

## Trabajo Práctico 3

### Introducción

Como si la riqueza del idioma español no fuera suficiente, muy frecuentemente los argentinos recurrimos a palabras o expresiones que, sin contexto, carecen de significado o transmiten algo completamente distinto al uso que les damos.

Si de palabras se trata, sobran los ejemplos: perro, bife, mango, cana, puchero, panqueque, pavo, chorro, bondi y rata son algunos de ellos. Tampoco escasean frases que, inevitablemente, confunden a los que nunca han pisado suelo argentino: tomar el palo, hacer la cama, mandar fruta, comer vidrio, estar en pañales, pararse de manos o sacar el cuero.

El presente trabajo práctico gira alrededor de una palabra clave: masacre. La palabra “masacre” se utiliza, generalmente, para referirse a la matanza violenta e indiscriminada de un gran número de personas. Sin embargo, y siguiendo la línea de los párrafos introductorios, no la vamos a usar por su significado más obvio, aunque sí por uno muy cercano.

### El caso

Comenzar una carrera en estadística puede llevarnos a lugares impensados (algunos dirán que se converge, casi seguramente, a un estado de máxima confusión). Quien puede dar prueba de esto es Guido, un estudiante de estadística que, habiendo sido fanático de *CSI: Crime Scene Investigations*, nunca imaginó que iba a cumplir su sueño de formar parte la policía científica de Córdoba.

Pero no todo es color de rosas en el camino de Guido. Al poco tiempo de instalado en la capital del cuarteto, una madrugada de miércoles, su unidad de trabajo fue convocada de manera urgente por el comisario de Salsipuedes para investigar un crimen que, aparentemente, había sido recién cometido.

¡Qué masacre! Fue lo único que pudo decir al llegar al lugar. El caos se extendía por toda la habitación. Muebles volcados y destrozados. Utensillos de cocina desparramados y manchados. La brisa matutina se abría paso por los vidrios estallados y la débil luz de los móviles policiales dejaban ver que el cuerpo de Sergio Contreras yacía en un charco de sangre hacia un extremo del salón.

Abundan las tareas que los investigadores deben realizar en un crimen de estas características. Nuestro protagonista, Guido, quedó encargado de determinar la hora en que se produjo la muerte. En un marco tan desolador, Guido se alegró de encontrarse, al fin, frente a un caso de aplicación basado en datos reales.

### La metodología

La medicina forense dispone de un gran abanico de métodos para estimar la hora del fallecimiento. Estos estudian diferentes características, como por ejemplo la rigidez corporal, la presencia de livideces (manchas en el cuerpo), el nivel de descomposición, etc.

Una de las estrategias más utilizadas se basa en el estudio de la temperatura corporal. Durante las primeras horas después de la muerte ocurre el enfriamiento del cuerpo, que se conoce como enfriamiento postmortem o *algor mortis*.

La temperatura es una medida del grado de agitación de las partículas de un cuerpo. Un sólido (o líquido, o gas) está *más caliente* que otro si sus partículas tienen (en promedio) mayor grado de agitación. Sabemos por evidencia empírica que si un cuerpo se pone en contacto con

otro que tiene una temperatura menor, hay una transferencia de energía que hace que el primero se enfríe y el segundo se caliente, hasta que alcanzan el denominado equilibrio térmico.

De manera similar, esto es lo que ocurre con el cuerpo de Sergio que yace en el living de su casa: en algún momento, llega al equilibrio térmico con el ambiente. La salvedad necesaria acá es que, como el ambiente es grande, no aumenta su temperatura con la energía que pierde el cuerpo.

Ahora bien, el ritmo con el cual el cuerpo pierde energía no es constante. Físicamente, mientras mayor sea la diferencia de temperatura entre dos cuerpos, más rápido fluirá la energía (y más rápido cambiará la temperatura). Si estudiamos la temperatura de un cuerpo en función del tiempo, notaremos que el ritmo con el que cambia decrece a medida con el que transcurre el tiempo.

La lectura del párrafo anterior debería permitir asociar el concepto de *ritmo de cambio* con la noción matemática de derivada. En efecto, la derivada de la temperatura respecto al tiempo varía con el tiempo. En otras palabras, la pendiente no es constante.

Las leyes que rigen el universo pueden muchas veces formularse en términos de lo que en matemática se conoce como ecuación diferencial. En este caso, la temperatura del cuerpo de Sergio satisface la siguiente ley:

$$\frac{dT(t)}{dt} = r[T_{\text{amb}} - T(t)]$$

donde  $T_{\text{amb}}$  es la temperatura ambiente (un valor fijo y conocido),  $r$  es una constante y  $T(t)$  es la función (en principio desconocida) que describe la temperatura del cuerpo en función del tiempo.

No se trata de una ecuación algebraica donde la solución es un valor numérico sino de una ecuación donde la solución es una función. Buscamos una función  $T(t)$  que satisfaga la ecuación: su derivada debe cambiar con el valor que toma la función.

Una función que satisface esa ecuación es:

$$T(t) = T_{\text{amb}} + (T_i - T_{\text{amb}})e^{-rt}$$

siendo  $T_i$  la temperatura a la que está inicialmente el cuerpo de Sergio.

## Bayes al rescate

Es ahora cuando entran en escena nuevos e impensados protagonistas: los estudiantes de la materia Estadística Bayesiana. Utilizando los conocimientos adquiridos a lo largo del curso y la información relevante volcada en este documento, deberán hacer el trabajo originalmente encomendado a Guido: determinar la hora de muerte de Sergio.

1. Verifique que la función anterior satisface la ecuación diferencial.
2. Grafique  $T(t)$  para  $T_{\text{amb}} = 23\text{ }^{\circ}\text{C}$  y  $T_i = 37\text{ }^{\circ}\text{C}$ , para dos valores de  $r$ ,  $r_1 = 0.1$  y  $r_2 = 0.3$ . ¿Qué representa  $r$ ?
3. ¿Cuál es un valor realista de  $r$ ? De ser necesario, busque información acerca de los tiempos del enfriamiento postmortem.

Téngase presente el siguiente resumen de los hechos ocurridos:

- 5:33 hs - El Centro de Atención de Emergencias 911 recibe un llamado de Lidia Benegas, alertando sobre ruidos extraños en la vivienda de su vecino en la localidad de Salsipuedes. Agrega que le llama la atención observar que las puertas y ventanas estuvieran abiertas tan temprano.
- 5:36 hs - La policía de Salsipuedes recibe el llamado y envía un móvil a la dirección indicada.

- 5:52 hs - Llega el móvil policial a destino, y ante la ausencia de respuesta, deciden ingresar a la casa y realizar una inspección ocular.
- 6:00 hs - Concluida la inspección, se constata la presencia de una persona tendida en el suelo, aparentemente muerta, y se llama a la policía científica de Córdoba para actuar en el lugar.
- 6:45 hs - Arriba la policía científica al lugar. El médico forense determina la ausencia de signos vitales. El informe menciona una temperatura corporal de 32.8 °C.
- 6:50 hs - Comienza el relevamiento de pruebas. Miembros del equipo forense toman fotografías, recogen huellas dactilares, y secuestran elementos que puedan aportar a la causa.
- 8:15 hs - Finalizados los procedimientos legales y técnicos, se procede a colocar el cuerpo en la bolsa de óbito para su posterior traslado a morgue judicial. El termómetro registra que la temperatura del cadáver es de 30.5 °C.
- 8:40 hs - Comienza el traslado del cuerpo a morgue judicial en Córdoba Capital.
- 9:55 hs - Llega a destino la unidad de traslado y se resguarda el cuerpo a espera de su correspondiente autopsia.
- 13:30 hs - Comienza la autopsia. El cadáver se encuentra a 23.7 °C.
- 16:10 hs - Finaliza la autopsia, se determina que Sergio falleció desangrado producto de una herida punzante recibida en el bazo.

Para simplificar la construcción de un modelo, en lugar de considerar la temperatura del cuerpo, se considerará la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente  $T - T_{\text{amb}}$ . Además, se llamará  $T_{\text{diff}}$  a la diferencia entre la temperatura inicial del cuerpo y la temperatura ambiente  $T_i - T_{\text{amb}}$ .

$$T(t) - T_{\text{amb}} = T_{\text{diff}} e^{-rt}$$

4. Verifique que el logaritmo natural de la nueva variable  $T(t) - T_{\text{amb}}$  es una función lineal de  $t$ . ¿Qué representan el intercepto y la pendiente? Llámelos  $\beta_0$  y  $\beta_1$ .

Se propone ajustar un modelo lineal normal utilizando los datos transformados.

5. En función del enunciado del problema y de su conocimiento, elija una distribución *a priori* para  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\sigma$ . ¿Cuáles son las implicancias de sus distribuciones *a priori*? Realice pruebas predictivas *a priori*. Considere una temperatura ambiente de 22 °C.
6. ¿Es posible estimar la hora de muerte utilizando la información disponible hasta las 7 de la mañana? En caso afirmativo, explicita los supuestos realizados y ajuste el modelo usando Stan.
7. Luego, estime la hora de muerte utilizando la información disponible hasta las 10 horas.
8. Finalmente, estime la hora de muerte utilizando todas las mediciones de temperatura realizadas sobre el cuerpo de Sergio. Compare esta estimación con la obtenida en el punto 7. ¿Cuál de las dos es un reflejo más fiel de la verdadera hora de muerte? Justifique su respuesta.
9. ¿Modificaría algún aspecto del modelo si supiera que Sergio no gozaba de buena salud al momento de fallecer?