

**В. В. БУШЕР****МЕТОД РАСЧЕТА ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ДИНАМИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИЕЙ ОШИБКИ  
ДЛЯ МИКРОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Целью работы является разработка численного метода расчета дробного интеграла заданного порядка с минимизированной ошибкой при ограниченных объемах памяти данных и быстродействия для микропроцессорных систем управления. Уменьшение статической и динамической погрешности в десятки раз обеспечивается аппроксимацией старших коэффициентов разложения дробного интеграла в ряд геометрической прогрессией и динамической компенсацией возникающей на первом этапе ошибки с помощью адаптивного корректирующего модуля.

**Ключевые слова:** дробное интегрирование, дробное дифференцирование, динамическая коррекция ошибки, быстрый алгоритм расчета.

**В. В. БУШЕР****МЕТОД РОЗРАХУНКУ ДРОБОВИХ ІНТЕГРАЛІВ З ДИНАМІЧНОЮ КОРЕКЦІЄЮ ПОХИБКИ  
ДЛЯ МІКРОПРОЦЕССОРНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ**

Метою роботи є розробка метода розрахунку дробового інтегралу заданого порядку з мінімізованою похибкою при обмежених обсягах пам'яті та швидкодії для мікропроцесорних систем керування. Зменшення динамічної і статичної похибки в десятки разів забезпечується апроксимацією старших коефіцієнтів розкладу дробового інтегралу в ряд геометричної прогресії та динамічною компенсацією похибки першого етапу за рахунок використання адаптивного модуля корекції.

**Ключові слова:** дробове інтегрування, дробове диференціювання, динамічна корекція помилки, швидкий алгоритм розрахунку.

**V. BUSHER****THE METHOD OF CALCULATING THE FRACTIONAL INTEGRAL WITH THE DYNAMIC ERROR  
CORRECTION FOR MICROCONTROLLERS**

The purpose of the work is to develop a numerical method for calculating a fractional integral with a minimized error with limited data memory. Control systems with a fractional astaticism for many technical objects provide the best dynamic and static indicators. Controller in such systems include one or more units that perform the operation of fractional integration and/or differentiation of the input signal. To implement such control systems based on single-chip microprocessors, it is necessary to solve the problem of calculating a fractional integral by numerical methods, taking into account the limited arrays of data and processor speed. The proposed solution is based on a combination of two methods. First, the calculation of the fractional integral, carried out by approximating the higher expansion coefficients in a series by a geometric progression, allows the use of memory volumes corresponding to the capabilities of the selected processor. Secondly, the dynamic compensation of the error arising at the first stage is carried out using an adaptive correction module. Despite the complication of the algorithm, this method of calculation reduces the error tenfold in both transient and steady-state processes, the properties of the synthesized calculation block correspond exactly to the properties of a fractional integral of a given order at frequencies from 0 to the maximum necessary in the control system. Dynamic error compensation reduces the required memory capacity for storing arrays of coefficients and input history and requires significantly less processor time to calculate the controller signal. As a result, a quantization period of tens of microseconds can be obtained, which makes it possible to implement fractional integral-differentiating controllers based on widely used modern processors and apply fractional-integral number methods to synthesize high-speed automatic control systems, such as electric drives with asynchronous motors, engines with series excitation.

**Keywords:** fractional integration, fractional differentiation, dynamic error correction, fast calculation algorithm.

**Введение.** Системы с дробным порядком астатизма в последние несколько лет стали привычным объектом для теоретических исследований. Интерес к этой области теории автоматического управления стремительно возрастает, так как благодаря необычным динамическим и статическим свойствам дробных интегралов и производных области применения такого класса систем управления значительно шире, чем для традиционных ПИ- и ПИД-регуляторов. Благодаря тесной связи между операциями дробного интегрирования и степенными функциями, такие системы управления могут обеспечивать высокое качество управления рядом нелинейных объектов, в том числе электрическими машинами различных типов, при работе которых сказываются эффекты насыщения магнитных цепей [1–7]. Исследования в этой области уже можно проводить в MATLAB благодаря появлению пакетов дробного интегрирования Ninteger, Fomcon, NFOC, FOTF [8].

Однако, практическое использование систем управления с дробно-интегральными регуляторами наталкивается на трудности, связанные с особенностями вычисления дробных производных и интегралов – все дискретные методы требуют хранения теоретически неограниченного количества значений входного сигнала и такого же количества коэффициентов для расчета их попарных произведений и последующего суммирования. Решают проблему либо отбрасывая «старые» значения, либо используя некоторые аппроксимации, например, метод Oustaloup, аналоговые приближения, основанные на фрактальных свойствах многослойных тонкопленочных конденсаторов [9,10]. Соответственно, происходят потери точности, искажения амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик регуляторов.

**Цель работы.** Разработка прецизионного метода расчета дробного интеграла в микропроцессорных системах с ограниченными объемами памяти и быст-

© В. В. Бушер, 2019

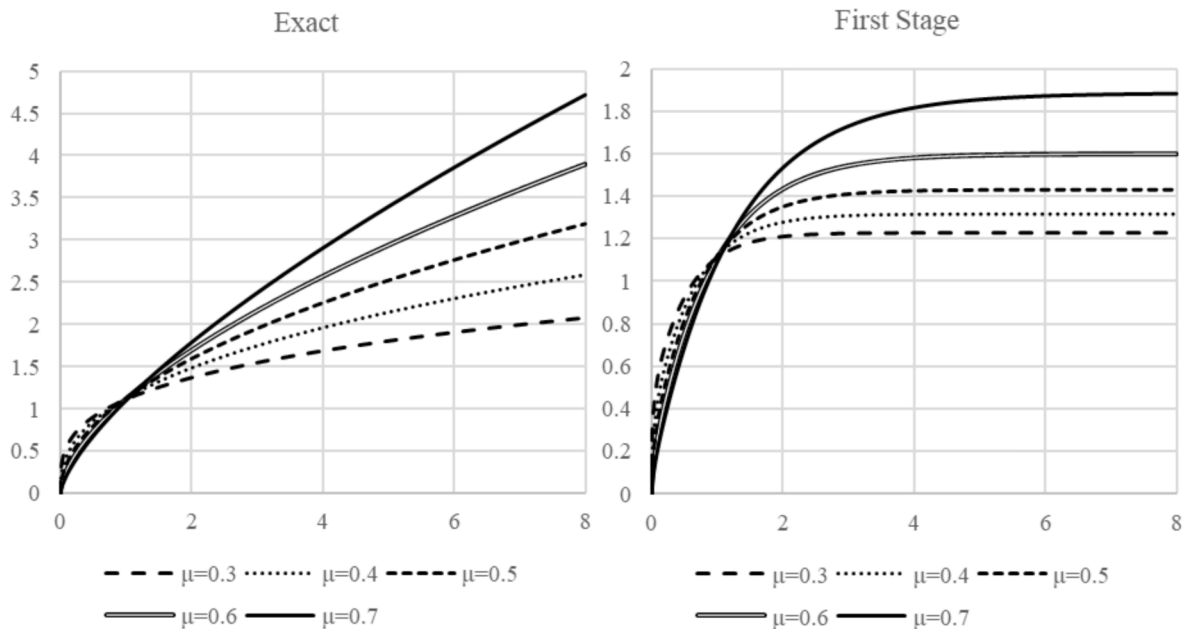
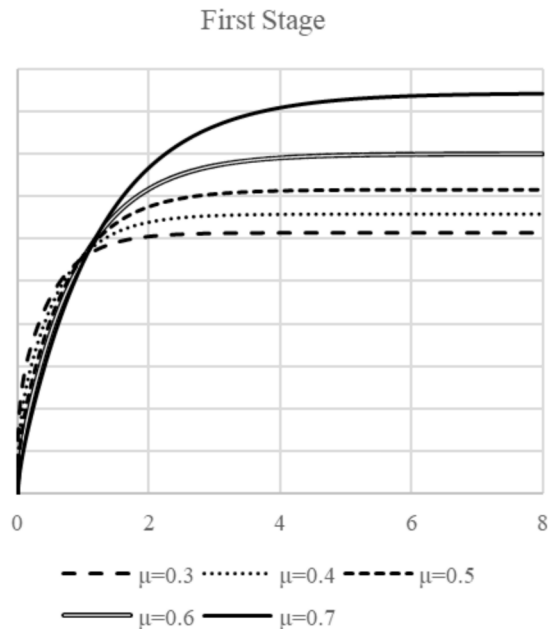
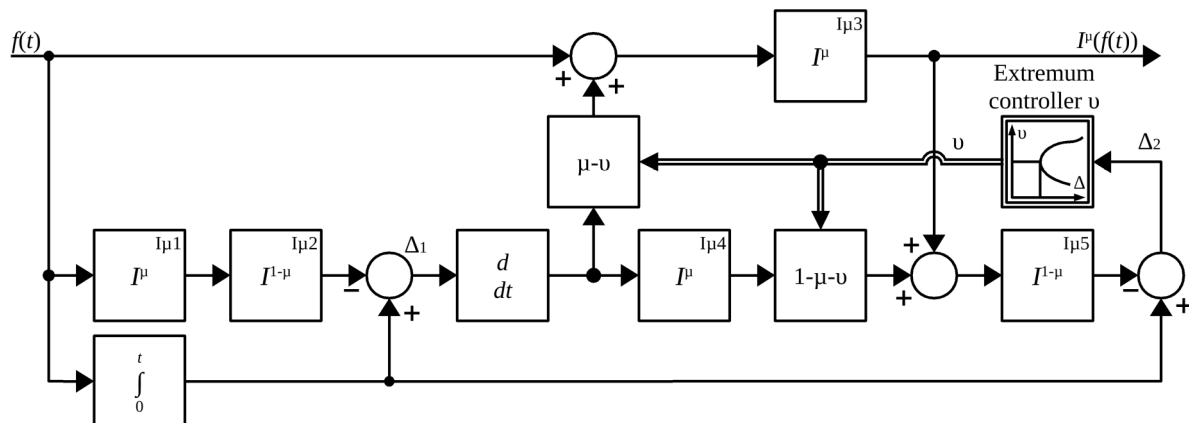
Рис. 2. Точные интегралы  $I^\mu(1(t))$  при различных  $\mu$ Рис. 3. Результат расчета  $I^\mu(1(t))$  по алгоритму рис. 1

Рис. 4. Алгоритм расчета дробного интеграла с динамической коррекцией ошибки

родействием, сохраняющего свойства блока дробного интегрирования/дифференцирования в максимально широком диапазоне частот.

**Методы исследования.** Расчет дробного интеграла базируется на так называемых формах Римана-Лиувилля, Грюнвальда-Летникова, Капуто, Вейля, Эрдейи, основное вычислительное ядро которых записывается, как сумма бесконечного ряда:

$$I^\mu(f(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n=t/\Delta t} k_{n-i}^\mu f(i). \quad (1)$$

где  $I^\mu$  – интеграл  $f(t)$  порядка  $\mu$ ,  $k_{n-i}^\mu$  – коэффициенты, формула расчета которых зависит от выбранной формы.

Так, при использовании формы Римана-Лиувилля

$$k_i^\mu = \frac{\Delta t^\mu}{\Gamma(1+\mu)} (i^\mu - (i-1)^\mu).$$

Однако из-за ограниченных объемов памяти процессора при использовании стандартных форм расчет прекращается при достижении точки с номером  $n_{\text{dim}}$ .

Анализ коэффициентов выявил полезную за-

номерность, которая позволяет в сотни/тысячи раз сократить объемы памяти, необходимые для расчета дробного интеграла, сохраняя динамические свойства системы в диапазоне частот от  $1/2n_{\text{max}}\Delta t$  до  $1/2\Delta t$ . Заменяя коэффициенты с номером больше некоторого  $n_{\text{dim}}$  (удобно в зависимости от типа микропроцессора выбирать  $n_{\text{dim}} = \text{Mask} + 1 = 32; 64; 128; 256; 512; \dots$ ) геометрической прогрессией с коэффициентом

$$q = \left( \frac{(n_{\text{max}} + 1)^\mu - (n_{\text{max}})^\mu}{(n_{\text{dim}} + 1)^\mu - (n_{\text{dim}})^\mu} \right)^{\frac{1}{n_{\text{max}} - n_{\text{dim}}}}$$

при  $n_{\text{max}} = 2 \dots 5 n_{\text{dim}}$ , удается свести расчет дробного интеграла к циклической процедуре, повторяющейся  $n_{\text{dim}}$  раз и использующей кольцевой массив  $X$  для хранения только последних  $n_{\text{dim}}$  точек входного сигнала (рис. 1) [12].

На рис. 2 и рис. 3 сопоставлены результаты точного и приближенного расчета дробного интеграла единичного скачка  $1(t)$  при  $\Delta t = 0.002$  с. Так как в этом случае известно точное решение

$$I^{\mu}(1(t)) = \frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu)}$$

(рис. 2), то можно оценить погрешность при различных  $n_{\text{dim}}$  и  $n_{\text{max}}$ . В приведенном на рисунках случае погрешность не превышает 10 % до точек с номерами  $\approx 3n_{\text{max}}$ , а в области  $0 \div 2n_{\text{max}}$  погрешность не превышает 3...4 %. Однако далее погрешность стремительно возрастает, составляя при  $16n_{\text{max}}$  уже более 60 %.

Такой метод расчёта может быть принят в качестве базового для первого этапа более точного метода. Идея метода основывается на свойстве многократного интегрирования:

$$I^{1-\mu}(I^{\mu}(f(t))) = \int_0^t f(t) dt. \quad (2)$$

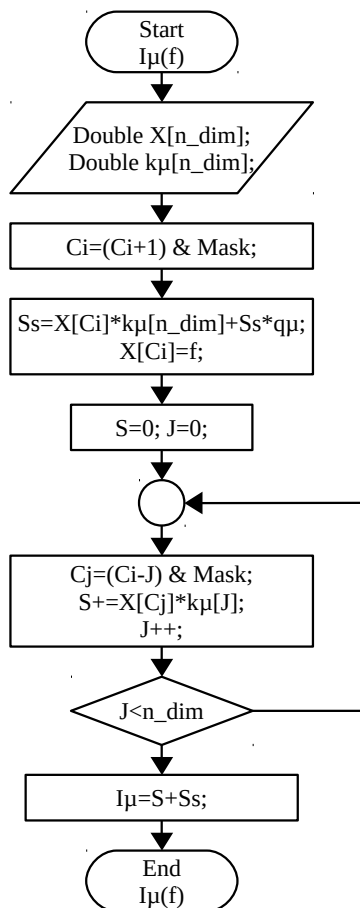


Рис. 1. Алгоритм быстрого расчета дробного интеграла

Выполнив последовательно дробное интегрирование исходного сигнала порядков  $\mu$  и  $1 - \mu$  (блоки  $I_{\mu 1}$ ,  $I_{\mu 2}$  на рис. 4) и сопоставив результат с интегралом первого порядка этого же сигнала, вычисление которого не представляет сложностей, можно оценить погрешность  $\Delta_1$ .

Очевидно, что каждый этап дробного интегрирования может вносить свою погрешность. Для компенсации ошибки ее можно «перераспределить», добавив ко входному сигналу производную погрешности с некоторым весовым коэффициентом. Предварительный анализ показал, что наилучшие результаты обеспечиваются, если начальное значение этого коэффици-

ента совпадает с  $\mu$ , а для повторного интегрирования  $-1 - \mu$ . Эту операцию выполняют блоки  $I_{\mu 4}$ ,  $I_{\mu 5}$ .

Если весовые коэффициенты подобраны правильно, то ошибка  $\Delta_2$  будет равна нулю. Но если коэффициенты отличаются от оптимальных, то их можно скорректировать на основании изменения  $\Delta_2$  во время переходного процесса. Экстремальный регулятор, анализируя  $\Delta_2$ , подбирает дополнительный корректирующий параметр  $\nu$ , обеспечивающий еще более точную компенсацию погрешности.

В результате на выходе блока  $I_{\mu 3}$  получаем такое значение дробного интеграла, которое наиболее близко к точному значению.

На рис. 5 показан результат расчета. Очевидно, что выходной сигнал чрезвычайно близок к точному на рис. 2.

На рис. 6 приведены зависимости погрешности расчета  $I^{\mu}(1(t))$  в области от 0 до  $16n_{\text{max}}$ , не превышающие 1...3 %.

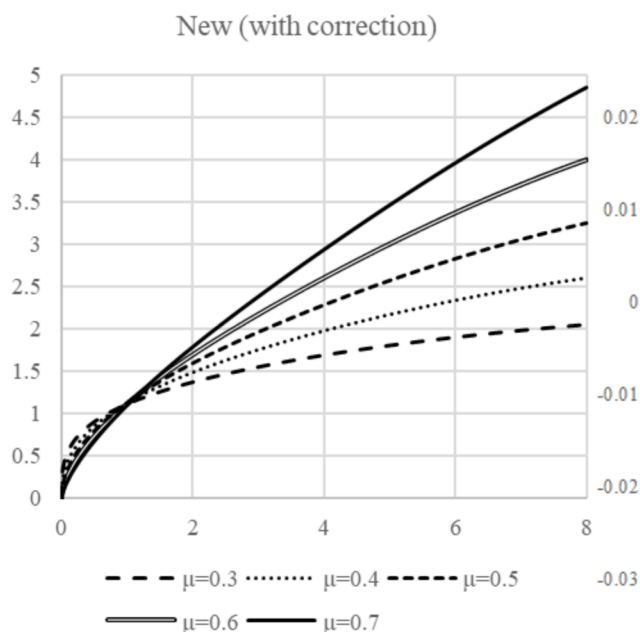
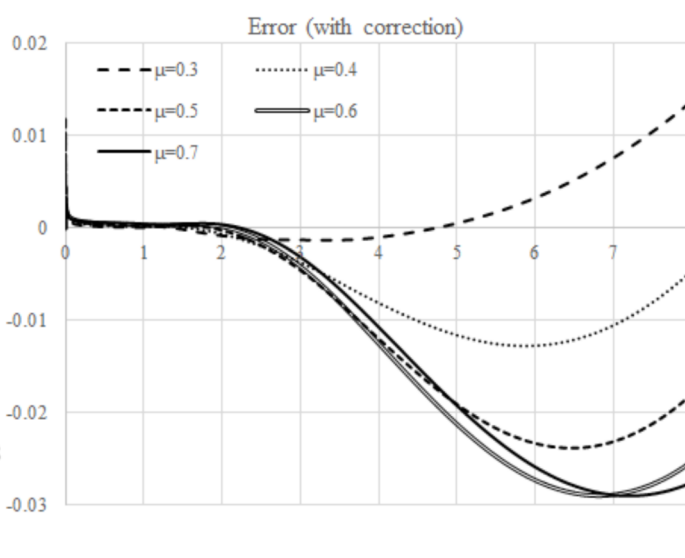
Очевидно, что предлагаемая процедура существенно расширяет диапазон точного соответствия свойств рассчитываемого сигнала теоретически ожидаемым свойствам дробного интеграла.

**Выводы.** 1. Разработан метод расчета дробного интеграла, обеспечивающий погрешность не хуже единиц процентов в диапазоне частот от  $1/(10...100)n_{\text{dim}}\Delta t$  до  $1/2\Delta t$ , что в десятки раз больше, чем при однократном расчете по упрощенному алгоритму (рис. 1).

2. Несмотря на 6-кратное увеличение требуемых объемов памяти (для 5-кратного расчета дробного интеграла и двух массивов коэффициентов), достижение такой точности обеспечивает точное соответствие динамических и статических свойств блока дробного интегрирования теоретическим, что позволяет получить в микропроцессорной системе управления ожидаемые результаты.

#### Список литературы

- Freeborn T. J., Maundy B., A. S. Elwakil. Fractional-order models of supercapacitors, batteries and fuel cells: a survey. *Materials for Renewable and Sustainable Energy*. 2015. Vol. 4, № 3. pp. 1 – 9. DOI: 10.1007/s40243-015-0052-y.
- Учайкин В. В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
- Shantanu D. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Berlin: Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 240 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72703-3.
- Aoki Y., Sen M., Paolucci S. Approximation of transient temperatures in complex geometries using fractional derivatives. *Heat and Mass Transfer*. 2008. Vol. 44, № 7. pp. 771 – 777. DOI: 10.1007/s00231-007-0305-0.
- Petrás I. *The fractional-order controllers: Methods for their synthesis and applications*. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0004064> (accessed 11.04.2000).
- Jumarie G. Path probability of random fractional systems defined by white noise in coarse-grained time. Application of fractional entropy. *Fractional differential calculus*. 2011. Vol. 1, № 1. pp. 45 – 87. DOI: 10.7153/fdc-01-03.
- Baleanu D., Albert C.J. Luo, José A. Tenreiro Machado. *Fractional dynamics and control*. New York: Springer Science & Business Media, 2011. 310 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-0457-6.
- Xue D., Chen Y. Q., Atherton D. P. *Linear Feedback Control: Analysis and Design with Matlab*. Philadelphia, PA, United States: SIAM, 2007. 354 p.

Рис. 5. Результат расчета  $I^\mu(1(t))$  по алгоритму рис. 4Рис. 6. Погрешность расчета  $I^\mu(1(t))$  по алгоритму рис. 4

9. Tarasov V. E. Fractional Liouville and BBGKI equations. *Journal of Physics: Conference Series*. 2005. Vol. 7. pp. 17 – 33. Doi: 10.1088/1742-6596/7/1/002.
10. Petras I., Podlubny I., O'Leary P. *Analogue realization of Fractional Order Controllers*. Kosice: Technical University of Kosice, 2002. 84 p.
11. Marushchak Y., Kopchak B. Synthesis of automatic control systems by using binomial and Butterworth standard fractional order forms. *Proceedings of the 16th International Conference on Computational problems of electrical engineering*. Lviv, Ukraine, 2015, Vol. 5, № 2, pp. 89 – 94.
12. Busher V., Aldairi A. Synthesis and technical realization of control systems with discrete fractional integral-differentiating controllers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Kharkov: PC Technology Center. 2018. Vol. 4, № 2 (94). pp. 63 – 71. Doi: 10.15587/1729-4061.2018.139892.

## References (transliterated)

1. Freeborn T. J., Maundy B., A. S. Elwakil. Fractional-order models of supercapacitors, batteries and fuel cells: a survey. *Materials for Renewable and Sustainable Energy*. 2015, vol. 4, № 3. pp. 1 – 9. Doi: 10.1007/s40243-015-0052-y.
2. Uchajkin V. V. *Metod drobnih proizvodnyh* [Method of fractional derivative]. Ul'yanovsk: Artishok, 2008. 512 p.
3. Shantanu D. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Berlin: Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 240 p. Doi: 10.1007/978-3-540-72703-3.
4. Aoki Y., Sen M., Paolucci S. Approximation of transient temperatures in complex geometries using fractional derivatives. *Heat and Mass Transfer*. 2008. Vol. 44, № 7. pp. 771 – 777. Doi: 10.1007/s00231-007-0305-0.

5. Petras I. *The fractional-order controllers: Methods for their synthesis and applications*. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0004064> (accessed 11.04.2000).
6. Jumarie, G. Path probability of random fractional systems defined by white noise in coarse-grained time. Application of fractional entropy. *Fractional differential calculus*. 2011. Vol. 1, № 1. pp. 45 – 87. Doi: 10.7153/fdc-01-03
7. Baleanu D., Albert C.J. Luo, José A. Tenreiro Machado. *Fractional dynamics and control*. New York: Springer Science & Business Media, 2011. 310 p. Doi: 10.1007/978-1-4614-0457-6.
8. Xue D., Chen Y. Q., Atherton D. P. *Linear Feedback Control: Analysis and Design with Matlab*. Philadelphia, PA, United States: SIAM, 2007. 354 p.
9. Tarasov V. E. Fractional Liouville and BBGKI equations. *Journal of Physics: Conference Series*. 2005. Vol. 7. pp. 17 – 33. Doi: 10.1088/1742-6596/7/1/002.
10. Petras I., Podlubny I., O'Leary P. *Analogue realization of Fractional Order Controllers*. Kosice: Technical University of Kosice, 2002. 84 p.
11. Marushchak Y., Kopchak B. Synthesis of automatic control systems by using binomial and Butterworth standard fractional order forms. *Proceedings of the 16th International Conference on Computational problems of electrical engineering*. Lviv, Ukraine, 2015, Vol. 5, № 2, pp. 89 – 94.
12. Busher V., Aldairi A. Synthesis and technical realization of control systems with discrete fractional integral-differentiating controllers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Kharkov: PC Technology Center. 2018. Vol. 4, № 2 (94). pp. 63 – 71. Doi: 10.15587/1729-4061.2018.139892.

Поступила 27.06.2019

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Бушер Віктор Володимирович (Бушер Виктор Владимирович, Busher Victor)** – доктор технічних наук, професор, Національний університет «Одеська морська академія», професор кафедри суднової електромеханіки та електротехніки; м. Одеса, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3268-7519>; e-mail: [victor.v.busher@gmail.com](mailto:victor.v.busher@gmail.com)