

# Regresión Logística

# Introducción

- ▶ En un problema de regresión, no siempre la respuesta (condicionada) es normal
- ▶ A veces, la respuesta ni siquiera es cuantitativa

Supongamos que nos interesa modelizar las siguientes variables:

- ▶ Si una persona vota o no por un determinado candidato
- ▶ Si un estudiante aprueba o no un examen
- ▶ Si mañana lloverá o no

Es decir, nos interesa modelizar una variable  $Y$ , una **variable respuesta categórica binaria**:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si mañana llueve} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

en función de ciertas variables explicativas potenciales...

En otros contextos se habla de un **problema de clasificación**

Según los valores que puede tomar  $Y$ , ¿qué modelo de probabilidad podemos asumir?

$$Y_i \mid \pi_i \sim \text{Bern}(\pi_i)$$

$$\mathbb{E}(Y_i) = \pi_i$$

En la regresión normal que conocíamos, teníamos

$$Y_i \mid \mu_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$$

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mu_i$$

Por analogía, ¿podemos hacer  $\pi_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1_i} + \beta_2 x_{2_i} + \dots$ ?

¿Qué problemas identificamos?

Tendremos que hacer

$$g(\pi_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1_i} + \beta_2 x_{2_i} + \dots$$

$g(\cdot)$  se conoce como función de enlace (*link function*). ¿Cuál es una  $g$  apropiada en este caso?

Si  $\pi_i$  es la probabilidad del evento de interés,  $\frac{\pi_i}{1-\pi_i}$  es la chance (*odds*) del evento de interés.

Mientras que  $\pi_i \in [0, 1]$ ,  $\frac{\pi_i}{1-\pi_i} \in [0, +\infty)$

Establecemos un modelo lineal para el *log-odds* del evento de interés

$$\log(\text{odds}_i) = \log\left(\frac{\pi_i}{1 - \pi_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{1_i} + \beta_2 x_{2_i} + \dots$$

La función  $g(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$  se conoce como función **logit**. Es una función no lineal.



Analicemos lo que vimos hasta ahora:

- ▶ ¿Cuál es el dominio de la función logit?
- ▶ ¿Para qué necesitamos la función  $g(\cdot)$ ?
- ▶ ¿Cuál es la relación entre el predictor lineal y la variable respuesta?
- ▶ ¿Cuál es la distribución de la variable respuesta?

Consideremos el caso con una sola variable explicativa

$$\log \left( \frac{\pi_i}{1 - \pi_i} \right) = \beta_0 + \beta_1 x_{1_i}$$

Se cumple:

$$\frac{\pi_i}{1 - \pi_i} = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1_i}} \quad \pi_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1_i}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1_i}}}$$

¡La esperanza de la variable respuesta se relaciona de manera no lineal con las variables explicativas!

## Ejemplo

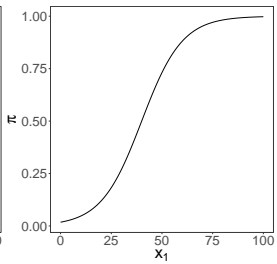
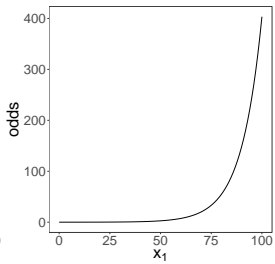
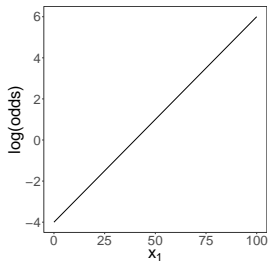
Consideremos la siguiente relación

$$\log \left( \frac{\pi_i}{1 - \pi_i} \right) = -4 + 0.1 x_{1_i}$$

e imaginemos que  $\pi_i$  es la probabilidad de que llueva el día  $i$  y  $x_{1_i}$  la humedad a las 9 de la mañana del día anterior al día  $i$ .

```
x1 <- seq(0, 100, length.out = 100)
beta0 <- -4
beta1 <- 0.1

data <- tibble(x1 = x1,
               log_odds = beta0 + beta1*x1,
               odds = exp(log_odds),
               pi = odds/(1+odds))
```



# Interpretación de los coeficientes

$$\beta_0$$

$\beta_0$  es la log-chance (*log-odds*) del evento de interés cuando todas las variables explicativas valen 0.  $e^{\beta_0}$  es la chance. En términos del problema:  *$e^{\beta_0}$  es la chance de que llueva mañana si la humedad de hoy a las 9 de la mañana es 0.*

$\beta_1$

$\beta_1$  no es el incremento en la probabilidad del evento de interés cuando  $x_1$  aumenta en una unidad...

- ▶  $\text{odds}_x$  es la chance del evento de interés cuando  $x_1 = x$
- ▶  $\text{odds}_{x+\Delta x}$  es la chance del evento de interés cuando  $x_1 = x + \Delta x$

$$\log(\text{odds}_x) = \log\left(\frac{\pi_x}{1 - \pi_x}\right) = \beta_0 + \beta_1 x$$

$$\log(\text{odds}_{x+\Delta x}) = \log\left(\frac{\pi_{x+\Delta x}}{1 - \pi_{x+\Delta x}}\right) = \beta_0 + \beta_1(x + \Delta x)$$

Entonces

$$\log(\text{odds}_{x+\Delta x}) - \log(\text{odds}_x) = \beta_1 \Delta x$$

$$e^{\beta_1 \Delta x} = \frac{\text{odds}_{x+\Delta x}}{\text{odds}_x}$$

La chance del evento de interés aumenta  $e^{\beta_1 \Delta x}$  veces cuando  $x_1$  aumenta en  $\Delta x$  (y el resto de las variables se mantienen constantes). En términos del problema: *La chance de que llueva mañana aumenta  $e^{\beta_1}$  veces si la humedad aumenta en 1.*



Más en términos del problema:

$$e^{\beta_1} = \frac{\text{odds}_{x+1}}{\text{odds}_x} \Rightarrow \text{odds}_{x+1} = e^{\beta_1} \text{odds}_x$$

$$e^{\beta_1} = 1.11$$

- ▶ La chance de que llueva mañana aumenta 1.11 veces cuando la humedad a las 9 de la mañana de hoy aumenta en una unidad
- ▶ La chance de que llueva mañana aumenta en un 11% cuando la humedad a las 9 de la mañana de hoy aumenta en una unidad

Analicemos juntos el siguiente caso:

$$\log \left( \frac{\pi_i}{1 - \pi_i} \right) = 1.1 - 0.2 \text{ despierto}_i$$

e imaginemos que  $\pi_i$  es la probabilidad de que un estudiante  $i$  apruebe el parcial de Análisis de Datos de Duración  $i$  y  $\text{despierto}_i$  la cantidad de horas que el estudiante  $i$  estuvo despierto la noche anterior al parcial.

¿Y Bayes?

La especificación del modelo se completa con la elección de distribuciones *a priori* para  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ , .....

Cada cantidad que dependa de los  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ , ... tendrá una distribución de probabilidad.

Las predicciones también son probabilísticas.

¿Cómo se estiman  $\beta_0, \beta_1, \dots$ ? Como siempre. Aplicando la Regla de Bayes. Solo que la verosimilitud ahora es Bernoulli.