Capítulo 6

Lenguajes de Primer Orden

6.1. Elementos del lenguaje

A partir de ahora nuestra manera de formalizar el lenguaje natural se complica un poco más. Empecemos con un ejemplo:

La frase

Juan es alto

es considerada en lógica proposicional como una fórmula atómica, lo mismo que otras frases que tienen elementos comunes con ésta: Juan es albañil o Pedro es alto.

Recordando nuestros primeros conocimientos de sintaxis de español diremos que una frase tiene dos elementos distinguidos: el sujeto y el predicado. Los correspondientes conceptos en la lógica de primer orden son los de "término" y "predicado" o relación.

6.1.1. Términos

Si tenemos un conjunto de sujetos posibles, digamos los miembros de una familia, entonces podemos construir frases con predicado"ser alto":

Juan es alto
Todos son altos
Algunos son altos
El padre de Juan es alto
El segundo hijo del tio mayor de Juan es alto

Observemos que hay distintas formas de referirse al sujeto:

- con un nombre propio (Juan)
- sin hacer referencia explícita al sujeto, digamos de forma general (alguien, todos)
- por medio de una referencia que lo determina (el padre de Juan)

Estas formas distintas de nombrar a un elemento de un conjunto se van a traducir mediante símbolos distintos que son:

- Símbolos de constante: $a, b, c, \ldots$ y a veces $a_1, a_2, \ldots$ (en general las primeras letras del alfabeto en minúscula).
- Simbolos de variable: $x, y, z, \ldots$ y a veces $x_1, x_2, \ldots$ (en general las últimas letras del alfabeto en minúscula).
- Símbolos de función: $f, g, h, \ldots$ y si es necesario usando subíndices.

Un **término** es la forma de hacer referencia a un elemento. Tanto los símbolos de constantes como los de variables son **términos**; **también son términos** las expresiones de la forma

$$f(t), g(t_1, t_2), h(t_1, t_2, t_3), \ldots$$

donde t, t_1, t_2, t_3 representan términos. Observamos que estos símbolos de función tienen la misma forma que las funciones que nos hemos encontrado en otras partes de las matemáticas, y también pueden ser suceptibles de aplicarse a un número de términos que varía de unas a otras, que es lo que llamaremos la **ariedad** de una función. Además como el resto de funciones pueden componerse, de forma que también son términos las expresiones:

$$f(g(x, a)),\ g(h(y, z, x)),\ f(f(a)),\ f(f(x)), \ldots$$

6.1.2. Predicados o relaciones

El predicado de la oración contiene la parte fundamental del significado de ésta y se combina con los distintos sujetos dando lugar a oraciones diferentes. Los **predicados o relaciones** en lógica de primer orden se nombran por las letras intermedias del alfabeto en minúscula o mayúscula según los autores: p, q, r, P, Q, R,... o también se usan combinaciones de éstas.

Ejemplo 6.1.1. *El predicado "ser alto" podemos nombrarlo como SA, al individuo "Juan" por la letra minúscula j y a la función "el padre de ..." por f; entonces podemos construir las expresiones:*

- $SA(j)$ *que correspondería con la frase "Juan es alto"*
- $SA(f(j))$ *que sería la traducción de "El padre de Juan es alto"*

En el ejemplo hemos visto que un predicado se acompaña del término que actúa como sujeto, pero no nos dejemos engañar por los ejemplos más sencillos. Como en el lenguaje natural, los predicados pueden no tener sujeto como en la frase "LLueve", así el correspondiente predicado en lógica de primer orden no necesita ningún término, diremos que es 0-ario. La **ariedad** de un predicado, como la de una función, es el número de términos que requiere para completar un significado. Es fácil imaginar un predicado 2-ario: "ser la madre de", "contratar a ", "suspender a", etc. En lógica **hay predicados con cualquier número natural como ariedad**.

6.1.3. Conectivas

Las conectivas que se usan en lógica de primer orden son las mismas que en lógica proposicional ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) más dos nuevas llamadas **cuantificadores**:

$\forall$ es el cuantificador universal y se lee **para todo**

$\exists$ es el cuantificador existencial y se lee **existe**

como una primera aproximación podríamos decir que se usan para escribir frases del tipo:
Todos son altos que se traduce por $\forall x SA(x)$.
o
Alguien es alto que se traduce por $\exists x SA(x)$.
Como en lógica proposicional, haremos uso también de los paréntesis, aunque no se consideran símbolos del lenguaje sino auxiliares.

6.2. Lenguajes de primer orden

Un lenguaje de primer orden concreto **L** consta entonces de

1. Un conjunto de **símbolos de constantes**,
2. Un conjunto de **símbolos de función** y declaración de la ariedad de cada una de ellas,

3. Un conjunto de **símbolos de predicado** y la declaración de ariedad de cada uno de ellos.

además de los **símbolos de variable** que sean necesarios y los **símbolos de conectivas** que son comunes a todos los lenguajes de primer orden.

Ejemplo 6.2.1. *Consideramos el lenguaje* $\boldsymbol{L}$ *dado por*

- $Cons = \{j, a\}$ *como símbolos de constante;*
- $Fun = \{f\}$ *el conjunto de las funciones, con* f *de ariedad 1 y*
- $Pred = \{SA\}$ *donde* SA *tiene ariedad 1.*

Al conjunto de términos que se pueden escribir con los símbolos del lenguaje se le suele denotar por $Term(\mathbf{L})$. Tenemos que definir ahora qué será considerado como una **fórmula bien formada** del lenguaje de primer orden dado. Comencemos con las **fórmulas atómicas** (las más pequeñas que pueden dotarse de significado) que son las que se construyen con un predicado conteniendo a los términos que indique su ariedad.

Ejemplo 6.2.2. *Son fórmulas atómicas del lenguaje del ejemplo anterior:*
$SA(j), SA(a), SA(f(x)), SA(y), SA(f(j)), SA(f(f(j))), \ldots$

6.2.1. Gramática

Las reglas para construir f.b.f.s. a partir de otras son:

- Las fórmulas atómicas son f.b.f.s..
- Si α es una f.b.f., entonces $\neg\alpha$ también lo es.
- Si α y β son f.b.f.s. entonces lo son:

  $\alpha \wedge \beta$
  $\alpha \vee \beta$
  $\alpha \rightarrow \beta$
  $\alpha \leftrightarrow \beta$

- Si α es una f.b.f. y x es una variable, entonces $\forall x\alpha$ es una f.b.f..
- Si α es una f.b.f. y x es una variable, entonces $\exists x\alpha$ es una f.b.f..
- Toda f.b.f. se genera aplicando las reglas anteriores un número finito de veces.

Ejemplo 6.2.3. *Son fórmulas bien formadas del lenguaje del ejemplo anterior:*

1. $SA(j)$
2. $\neg(SA(j) \wedge SA(a))$
3. $\forall x(SA(x) \vee \neg SA(x))$
4. $\forall x \neg SA(x) \rightarrow \exists y SA(f(y))$
5. $\forall x(SA(j) \rightarrow SA(f(x))) \rightarrow SA(j)$
6. $\forall x(SA(j) \rightarrow SA(f(x))) \rightarrow \neg SA(j)$
7. $\exists y \forall x(SA(y) \rightarrow SA(f(x))) \rightarrow \forall z SA(z)$

No son fórmulas bien formadas:

1. $SA(\forall x)$
2. $\forall x SA(a, f(x))$

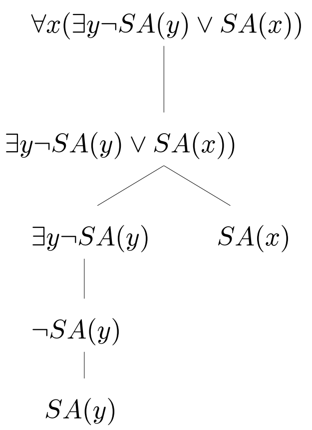
3. $SA(a \to j)$
4. $f(x) \to SA(j)$
5. $\forall x f(x)$
6. $SA(f(x) \wedge j)$
7. $\exists x(f(x) \wedge j)$
8. $\exists SA(x)$
9. $j \vee \exists x SA(x)$
10. $\exists x SA(x) \neg SA(a)$
11. $SA(a) \wedge SA(j) \vee SA(x)$

Como en lógica proposicional, los paréntesis se usan para indicar qué conectivas tienen preferencia sobre las demás. Se mantienen los criterios que ya conocemos y sólo queda añadir que los cuantificadores, así como la negación, tienen preferencia sobre el resto, y cuando varios de éstos aparecen juntos entonces se ejecutan de izquierda a derecha desde la fórmula sobre la que actúan.

Ejemplo 6.2.4. *Para la fórmula*

$$\forall x(\exists y \neg SA(y) \vee SA(x))$$

podemos dibujar el árbol que la desglosa hasta llegar a las fórmulas atómicas que intervienen:



6.2.2. Ocurrencias libres y ligadas de una variable

En una fórmula bien formada la aparición de una variable puede ocurrir en dos formas distintas que será importante distinguir antes de entrar en la semántica o interpretación de fórmulas. Observemos la variable x en las dos fórmulas siguientes:

$$\forall x Q(x, a)$$

$$\forall y Q(x, y)$$

en la primera la x aparece dentro de un predicado que va precedido por un cuantificador que lleva la variable x, de una manera informal podemos decir que eso obliga a que el valor de la variable recorra todas las posibilidades, en ese caso decimos que la ocurrencia de la variable x es **ligada** ; sin embargo, en la segunda el predicado que contiene a x no va precedido por ningún cuantificador que contenga a la variable denominada x, decimos entonces que la ocurrencia de la variable x es **libre**.

Para formalizar un poco estos conceptos empecemos definiendo quÚ entendemos por el **radio de acción de un cantificador**: es la subfórmula a la que afecta ese cuantificador. Como los cuantificadores tienen preferencia sobre las demás conectivas, entonces el radio de acción es siempre la subfórmula que está inmediatamente a su derecha. Usando el desglose en árbol de la sección anterior, el radio de acción es exactamente el nodo que cuelga de la rama en la que se deshace el cuantificador.

Ejemplo 6.2.5. *En la f.b.f.*

$$\forall x R(x,z) \to Q(x,y,z)$$

el radio de acción de $\forall x$ es la subfórmula (atómica en este caso) $R(x,z)$. En la f.b.f.

$$\forall z[\forall x P(x,z) \to \exists y(Q(x,y,z) \wedge R(y,z))]$$

el radio de acción de $\forall x$ es $P(x,z)$; el de $\exists y$ es la subfórmula $Q(x,y,z) \wedge R(y,z)$ y por último, el de $\forall z$ es $\forall x P(x,z) \to \exists y(Q(x,y,z) \wedge R(y,z)$.

Ahora la aparición de una variable se dirá que es una **ocurrencia ligada** (o simplemente que la variable es ligada), cuando

⋆ es la que acompaña un cuantificador, o bien

⋆ está en el radio de acción de un cuantificador que va seguido de **esa misma** variable.

En otro caso diremos que la variable es **libre**.

Ejemplo 6.2.6. *En la f.b.f.*

$$\forall x R(x,z) \to Q(x,y,z)$$

la primera y la segunda aparición (de izquierda a derecha) de la vatriable x son **ligadas***, mientras que la tercera ocurrencia es* **libre***. Todas las apariciones de las variables y y z son libres puesto que no hay ningún cuantificador en la fórmula conteniendo a estas variables.*

En la f.b.f.

$$\forall z[\forall x P(x,z) \to \exists y(Q(x,y,z) \wedge R(y,z))]$$

la primera aparición de x es ligada porque es la que acompaña a un cuantificador, la segunda tambiÚn es ligada puesto que está en el radio de acción de $\forall x$; la tercera aparición es libre. Las tres apariciones de la variable y son ligadas y todas las apariciones de z también son ligadas, la primera por acompañar al cuantificador y las demás porque están en el radio de acción de dicho cuantificador.

6.3. Interpretaciones: Estructura

Ahora, como en la lógica proposicional, esperamos obtener las reglas para asignar un valor de verdad a cada fórmula. En aquel caso el procedimiento consistía sencillamente en considerar una asignación a las proposiciones atómicas y tener en cuenta las reglas para las conectivas que aparecían. Como entonces el valor de verdad de una fórmula podrá ser **1** (verdadero) o **0** (falso), pero el procedimiento para establecer el significado de cada fórmula atómica es un poco más complicado.

Definición 53. *Una* **estructura** *para un lenguaje de primer orden es una descripción en la que se declaran:*

Un conjunto no vacío D, denominado **universo o dominio** *de la estrutura.*

Para cada símbolo de constante que se use en el lenguaje, un elemento concreto del conjunto D.

Para cada símbolo de función, digamos f, una aplicación de D^n en D, donde n es la ariedad de la función. Es decir, una manera de asignar un elemento a cada n-upla de elementos del conjunto D.

Para cada predicado con ariedad m, una lista de m-uplas de elementos de D (o lo que es lo mismo, un subconjunto de D^m). También podría definirse con una aplicación $D^m \to \mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 6.3.1. *Consideremos las fórmulas*

1. $SA(j)$,
2. $SA(a)$,
3. $SA(f(a))$.

Un lenguaje de primer orden en el que las tres son fórmulas bien formadas está constituido por:

Las constantes a *y* j*;*

la función 1*-aria* f*;*

el predicado 1*-ario* SA.

Una estructura para este lenguaje puede ser:

Dominio $D = \{$ *Juan, Antonio, Eva, David* $\}$

Constantes $a =$*Antonio,* $j =$*Juan;*

Función $f(Juan) = Antonio$*;* $f(Antonio) = David$*;* $f(Eva) = Antonio$*;* $f(David) = Eva$*;*

Predicados $SA = \{Juan, Antonio\}$*, lo que podría entenderse como que Juan y Antonio son altos mientras que el resto de los individuos del conjunto no lo son.*

Con estas descripciones las fórmulas adquieren un significado de tal forma que puede determinarse el valor de verdad de cada una de ellas. Veamos cuál es el resultado en nuestro ejemplo:

1. $SA(j)$ *es cierto, Juan es alto;*
2. $SA(a)$ *es cierto, Antonio es alto;*
3. $SA(f(a))$ *es falso,* $f(a)$ *representa al individuo David, que no es alto (David* $\notin SA$*).*

Ejemplo 6.3.2. *Tengamos ahora las fórmulas:*

1. $R(f(a))$
2. $Q(g(a,a), f(c))$
3. $Q(c, f(x))$

Un lenguaje de primer orden, $\mathcal{L}$*, en el que todas son f.b.f.s. está dado por:*

Constantes a, c

Variables x

Funciones f, g*, la primera 1-aria y la segunda 2-aria.*

Predicados R, Q *el primero 1-ario y el segundo 2-ario.*

Una **estructura** $\mathcal{E}$ *para este lenguaje* $\mathcal{L}$*, puede ser:*

Dominio $D = \mathbb{Z}_3$

Constantes $a = 0$*,* $c = 2$*;*

Funciones $f(x) = x + 1$*;* $g(x, y) = x + y$*;*

Predicados $R = \{0\}$*,* $Q = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$

Una forma alternativa de describir a los predicados es utilizar lenguaje natural o lenguaje matemático, por ejemplo:

$R(x)$ *es cierto cuando* $x = 0$*;* $Q(x, y)$ *es cierto cuando* $x + 1 = y$*.*

El valor de verdad de las fórmulas con esta estructura será:

1. $R(f(a))$ *es* $R(f(0)) = R(0 + 1) = R(1)$ *que es falso.*

2. $Q(g(a, a), f(c))$ *es* $Q(0 + 0, 1 + 1) = Q(0, 2)$ *que es falso puesto que el par* $(0, 2)$ *no aparece en la descripción de* Q*, o bien puesto que* $0 + 1 \neq 2$*.*

3. *¡Pero no podemos decidir sobre* $Q(c, f(x))$*! El valor de verdad dependerá del elemento del dominio que se representa por* x*.*

   Así que aún nos faltan elementos para interpretar esta fórmula, en concreto elegir el valor que toma la variable x*.*

6.3.1. Interpretaciones: Valoración

Definición 54. *Una* **valoración** v *para un lenguaje* $\mathcal{L}$ *y una estructura* $\mathcal{E}$ *es una aplicación*

$$v : Var(\mathcal{L}) \to D$$

que declara un valor para cada variable del lenguaje.

Notemos que cualquier valoración puede extenderse a una aplicación $Ter(\mathcal{L}) \to D$, que denotaremos de la misma forma que la valoración.

Esto se hace como sigue:

Para una constante a, $v(a)$ es el elemento de D que se le ha asignado al símbolo de constante a al definir la estructura.

Para las variables ya está definido.

Si $t_1, t_2, \cdots, t_n$ son términos y f es un símbolo de función n-ario, entonces $v(f(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = f(v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n))$. Recordemos que todo término se puede obtener a partir de los términos básicos (símbolos de constante y de función) mediante aplicaciones sucesivas de la regla:

Si $t_1, t_2, \cdots, t_n$ son términos y f es un símbolo de función, entonces $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ es un témino.

En la definición anterior, la f que aparece en el miembro de la izquierda representa el símbolo de función f, mientras que la que aparece en el miembro de la derecha representa la función $D^n \to D$ que se le ha asignado al símbolo de función f.

Ejemplo 6.3.3. *En la estructura del ejemplo anterior, consideramos la valoración* $v : Var(\mathcal{L}) \to D$ *dada por* $x \mapsto 0$*. En tal caso, tenemos:*

$v(x) = 0 \qquad v(a) = 0 \qquad v(c) = 2$

$v(f(x)) = f(v(x)) = f(0) = 1 \qquad v(f(c)) = f(v(c)) = f(2) = 0$

$v(g(a, f(x))) = g(v(a), v(f(x))) = g(0, 1) = 1$

$v(f(g(a, f(x)))) = f(v(g(a, f(x)))) = f(1) = 2$

$v(g(a, c)) = g(v(a), v(c)) = g(0, 2) = 2$

$v(g(g(a, c), f(g(a, f(x))))) = g(v(g(a, c)), v(f(g(a, f(x))))) = g(2, 2) = 1$

$v(g(f(c), f(x)) = g(v(f(c)), v(f(x)) = g(0, 1) = 1$

Para calcular el valor de un término podemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned} v(g(f(f(x)), g(f(a), g(a, f(c))))) &= f(f(x)) + g(f(a), g(a, f(c))) \\ &= f(f(0)) + g(f(0), g(0, f(2))) \\ &= f(0 + 1) + (f(0) + g(0, f(2))) \\ &= (1 + 1) + (1 + (0 + f(2))) \\ &= 2 + (1 + (0 + 0)) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, con ambas cosas, una estructura y una valoración podemos decidir el valor de verdad de cada fórmula, es decir, podemos **interpretar** cada f.b.f. escrita en el lenguaje L.

Definición 55. *Una* **interpretación** $I^v = (\mathcal{E}, v)$ *para un lenguaje* $\mathcal{L}$ *es el par formado por una estructura* $\mathcal{E}$*, y una valoración* v*.*

Toda interpretación determina un valor de verdad para cualquier fórmula.

Dada una fórmula φ *denotaremos por* $I^v(\varphi)$ *al valor de verdad de la fórmula con esta interpretación.*

Ejemplo 6.3.4. *Con la valoración del ejemplo anterior*

$$v : Var(\mathcal{L}) \to D \qquad x \mapsto 0$$

Podemos calcular la interpretación de la fórmula $Q(c, f(x))$ *haciendo referencia a la valoración que utilizamos:*

$$I^v(Q(c, f(x))) = I^v(Q(2, 0 + 1)) = 0$$

puesto que el par $(2, 1)$ *no cumple la condición* $x + 1 = y$*.*

Para la valoración

$$v' : Var(\mathcal{L}) \to D \text{ dada por } x \mapsto 2$$

la interpretación de la fórmula será:

$$I^{v'}(Q(c, f(x))) = I^{v'}(Q(2, 2 + 1)) = I^{v'}(Q(2, 0)) = 1$$

puesto que el par $(2, 0)$ *cumple la condición* $x + 1 = y$*.*

6.3.2. Conectivas

Hasta ahora sólo hemos visto ejemplos de interpretación de fórmulas atómicas, nos queda todavía introducir la forma de interpretar una fórmula cuando aparecen las conectivas. En cuanto a las que estudiamos en lógica proposicional se siguen las mismas reglas:

$I^v(\neg\varphi) = 1 + I^v(\varphi)$ en $\mathbb{Z}_2$;

$I^v(\varphi \wedge \psi) = I^v(\varphi)I^v(\psi)$ en $\mathbb{Z}_2$;

$I^v(\varphi \vee \psi) = I^v(\varphi) + I^v(\psi) + I^v(\varphi)I^v(\psi)$ en $\mathbb{Z}_2$;

$I^v(\varphi \to \psi) = 1 + I^v(\varphi) + I^v(\varphi)I^v(\psi)$ en $\mathbb{Z}_2$;

$I^v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + I^v(\varphi) + I^v(\psi)$ en $\mathbb{Z}_2$;

Ejemplo 6.3.5. *Con la estructura dada en el último ejemplo y la valoración* $v : x \mapsto 1$ *calcularemos la interpretación de las fórmulas:*

1. $\alpha = R(f(a)) \to Q(g(a, a), f(c))$
2. $\beta = Q(g(a, a), f(c)) \vee Q(c, f(x))$

Para la primera $I^v(R(f(a)) = 0$ *pero también* $I^v(Q(g(a, a), f(c))) = 0$ *así que la implicación es verdadera, es decir,* $I^v(\alpha) = 1$*.*

En cuanto a la segunda debemos calcular $I^v(Q(c, f(x))) = I^v(Q(0, 1 + 1)) = I^v(Q(0, 2)) = 0$ *puesto que el par* $(0, 2)$ *no verifica la condición* $x+1 = y$*; por otro lado* $I^v(Q(g(a, a), f(c))) = I^v(Q(0+0, 2+1)) = I^v(Q(0, 0)) = 0$ *porque el par* $(0, 0)$ *no aparece en la descripción de* Q*. Así, la interpretación de la fórmula es* $I^v(\beta) = 0$ *por ser disyunción de dos fórmulas falsas.*

Presentamos ahora las reglas para los cuantificadores. Antes de esto, definamos para cada valoración $v : Var(\mathcal{L}) \to D$, cada variable x y cada elemento $e \in D$ una nueva valoración $v_{x|e} : Var(\mathcal{L}) \to D$ como:

$$v_{x|e}(y) = \begin{cases} v(y) & \text{si } y \neq x \\ e & \text{si } y = x \end{cases}$$

Es decir, $v_{x|e}$ actúa igual que v sobre todas las variables salvo eventualmente x.

Ejemplo 6.3.6. *Consideramos un lenguaje de primer orden con 3 símbolos de variable x, y, z, y consideramos una estructura en la que $D = \mathbb{Z}$. Sea v la valoración $x \mapsto -2$, $y \mapsto 1$, $z \mapsto 5$.*

Consideramos entonces distintas valoraciones:

$$\begin{array}{ccccc} v_{x|2} & v_{x|5} & v_{y|-1} & v_{z|3} & v_{z|5} \\ x \mapsto \ 2 & x \mapsto \ 5 & x \mapsto -2 & x \mapsto -2 & x \mapsto -2 \\ y \mapsto \ 1 & y \mapsto \ 1 & y \mapsto -1 & y \mapsto \ 1 & y \mapsto \ 1 \\ z \mapsto \ 5 & z \mapsto \ 5 & z \mapsto \ 5 & z \mapsto \ 3 & z \mapsto \ 5 \end{array}$$

Nótese que $v_{z|5} = v$. En general, se tiene que $v_{x|e} = v$ cuando $v(x) = e$.

$$I^v(\forall x\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } I^{v_{x|a}}(\varphi) = 1 \text{ para todos los elementos } a \in D. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$I^v(\exists x\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } I^{v_{x|a}}(\varphi) = 1 \text{ para algún elemento } a \in D \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 6.3.7. *Con el lenguaje y la estructura de ejemplos anteriores calculemos la interpretación de las fórmulas:*

1. $\forall x Q(x, f(x))$,
2. $\forall x Q(x, c)$
3. $\exists x Q(x, f(c))$,
4. $\exists x Q(x, f(f(x)))$
5. $\exists x(R(x) \to \neg R(x))$

1. *Puesto que aparece un cuantificador afectado por la variable x, debemos considerar las valoraciones que llevan x en cada uno de los elementos del dominio. Para ellos dibujamos una tabla en la que aparecen todas (es una ventaja de que el dominio sea finito!):*

$v : x \mapsto$	$Q(x, f(x))$
0	1
1	1
2	1

Así que $I(\forall x Q(x, f(x))) = 1$

Observación: *Aunque aparecía la variable x no ha sido necesario fijar una valoración puesto que estamos obligados a usar todos los posibles valores de x para interpretar el cuantificador. Esto es, cuando la variable es* **ligada** *no es necesario fijar valoración para ella.*

2. *Igual que en el caso anterior escribimos la tabla:*

$v : x \mapsto$	$Q(x, c)$
0	0
1	1
2	0

Así que $I(\forall x Q(x, c)) = 0$

3. *También ahora necesitamos todas las valoraciones sobre la variable x, escribimos la tabla:*

$v : x \mapsto$	$Q(x, f(c))$
0	0
1	0
2	1

Así que $I(\exists x Q(x, f(c))) = 1$

4. *La tabla es:*

$v : x \mapsto$	$Q(x, f(f(x)))$
0	0
1	0
2	0

Así que $I(\exists x Q(x, f(f(x))) = 0$

5. *En este caso la tabla es:*

$v : x \mapsto$	$R(x)$	$\neg R(x)$	$R(x) \to \neg R(x)$
0	1	0	0
1	0	1	1
2	0	1	1

Así que $I(\exists x(R(x) \to \neg R(x))) = 1$

6.4. Satisfacibilidad

Definición 56. *Dada una fórmula φ en un lenguaje de primer orden, una interpretación $I^v = (\mathcal{E}, v)$ se dice que es un* **modelo** *para φ si $I^v(\varphi) = 1$; es decir, si la fórmula es verdadera bajo esa interpretación.*

Con esta definición haremos una clasificación de las fórmulas bien formadas.

Definición 57. *Una fórmula es* **satisfacible** *si existe un modelo para ella. Cuando una fórmula* **no** *es satisfacible, esto es, es falsa bajo cualquier interpretación, la llamamos* **contradicción**.

Definición 58. *Una fórmula es* **refutable** *si existe una interpretación que* **no** *es un modelo para ella. Cuando una fórmula* **no** *es refutable es cierta bajo cualquier interpretación, decimos que es* **universalmente válida**.

Observemos entonces que cualquier fórmula bien formada puede encuadrarse en uno de los siguientes tipos:

- UNIVERSALMENTE VÁLIDA
- SATISFACIBLE Y REFUTABLE
- CONTRADICCIÓN

Por el momento será más fácil probar cuando una fórmula es satisfacible y refutable puesto que para ello es suficiente dar dos ejemplos de interpretaciones: una para la que sea falsa y una para la que sea verdadera (un modelo).

Veamos algunas fórmulas y su clasificación:

Ejemplo 6.4.1. $\exists x(P(x) \to P(a))$ *es* UNIVERSALMENTE VÁLIDA

Para convencernos trazamos la tabla que deberíamos elaborar para calcular una interpretación:

x	$P(x)$	$P(a)$	$P(x) \to P(a)$	$\exists x(P(x) \to P(a))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
a	$I(P(a))$	$I(P(a))$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

y observamos que en la línea correspondiente al valor del dominio que toma la constante a obtenemos que ambos miembros de la implicación tienen el mismo valor de verdad (puede que sea 0 *o* 1*, pero ambas el mismo), por lo que la implicación es verdadera. Una línea con un* 1 *nos hace obtener una interpretación verdadera para el cuantificador existencial. Y desde luego no depende de la interpretación elegida.*

$\forall x(P(x) \to P(a))$ *es* SATISFACIBLE Y REFUTABLE. *Para probarlo tenemos que dar dos ejemplos de interpretaciones:*

1. *Tomemos* $D = \mathbb{N}$, $P(x) \equiv$ *"x es par",* $a = 3$ *y obtenemos*

x	$P(x)$	$P(a)$	$P(x) \to P(a)$	$\forall x(P(x) \to P(a))$
0	1	0	0	
1	0	0	1	0
2	1	0	0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

y la primera línea ya nos informa de que la interpretación del cuantificador universal es 0 *y por tanto la fórmula es* REFUTABLE

2. *Sin embargo para la interpretación* $D = \mathbb{N}$, $P(x) \equiv$ *"x es par",* $a = 2$ *obtenemos*

x	$P(x)$	$P(a)$	$P(x) \to P(a)$	$\forall x(P(x) \to P(a))$
0	1	1	1	
1	0	1	1	1
2	1	1	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

una tabla en la que la columna del segundo miembro de la implicación es siempre verdadera, así que la implicación lo es en cada línea y con ello la fórmula es verdadera. Así también es SATISFACIBLE.

$\forall x(P(x) \to \neg P(a))$ *es* SATISFACIBLE Y REFUTABLE. *Y puede probarse usando las mismas interpretaciones que en el anterior (aunque los resultados están intercambiados).*

$\exists x(P(x) \to \neg P(a))$ *es* SATISFACIBLE Y REFUTABLE. *En este caso los dos ejemplos de interpretaciones anteriores nos dan que la fórmula es* SATISFACIBLE. *¿Será universalmente válida? No, podemos forzar la estructura que tomemos de forma que haya una única línea en la tabla, así esta línea sería la de la constante a; por ejemplo tomando* $D = \{0\}$, $P(x) \equiv$ *"x es par",* $a = 0$ *(claro, es la única elección posible), entonces nos queda:*

x	$P(x)$	$\neg P(0)$	$P(x) \to \neg P(a)$	$\exists x(P(x) \to \neg P(a))$
0	1	0	0	0

(la idea ha surgido cuando se observa que la línea correspondiente a la constante en los dos ejemplos anteriores da el valor 0*). Por tanto la fórmula también es* REFUTABLE.

$\forall x \neg(P(x) \to P(a))$ *es* CONTRADICCIÓN. *Como en el primer caso tenemos que intuir qué ocurre en la tabla:*

x	$P(x)$	$P(a)$	$P(x) \to P(a)$	$\neg(P(x) \to P(a))$	$\forall x \neg(P(x) \to P(a))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
a	$I(P(a))$	$I(P(a)$	1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

y nos damos cuenta de que siempre aparecerá una línea (la que corresponde al valor de la constante) que nos da un cero que se transmite al cuantificador universal.

$\exists x \neg(P(x) \to P(a))$ *es* SATISFACIBLE Y REFUTABLE. *De nuevo pueden usarse los ejemplos de interpretaciones del segundo caso.*

Ejercicio 6.4.1. *Prueba las siguientes afirmaciones:*

1. $\exists x P(x) \to P(a)$ *es satisfacible y refutable.*
2. $\forall x P(x) \to P(a)$ *es universalmente válida.*
3. $\forall x P(x) \to \neg P(a)$ *es satisfacible y refutable.*
4. $\exists x P(x) \to \neg P(a)$ *es satisfacible y refutable.*
5. $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ *es satisfacible y refutable.*
6. $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ *es universalmente válida.*

6.5. Consecuencia lógica

Definición 59. *Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$ diremos que Γ implica semánticamente a φ o que φ es consecuencia lógica de Γ y se escribe*

$$\Gamma \models \varphi$$

si para toda interpretación $I^v = (\mathcal{E}, v)$ que es un modelo para todas las fórmulas de Γ **simultáneamente** *entonces I^v también es un modelo para φ.*

Ejemplo 6.5.1. *Es cierta la afirmación*

$$\{\forall x P(x)\} \models P(a)$$

puesto que cualquier interpretación que haga cierta la fórmula $\forall x P(x)$ necesariamente hace cierta la fórmula $P(a)$. Para convencernos observemos la siguiente tabla:

x	$P(x)$	$\forall x P(x)$
$\vdots$	1	
a	1	1
$\vdots$	1	

Para obtener 1 como resultado de la interpretación de la conectiva $\forall$ cada una de las líneas de $P(x)$ cuando x recorre el dominio tiene que ser un 1, en particular la del valor que se le asigne a la constante a.

Ejemplo 6.5.2. *Es cierta la afirmación*

$$\{P(a)\} \models \exists x P(x)$$

puesto que cualquier interpretación que haga cierta la fórmula $P(a)$ necesariamente hace cierta la fórmula $\exists x P(x)$. En efecto, si esbozamos la tabla que nos permite calcular la interpretación de $\exists x P(x)$:

x	$P(x)$	$\exists x P(x)$
$\vdots$	$\vdots$	
a	1	1
$\vdots$	$\vdots$	

Para obtener 1 *como resultado de la interpretación de la conectiva* $\exists$ *es suficiente que una de las líneas de* $P(x)$ *contenga un* 1*, lo que en este caso ocurre para el valor* $x = a$*.*

Ejemplo 6.5.3. *Para probar que*

$$\{\exists x P(x)\} \not\models P(a)$$

es suficiente dar un **ejemplo de interpretación** *para la que la premisa es cierta mientras que la conclusión es falsa. Así que la interpretación:* $D = \mathbb{Z}$*,* $a = 3$*,* $P(x) \equiv$*"x es par" hace que* $\exists x P(x)$ *sea verdadera, puesto que existen números pares en el dominio mientras que* $P(a) = P(3)$ *es falso porque* 3 *no es par.*

Observación Para el conjunto vacío, $\emptyset$, cualquier interpretación es un modelo.

Usando ahora el símbolo de consecuencia lógica, como en el tema anterior, podemos escribir el hecho de que una fórmula φ sea universalmente válida de la siguiente forma:

$$\emptyset \models \varphi$$

Así mismo tendremos una útil herramienta para cambiar, cuando sea necesario, un problema de consecuencia lógica por otro más sencillo: el Teorema de la Deducción, que volvemos a enunciar para este contexto.

Teorema 6.5.1. de la deducción *Dado un conjunto de fórmulas* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ *en un lenguaje de primer orden, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma \models \varphi \to \psi$,
2. $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$

Por ejemplo, usando este Teorema podemos afirmar que

$$\emptyset \models \forall x P(x) \to P(a)$$

es decir, que la fórmula es UNIVERSALMENTE VÁLIDA puesto que hemos probado que es cierta la afirmación

$$\{\forall x P(x)\} \models P(a)$$

6.5.1. Lema de coincidencia

Esta sección contiene un resultado formal que ya habíamos intuído cuando aprendimos a interpretar fórmulas. En el caso particular de que en una fórmula no haya **variables libres** para calcular una interpretación sólo necesitamos de la estructura y no de la valoración de valores a las variables.

Lema 6.5.1. *Sea* φ *una fórmula y designemos por* $W = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *al conjunto de las variables libre que aparecen en ella. Sea* $\mathcal{E}$ *una estructura; si* v_1 *y* v_2 *son dos valoraciones tales que*

$$v_1(x_1) = v_2(x_1); \quad v_1(x_2) = v_2(x_2); \quad \cdots \quad v_1(x_n) = v_2(x_n)$$

entonces:

$$I^{v_1}(\varphi) = I^{v_2}(\varphi)$$

Es decir, a la hora de interpretar una fórmula, no importa como actúe la valoración sobre las variables ligadas. Sólo tiene relevancia sobre las variables libres.

Como consecuencia, si la fórmula es una **sentencia**, es decir, una fórmula sin variables libres, entonces la valoración no es relevante para calcular la interpretación.

6.6. Consecuencia lógica y conjuntos insatisfacibles

Como en el tema anterior un conjunto de fórmulas se dice que es **insatisfacible** si no existe ninguna interpretación que haga ciertas simultáneamente todas las fórmulas del conjunto.

Un problema de consecuencia lógica se puede transformar en el de comprobar la insatisfacibilidad de un conjunto de fórmulas usando el siguiente resultado:

Teorema 6.6.1. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas en un lenguaje de primer orden. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\Gamma \models \varphi$,
2. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es insatisfacible.*

6.7. Algunas equivalencias lógicas

Pretendemos en estas notas dar una lista de equivalencias lógicas, que serán usadas posteriormente para hallar las formas normales de una fórmula. Vamos a tratar de estudiar como se comportan los cuantificadores $\forall$ y $\exists$ con respecto a los conectores lógicos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$.

Dada una fórmula α, denotaremos como $\alpha_{x|t}$ a la fórmula que resulta de sustituir cualquier ocurrencia libre de x en α por el término t.

6.7.1. Negación y cuantificadores

Vamos, en primer lugar, a justificar que para cualquier fórmula α, las fórmulas $\neg\forall x\alpha$ y $\exists x\neg\alpha$ son equivalentes.

Consideramos, por ejemplo, el enunciado *Todos los cuervos son negros*. Este enunciado podemos decirlo en un lenguaje de primer orden con la sentencia $\forall x N(x)$, donde el universo sería el conjunto de todos los cuervos, y el predicado $N(x)$ significa *x es negro*.

¿Cuándo diríamos que este enunciado es falso?, o dicho de otra forma; ¿cómo podríamos decir *No todos los cuervos son negros*?

Obviamente, una forma de decirlo es mediante la fórmula $\neg\forall x N(x)$. Pero decir que no todos los cuervos son negros es lo mismo que decir que hay un cuervo que no es negro, es decir, se puede decir mediante la fórmula $\exists x\neg N(x)$.

Por tanto, las fórmulas $\neg\forall x N(x)$ y $\exists x\neg N(x)$ nos dicen en este caso lo mismo.

Nótese que el anterior enunciado podíamos haberlo traducido a un lenguaje de primer orden como $\forall x(C(x) \rightarrow N(x))$, donde ahora el predicado $C(x)$ significa *x es cuervo*, y el universo podría ser el de todos los animales, o el de todos los seres vivos.

La negación diría ahora que existe un animal (o un ser vivo) que es cuervo y no es negro, es decir, $\exists x(C(x) \wedge \neg N(x))$. Sabemos que

$$\exists x(C(x) \wedge \neg N(x)) \equiv \exists x\neg(\neg C(x) \vee N(x)) \equiv \exists x\neg(C(x) \rightarrow N(x))$$

Es decir, las fórmulas $\neg\forall x\alpha$ y $\exists x\neg\alpha$, donde $\alpha = C(x) \rightarrow N(x)$ son equivalentes.

¿Es cierto que todos los primos son impares?. La respuesta es que no, pues existe un primo que no es impar (el 2).

Podemos también aproximarnos a esta equivalencia como sigue.

Supongamos que tenemos una fórmula de la forma $\forall x\alpha$, y tomamos una estructura donde el universo es finito. Supongamos que el universo es $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. En tal caso, el cuantificador $\forall$ podría ser sustituido por un número finito de conectores $\wedge$, es decir:

$$\forall x\alpha \equiv \alpha_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{x|a_n}$$

mientras que el cuantificador $\exists$ podría ser sustituido por un número finito de conectores $\vee$:

$$\exists x\alpha \equiv \alpha_{x|a_1} \vee \alpha_{x|a_2} \vee \cdots \vee \alpha_{x|a_n}$$

Tendríamos entonces que

$$\neg\forall x\alpha \equiv \neg(\alpha_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{x|a_n}) \equiv \neg\alpha_{x|a_1} \vee \neg\alpha_{x|a_2} \vee \cdots \vee \neg\alpha_{x|a_n} \equiv \exists x\neg\alpha$$

Es decir, podríamos ver la equivalencia $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$ como una generalización de la ley de De Morgan $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Ejemplo 6.7.1. *Considermos el lenguaje de primer orden con tres símbolos de constante a, b, c y un símbolo de predicado P^1. Sea α la fórmula $\forall x P(x)$ Tomamos una estructura en la que:*

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}_3; \qquad a \mapsto 0, \quad b \mapsto 1, \quad c \mapsto 2$$

En este caso, la fórmula α es cierta si, y sólo si, lo es la fórmula $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$. Por tanto, la fórmula $\neg\alpha$ será cierta si, y sólo si, lo es la fórmula $\neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \equiv \neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c)$, y esta fórmula será cierta si, y sólo si, lo es $\exists x\neg P(x)$.

Por ejemplo, asignemos el predicado P de la siguiente forma:

$$P(x) = \begin{cases} 1 & si\ x^2 = x \\ 0 & si\ x^2 \neq x \end{cases}$$

<table>
<tr><th>x</th><th>$P(x)$</th><th>$\forall x P(x)$</th><th>$\neg\forall x P(x)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>x</th><th>$P(x)$</th><th>$\neg P(x)$</th><th>$\exists x\neg P(x)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td rowspan="3">1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>

La aparición de un 0 *en la columna $P(x)$ de la primera tabla, hace que el valor de verdad de la fórmula $\forall x P(x)$ sea* 0*, y por tanto el valor de verdad de $\neg\forall x P(x)$ es* 1*.*

La aparición de este 0 *se traduce en un* 1 *en la columna $\neg P(x)$ de la segunda tabla, lo que da lugar a que el valor de verdad de $\exists x\neg P(x)$ sea* 1*.*

De la misma forma, si toda la columna $P(x)$ fuera 1, entonces $I(\forall x P(x)) = 1$, luego $I(\neg\forall x P(x)) = 0$. En este caso, toda la columna $\neg P(x)$ es cero, luego $I(\exists x\neg P(x)) = 0$.

$P(a)$	$P(b)$	$P(c)$	$P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$	$\neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$
1	1	0	0	1

$P(a)$	$P(b)$	$P(c)$	$\neg P(a)$	$\neg P(b)$	$\neg P(c)$	$\neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c)$
1	1	0	0	0	1	1

Tenemos por tanto la equivalencia

$$\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha.$$

De forma análoga se razona que

$$\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha.$$

A partir de estas dos, obtenemos:

$$\forall x\alpha \equiv \neg\neg\forall x\alpha \equiv \neg\exists x\neg\alpha; \qquad \exists x\alpha \equiv \neg\neg\exists x\alpha \equiv \neg\forall x\neg\alpha$$

En resumen, tenemos las siguientes equivalencias:

1. $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$.
2. $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$.
3. $\neg\forall x\neg\alpha \equiv \exists x\alpha$.
4. $\neg\exists x\neg\alpha \equiv \forall x\alpha$.

6.7.2. Inclusión de $\vee$ o $\wedge$ en el radio de acción de un cuantificador (I)

Sean α y β dos fórmulas, y consideramos la fórmula $\forall x\alpha \wedge \beta$. En este caso, la fórmula β queda fuera del radio de acción del cuantificador $\forall x$. ¿Es posible introducir la fórmula β dentro del radio de acción de $\forall x$?.

Vamos a suponer que el valor de verdad de β no depende de la valoración que hagamos de la variable x. Sabemos que esta dependencia se da cuando había alguna ocurrencia libre de x en β. Supondremos por tanto que esto no se da, es decir, la variable x no aparece en la fórmula β, o las ocurrencias de x en β son ligadas.

En función de los valores de verdad de $\forall x\alpha$ y β pueden darse los cuatro casos siguientes:

x	α	$\forall x\alpha$	β	$\forall x\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\forall x(\alpha \wedge \beta)$
$\vdots$	$*$				0	
a_i	0	0	0	0	0	0
$\vdots$	$*$				0	
$\vdots$	$*$				$*$	
a_i	0	0	1	0	0	0
$\vdots$	$*$				$*$	
a_1	1				0	
a_2	1				0	
$\vdots$	1	1	0	0	0	0
a_i	1				0	
$\vdots$	1				0	
a_1	1				1	
a_2	1				1	
$\vdots$	1	1	1	1	1	1
a_i	1				1	
$\vdots$	1				1	

donde $*$ significa que es indiferente el valor de verdad que tome.

Vemos que en los cuatro casos, $\forall x\alpha \wedge \beta$ y $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ tienen el mismo valor de verdad.

De la misma forma se comprueba que si la variable x no tiene ninguna ocurrencia libre en la fórmula β se dan las siguientes equivalencias:

1. $\forall x\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$.
2. $\exists x\alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$.
3. $\exists x\alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$.

Nótese que, dado que $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ y $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ se tienen las siguientes equivalencias

1. $\alpha \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$.
2. $\alpha \vee \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$.
3. $\alpha \wedge \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$.
4. $\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$.

El caso de que la variable x tenga alguna ocurrencia libre en β se estudiará más adelante. El siguiente ejemplo nos muestra, no obstante que el resultado no es cierto.

Ejemplo 6.7.2. *Sean las fórmulas*
$\varphi = \forall x(C(x,a) \to U(x)) \wedge P(x)$
$\phi = \forall x((C(x,a) \to U(x)) \wedge P(x))$.
Consideramos la estructura siguiente:

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}_5; \qquad a \mapsto 1; \qquad C(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x^2 = y \\ 0 & si\ x^2 \neq y \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ unidad \\ 0 & si\ x\ no\ es\ unidad \end{cases} \qquad P(x) = \begin{cases} 1 & si\ x^2 = x \\ 0 & si\ x^2 \neq x \end{cases}$$

Para la valoración $v(x) = 0$ los valores de verdad de ambas fórmulas son:

x	$C(x,a)$	$U(x)$	$C(x,a) \to U(x)$	$\forall x(C(x,a) \to U(x))$	$P(x)_{\ x=0}$	φ
0	0	0	1			
1	1	1	1			
2	0	1	1	1	1	1
3	0	1	1			
4	1	1	1			

x	$C(x,a)$	$U(x)$	$C(x,a) \to U(x)$	$P(x)$	$(C(x,a) \to U(x)) \wedge P(x)$	ϕ
0	0	0	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	
2	0	1	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0	
4	1	1	1	0	0	

Vemos entonces que no son equivalentes.

Ejercicio:
Da ejemplos que muestren que en general no son ciertas las equivalencias

1. $\forall x\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$.
2. $\exists x\alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$.
3. $\exists x\alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$.

Ejercicio:
Comprueba que si la variable x no tiene ninguna ocurrencia libre en β entonces $\beta \to \forall x\alpha \equiv \forall x(\beta \to \alpha)$, pero que en general $\forall x\alpha \to \beta$ no es equivalente a $\forall x(\alpha \to \beta)$.
Ejercicio:
Busca una fórmula equivalente a $\forall x\alpha \to \beta$ de forma que el radio de acción del cuantificador incluya a β.
Ejercicio:
Repite el ejercicio anterior con las fórmulas $\exists x\alpha \to \beta$ y $\beta \to \exists x\alpha$.

6.7.3. Sacar factor común

Ahora nos encontramos con fórmulas de la forma $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta$ y $\forall x\alpha \vee \forall x\beta$. Nos preguntamos si son equivalentes a las fórmulas $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ y $\forall x(\alpha \vee \beta)$ respectivamente. Es decir, tratamos de "sacar factor común" $\forall x$.

Enseguida podemos darnos cuenta que en el segundo caso no es posible. Consideramos los enunciados:
Todo número entero es par o impar.
Todo número entero es par o todo número entero es impar.
El primer enunciado es claramente cierto, mientras que el segundo no (pues no todo número entero es par ni todo número entero es impar). Basta encontrar una traducción a un lenguaje de primer orden de ambos enunciados, que adopten la forma $\forall x(\alpha \vee \beta)$ y $\forall x\alpha \vee \forall x\beta$ para convencernos de que no son equivalentes.

Para comprobar que en el primer caso sí se da la equivalencia, vamos a construir una tabla como en la sección anterior.

x	α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\forall x\alpha$	$\forall x\beta$	$\forall x\alpha \wedge \forall x\beta$	$\forall x(\alpha \wedge \beta)$
$\vdots$	$*$	$*$	$*$				
a_i	0	$*$	0				
$\vdots$	$*$	$*$	$*$	0	0	0	0
a_j	$*$	0	0				
$\vdots$	$*$	$*$	$*$				
$\vdots$	$*$	1	$*$				
a_i	0	1	0	0	1	0	0
$\vdots$	$*$	1	$*$				
$\vdots$	1	$*$	$*$				
a_i	1	0	0	1	0	0	0
$\vdots$	1	$*$	$*$				
$\vdots$	1	1	1				
a_i	1	1	1	1	1	1	1
$\vdots$	1	1	1				

Basándonos en esta equivalencia ($\forall x(\alpha \wedge \beta) \equiv \forall x\alpha \wedge \forall x\beta$), en las vistas en la primera sección y en las leyes de De Morgan obtenemos:

$$\exists x\alpha \vee \exists x\beta \equiv \neg\neg(\exists x\alpha \vee \exists x\beta) \equiv \neg(\neg\exists x\alpha \wedge \neg\exists x\beta) \equiv \neg(\forall x\neg\alpha \wedge \forall x\neg\beta) \equiv$$

$$\equiv \neg(\forall x(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) \equiv \neg\forall x\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \exists x\neg\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$$

Ejercicio:
Busca un ejemplo que muestre que $\exists x\alpha \wedge \exists x\beta$ y $\exists x(\alpha \wedge \beta)$ no son equivalentes.
Ejercicio:
Estudia si alguna de las siguientes fórmulas puede transformarse en alguna equivalente con un único cuantificador.

1. $\forall x\alpha \to \forall x\beta$.
2. $\forall x\alpha \to \exists x\beta$.
3. $\exists x\alpha \to \forall x\beta$.
4. $\exists x\alpha \to \exists x\beta$.

6.7.4. Cambio de variable

Sabemos que al interpretar una fórmula con una variable ligada, el valor que se le dé a dicha variable no interviene en la interpretación. Es decir, la variable en cuestión no es significativa. Nos preguntamos si una variable ligada podría ser cambiada por otra.

El siguiente ejemplo sencillo nos muestra que no siempre puede hacerse así:

Ejemplo 6.7.3. *Sea la fórmula $\exists z\forall xP(x,y,z)$, consideramos la estructura siguiente:*

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}_3; \qquad P(x,y,z) := \begin{cases} 1 & si\ xy = z \\ 0 & si\ xy \neq z \end{cases}$$

Con la valoración $v(x) = 1$, $v(y) = 0$, $v(z) = 1$ se tiene:

z	x	$P(x,y,z)_{y=0}$	$\forall x P(x,y,z)$	$\exists z \forall x P(x,y,z)$
0	0	1	1	1
	1	1		
	2	1		
1	0	0	0	
	1	0		
	2	0		
2	0	0	0	
	1	0		
	2	0		

Si cambiamos x por y, tenemos la fórmula $\exists z \forall y P(y,y,z)$, en cuyo caso tenemos

z	y	$P(y,y,z)$	$\forall y P(y,y,z)$	$\exists z \forall y P(y,y,z)$
0	0	1	0	0
	1	0		
	2	0		
1	0	0	0	
	1	1		
	2	0		
2	0	0	0	
	1	0		
	2	0		

El problema aquí es que la variable y por la que cambiamos la x ya aparece en la fórmula.

Supongamos que α es una fórmula en la que no hay ninguna ocurrencia de la variable y (ni libre ni ligada).

Entonces $\forall x\alpha \equiv \forall y \alpha_{x|y}$, y $\exists x\alpha \equiv \exists y \alpha_{x|y}$.

6.7.5. Inclusión de $\vee$ o $\wedge$ en el radio de acción de un cuantificador (II)

En la sección segunda estudiamos cómo incluir los conectores $\vee$ o $\wedge$ dentro del radio de acción de un cuantificador. Necesitábamos entonces que en una fórmula, una determinada variable no tuviera ocurrencias libres.

Supongamos ahora que tenemos una fórmula de la forma $\forall x\alpha \wedge \beta$, y que ahora la variable x aparece libremente en β. Entonces elegimos una variable que no tenga ninguna ocurrencia (ni libre ni ligada) en α ni ninguna ocurrencia libre en β. Sea ésta variable y. Entonces, sabemos que $\forall x\alpha \equiv \forall y\alpha_{x|y}$.

Entonces, la fórmula de partida es equivalente a $\forall y \alpha_{x|y} \wedge \beta$, y ésta, a su vez es equivalente a $\forall y(\alpha_{x|y} \wedge \beta)$.

De esta forma, ya hemos incluido el conector $\wedge$ en el radio de acción del cuantificador.

Ejemplo 6.7.4. *Sea $\varphi = \forall x P(x) \vee \exists y Q(x,y)$*

Puesto que la variable z no aparece en $P(x)$ ni en $\exists y Q(x,y)$, se tiene que

$$\varphi \equiv \forall z P(z) \vee \exists y Q(x,y) \equiv \forall z(P(z) \vee \exists y Q(x,y)).$$

Nos fijamos ahora en $P(z) \vee \exists y Q(x,y)$. Puesto que la variable y no aparece en $P(z)$, ésta fórmula es equivalente a $\exists y(P(z) \vee Q(x,y))$.

Con esto, concluimos que

$$\varphi \equiv \forall z \exists y(P(z) \vee Q(x,y)).$$

Nótese que en un principio podríamos haber sustituido la variable x por la variable y (ya que y no aparece en $P(x)$, y su única ocurrencia en $\exists y Q(x,y)$ es ligada). En tal caso, tendríamos

$$\varphi \equiv \forall y P(y) \vee \exists y Q(x,y) \equiv \forall y(P(y) \vee \exists y Q(x,y))$$

Ahora, al centrarnos en $P(y) \vee \exists y Q(x,y)$ necesitamos hacer un cambio de variable, pues la variable y tiene una ocurrencia libre en $P(y)$. Nos queda entonces:

$$\varphi \equiv \forall y(P(y) \vee \exists y Q(x,y)) \equiv \forall y(P(y) \vee \exists z Q(x,z)) \equiv \forall y \exists z(P(y) \vee Q(x,z))$$

También podríamos haber procedido como sigue:

$$\varphi \equiv \exists y(\forall x P(x) \vee Q(x,y)) \equiv \exists y(\forall z P(z) \vee Q(x,y)) \equiv \exists y \forall z(P(z) \vee Q(x,y))$$

Notemos que nos ha salido que

$$\varphi \equiv \forall z \exists y(P(z) \vee Q(x,y)) \equiv \exists y \forall z(P(z) \vee Q(x,y))$$

lo cual podría inducirnos a error, pues podría parecer que es posible intercambiar los cuantificadores.

Ejercicio:
Calcula el valor de verdad de las fórmulas $\forall x \exists y P(x,y)$ y $\exists y \forall x P(x,y)$ en la estructura con universo $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$, y $P(x,y) \equiv x = -y$.

6.7.6. Eliminación de cuantificadores

Consideramos la fórmula $\forall x \exists x P(x)$
Sea $\mathcal{U} = \mathbb{Z}_2$, y $P = \{1\}$. Entonces:

<table>
<tr><th>x</th><th>x</th><th>$P(x)$</th><th>$\exists x P(x)$</th><th>$\forall x \exists x P(x)$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="4">1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Vemos que lo realmente importante es la interpretación de la fórmula $\exists x P(x)$. Es decir, el cuantificador $\forall x$ podríamos eliminarlo.

En general, si C_1 y C_2 son dos cuantificadores (podrían coincidir), y α es una fórmula, entonces las fórmulas $C_1 x C_2 x \alpha$ y $C_2 x \alpha$ son equivalentes (si en una fórmula, una ocurrencia de una variable está cuantificada dos veces, el cuantificador que aparece más a la izquierda no influye sobre ella).

6.7.7. Resumen

Como resumen de todo esto, nos quedamos con la siguiente lista de equivalencias:

1. $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$.
2. $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$.
3. $\forall x\alpha \wedge \beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$ si x no es libre en β.
4. $\forall x\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$ si x no es libre en β.
5. $\exists x\alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$ si x no es libre en β.
6. $\exists x\alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$ si x no es libre en β.
7. $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$.
8. $\exists x\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$.
9. $\forall x\alpha \equiv \forall y\alpha_{x|y}$ si y no aparece en la fórmula α.
10. $\exists x\alpha \equiv \exists y\alpha_{x|y}$ si y no aparece en la fórmula α.
11. $\forall x\forall x\alpha \equiv \forall x\alpha$.
12. $\forall x\exists x\alpha \equiv \exists x\alpha$.
13. $\exists x\forall x\alpha \equiv \forall x\alpha$.
14. $\exists x\exists x\alpha \equiv \exists x\alpha$.