manera, evalúa el *grado de plausibilidad* de una proposición.

> *La plausibilidad de que llueva a las 10 de la mañana depende fuertemente de la oscuridad de las nubes a las 9:45.*

Este razonamiento hace uso de nuestra experiencia previa. Combina información *a priori* con evidencia disponible. Esto da lugar a un proceso **secuencial**.

Apuestas

Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si en este grupo hay **alguien** que tiene un loro como mascota

Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si en este grupo **nadie** tiene un loro como mascota

Apuestas

Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si en este grupo hay **alguien** que tiene un loro como mascota

Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si en este grupo **nadie** tiene un loro como mascota

Tienen a su disposición estas tarjetas. Podemos comprarlas o venderlas. Al final de la clase develamos el misterio y, quien tenga la tarjeta, cobra.

Apuestas

> Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si en este grupo hay **alguien** que tiene un loro como mascota

> Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si en este grupo **nadie** tiene un loro como mascota

Tienen a su disposición estas tarjetas. Podemos comprarlas o venderlas. Al final de la clase develamos el misterio y, quien tenga la tarjeta, cobra.

¿Por cuál pagarían más? ¿Cuánto estarían dispuestos a pagar como máximo?

Apuestas

Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si en este grupo hay **alguien** que tiene un loro como mascota

Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si en este grupo **nadie** tiene un loro como mascota

Tienen a su disposición estas tarjetas. Podemos comprarlas o venderlas. Al final de la clase develamos el misterio y, quien tenga la tarjeta, cobra.

¿Por cuál pagarían más? ¿Cuánto estarían dispuestos a pagar como máximo?

Notar que el precio máximo que estarían dispuestos a pagar para comprarla es el precio mínimo por el que estarían dispuestos a venderla.

Todos pagaríamos $p \cdot \$1000$ con $0 \leq p \leq 1$.

Todos pagaríamos $p \cdot \$1000$ con $0 \leq p \leq 1$.

Decidimos cuánto apostar en función de nuestra incertidumbre en la ocurrencia de un evento (de lo plausible que lo consideremos). Decidimos apostar $p \cdot \$1000$ en favor de un evento, porque le asignamos una plausibilidad o credibilidad de grado p.

> Páguese $1000 al portador de esta tarjeta si el profe tiene una remera negra

¿Cuánto están dispuestos a pagar para tener esta tarjeta? ¿Por cuánto venderían la tarjeta si la tuvieran?

Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si esta materia es la *mejor* del cuatrimestre

Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si esta materia no es la *mejor* del cuatrimestre

Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si esta materia es la *mejor* del cuatrimestre

Páguese \$1000 al portador de esta tarjeta si esta materia no es la *mejor* del cuatrimestre

Por la primera pagarían como máximo $p \cdot \$1000$ y por la segunda, $q \cdot \$1000$. Es necesario que $p + q = 1$. ¿Por qué?

Dutch book

Supongamos que $p = 0.7$ y $q = 0.5$. Eso significa que:

- Si no tienen las tarjetas, estarían dispuestos a comprar ambas por $\$1200$.

Supongamos que $p = 0.3$ y $q = 0.2$. Eso significa que:

- Si tienen las tarjetas, estarían dispuestos a vender ambas por $\$500$.

Dutch book

Supongamos que $p = 0.7$ y $q = 0.5$. Eso significa que:

- Si no tienen las tarjetas, estarían dispuestos a comprar ambas por $\$1200$.

Supongamos que $p = 0.3$ y $q = 0.2$. Eso significa que:

- Si tienen las tarjetas, estarían dispuestos a vender ambas por $\$500$.

Sabemos que a fin de cuatrimestre, quien tenga las dos tarjetas ganará $\$1000$...

Dutch book

Dutch book

Un **Dutch book** es un conjunto de apuestas que aseguran una pérdida. El argumento del **Dutch book** dice que una persona que tiene creencias inconsistentes actúa irracionalmente y puede ser llevado a una pérdida segura en un juego de apuestas

Dutch book

Dutch book

Un **Dutch book** es un conjunto de apuestas que aseguran una pérdida. El argumento del **Dutch book** dice que una persona que tiene creencias inconsistentes actúa irracionalmente y puede ser llevado a una pérdida segura en un juego de apuestas

Los grados de plausibilidad o grados de creencia que una persona le asigna a un conjunto de eventos deben respetar los axiomas de probabilidad.

Dutch book

Dutch book

Un **Dutch book** es un conjunto de apuestas que aseguran una pérdida. El argumento del **Dutch book** dice que una persona que tiene creencias inconsistentes actúa irracionalmente y puede ser llevado a una pérdida segura en un juego de apuestas

Los grados de plausibilidad o grados de creencia que una persona le asigna a un conjunto de eventos deben respetar los axiomas de probabilidad.

Se puede asignar un valor de probabilidad a cualquier proposición.

Las probabilidades son la mejor herramienta disponible para cuantificar la incertidumbre y las leyes de la probabilidad, la mejor herramienta para operar con ella.

Probabilidad

Tres ideas de probabilidad

- **Clásica**: si n eventos son equiprobables, la probabilidad de uno de ellos es $1/n$. Además, la probabilidad de un evento se puede calcular como el número de casos favorables dividido el número de casos posibles.
- **Frecuentista**: la probabilidad de un evento se puede estimar observando su frecuencia relativa sobre un gran número de realizaciones o ensayos.
- **Subjetiva**: las probabilidades reflejan el grado de creencia o *plausibilidad* que una persona le asigna a un evento.

Probabilidad subjetiva

- Es la forma más general de interpretar la probabilidad (eventos no equiprobables y eventos que no pueden repetirse)
- Se utiliza para cuantificar la incertidumbre o ignorancia (o certidumbre o conocimiento) acerca de un evento o proposición
- Es personal
- Depende del estado actual de conocimiento del mundo

Probabilidad subjetiva

- Es la forma más general de interpretar la probabilidad (eventos no equiprobables y eventos que no pueden repetirse)
- Se utiliza para cuantificar la incertidumbre o ignorancia (o certidumbre o conocimiento) acerca de un evento o proposición
- Es personal
- Depende del estado actual de conocimiento del mundo

Todos los métodos estadísticos son subjetivos en el sentido que se basan en idealizaciones matemáticas de la realidad (modelos).

Incertidumbre

Distinguimos dos tipos de incertidumbre:

Incertidumbre

Distinguimos dos tipos de incertidumbre:

- **Incertidumbre epistémica**
- **Incertidumbre aleatoria**

Incertidumbre

Distinguimos dos tipos de incertidumbre:

- **Incertidumbre epistémica**
- **Incertidumbre aleatoria**

Lo retomaremos a lo largo del curso.

Elicitación de probabilidades

Consideremos la siguiente proposición:

Voy a aprobar todas las materias de este cuatrimestre (W)

Elicitación de probabilidades

Consideremos la siguiente proposición:

Voy a aprobar todas las materias de este cuatrimestre (W)

Una caja con 5 bolas azules y 5 bolas rojas. Se extrae una bola al azar. A es el evento *extraer una bola azul*

Elicitación de probabilidades

Consideremos la siguiente proposición:
Voy a aprobar todas las materias de este cuatrimestre (W)

Una caja con 5 bolas azules y 5 bolas rojas. Se extrae una bola al azar. A es el evento *extraer una bola azul*

- A_1: \$1000 si W
- A_2: \$1000 si A

Elicitación de probabilidades

Consideremos la siguiente proposición:
Voy a aprobar todas las materias de este cuatrimestre (W)

Una caja con 5 bolas azules y 5 bolas rojas. Se extrae una bola al azar. A es el evento *extraer una bola azul*

- A_1: \$1000 si W
- A_2: \$1000 si A

Si prefieren A_1 entonces... 8 bolas azules y 2 bolas rojas. Se extrae una bola al azar. A es el evento *extraer una bola azul*.

Elicitación de probabilidades

Consideremos la siguiente proposición:
Voy a aprobar todas las materias de este cuatrimestre (W)

Una caja con 5 bolas azules y 5 bolas rojas. Se extrae una bola al azar. A es el evento *extraer una bola azul*

- A_1: \$1000 si W
- A_2: \$1000 si A

Si prefieren A_1 entonces... 8 bolas azules y 2 bolas rojas. Se extrae una bola al azar. A es el evento *extraer una bola azul*.

- A_3: \$1000 si W
- A_4: \$1000 si A

Interludio...

Interludio...

¿Qué es más probable?

- Que el PSG le gane al Lyon
- Que el PSG le gane al Lyon y Messi haga un gol

Interludio...

¿Qué es más probable?

- Que el PSG le gane al Lyon
- Que el PSG le gane al Lyon y Messi haga un gol

Sesgos

Los seres humanos no estamos optimizados para operar con probabilidades (al menos no intuitivamente).

Repaso de probabilidad

Probabilidad de un evento

$$\Pr(A)$$

$$\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A)$$

Probabilidad de la conjunción:

$$\Pr(A \wedge B) = \Pr(A, B)$$

Si A y B son independientes, entonces

$$\Pr(A \wedge B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

Probabilidad de la unión:

$$\Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A, B)$$

Donde, si A y B son mutuamente excluyentes,

$$\Pr(A \vee B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

$$\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(A, B)}{\Pr(A)}$$

siempre que $\Pr(A) > 0$ (no se puede condicionar a eventos imposibles)

Variables aleatorias

Una variable aleatoria (univariada) X es una función que mapea elementos del espacio muestral $\mathcal{X}$ a la recta real $\mathbb{R}$

- Si $\mathcal{X}$ es finito o infinito numerable entonces X es una variable aleatoria discreta
- Si $\mathcal{X}$ es cualquier valor en $\mathbb{R}$ entonces X es una variable aleatoria continua

Para el caso discreto:

$$p(x) = \Pr(X = x) \quad \text{(pmf)}$$

Para el caso continuo:

$$P(x) = \Pr(X \leq x) \quad \text{(cdf)}$$

$$p(x) = \frac{d}{dx} P(x) \quad \text{(pdf)}$$

$$\Pr(x \leq X \leq x + dx) = p(x)dx$$

Distribuciones conjuntas

Caso discreto

$p(X,Y)$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	0.2	0.3
$X=1$	0.3	0.2

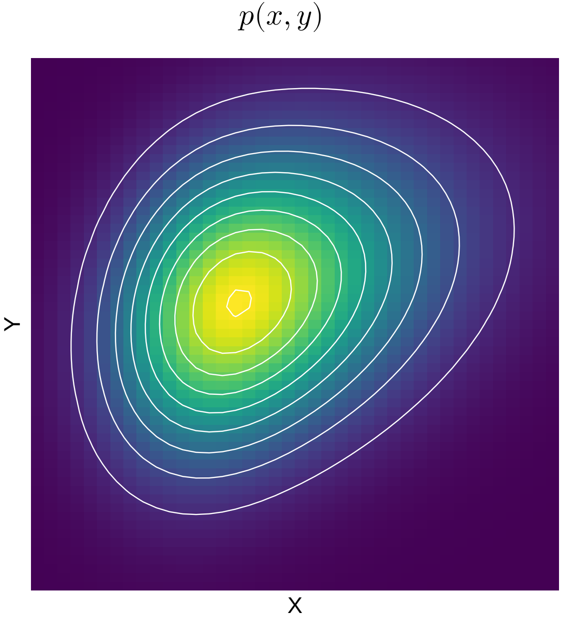
Distribución marginal

$$p(x) = \sum_y p(x, y)$$

$$p(y) = \sum_x p(x, y)$$

Se conoce como *marginalizar* (en inglés también *integrate out*)

Caso continuo



Distribución marginal

$$p(x) = \int p(x, y) dy$$

$$p(y) = \int p(x, y) dx$$

Distribución condicional

$$p(x \mid y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$$

$$p(y \mid x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}$$

$p(x)$ normaliza a $p(x, y)$ (una función de y ya que x tomó un valor fijo).

Regla del producto

También conocida como **regla de la cadena**. Recobramos la distribución conjunta haciendo

$$p(x, y) = p(x \mid y)p(y)$$

$$p(x, y) = p(y \mid x)p(x)$$

$$p(x, y, z) = p(z)p(y \mid z)p(x \mid y, z)$$

Regla de la probabilidad total

$$p(x) = \int p(x \mid y)p(y)dy$$

$$p(y) = \int p(y \mid x)p(x)dy$$

Regla de la probabilidad total

$$p(x) = \int p(x \mid y)p(y)dy$$

$$p(y) = \int p(y \mid x)p(x)dy$$

La probabilidad marginal de x (una función de x) se obtiene ponderando todos los posibles $p(x \mid y)$ (una función de x para cada valor de y) según la probabilidad de $p(y)$. Y viceversa.

Regla de Bayes

$$p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x)p(x)}{p(y)}$$

Regla de Bayes

$$p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x)p(x)}{p(y)}$$

Así expresada no nos dice mucho.

Regla de Bayes

$$p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x)p(x)}{p(y)}$$

Así expresada no nos dice mucho.

Recordemos que **utilizamos las probabilidades para expresar nuestra incertidumbre**. La mejor forma de actualizar nuestro grado de creencia sobre alguna hipótesis $\mathcal{H}$ frente a nueva información E es utilizar la Regla de Bayes.

$$p(\mathcal{H} \mid E) = \frac{p(E \mid \mathcal{H})p(\mathcal{H})}{p(E)}$$

Orígenes de la Regla de Bayes

Alrededor de 1740, **Thomas Bayes** propone una versión de la regla pero no la publica (¿su descubrimiento era inútil? ¿era muy modesto?). Propuso el experimento imaginario de un juego con bolitas. Asignó iguales probabilidades *a priori*

Richard Price publicó el resultado del Teorema de la Probabilidad Inversa de Bayes en *An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances* (1763)

Pierre-Simon Laplace llegó al mismo resultado que Bayes (algo que llamó *la probabilidad de las causas*) y lo publicó en *Memoire sur la Probabilité des Causes par les Évenements* (1774). Se asemeja más a lo que hoy conocemos. Reconoció que Bayes había descubierto algo similar.

Bayes's rule is a mistake, perhaps the only mistake to which the mathematical world has so deeply committed itself (Fisher, ∼1920)

Bayes's rule is a mistake, perhaps the only mistake to which the mathematical world has so deeply committed itself (Fisher, ~1920)
Bayes's theorem is to the theory of probability what Pythagoras's theorem is to geometry (Savage, ~1950)

Ejemplos

Vamos a trabajar con un conjunto de ejemplos que consisten en la aplicación de la regla de Bayes, acercándonos de a poco a forma en la que se usa en la estadística bayesiana.

Ejemplo 1

Nos encontramos con alguien en la calle y nos dice que tiene dos hijos. Le preguntamos si alguno de ellos es mujer y nos responde que sí. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos niñas?

		H1	
		V	M
H2	V	1/4	1/4
	M	1/4	1/4

		H1	
		V	M
H2	V		1/3
	M	1/3	1/3

		H1	
		V	M
H2	V	1/4	1/4
	M	1/4	1/4

		H1	
		V	M
H2	V		1/3
	M	1/3	1/3

¿Cómo lo escribimos con símbolos?

Ejemplo 2

Un taxi se vio involucrado en una accidente nocturno y se dio a la fuga. En la ciudad hay dos empresas de taxis, la Verde y la Azul. Sobre el accidente se tienen los siguientes datos:

- 85% de los taxis de la ciudad son de la empresa Verde y 15% de la Azul
- Un testigo identificó el taxi como azul. La corte evaluó la confiabilidad del testigo en las circunstancias del accidente y concluyó que es capaz de identificar correctamente el color en un 80% de los casos.

Ejemplo 2

Un taxi se vio involucrado en una accidente nocturno y se dio a la fuga. En la ciudad hay dos empresas de taxis, la Verde y la Azul. Sobre el accidente se tienen los siguientes datos:

- 85% de los taxis de la ciudad son de la empresa Verde y 15% de la Azul
- Un testigo identificó el taxi como azul. La corte evaluó la confiabilidad del testigo en las circunstancias del accidente y concluyó que es capaz de identificar correctamente el color en un 80% de los casos.

¿Cuál es la probabilidad de que el taxi haya sido azul, de acuerdo a la declaración del testigo?

$$p(A \mid T_A) = \frac{p(T_A \mid A)p(A)}{p(T_A)}$$

$$p(A \mid T_A) = \frac{p(T_A \mid A)p(A)}{p(T_A)}$$

$$p(A \mid T_A) = \frac{p(T_A \mid A)p(A)}{p(T_A \mid A)p(A) + p(T_A \mid V)p(V)}$$

$$p(A \mid T_A) = \frac{p(T_A \mid A)p(A)}{p(T_A)}$$

$$p(A \mid T_A) = \frac{p(T_A \mid A)p(A)}{p(T_A \mid A)p(A) + p(T_A \mid V)p(V)}$$

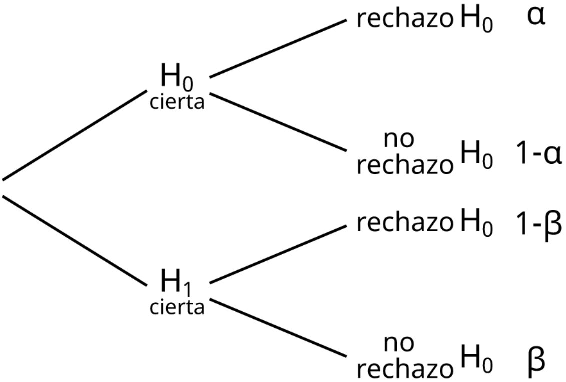
$$P(A \mid T_A) = \frac{0.80 \cdot 0.15}{0.80 \cdot 0.15 + 0.2 \cdot 0.85}$$

$$p(A \mid T_A) = 0.414$$

Ejemplo 3

Se realiza un test de hipótesis que tiene una potencia $1 - \beta = 80\%$. Se fija el nivel de significación en $\alpha = 5\%$. Se testea H_0 versus una hipótesis alternativa $H_1:$ no H_0.

- Si se supone que la probabilidad de que H_0 sea cierta es de 50%, ¿cuál es la probabilidad de que H_1 sea cierta luego de observar un resultado estadísticamente significativo?
- Si la hipótesis alternativa es muy rara (digamos 10%), ¿cuál es la probabilidad de que H_1 sea cierta luego de observar un resultado estadísticamente significativo?


rechazo H_0 α
H_0 cierta
no rechazo H_0 $1-\alpha$
rechazo H_0 $1-\beta$
H_1 cierta
no rechazo H_0 β

$$p(H_1 \mid \textsf{rechazo } H_0) = \frac{p(\textsf{rechazo } H_0 \mid H_1)p(H_1)}{p(\textsf{rechazo } H_0)}$$

$$p(H_1 \mid \text{rechazo } H_0) = \frac{p(\text{rechazo } H_0 \mid H_1)p(H_1)}{p(\text{rechazo } H_0)}$$

Si en el denominador enumeramos exhaustivamente las formas de rechazar H_0:

$$p(H_1 \mid \text{rechazo } H_0) = \frac{p(\text{rechazo } H_0 \mid H_1)p(H_1)}{p(\text{rechazo } H_0)}$$

Si en el denominador enumeramos exhaustivamente las formas de rechazar H_0:

$$p(H_1 \mid \text{rechazo } H_0) = \frac{(1-\beta)p(H_1)}{\alpha p(H_0) + (1-\beta)p(H_1)}$$

Para el primer caso:
$p(H_1 \mid \text{rechazo } H_0) = \frac{0.80 \ 0.50}{0.05 \ 0.50 + 0.80 \ 0.50} = 0.94$

Para el segundo caso:
$p(H_1 \mid \text{rechazo } H_0) = \frac{0.80 \ 0.10}{0.05 \ 0.90 + 0.80 \ 0.10} = 0.64$

Inferencia Bayesiana

El problema de las urnas

Se cuenta con 11 urnas etiquetadas según $u = 0, 1, \ldots, 10$*, que contienen diez bolas cada una. La urna* u *contiene* u *bolas azules y* $10 - u$ *bolas blancas. Fede elige una urna* u *al azar y extrae con reposición* N *bolas, obteniendo* n_A *azules y* $N - n_A$ *blancas. Nico, el amigo de Fede, observa atentamente. Si después de* $N = 10$ *extracciones resulta* $n_A = 3$*, ¿cuál es la probabilidad de que la urna que Fede está usando sea la* u*?*

La teoría de las probabilidades permite predecir una distribución sobre posibles valores de un resultado dado cierto conocimiento (o estado) del universo: **probabilidad hacia adelante**

La teoría de las probabilidades permite predecir una distribución sobre posibles valores de un resultado dado cierto conocimiento (o estado) del universo: **probabilidad hacia adelante**

Por el contrario, muchas veces estamos interesados en realizar inferencias sobre el estado del universo a partir de observaciones: **probabilidad inversa**.

La teoría de las probabilidades permite predecir una distribución sobre posibles valores de un resultado dado cierto conocimiento (o estado) del universo: **probabilidad hacia adelante**

Por el contrario, muchas veces estamos interesados en realizar inferencias sobre el estado del universo a partir de observaciones: **probabilidad inversa**.

$$p(\mathcal{H} \mid E) = \frac{p(E \mid \mathcal{H})p(\mathcal{H})}{p(E)}$$

$$p(\mathcal{H} \mid E) \propto p(E \mid \mathcal{H})p(\mathcal{H})$$