8 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

8.1 EXTREMOS ABSOLUTOS Y EXTREMOS RELATIVOS

Definición 8.1.1. Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ alcanza su *máximo absoluto* en $a \in A$ si $f(a) \geqslant f(x)$ para cualquier $x \in A$ o, lo que es lo mismo,

$$f(a) = \max\{f(x) : x \in A\}.$$

De forma análoga se define el mínimo absoluto. Usaremos la expresión *extremo absoluto* para referirnos a cualquiera de los dos conceptos.

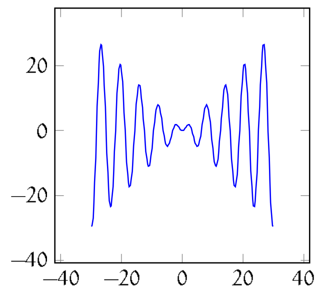


Figura 15.: Gráfica de la función $x\,\mathrm{sen}(x)$

Ejemplo 8.1.2. Si una función no está acotada superiormente, no tiene máximo. Si está acotada, tenemos garantizada la existencia de supremo, pero no de máximo. Por ejemplo, la función $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ está acotada, pero no tiene máximo ni mínimo. ♮

Definición 8.1.3. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A$.

1) Diremos que f tiene o alcanza un *máximo local* en $a \in A$ si existe $r > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(a)$ para cualquier $x \in]a-r, a+r[\cap A$.

2) Diremos que f tiene o alcanza un *máximo relativo* en $a \in A$ si es un máximo local y $a \in \mathring{A}$.

3) De forma análoga se definen mínimos locales y relativos.

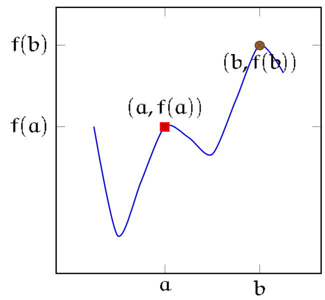


Figura 16.: Un máximo relativo o local puede no ser un máximo absoluto

Relación entre extremos absolutos y extremos relativos

1) Los extremos absolutos son extremos locales. El recíproco no es cierto como se puede ver en las figuras 15 y 16. Por ejemplo, la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$ no está acotada y, por tanto, no tiene extremos absolutos aunque tiene extremos locales.

2) Los extremos relativos son extremos locales que se alcanzan en puntos del interior del dominio. La función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ alcanza su máximo y mínimo absolutos, y por tanto locales, en los extremos del intervalo. No son extremos relativos al no estar en el interior del intervalo.

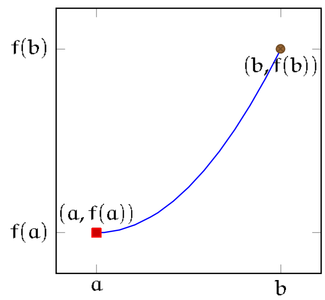


Figura 17.: Los extremos absolutos no son relativos si no se alcanzan en el interior del dominio

Resumiendo, los extremos absolutos son extremos locales y también son relativos si pertenecen al interior del dominio.

Proposición 8.1.4. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que f alcanza su máximo absoluto en $a \in A$. Entonces f tiene un extremo relativo en a si, y sólo si, $a \in \mathring{A}$.*

Ejemplo 8.1.5. 1) La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x)$ alcanza su máximo absoluto en aquellos puntos donde $\cos(x) = 1$, esto es, en los puntos de la forma $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Todos ellos son máximos absolutos y relativos.

Los mínimos absolutos, y relativos, se alcanzan en aquellos puntos en los que $\cos(x) = -1$, esto es, en los puntos de la forma $\{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

2) La función parte entera $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no está acotada ni superior ni inferiormente y, por tanto, no tiene extremos absolutos. Por otro lado, todos los puntos son máximos relativos y, salvo los enteros, todos son también mínimos relativos.

Extremos relativos y derivadas

Lema 8.1.6 (Teorema de Fermat)**.** *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función real de variable real. Supongamos que* f *tiene un extremo relativo en* $a \in A$ *y que* f *es derivable en* a*. Entonces* $f'(a) = 0$*.*

Demostración. Si a es un extremo relativo de f, entonces $A_a^+ \cap A_a^-$. Esto es, podemos estudiar el límite de la función f en a por la izquierda y por la derecha.

Supongamos que f tiene un máximo relativo en a. Entonces, por una parte,

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$$

ya que $f(a) \geqslant f(x)$ y $x \geqslant a$ cerca de a. Por otra parte

$$f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$$

ya que, ahora se sigue cumpliendo que $f(a) \geqslant f(x)$, pero $x \leqslant a$ cerca de a. Por tanto $f'(a) = 0$. Si f tiene un mínimo relativo en a, basta considerar $-f$ y aplicarle lo anterior. □

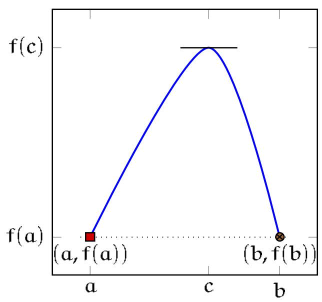


Figura 18.: El teorema de Rolle nos dice que entre dos raíces consecutivas de la función hay un cero de la derivada. En consecuencia, entre dos ceros consecutivos de la derivada hay, a lo sumo, un cero de la función. Esta idea es clave para contar el número de ceros de una función o de su derivada.

Definición 8.1.7. Diremos que a es un *punto crítico* de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ si $f'(a) = 0$.

8.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Teorema 8.2.1 (Teorema de Rolle)**.** *Sea* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$*, derivable en* $]a, b[$ *y verificando que* $f(a) = f(b)$*. Entonces existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

Demostración. Sabemos que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos: existen α, $\beta \in [a, b]$ tales que

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \min\{f(x) : x \in [a, b]\}, \text{ y} \\ f(\beta) &= \max\{f(x) : x \in [a, b]\}. \end{aligned}$$

Dichos máximo y mínimo pueden estar en el interior del intervalo o en los extremos:

1) Si $\alpha \in]a, b[$, entonces α es un mínimo relativo y, por tanto, $f'(\alpha) = 0$.

2) Si $\beta \in]a, b[$, entonces β es un máximo relativo y, por tanto, $f'(\beta) = 0$.

3) Si α, $\beta \in \{a, b\}$, entonces $\min f = \max f$ con lo que la función es constante y su derivada se anula siempre.

En cualquier caso, existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$. □

Geométricamente, el teorema de Rolle nos dice que hay un punto donde la pendiente de la función es cero o, lo que es lo mismo, la recta tangente a la función en dicho punto es horizontal, paralela a la recta que une los puntos

$(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Si eliminamos la hipótesis de que la función valga lo mismo en los extremos del intervalo, pasamos a tener el dibujo "girado". El teorema del valor medio nos dice que hay un punto donde la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta, ya no horizontal, que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

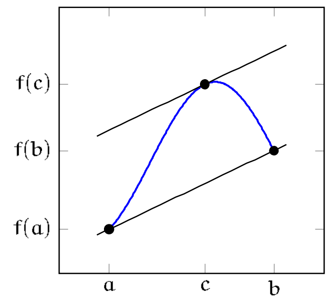


Figura 19.: Interpretación geométrica del teorema del valor medio

Teorema 8.2.2 (Teorema del valor medio de Lagrange)**.** *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a,b]$*, derivable en* $]a,b[$*. Entonces existe* $c \in]a,b[$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Demostración. Consideremos la función $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = (f(b) - f(a))\,x - f(x)(b-a).$$

La función g es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Además

$$\begin{aligned} g(a) &= (f(b) - f(a))\,a - f(a)(b-a) = f(a)(b-a) = f(b)a - f(a)b, \\ g(b) &= (f(b) - f(a))\,b - f(b)(b-a) = -f(a)b + af(b). \end{aligned}$$

Como $g(a) = g(b)$, el teorema de Rolle nos dice que existe $c \in]a,b]$ tal que $g'(c) = 0$, esto es,

$$g'(c) = (f(b) - f(a)) - f'(c)(b-a) = 0,$$

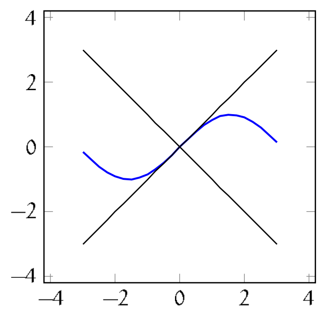
como queríamos. $\square$

Observación 8.2.3.

1) El teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio y, como acabamos de ver, el teorema del valor medio es una consecuencia del teorema de Rolle. Son dos resultados equivalentes.

2) Sea I un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable. Podemos aplicar el teorema del valor medio a cualquier intervalo $[x,y] \subset I$. Por tanto, dados $x, y \in I$ existe c (entre x e y) tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x).$$



Ejemplo 8.2.4. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Si x e y son números reales, $x \neq y$, existe $c \in]x,y[$ tal que $\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = \cos(c)(x-y)$. Usando que la función coseno toma valores en el intervalo $[-1,1]$, podemos acotar de la siguiente forma

$$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| = |\cos(c)(x-y)| = |\cos(c)|\,|x-y| \leqslant |x-y|\,.$$

En particular $|\operatorname{sen}(x)| \leqslant |x|$.

Ejemplo 8.2.5. Consideremos la función $f(x) = \log(x)$. Si $x \in \mathbb{R}^+$, $x > 1$ y aplicamos el teorema del valor medio al intervalo $[1,x]$, existe $c \in]1,x[$ tal que

$$f(x) - f(1) = f'(c)(x-1) \iff \log(x) = \frac{1}{c} \cdot (x-1).$$

Usando que $1/x$ es decreciente en los positivos, $1 \leqslant \frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{x}$, con lo que

$$\frac{x-1}{x} \leqslant \log(x) \leqslant x - 1.$$

Comprueba que la desigualdad también es cierta para $x \in]0,1[$.

Corolario 8.2.6. *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable. Supongamos que* $f'(x) = 0$ *para cualquier* $x \in I$*, entonces* f *es constante.*

Demostración. Sea $x, y \in I$ con $x < y$. Aplicando el teorema del valor medio, existe $c \in [x, y]$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0 \cdot (y - x) = 0,$$

como queríamos demostrar. □

Corolario 8.2.7. *Sea* I *un intervalo y sean* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *funciones derivables. Supongamos que* $f'(x) = g'(x)$ *para cualquier* $x \in I$*. Entonces existe* $K \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = g(x) + K$ *para cualquier* $x \in I$*.*

Demostración. Basta aplicar el corolario 8.2.6 a la diferencia $f - g$. □

Corolario 8.2.8. *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable. Supongamos que* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in I$*, entonces* f *es una función estrictamente creciente.*

8.2.1 Otra demostración del teorema de Rolle*

De la demostración que hemos hecho del teorema de Rolle se puede sacar la errónea impresión de que el punto donde la derivada se anula ha de ser un extremo relativo de la función.

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = f(b)$. Usando el ejercicio 4.15, podemos encontrar dos puntos $x_1, y_1 \in [a, b]$ tales que

$$y_1 - x_1 = \frac{b-a}{2} \quad \text{y} \quad f(x_1) = f(y_1).$$

Si repetimos, construimos por inducción dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $a \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant b$,

$$y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \text{y} \quad f(x_n) = f(y_n).$$

Además la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $x_n \leqslant y_n$, para cualquier n natural. Por tanto, ambas son convergentes y con el mismo límite, llamémoslo c.

Como

$$0 = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{y_n - c}{y_n - x_n} \cdot \frac{f(y_n) - f(c)}{y_n - c} + \frac{c - x_n}{y_n - x_n} \cdot \frac{f(c) - f(x_n)}{c - x_n}$$

los dos sumandos tienen signo distinto.

Si la función f es derivable en c, en particular si es derivable en $]a, b[$, se obtiene que $f'(c) = 0$.

Aunque la demostración parece más larga que la usual, observa que hemos evitado completamente el teorema de Weierstraß y el teorema de Fermat.

8.3 EJERCICIOS

Ejercicio 8.1. Sea $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de segundo grado. Si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, entonces

$$\frac{p(x) - p(y)}{x - y} = p'\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

9 ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

9.1 MONOTONÍA

9.1.1 Propiedades locales*

Definición 9.1.1. Sea I un intervalo, sea $a \in \mathring{I}$ y sea $f \colon I \to \mathbb{R}$ una función.

1) f es *localmente creciente* en a si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(a)$ si $a - \delta < x < a$ y $f(x) \geqslant f(a)$ si $a < x < a + \delta$.

2) f es *localmente decreciente* en a si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geqslant f(a)$ si $a - \delta < x < a$ y $f(x) \leqslant f(a)$ si $a < x < a + \delta$.

3) f es *localmente estrictamente creciente* en a si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(a)$ si $a - \delta < x < a$ y $f(x) > f(a)$ si $a < x < a + \delta$.

4) f es *localmente estrictamente decreciente* en a si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(a)$ si $a - \delta < x < a$ y $f(x) < f(a)$ si $a < x < a + \delta$

Se pueden definir las correspondientes versiones laterales, esto es, localmente creciente por la derecha o por la izquierda, etc.

Proposición 9.1.2. *Sea I un intervalo abierto y sea $f \colon I \to \mathbb{R}$ una función.*

1) *La función f es creciente en I si, y sólo si, es localmente creciente en todo punto de I.*

2) *La función f es estrictamente creciente en I si, y sólo si, es localmente estrictamente creciente en todo I.*

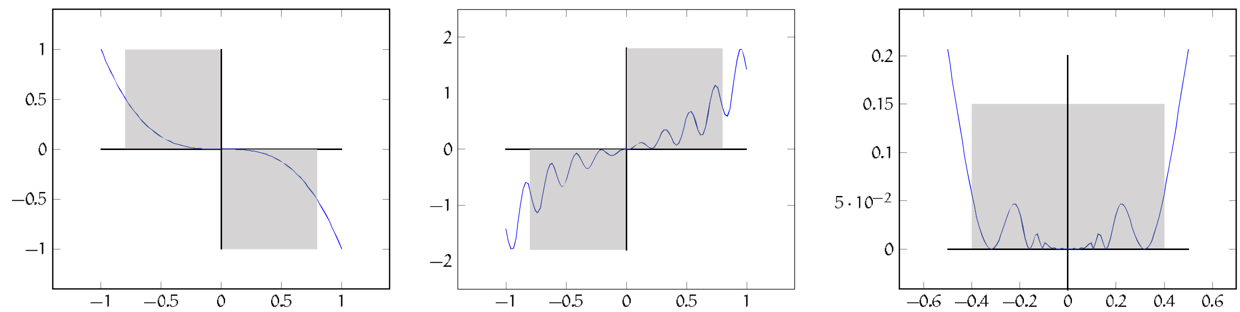


Figura 20.: Las funciones $-x^3$, $x^3 + x \operatorname{sen}^2(15x)$ y $x^2 \operatorname{sen}^2(1/x)$ son localmente decrecientes, localmente crecientes y tienen un mínimo local en cero, respectivamente

Observación 9.1.3. 1) Si dibujamos unos ejes en el punto a,

- la función es localmente creciente en a si su gráfica está en los cuadrantes primero y tercero cerca de dicho punto;
- si la gráfica está en el segundo y cuarto cuadrantes, la función es localmente decreciente;

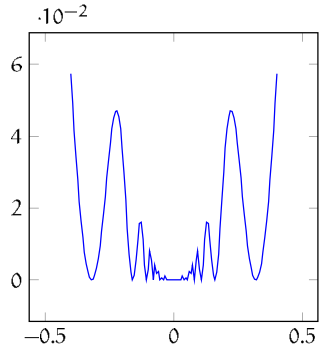


Figura 21.: La función del ejemplo 9.1.4 tiene un mínimo absoluto en el origen

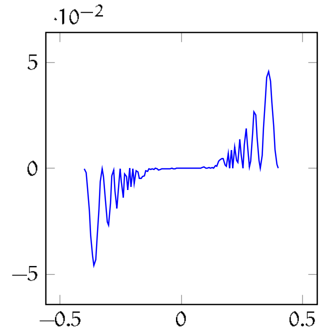


Figura 22.: La función del ejemplo 9.1.5 es localmente creciente, pero no es monótona

- por último, dependiendo de si la gráfica está en el primer y segundo cuadrantes o en el tercero y cuarto, la función tiene un mínimo o un máximo relativo.

2) Aunque una función sea localmente monótona en un punto, puede ocurrir que no sea monótona en ningún entorno de dicho punto.

Ejemplo 9.1.4. La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

cuya gráfica aparece en la figura 20, tiene un mínimo local (y absoluto) en el origen. Esto no se puede deducir del estudio de la monotonía de la función.

Ejemplo 9.1.5. La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es derivable, localmente creciente en el origen y no es monótona en ningún intervalo centrado en el origen.

9.1.2 Monotonía y derivabilidad

Comenzamos recogiendo en un enunciado todas las relaciones entre monotonía de una función y el valor de la derivada.

Proposición 9.1.6. *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable.*

1) f *es creciente si, y sólo si,* $f'(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in I$.
2) f *es decreciente si, y sólo si,* $f'(x) \leqslant 0$ *para todo* $x \in I$.
3) f *es constante si, y sólo si,* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in I$.
4) *Si* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in I$, *entonces* f *es estrictamente creciente.*
5) *Si* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in I$, *entonces* f *es estrictamente decreciente.*

Demostración. 1) Si f es creciente, el cociente incremental $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ es mayor o igual que cero y, por tanto, $f'(a) \geqslant 0$ para todo a. Recíprocamente, si la derivada es mayor que cero en cualquier punto y $x < y$ son dos elementos de I, el teorema del valor medio nos dice que existe $c \in]x, y[$ tal que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Como el miembro de la derecha es el producto de dos términos mayores o iguales que cero, se cumple que $f(y) - f(x) \geqslant 0$ como queríamos.

2) Basta considerar $-f$.

3) La derivada de una función constante es cero. El recíproco es el corolario 8.2.6. También es consecuencia directa de los dos apartados anteriores.

4) Usar el teorema del valor medio de nuevo.

5) Considerar $-f$. □

Observación 9.1.7. Hay funciones estrictamente monótonas cuya derivada se anula como, por ejemplo, la función $f(x) = x^3$.

Corolario 9.1.8. *Sea* $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ *una función derivable y sea* $c\in]a,b[$. *Supongamos que* $f'(x)\geqslant 0$ *para cualquier* $x\in]a,c[$ *y que* $f'(x)\leqslant 0$ *para cualquier* $x\in]c,b[$. *Entonces* f *tiene un máximo absoluto en* c.

Observación 9.1.9. Si $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ es continua y (estrictamente) monótona en $]a,b[$. Entonces f es (estrictamente) monótona en $[a,b]$.

Proposición 9.1.10. *Sea* I *un intervalo y* $f\colon I\to\mathbb{R}$ *una función derivable con* $f'(x)\neq 0$, *para cualquier* $x\in I$. *Entonces* f *es estrictamente monótona y se cumple que* $f'(x)>0$ *para todo* $x\in I$ *o que* $f'(x)<0$ *para todo* $x\in I$.

Demostración. Si $x, y\in I$, $x\neq y$, entonces existe c entre x e y tal que $f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)$. Como $f'(c)\neq 0$, se cumple que $f(x)\neq f(y)$. Por tanto, la función f es inyectiva. Ahora bien, una función continua, inyectiva y cuyo dominio es un intervalo es estrictamente monótona. Si es estrictamente creciente su derivada tiene que ser mayor o igual que cero, pero esta última posibilidad no puede darse y, por tanto, es positiva. De la misma forma, si la función es estrictamente decreciente, su derivada es negativa. □

Aplicación al estudio de una función

Los extremos o la imagen de una función continua y monótona son sencillos de calcular. Si la función es derivable, la monotonía se obtiene del estudio del signo de esta.

Ejemplo 9.1.11. Veamos que la ecuación $x^2 = x\,\mathrm{sen}(x)+\cos(x)$ tiene exactamente dos soluciones reales.

Definamos la función $f(x)=x^2-x\,\mathrm{sen}(x)-\cos(x)$, para $x\in\mathbb{R}$ que es evidentemente derivable en toda la recta real. Vamos a probar que f tiene exactamente dos ceros en la recta real; es decir, únicamente se anula en dos puntos. Para ello, analizamos los ceros de la derivada de f:

$$f'(x)=2x-x\cos(x)=x(2-\cos(x))$$

Para que la derivada de f se anule basta con que $x=0$, puesto que el segundo factor, $2-\cos(x)$, es siempre distinto de cero (más precisamente, positivo) ya que $\cos(x)<2$, para cualquier $x\in\mathbb{R}$. Por tanto, y aplicando el teorema de Rolle, si la derivada de f sólo se anula en un punto, la función f puede tener, a lo sumo, dos ceros. Vamos a comprobar que efectivamente tiene dos ceros.

El punto $x=0$ es además de punto crítico de f, es de mínimo relativo (el signo de f' depende del signo del factor x); y como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, junto a que $f(0)=-1<0$, deducimos que la función f admite dos ceros:

1) existe $a<0$ verificando que $f(a)=0$; y

2) existe $b>0$ tal que $f(b)=0$.

(Hemos razonado aplicando el teorema de Bolzano en $]-\infty,0[$ y en $]0,+\infty[$)

9.2 PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Teorema 9.2.1 (Teorema del valor intermedio para las derivadas)**.** *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I\to\mathbb{R}$ *una función derivable. Entonces* $f'(I)$ *es un intervalo.*

Demostración (1.ª versión). Por reducción al absurdo, si $f'(I)$ no es un intervalo, existen x e y en I y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $f'(x) < \lambda < f'(y)$ y $f'(t) \neq \lambda$ para todo $t \in [\min\{x,y\}, \max\{x,y\}]$. Consideremos la función $g\colon [\min\{x,y\}, \max\{x,y\}] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(t) - \lambda t$. Se cumple que $g'(t) \neq 0$ y sin embargo $g'(x) < 0 < g'(y)$ lo que es una contradicción con la proposición 9.1.10. □

Demostración (2.ª versión). También se puede demostrar el teorema de Darboux (ver [35]) usando el teorema del valor intermedio y el teorema del valor medio. Supongamos que f es una función derivable en $[a,b]$ y que $f'(a) < \lambda < f'(b)$.

1) Si $f'(a) < \lambda < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, consideremos la función $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{si } x \neq a, \\ f'(a), & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Como g es continua, por el teorema del valor intermedio existe $x_1 \in]a,b[$ tal que $g(x_1) = \lambda$. Ahora, aplicando el teorema del valor medio a la función f en el intervalo $[a, x_1]$, se tiene que existe $c \in [a, x_1]$ tal que

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(a)}{x_1 - a} = f'(c)$$

como queríamos.

2) Si $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \lambda < f'(b)$ se razona de forma similar.

3) Si $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lambda$ el resultado es consecuencia directa del teorema del valor medio. □

Figura 23.: Jean Gaston Darboux (1842–1917)

Definición 9.2.2 (Propiedad de Darboux). Sea I un intervalo. Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ verifica la *propiedad de Darboux* o del valor intermedio si para cualesquiera a y b en I con $a \leqslant b$ y para cualquier número y entre $f(a)$ y $f(b)$ existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = y$ o, lo que es lo mismo, $f([a,b])$ es un intervalo.

Ejemplo 9.2.3.

1) Las funciones continuas verifican la propiedad de Darboux. Eso es exactamente lo que dice el teorema del valor intermedio.

2) El teorema del valor intermedio para las derivadas nos dice que las derivadas verifican la propiedad de Darboux.

3) Una función que no lleve intervalos en intervalos, como por ejemplo la función parte entera, no puede ser ni continua ni la derivada de nadie. En particular, no existe una función cuya derivada sea la función parte entera.

*Funciones con la propiedad de Darboux**

En el siglo XIX algunos matemáticos pensaban que el teorema del valor intermedio era una propiedad que caracterizaba a las funciones continuas [9]. Fue, por tanto, una sorpresa cuando Darboux demostró que:

1) todas las derivadas verifican el teorema del valor intermedio, y que

2) existen derivadas que son discontinuas.

Ejemplo 9.2.4. La función $f\colon A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es derivable en toda la recta real, pero la función derivada no es continua en el origen. En efecto, la derivada la podemos calcular directamente en cualquier $x \neq 0$ y vale

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

En cero la calculamos usando la definición:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Obsérvese que el cálculo del límite de $f'(x)$ en cero es equivalente al del de la función coseno en infinito, que ya sabemos que no existe.

¿Qué propiedades tienen las funciones que verifican la propiedad de Darboux? La verdad es que pueden ser bastante "malas". Se pueden construir funciones con dicha propiedad y que son discontinuas en todos los puntos. En el siguiente ejemplo podemos ver que hay funcionas que verifican la propiedad de Darboux, pero no verifican el teorema de Weierstraß.

Ejemplo 9.2.5. La función $f\colon [0, 1/10] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} (1 - 3x)x^2 \operatorname{sen}(1/x), & \text{si } x \in]0, 1/10] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es derivable. Su derivada es una función acotada que no tiene máximo, a diferencia de las funciones continuas. Vamos a comprobarlo. Si $x \neq 0$,

$$f'(x) = \left(2x - 9x^2\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2 - 3x^3}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

La derivada en cero la calculamos usando la definición:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} (1 - 3x) x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

al ser el producto de una función que tiende a cero, x, por otra acotada. No es difícil comprobar que la derivada no tiene límite en cero y que, por tanto, f' no es continua en cero.

Por último, veamos que

$$\sup\left\{ f'(x) : x \in \left[0, \frac{1}{10}\right] \right\} = 1,$$

pero que dicho supremo no se alcanza: si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x - 9x^2\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - (1 - 3x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\leqslant \left(2x - 9x^2\right) + (1 - 3x) = 1 - x - 9x^2 \\ &\leqslant 1 - x \leqslant 1. \end{aligned}$$

Para terminar, basta usar que

$$\lim_{k \to +\infty} f'\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) = \lim_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{(2k+1)\pi}\right) \cos\left((2k+1)\pi\right) = 1.$$

En resumen, la derivada f' es una función que verifica la tesis del teorema del valor intermedio, pero que no verifica la tesis del teorema de Weierstraß. No alcanza su máximo absoluto.

En los ejemplos anteriores, la función f' verifica la propiedad de Darboux.

Ejemplo 9.2.6. Si $x \in]0,1[$, podemos escribir x usando su expresión decimal de la forma

$$x = 0.a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

Figura 24.: Henri L. Lebesgue (1875–1941)

En ese caso, sea $y = 0.a_1 a_3 \ldots$. Definimos la función $f\colon]0,1[\to [0,1[$ de la siguiente forma:

1) $f(x) = 0$ si y no es periódico,
2) $f(x) = 0.a_{2n} a_{2n+2} \ldots$, si y es periódico con el primer periodo empezando en a_{2n-1}.

La función f verifica que $f(I) = [0,1[$ para cualquier intervalo I contenido en $]0,1[$. Como consecuencia, la función no es continua en ningún punto. Este ejemplo se debe a Lebesgue.

Discontinuidades de la derivada

Ya nos hemos encontrado (ejemplos 9.2.4 y 9.2.5) con funciones cuya derivada no es continua. En el siguiente resultado estudiamos los tipos de discontinuidades que se pueden presentar.

Proposición 9.2.7. *Sea I un intervalo, $a \in I$ y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $I \setminus \{a\}$.*

1) *Si f' tiene límite en a, entonces f es derivable en a y $f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$.*
2) *Si $\lim_{x\to a} f'(x) = +\infty$, entonces f no es derivable en a.*
3) *Si f' tiene laterales en a distintos, entonces f no es derivable en a.*

Como consecuencia la derivada de una función en un intervalo no tiene discontinuidades evitables ni de salto.

Demostración. 1) Sea $L = \lim_{x\to a} f'(x)$. Dado $x \neq a$, por el teorema del valor medio existe c_x entre a y x tal que $f(x) - f(a) = f'(c_x)(x-a)$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} f'(c_x) = L,$$

ya que c_x tiende también a a. Hemos demostrado que f es derivable en a y que $f'(a) = L$.

2) El mismo argumento del apartado anterior nos dice que en este caso

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$$

y, en particular, la función no es derivable en a.

3) Basta aplicar lo anterior a los límites laterales. □

Esto nos dice que el ejemplo 9.2.4 es la única forma en la que podemos construir funciones cuya derivada no sea continua: la discontinuidad no puede ser evitable, ni de salto. Tiene que ser esencial.

9.3 FUNCIÓN INVERSA

Una de las dificultades para aplicar el teorema de la función inversa es demostrar que la inversa es una función continua. Si trabajamos con intervalos, el teorema del valor medio nos resuelve esta cuestión

Teorema 9.3.1 (Teorema de la función inversa (versión global)). *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable con* $f'(x) \neq 0$*, para todo* $x \in I$*. Entonces* f *es inyectiva y su función inversa,* f^{-1}*, es derivable en* $f(I)$ *con*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \textit{para todo } y \in f(I).$$

Demostración. Como la derivada es distinta de cero, la función es estrictamente monótona y, por tanto, inyectiva. Su inversa es continua (es monótona y su imagen, I, es un intervalo). El teorema de derivación de la función inversa nos da lo pedido. □

Ejemplo 9.3.2. Conocida que la derivada de la función exponencial es ella misma, podemos calcular la derivada del logaritmo: si $f(x) = e^x$,

$$\left(f^{-1}\right)'(e^x) = \frac{1}{e^x},$$

con lo que, si notamos $y = e^x$, obtenemos que $\left(f^{-1}\right)'(y) = 1/y$.

Teorema 9.3.3 (Teorema de la función inversa (versión local)). *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable. Sea* $a \in I$ *y supongamos que* $f'(a) \neq 0$ *y que* f' *es continua en* a*. Entonces existe* $\delta > 0$ *tal que la restricción de* f *al intervalo* $I_\delta =]a-\delta, a+\delta[\cap I$ *es una función,* g*, inyectiva, derivable y la derivada de su inversa es*

$$\left(g^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(g^{-1}(y))} \quad \textit{para todo } y \in g(I_\delta).$$

Demostración. Como f' es continua en a y $f'(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \neq 0$ para cualquier $x \in I_\delta = I \cap]a-\delta, a+\delta[$. La función f restringida al intervalo I_δ está en las condiciones del teorema 9.3.1 y basta aplicarlo para obtener lo pedido. □

Ejemplo 9.3.4. Vamos a demostrar que existe una única función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ derivable tal que

$$f(x)^5 + f(x)^7 + \log(f(x)) = x, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Como consecuencia, calcularemos $f'(2)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Consideremos la función $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = x^5 + x^7 + \log(x), \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

La función g es derivable y su derivada,

$$g'(x) = 5x^4 + 7x^6 + \frac{1}{x} > 0, \quad (x \in \mathbb{R}^+),$$

es estrictamente positiva. Por tanto, g es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}^+$ en su imagen:

$$g(\mathbb{R}^+) = \left] \lim_{x\to 0} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x) \right[= \mathbb{R}.$$

La versión global del teorema de la función inversa nos dice que existe g^{-1}, la función f que estábamos buscando, que es única, derivable y

$$\left(g^{-1}\right)'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}, \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

En particular,

$$\left(g^{-1}\right)'(2) = \left(g^{-1}\right)'(g(1)) = \frac{1}{5+7+1} = \frac{1}{13}.$$

De la definición de función inversa se tiene que $\lim_{x\to-\infty} g^{-1}(x) = 0$.

Figura 25.: El teorema del valor medio generalizado se debe a Augustin Louis Cauchy (1789–1957)

9.4 REGLAS DE L'HÔPITAL

Teorema 9.4.1 (Teorema del valor medio generalizado). *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas en* $[a,b]$ *y derivables en* $]a,b[$. *Entonces existe* $c \in]a,b[$ *tal que*

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c).$$

Demostración. Consideremos la función $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 1 & f(a) & g(a) \\ 1 & f(b) & g(b) \end{vmatrix} \\ &= f(a)g(b) + f(b)g(x) + f(x)g(a) - f(a)g(x) - f(b)g(a) - f(x)g(b) \\ &= \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x) + f(a)g(b) - f(b)g(a). \end{aligned}$$

La función h es continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y $h(a) = h(b) = 0$. Por tanto, el teorema de Rolle nos dice que existe $c \in]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$ o, lo que es lo mismo,

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(c) = 0,$$

como queríamos demostrar. □

Primera regla de L'Hôpital

Lema 9.4.2. *Sean* $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ *dos funciones derivables. Supongamos que*

1) $g'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in]a,b[$.
2) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Entonces, la función g *no se anula y se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1) *Si* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, *se tiene que* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
2) *Si* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, *se tiene que* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.
3) *Si* $\lim_{x\to a} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = +\infty$, *se tiene que* $\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$.

Demostración. En primer lugar, obsérvese que podemos extender de forma continua ambas funciones a $[a,b[$ definiendo $f(a) = g(a) = 0$.

Si $x \in]a,b[$, existe c_x tal que $g(x) - g(a) = g'(c_x)(x-a)$. Como $g'(c_x) \neq 0$, entonces $g(x) \neq g(a) = 0$.

Consideremos una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de $]a, b[$ convergente a a. Para cada n natural, por el teorema del valor medio generalizado, existe $c_n \in]a, x_n[$ tal que

$$(f(x_n) - f(a))\, g'(c_n) = (g(x_n) - g(a))\, f'(c_n).$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Obsérvese que, como $\lim x_n = a$, se tiene que $\lim c_n = a$ también.

1) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$, con lo que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ se razona de la misma manera.

3) Similar □

Proposición 9.4.3 (Primera regla de L'Hôpital). *Sea* I *un intervalo,* $a \in I$ *y sean* $f, g \colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *funciones derivables. Supongamos que*

1) $g'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in I \setminus \{a\}$.

2) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Entonces, la función g *no se anula en* $I \setminus \{a\}$ *y se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, *se tiene que* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, *se tiene que* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.

3) Si $\lim_{x\to a} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = +\infty$, *se tiene que* $\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$.

Demostración. Usar el lema anterior con los límites laterales. □

Ejemplo 9.4.4. Para calcular

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \tan(x) + \operatorname{sen}^2(x) + \frac{x^3}{3} - x\right)^{1/x^2}$$

aplicamos la regla del número e ya que estamos ante una indeterminación de la forma 1^∞. El límite que tenemos que estudiar es

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) + \operatorname{sen}^2(x) + \frac{x^3}{3} - x}{x^2}$$

que se resuelve aplicando la primera regla de L'Hôpital dos veces y se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) + \operatorname{sen}^2(x) + \frac{x^3}{3} - x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x) + 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + x^2}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x)\left(1 + \tan^2(x)\right) + 2\cos^2(x) - 2\operatorname{sen}^2(x) + 2x}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \tan(x) + \operatorname{sen}^2(x) + \frac{x^3}{3} - x\right)^{1/x^2} = e.$$

Segunda regla de L'Hôpital

Lema 9.4.5. *Sean* $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ *dos funciones derivables. Supongamos que*

1) $g'(x) \neq 0$, *para todo* $x \in]a,b[$.

2) $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$.

Entonces, la función g *no se anula en un entorno de* a *y se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, *se tiene que* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, *se tiene que* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.

3) Si $\lim_{x\to a} \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = +\infty$, *se tiene que* $\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$.

Demostración. La función no se anula en un entorno de a ya que $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$. Además como $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$, la función g es inyectiva.

En primer lugar, vamos a escribir el cociente de las funciones f y g de forma que se pueda relacionar con el cociente de las derivadas usando el teorema del valor medio: dados x e y distintos,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(y)+f(y)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}\\ &= \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\cdot\frac{g(x)-g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}\\ &= \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\cdot\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}.\end{aligned} \tag{9.1}$$

Vamos a completar la demostración en cada uno de los casos.

1) Restando L y tomando valores absolutos en la desigualdad (9.1), obtenemos que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leqslant \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - L\right| + \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\cdot\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| \tag{9.2}$$

Fijamos $\varepsilon > 0$ y usamos que el límite del cociente de las derivadas es L: existe $\delta_1 > 0$ tal que si $t \in]a,b[$, $0 < |t-a| < \delta_1$ entonces

$$\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fijamos $y \in]a,b[$ tal que $0 < |y-a| < \delta_1$. Entonces si $x \in]a,b[$ y $0 < |x-a| < \delta_1$, usando el teorema del valor medio generalizado, se cumple que

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - L\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{9.3}$$

ya que c cumple que $0 < |c-a| < \delta_1$. En particular,

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| \leqslant |L| + \frac{\varepsilon}{3}$$

para cualquier $x \in]a,b[$ tal que $0 < |x-a| < \delta_1$.

Como $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$, existe $\delta_2 > 0$ (podemos suponer que $\delta_2 < \delta_1$) tal que si $x \in]a,b[$ y $0 < |x-a| < \delta_2$ entonces

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\cdot\frac{g(y)}{g(x)}\right| = \left|\frac{(f(x)-f(y))g(y)}{g(x)-g(y)}\right|\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{9.4}$$

usando que $\frac{(f(x)-f(y))g(y)}{g(x)-g(y)}$ está acotado en $]a-\delta_1, a+\delta_1[\cap(I\setminus\{a\})$.

Por último, de nuevo usando que $\lim_{x\to a}|g(x)| = +\infty$, existe $\delta_3 > 0$ tal que si $x \in]a,b[$ y $0 < |x-a| < \delta_3$ entonces

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9.5}$$

Si tomamos $\delta < \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, y $0 < |x-a| < \delta$, entonces podemos acotar (9.2) usando (9.3), (9.4) y (9.5):

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &< \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - L\right| + \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\cdot\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

2) Similar.

3) Similar. □

Proposición 9.4.6 (Segunda regla de L'Hôpital)**.** *Sea* I *un intervalo,* $a \in I$ *y sean* $f, g\colon I\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ *funciones derivables. Supongamos que*

1) $g'(x) \neq 0$*, para todo* $x \in I\setminus\{a\}$.

2) $\lim_{x\to a}|g(x)| = +\infty$.

Entonces, la función g *no se anula en un entorno de* a *y se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1) Si $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$*, se tiene que* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2) Si $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$*, se tiene que* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.

3) Si $\lim_{x\to a}\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = +\infty$*, se tiene que* $\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$.

Demostración. Usar el lema anterior. □

Corolario 9.4.7. *Sea* I *un intervalo no acotado superiormente. Sean* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *dos funciones derivables. Supongamos que*

1) $g'(x) \neq 0$*, para todo* $x \in I$

y que se cumple una de las dos siguientes condiciones

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$*, o*

2') $\lim_{x\to+\infty}|g(x)| = +\infty$

Entonces existe $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) \neq 0$ *para cualquier* $x \in I$, $x > M$ *y, además*

1) Si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$*, entonces* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2) Si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$*, entonces* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.

Ejemplo 9.4.8. Calcula el límite en $+\infty$ de la función

$$f(x) = \frac{2x+\operatorname{sen}(2x)}{x\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}\,.$$

9.5 EJERCICIOS

Ejercicio 9.1. Da un ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no constante y que tenga un máximo relativo en todo punto de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 9.2. Determina la imagen de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

1) $A = [0,2]$, $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 1$, $\forall x \in A$;

2) $A = [-2,2]$, $f(x) = 1 - \sqrt{2|x| - x^2}$, $\forall x \in A$;

3) $A = \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}(x^2 - 3)$, $\forall x \in A$.

Ejercicio 9.3. Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función continua en $[0,1]$ y derivable en $]0,1[$. Supongamos que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in]0,1[$. Demuestra que existe un único $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

Ejercicio 9.4. Calcula la imagen de la función $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(\log|x|)$.

Ejercicio 9.5.

1) Calcula los extremos relativos y la imagen de la función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$.

2) ¿Qué número es mayor e^π o π^e? ¿Qué número es mayor $999999^{1000000}$ o 1000000^{999999}?

Ejercicio 9.6. Calcula $\max\left\{ \sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Ejercicio 9.7. Calcula el número de soluciones de la ecuación $x + e^{-x} = 2$.

Ejercicio 9.8. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Prueba que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución real.

Ejercicio 9.9. Determina el número de soluciones reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = m$ según el valor del número real m.

Ejercicio 9.10. Demuestra que la ecuación $\tan(x) = x$ tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 9.11. Prueba que:

1) $1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x\,e^x$, con $x \in \mathbb{R}$;

2) $\frac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$, con $x > -1$.

3) $\frac{\log(x)}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, con $x > 0$, $x \neq 1$.

Ejercicio 9.12. Demuestra que $x - \frac{x^3}{3} \leqslant \arctan(x) \leqslant x$, para cualquier $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Ejercicio 9.13. Demuestra la desigualdad de Bernoulli: $(1+x)^a \geqslant 1 + ax$, para $a \geqslant 1$ y $x > -1$.

Ejercicio 9.14. Demuestra que $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$ para cualquier $x > 0$.

Ejercicio 9.15. Demuestra que $x^r \leqslant rx + (1-r)$ para cualquier $x > 0$ y $r \in]0,1[$.

Ejercicio 9.16. Sea $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Estudia la continuidad y su comportamiento en 1, $+\infty$ y $-\infty$. Calcula su imagen.

Ejercicio 9.17. Demuestra que, para todo $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, se tiene que

$$\frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen}(x) < x < \tan(x).$$

Ejercicio 9.18. Sea a un número positivo. Demuestra que

$$\left(\frac{ex}{a}\right)^a \leqslant e^x,$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^+$ y que la igualdad se da si, y sólo si, $x = a$.

Ejercicio 9.19. Prueba que:

1) si, $0 < x \neq 1$, entonces $\frac{x-1}{x} < \log(x) < x - 1$;
2) si $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$, entonces

$$\log\left(\frac{j+1}{j}\right) < \frac{1}{j} < \log\left(\frac{j}{j-1}\right);$$

3) si, $n, k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, se tiene que

$$\log\left(k + \frac{1}{n}\right) < \sum_{j=n}^{kn} \frac{1}{j} < \log\left(k + \frac{k}{n-1}\right)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{kn} \frac{1}{j} = \log(k).$$

4) Como consecuencia demuestra que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \log(2).$$

Ejercicio 9.20. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $[0,1]$ con $f(0) = 0$. Supongamos que la función f' es creciente. Prueba que la función $g\colon]0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, para todo $x \in]0,1]$, también es creciente.

Ejercicio 9.21. Sea $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que $\inf\{f'(x) : x \geqslant 0\} > 0$. Demuestra que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Ejercicio 9.22. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = L \in \mathbb{R}$. Demuestra que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ y que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Indicación: usa la función $f(x)e^x/e^x$.

Ejercicio 9.23. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ y que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L \in \mathbb{R}$. Calcula L.

Ejercicio 9.24. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $[0,1]$ con $f(0) = 0$.

1) Supongamos que $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$ para todo $x \in [0,1]$. Prueba que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.
2) Supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M|f(x)|$ para todo $x \in [0,1]$. Prueba que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Ejercicio 9.25. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) = \alpha f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, siendo α una constante. Prueba que $f(x) = f(0)\,e^{\alpha x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9.26. Sean a, $b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$, tal que $f(a) = f(b) = 0$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, prueba que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.

Ejercicio 9.27. Da un ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}^*$, con $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, que no sea monótona.

Ejercicio 9.28. Sea $a > 0$ con $a \neq 1$. Se define la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^x-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ \log(a), & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudia su derivabilidad.

Ejercicio 9.29. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, estudia la derivabilidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leqslant 0, \\ x^\alpha, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ejercicio 9.30. Sea $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función derivable y supongamos que la derivada es continua en 0. Estudia la derivabilidad de las extensiones par, g_1, e impar, g_2, de f, es decir, las funciones definidas por

$$g_1(x) = f(|x|), \quad g_2(x) = (\operatorname{sgn} x) f(|x|).$$

Ejercicio 9.31. Estudia la continuidad, derivabilidad y el comportamiento en $+\infty$ y $-\infty$ de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 9.32. Sea $a \in \mathbb{R}$. Estudia la continuidad, derivabilidad y continuidad de la derivada de la función $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 9.33. Estudia el comportamiento en $+\infty$ de las funciones f, $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas como sigue, siendo $a \in \mathbb{R}^+$ una constante

1) $f(x) = \dfrac{\log(2 + a\,e^x)}{\sqrt{2 + a\,x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}^+$; 2) $f(x) = (a^x + x)^{1/x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 9.34. Estudia el comportamiento en $+\infty$ de la función $h\colon]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

1) $h(x) = \dfrac{x\left(x^{1/x} - 1\right)}{\log(x)}$,

2) $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$,

3) $h(x) = \left(\dfrac{x+5}{2x^2-1}\right)^{\frac{x-2}{x^2+3}}$.

Ejercicio 9.35. Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una función derivable en 1 y verificando que

$$f(f(x)) = x^2,$$

para todo x positivo. Demuestra que $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ o que $f(x) = x^{-\sqrt{2}}$.

Ejercicio 9.36. Sea $g\colon \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función definida por $g(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Prueba que g es biyectiva, continua y estrictamente creciente. Da una expresión explícita de su inversa.

Ejercicio 9.37. Estudia el comportamiento de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

1) $A =]2, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$, $\alpha = 2$.

2) $A =]1, +\infty[\setminus\{2\}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+3} - 1}{(x-2)\sqrt{x-1}}$, $\alpha = 1, 2$.

3) $A =]-1, 1[\setminus\{0\}$, $f(x) = \dfrac{\log(1-x^2)}{x^2-x^4}$, $\alpha = \pm 1, 0$.

4) $A =]-\pi/3, \pi/3[\setminus\{0\}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2+x} - 2}{\operatorname{sen}(3x)}$, $\alpha = \pm\frac{\pi}{3}, 0$.

Ejercicio 9.38. Calcula los siguientes límites

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{1+x^2}}{x^4}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 3x - 9 + 9\sqrt[3]{1+x}}{x^3}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \arctan(x/2)}{\cos(x)\operatorname{sen}^3(2x)}$

Ejercicio 9.39. Estudia el límite en $+\infty$ de las siguientes funciones

1) $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

3) $f(x) = \left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+1}\right)^{(x^3+2)/x}$

4) $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)^{1/\log(x+1)}$

Ejercicio 9.40. Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)\operatorname{sen}(x) - x^2 + x^3}{x^3}$.

Ejercicio 9.41. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que la función $f + f'$ tiene límite en $+\infty$. Probar que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. (Sugerencia: Usa la regla de L'Hôpital con la función $e^x f(x)$).

Ejercicio 9.42. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que f es biyectiva y que f^{-1} es derivable en todo $\mathbb{R}$. Calcula $(f^{-1})'(1)$ y $(f^{-1})'(1+e)$.

Ejercicio 9.43. Prueba que existe una única función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ verificando:

$$\log(f(x)) + \sqrt{f(x)} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prueba también que f es derivable en $\mathbb{R}$ y calcula $f'(1)$.

Ejercicio 9.44. Prueba que existe una única función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica que

$$\exp(f(x)) + f(x)^3 = x.$$

Demuestra que f es derivable y calcula $f'(1)$.

Ejercicio 9.45. Prueba que existe una única función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ derivable tal que

$$f(x)^5 + f(x)^7 + \log(f(x)) = x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Calcula $f'(2)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Ejercicio 9.46. Prueba que existe una única función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica que

$$f(x) + \exp(f(x)) = \arctan(f(x)) + x.$$

Demuestra que f es derivable y calcula $f'(1)$.

Ejercicio 9.47.

1) Si $x \in]1,\infty[\setminus\{e\}$, entonces existe un único número $f(x) \neq x$ en $(0,\infty)$ tal que

$$x^{f(x)} = f(x)^x.$$

Sugerencia: $x^y = y^x$ si y solo si $\frac{\log x}{x} = \frac{\log y}{y}$.

2) Representa la función f del apartado anterior.

3) Si $m < n$ son dos números naturales tales $m^n = n^m$, entonces $m = 2$ y $n = 4$.

Ejercicio 9.48. De los vértices de un cuadrado de cartón se recortan cuatro cuadrados iguales y, plegando hacia arriba los rectángulos laterales resultantes, se fabrica una caja de base cuadrada, sin tapa. ¿Cómo podemos conseguir que el volumen de la caja obtenida sea el máximo posible?

Ejercicio 9.49. Calcula las dimensiones del trapecio con mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio 1.

Ejercicio 9.50. A un espejo rectangular de medidas $80\,\mathrm{cm} \times 90\,\mathrm{cm}$ se le rompe (accidentalmente) por una esquina un triángulo de lados $10\,\mathrm{cm} \times 12\,\mathrm{cm}$ como indica el dibujo. Calcula las medidas del espejo de mayor área de forma rectangular que se puede obtener del la pieza restante.

Ejercicio 9.51. Calcula las dimensiones de la cruz simétrica respecto de los ejes y con área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 1.

Ejercicio 9.52. Calcula el punto (a, b) de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo determinado por la recta tangente a la parábola en dicho punto y los ejes de coordenadas tenga área mínima.

Ejercicio 9.53. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engendrado de esta manera?

Ejercicio 9.54. Calcula el área máxima del rectángulo circunscrito a un rectángulo de lados a y b.