Teoría de la Decisión

Un meteorólogo estima, con un 95% de confianza, que la probabilidad de que el huracán no llegue a la ciudad

está entre 99% y 100%. Muy feliz con su precisión y su modelo, aconseja que la evacuación de la ciudad no es necesaria. Desafortunadamente, el huracán llega a la ciu-

dad produciendo una grave inundación.

Un meteorólogo estima, con un 95% de confianza, que

la probabilidad de que el huracán no llegue a la ciudad está entre 99% y 100%. Muy feliz con su precisión y su

modelo, aconseja que la evacuación de la ciudad no es

necesaria. Desafortunadamente, el huracán llega a la ciu-

dad produciendo una grave inundación.

"I would rather be vaguely right than very wrong."

Con el clima, las personas tienden a notar un error más que otro. Cuando llueve sin estar anunciado, se tiende a

> insultar al servicio meteorológico mientras que la ausencia de lluvia a pesar del pronóstico se toma con buena cara.

Con el clima, las personas tienden a notar un error más

que otro. Cuando llueve sin estar anunciado, se tiende a

insultar al servicio meteorológico mientras que la ausencia

de lluvia a pesar del pronóstico se toma con buena cara.

El Weather Channel exagera ligeramente la probabilidad

de lluvia cuando es poco probable que ocurra: dicen que

es de 20% cuando en realidad es de 5% o 10%

En la estadística bayesiana, la distribución a posteriori es la base
de todas inferencia: combina el conocimiento a priori con la

información provista por los datos. Contiene todo lo que se sabe y

no se sabe sobre un parámetro desconocido.

En la estadística bayesiana, la distribución a posteriori es la base

información provista por los datos. Contiene todo lo que se sabe y

La respuesta a los problemas es toda la distribución a posteriori de

de todas inferencia: combina el conocimiento a priori con la

no se sabe sobre un parámetro desconocido.

los parámetros (y de otras cantidades de interés).



No obstante, puede ser de utilidad (o incluso necesario) tomar decisiones concretas o resumir la distribución *a posteriori*.

a es la acción que tomamos (intervenir o no intervenir quirúrgicamente a una persona) o la respuesta que damos (ganancia de una campaña de marketing).

No obstante, puede ser de utilidad (o incluso necesario) tomar decisiones concretas o resumir la distribución *a posteriori*.

a es la acción que tomamos (intervenir o no intervenir quirúrgicamente a una persona) o la respuesta que damos (ganancia de una campaña de marketing).

Puede ser una estimación puntual $\hat{\theta}$: dada una inferencia sobre la ganancia de una campaña de marketing, es necesario informar un valor puntual (quizás con un intervalo)

Tratamos a los parámetros sobre los que realizamos inferencias como variables aleatorias. Una muestra de la distribución a

posteriori es una posible realización del verdadero valor del

parámetro.

Tratamos a los parámetros sobre los que realizamos inferencias como variables aleatorias. Una muestra de la distribución *a posteriori* es una posible realización del verdadero valor del

parámetro.

Al dar una respuesta (o resumir la información *a posteriori*),

podemos incurrir en un error (grande o chico) según se den los eventos posibles.

Tratamos a los parámetros sobre los que realizamos inferencias como variables aleatorias. Una muestra de la distribución *a posteriori* es una posible realización del verdadero valor del parámetro.

Al dar una respuesta (o resumir la información *a posteriori*), podemos incurrir en un error (grande o chico) según se den los eventos posibles.

¿Qué es un error? ¿Cómo definimos si el error es grande o chico? ¿Cómo definimos si el error es relevante o no?

Funciones de pérdida

$$L(\theta, \hat{\theta}) = f(\theta, \hat{\theta})$$

es una **función de pérdida**, qué tanto pierdo por usar $\hat{\theta}$ para estimar θ .

Por ejemplo:

$$\begin{split} L_2 &= (\theta - \hat{\theta})^2 \\ L_1 &= |\theta - \hat{\theta}| \\ \\ L_{0/1} &= \begin{cases} 0 \text{ si } \hat{\theta} = \theta \\ 1 \text{ si } \hat{\theta} \neq \theta \end{cases} \\ \\ L(\theta, \hat{\theta}) &= \begin{cases} (\theta - \hat{\theta})^2 & \hat{\theta} < \theta \\ c(\theta - \hat{\theta})^2 & \hat{\theta} > \theta, \quad 0 < c < 1 \end{cases} \end{split}$$



Buscamos elegir $\hat{\theta}$ de manera tal que minimice L. El problema es que no conocemos θ y por lo tanto no podemos calcular $L(\theta,\hat{\theta}).$

¿Sabemos algo sobre θ que nos pueda ayudar? Conocemos su

distribución a posteriori

que no conocemos θ y por lo tanto no podemos calcular $L(\theta, \hat{\theta})$.

Buscamos elegir $\hat{\theta}$ de manera tal que minimice L. El problema es

; Sabemos algo sobre θ que nos pueda ayudar? Conocemos su

distribución a posteriori

Podemos promediar L para los valores posibles de θ (ponderando

según la distribución a posteriori)

$$R(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_{\theta \mid y}[L(\theta, \hat{\theta})] = \int L(\theta, \hat{\theta}) p(\theta \mid y) d\theta$$

$$R(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_{\theta \mid y}[L(\theta, \hat{\theta})] = \int L(\theta, \hat{\theta}) p(\theta \mid y) d\theta$$

Es una función de los posibles valores que puede tomar θ .

$$R(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_{\theta \mid y}[L(\theta, \hat{\theta})] = \int L(\theta, \hat{\theta}) p(\theta \mid y) d\theta$$

Es una función de los posibles valores que puede tomar $\hat{ heta}$.

Podemos obtener el $\hat{\theta}$ que minimice $R(\hat{\theta}).$ Es decir, buscamos un valor (un estimador) que minimice la pérdida esperada al usarlo para resumir $p(\theta \mid y)$:

$$\hat{\theta} = \operatorname*{arg\,min}_{\hat{\theta}} \left[R(\hat{\theta}) \right]$$

Simulemos...

Simulemos...

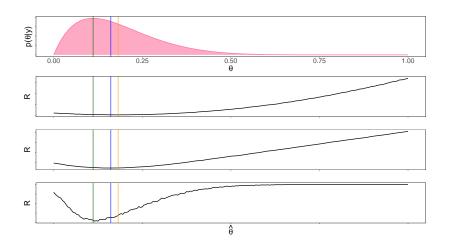
Supongamos que $\theta \mid y \sim \mathrm{Beta}(2,9)$

Simulemos...

Supongamos que $\theta \mid y \sim \text{Beta}(2,9)$

- $\blacktriangleright R$ es una función de $\hat{\theta}$ (los distintos valores que podemos usar para resumir $p(\theta\mid y)$)
- Para distintos valores de $\hat{\theta}$ voy a tomar muestras de $p(\theta \mid y)$ y calcular la pérdida L
- Para cada valor de $\hat{\theta}$ voy a calcular la pérdida promedio (ya va a estar ponderada por la probabilidad *a posteriori* de θ)

summarise(loss.mean = mean(L))



Si deseamos resumir la distribución a posteriori con un único valor	
(¡perdiendo información!), puede usarse:	

Si deseamos resumir la distribución *a posteriori* con un único valor (¡perdiendo información!), puede usarse:

- La **media**: minimiza la pérdida cuadrática esperada *a posteriori*
- La **mediana**: minimiza la pérdida absoluta esperada *a* posteriori
- La **moda** (también llamado MAP por *maximum a posteriori* o estimador generalizado de máxima verosimilitud): minimiza la pérdida 0/1 esperada *a posteriori*



Sea la pérdida cuadrática $L(\theta,\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})^2$, el riesgo (posterior expected loss) es:

Una prueba más formal para el caso de la **media**...

Una prueba más formal para el caso de la media...

Sea la pérdida cuadrática $L(\theta,\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})^2$, el riesgo (posterior expected loss) es:

$$\mathbb{E}_{\theta|u}[L(\theta,\hat{\theta})] = \mathbb{E}_{\theta|u}[\theta^2] - 2\hat{\theta}\mathbb{E}_{\theta|u}[\theta] + \hat{\theta}^2$$

Una prueba más formal para el caso de la **media**...

Sea la pérdida cuadrática $L(\theta,\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})^2$, el riesgo (posterior expected loss) es:

$$\mathbb{E}_{\theta|y}[L(\theta,\hat{\theta})] = \mathbb{E}_{\theta|y}[\theta^2] - 2\hat{\theta}\mathbb{E}_{\theta|y}[\theta] + \hat{\theta}^2$$

derivando respecto a $\hat{\theta}$ e igualando a cero se obtiene que arg $\min_{\hat{\hat{n}}} \left[R(\hat{\theta}) \right] = \mathbb{E}_{\theta \mid y}[\theta] = \mathbb{E}[p(\theta \mid y)]$



Una prueba más formal para el caso de la mediana...

Una prueba más formal para el caso de la **mediana**... Sea la pérdida absoluta $L(\theta,\hat{\theta})=|\theta-\hat{\theta}|$, el riesgo (posterior expected loss) es:

Una prueba más formal para el caso de la mediana...

Sea la pérdida absoluta $L(\theta, \hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$, el riesgo (posterior expected loss) es:

$$\mathbb{E}_{\theta|y}[L(\theta,\hat{\theta})] = \int_{-\infty}^{\infty} |\theta - \hat{\theta}| p(\theta \mid y) d\theta$$

Sea la pérdida absoluta $L(\theta, \hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$, el riesgo (posterior expected loss) es:

$$\mathbb{E}_{\theta \mid y}[L(\theta, \hat{\theta})] = \int_{-\infty}^{\infty} |\theta - \hat{\theta}| p(\theta \mid y) d\theta$$

$$\int_{-\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \theta) p(\theta \mid y) d\theta + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}) p(\theta \mid y) d\theta$$

Sea la pérdida absoluta $L(\theta, \hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$, el riesgo (posterior expected loss) es:

$$\mathbb{E}_{\theta \mid y}[L(\theta, \hat{\theta})] = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert \theta - \hat{\theta} \rvert p(\theta \mid y) d\theta$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \theta) p(\theta \mid y) d\theta + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}) p(\theta \mid y) d\theta$$

Para derivar, se utiliza la regla integral de Leibniz:

Sea la pérdida absoluta $L(\theta, \hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$, el riesgo (posterior expected loss) es:

$$\mathbb{E}_{\theta \mid y}[L(\theta, \hat{\theta})] = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert \theta - \hat{\theta} \rvert p(\theta \mid y) d\theta$$

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \theta) p(\theta \mid y) d\theta + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}) p(\theta \mid y) d\theta$$

Para derivar, se utiliza la regla integral de Leibniz:

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} \int_{-\infty}^{\theta} g(\hat{\theta}, \theta) d\theta = g(\hat{\theta}, \hat{\theta}) + \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} g(\hat{\theta}, \theta) d\theta$$

Sea la pérdida absoluta $L(\theta,\hat{\theta})=|\theta-\hat{\theta}|$, el riesgo (posterior expected loss) es:

$$\mathbb{E}_{\theta \mid y}[L(\theta, \hat{\theta})] = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert \theta - \hat{\theta} \rvert p(\theta \mid y) d\theta$$

$$\int_{-\infty}^{\theta} (\hat{\theta} - \theta) p(\theta \mid y) d\theta + \int_{\hat{\theta}}^{\infty} (\theta - \hat{\theta}) p(\theta \mid y) d\theta$$

Para derivar, se utiliza la regla integral de Leibniz:

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} \int_{-2}^{\hat{\theta}} g(\hat{\theta}, \theta) d\theta = g(\hat{\theta}, \hat{\theta}) + \int_{-2}^{\hat{\theta}} \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} g(\hat{\theta}, \theta) d\theta$$

Se puede probar que $\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} p(\theta \mid y) d\theta = \frac{1}{2}$, por lo que el $\hat{\theta}$ que minimiza la expresión es la mediana.

También llamados: intervalos de probabilidad, intervalo de confianza bayesiano, región de credibilidad. Es una región del dominio del parámetro que tiene alta probabilidad de contenerlo. Se utiliza para resumir el posterior.

También llamados: intervalos de probabilidad, intervalo de confianza bayesiano, región de credibilidad. Es una región del dominio del parámetro que tiene alta probabilidad de contenerlo. Se utiliza para resumir el posterior.

Un intervalo de credibilidad es una región C tal que la probabilidad de que contenga al parámetro sea al menos $1-\alpha$:

También llamados: intervalos de probabilidad, intervalo de confianza bayesiano, región de credibilidad. Es una región del dominio del parámetro que tiene alta probabilidad de contenerlo. Se utiliza para resumir el posterior.

Un intervalo de credibilidad es una región C tal que la probabilidad de que contenga al parámetro sea al menos $1-\alpha$:

$$p(\theta \in C \mid y) = \int_C p(\theta \mid y) d\theta = 1 - \alpha$$

en el caso discreto es $(\geq 1 - \alpha)$

También llamados: intervalos de probabilidad, intervalo de confianza bayesiano, región de credibilidad. Es una región del dominio del parámetro que tiene alta probabilidad de contenerlo. Se utiliza para resumir el posterior.

Un intervalo de credibilidad es una región C tal que la probabilidad de que contenga al parámetro sea al menos $1-\alpha$:

$$p(\theta \in C \mid y) = \int_C p(\theta \mid y) d\theta = 1 - \alpha$$

en el caso discreto es ($\geq 1 - \alpha$)

Decimos: la probabilidad de que θ esté contenido en C, dados los datos (y el modelo) es de $1-\alpha$



En el análisis de datos bayesiano, es habitual resumir los hallazgos reportando:

En el análisis de datos bayesiano, es habitual resumir los hallazgos reportando:

- Un gráfico de la distribución a posteriori
- Algún medida de centralidad de la distribución a posteriori
- Percentiles relevantes de la distribución a posteriori
- Probabilidades *a posteriori* de interés $p(\theta > c \mid y)$ para algún c interesante, por ejemplo c = 0

Simulaciones

Para interpretar los resultados de la inferencia bayesiana podemos simplemente realizar simulaciones a partir del *posterior* y estimar probabilidades contando.

Simulaciones

Para interpretar los resultados de la inferencia bayesiana podemos simplemente realizar simulaciones a partir del *posterior* y estimar probabilidades contando.

- los parámetros
- funciones de los parámetros
- la variable respuesta (predicciones)

Un nuevo ejemplo del modelo beta–Binomial: partimos de Beta(2,2), observamos 4 caras en 6 tiradas y nuestra creencia a

posteriori pasa a ser Beta(6,4).

Parámetros.

¿Cuál es la probabilidad a posteriori de que π sea mayor a 0.50? ¿y de que sea mayor a 0.80?

```
muestras_pi <- rbeta(2000,6,4)
mean(muestras_pi > 0.5)
mean(muestras_pi > 0.8)
```

Funciones de los parámetros

¿Cuál es la distribución a posteriori de la chance de obtener cara

```
\frac{\pi}{1-\pi}?

muestras_pi <- rbeta(2000,6,4)
```

```
muestras_pi <- roeta(2000,6,4)
muestras_odds <- muestras_pi/(1-muestras_pi)</pre>
```

Predicciones

Si se arroja la moneda 11 veces más ¿cuál es la distribución de probabilidad de la cantidad de caras? (es la distribución predictiva a posteriori)

```
muestras_pi <- rbeta(2000,6,4)
y_new <- rbinom(2000,11,muestras_pi)</pre>
```

Toda cantidad que dependa de los parámetros tiene una distribución *a posteriori*: una incertidumbre asociada.