Recurrencias

Fco. M. García Olmedo
Universidad de Granada
España

21 de octubre de 2017

Resumen

Contiene un resumen del fundamento teórico para la resolución de relaciones de recurrencia lineales homogéneas y algunas no homogéneas. Se dan ejemplos y se proponen algunos ejercicios.

Índice

Índice de figuras

1. Introducción.

Es usual en el trabajo matemático y en las aplicaciones de sus resultados, necesitar construir un "objeto de tamaño $n+1$" a partir de otro similar de tamaño n, una vez determinado el objeto para un tamaño primero -0 ó 1-. En el presente capítulo, y en este orden de ideas, se abordará el estudio de funciones numéricas $a(n)$, $0 \leq n$, -o mejor a_n- donde a_n depende de algunos términos de entre $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Este estudio se ha denominado clásicamente con el título de *Ecuaciones de Recurrencia* o *Ecuaciones de Diferencias* y supone en el fondo la versión discreta de la idea de ecuación diferencial ordinaria. A pesar de todo, nuestro enfoque no recurre a dicha teoría.

El estudio de las relaciones de recurrencia puede rastrearse hasta la relación de *Fibonacci*: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \leq 0$; F_0, $F_1 = 1$, investigada por *Leonardo de Pisa* (1175-1250) en 1202. En su libro *Liber Abaci* se ocupó de un problema sobre el número de conejos que resultan en un año, si se comienza con una sola pareja que cría otra al final de cada mes. Cada nueva pareja comienza a reproducirse de igual manera al cabo de un mes del nacimiento, y se supone que ningún conejo muere durante el año dado. Así, al final del primer mes hay dos parejas de conejos, tres a los dos meses, cinco a los tres meses y así sucesivamente.

Esta misma sucesión aparece en los trabajos del matemático alemán *Johannes Kepler* (1571-1630), quién la utilizó en sus estudios sobre cómo pueden ordenarse las hojas de una planta o flor alrededor de su tallo. En 1844, el matemático francés *Gabriel Lamé* (1795-1870) utilizó la sucesión en su análisis de la eficiencia del *Algoritmo de Euclides*. Más tarde, *François Lucas* (1842-1891) dedujo varias propiedades de esta sucesión y fue el primero en llamarla *Sucesión de Fibonacci*.

Una *definición recursiva* de una sucesión especifica uno o varios términos iniciales y una regla para calcular el resto en función de términos anteriores. Esta forma de definir una sucesión resulta útil pra resolver problemas de conteo. La regla que define unos términos en función de los que preceden se llama *relación de recurrencia*.

Más concretamente, una relación de recurrencia para la sucesión $\{u_n\}$ es una ecuación que determina el término u_n en función de los términos anteriores, es decir, $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$, para todos los números naturales n tales que $n \geq n_0$ siendo n_0 un número natural. Una sucesión es una *solución* de una relación de recurrencia si sus términos satisfacen la relación para todo entero positivo n.

Supongamos que nos enfrentamos al siguiente problema: un banco incrementa el capital depositado en un $6\,\%$ anual y compone mensualmente el interés. Si un depositario deposita 1000 euros en determinada fecha, ¿a cuánto ascenderá su depósito un año después?

Consideremos la situación abstracta que es modelada en el ejemplo 1.1 que sigue.

Ejemplo 1.1. Supongamos que a y c son constantes conocidas y consideremos las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} u_0 = c \\ u_{n+1} - au_n = 0, \quad \text{para todo } n \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

La sucesión $\{x_n\}$ sugerida por:

$$\begin{aligned} x_0 &= c \\ x_1 &= ax_0 = ac \\ x_2 &= ax_1 = a(ac) = a^2c \\ x_3 &= ax_2 = a(a^2c) = a^3c \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

es una solución a la relación de recurrencia 1. Es fácil conjeturar que la solución debe ser $\{x_n\}$, donde para todo natural n se cumple $x_n = c \cdot a^n$. Desmostremos por inducción que esto es así. En efecto, (paso base) para $n = 0$, $x_0 = ca^0 = c \cdot 1 = c$. Supongamos el resultado cierto para $k \geq 0$ y demostremos que también lo es para $k + 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k && \text{por ser } \{x_n\} \text{ sol. de (1)} \\ &= a(ca^k) && \text{por la hip. de inducción} \\ &= ca^{k+1} && \text{agrupando factores.} \end{aligned}$$

Observación 1.1. Obsérvese que trivialmente la constante a puede ser traída a colación por ser la única raíz de $p(x) = x - a$, es decir, por ser la única solución de $x - a = 0$. En cuanto a c, es una constante arbitrariamente fijada o que viene dada por las condiciones de un problema concreto.

Ahora podemos abordar el problema introductorio en los siguientes términos.

Ejemplo 1.2. Un banco incrementa el capital depositado en un $6\,\%$ anual y compone mensualmente el interés. Si un depositario deposita 1000 euros en determinada fecha, ¿a cuánto ascenderá su depósito un año después?

Solución. La tasa de ingreso mensual será $6/12 = 0{,}5$, es decir, $0{,}5\,\%$. Entonces, el tanto por uno será $0{,}005$. Para $0 \le n \le 12$, representaremos por u_n el valor del depósito del depositario al cabo de n meses. Entonces, $u_{n+1} = u_n + 0{,}005u_n$ con lo que el problema que se plantea es:

$$\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1{,}005 \cdot u_n, \quad \text{para todo } 0 \le n \le 11 \end{cases} \tag{2}$$

Según lo dicho en el ejemplo 1.1, la solución al problema (2) es $x_n = 1000 \cdot 1{,}005^n$ medido en euros. Al cabo de un año, el capital del depositario será $x_{12} = 1000 \cdot 1{,}005^{12} = 1061{,}68$ euros. □

Ejemplo 1.3. Resolver la relación $u_n = u_{n-1} + 3n^2$, para todo $n \ge 1$. Particularizar la solución al caso $u_0 = 7$.

Solución. Sea $f(i) = 3i^2$ tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + f(1) \\ u_2 &= u_1 + f(2) = u_0 + f(1) + f(2) \\ u_3 &= u_2 + f(3) = u_0 + f(1) + f(2) + f(3) \\ &\vdots \\ u_n &= u_{n-1} + f(n) = u_0 + \sum_{i=1}^{n} f(i) \end{aligned}$$

En este caso tenemos:

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + \sum_{i=1}^{n} f(i) \\ &= u_0 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= u_0 + 3\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= u_0 + \frac{1}{2}(2n^3 + 3n^2 + n) \end{aligned}$$

En el caso $u_0 = 7$, tenemos:

$$u_n = 7 + \frac{1}{2}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

□

2. Teoría de la Recurrencia Lineal Homogénea

Definición 2.1. Sea k un número natural. Una relación de *recurrencia lineal homogénea* es cualquier igualdad de la forma:

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}, \text{ para todo } n \ge k \tag{3}$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son constantes. Si $a_k \ne 0$, el número k es denominado el *orden* de la relación de recurrencia 3. El polinomio:

$$p(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k \tag{4}$$

es denominado *polinomio característico* de la relación de recurrencia 3. La ecuación $p(x) = 0$, es decir,

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k = 0 \tag{5}$$

es denominada *ecuación característica* de la relación de recurrencia 3. Una sucesión $\{x_n\}$ satisface la relación de recurrencia 3 sii, por definición, para todo $n \ge k$ se cumple $x_n - \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i} = 0$, donde $a_0 = 1$. Solucionar la relación de recurrencia 3 es encontrar una sucesión que la satisfaga y entonces la misma se denomina *solución* de la relación de recurrencia lineal homogénea.

Ejemplo 2.1.

- Para el ejemplo de la relación de recurrencia:

$$u_n = 1{,}005u_{n-1}$$

  se tiene:

  - orden: $k = 1$
  - coeficientes: $a_1 = 1{,}005$
  - polinomio característico: $p(x) = x - 1{,}005$
  - ecuación característica: $x - 1{,}005 = 0$
  - solución: $\{c \cdot 1{,}005^n\}$

  Obsérvese que $1{,}005$ es la única solución de la ecuación característica.

- Para el ejemplo:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

  se tiene:

  - orden: $k = 2$
  - coeficientes: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$
  - polinomio característico: $p(x) = x^2 - x - 1$
  - ecuación característica: $x^2 - x - 1 = 0$
  - solución: $\{f_n\}$ donde

$$f_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

    para todo $n \geq 0$.

  Obsérvese que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son las dos soluciones de la ecuación característica.

Teorema 2.1. *Sea la relación de recurrencia 3, supongamos que:*

- *su ecuación característica (ecuación 5) tiene t raíces distintas: $r_1, \ldots, r_t$,*
- *para todo $1 \leq i \leq t$, la mulptiplicidad de r_i es m_i y $1 \leq m_i$,*
- $m_1 + \ldots + m_t = k$
- *y $\{x_n\}$ una sucesión.*

Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. *$\{x_n\}$ es una solución de la relación de recurrencia 3.*
2. *Para todo $1 \leq i \leq t$ y $0 \leq j \leq m_i - 1$, existen constantes α_{ij}, tales que para todo natural n:*

$$\begin{aligned} x_n &= (\alpha_{10} + \alpha_{11}n + \cdots + \alpha_{1(m_1-1)}n^{m_1-1})r_1^n \\ &+ (\alpha_{20} + \alpha_{21}n + \cdots + \alpha_{2(m_2-1)}n^{m_2-1})r_2^n \\ &\vdots \\ &+ (\alpha_{t0} + \alpha_{t1}n + \cdots + \alpha_{t(m_t-1)}n^{m_t-1})r_t^n \end{aligned} \tag{6}$$

Ejemplo 2.2. Supongamos que las raíces de la ecuación característica de una relación de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes son: 2, 2, 2, 5, 5 y 9; es decir, hay tres raíces distintas: la raíz 2 con multiplicidad 3, la raíz 5 con multiplicidad 2 y la raíz 9 con multiplicidad 1.

Solución. Según el Corolario 2.1 la forma general de la solución es:

$$(\alpha_{10} + \alpha_{11}n + \alpha_{12}n^2)2^n + (\alpha_{20} + \alpha_{21}n)5^n + \alpha_{30}9^n$$

□

3. Ejemplos de Recurrencia Lineal Homogénea

En la presente sección abordamos el estudio y resolución de ejemplos concretos de relaciones de recurrencia lineales homogéneas. El estudio será llevado a cabo como aplicación del Corolario 2.1

Observación 3.1. Supongamos estar en el ambiente del Corolario 2.1 y revisemos los caso elementales:

- En el caso $k = 1$, el polinomio característico de la relación de recurrencia no tendrá más que una raíz, digamos r. Así, la expresión 6 se concreta en:

$$x_n = \alpha r^n$$

  para todo natural n.

- En el caso $k = 2$, si el polinomio característico tiene coeficientes reales, respecto a sus raíces caben las siguientes posibilidades:

  - r_1 y r_2 son ambas reales y distintas; la expresión 6 se concreta en:

$$x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

    para todo natural n.

  - Si $r_1 = r_2$ y llamamos r a r_1, la expresión 6 se concreta en:

$$x_n = (c_1 + c_2 n) r^n$$

    para todo natural n.

  - r_1 y r_2 complejas y conjugadas; si expresados en forma polar r_1 y r_2 son:

$$\begin{aligned} r_1 &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r_2 &= r(\cos\theta - i\sin\theta) \end{aligned}$$

    entonces, según expresión 6:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + c_2 r^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)) \\ &= r^n(c_1(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + c_2(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))) \\ &= r^n((c_1 + c_2)\cos(n\theta) + (c_1 - c_2)i\sin(n\theta)) \\ & r^n(k_1\cos(n\theta) + k_2\sin(n\theta)) \end{aligned}$$

    donde $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = (c_1 - c_2)i$.

- En el caso en que la ecuación característica (ecuación 5) tenga k raíces distintas: $r_1, \ldots, r_k$, la expresión 6 se concreta en:

$$x_n = \alpha_1 r_1^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

  para todo natural n.

Ejemplo 3.1. Resuelva la relación de recurrencia $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$. Particularice el resultado suponiendo que $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$ (esta relación es conocida como *relación de Fibonacci* y su solución *sucesión de Fibonacci*).

Solución. La ecuación característica para este ejemplo es $r^2 - r - 1 = 0$ y sus raíces son $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como se tienen dos raíces reales distintas, $F_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ y $F_n = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ son soluciones; además, son linealmente independientes, pues una no es múltiplo de la otra. De este modo

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{7}$$

es la solución general, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Si conocemos los valores de los dos primeros términos de la sucesión solución será posible determinar los valores de c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} 0 &= F_0 = c_1 + c_2 \\ 1 &= F_1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, $-c_1 = c_2$ y entonces:

$$\begin{aligned} 2 &= c_1(1+\sqrt{5}) - c_1(1-\sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5}c_1 \end{aligned}$$

de donde

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

y en definitiva se tiene que la solución general será:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

□

Ejemplo 3.2. Resuelva la relación de recurrencia dada por $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, para todo $n \geq 0$. Particularice el resultado suponiendo que $n \geq 0$, $u_0 = 1$, $u_1 = 3$.

Solución. La relación de recurrencia dada dada es:

$$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$$

para la que $k = n + 2 - n = 2$ y la ecuación característica es:

$$0 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

por lo que la solución general, según el Corolario 2.1, es de la forma:

$$(c_1 + c_2 n)2^n$$

Para particularizar la solución al caso de las condiciones iniciales dadas consideraremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &= u_0 = (c_1 + 0c_2)2^0 = c_1 1 = c_1 \\ 3 &= u_1 = (c_1 + 1c_2)2^1 = (1 + c_2)2 && \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned} x_n &= (1 + \frac{1}{2}n)2^n \\ &= 2^n + \frac{1}{2}n2^n \\ &= 2^n + n2^{n-1} \end{aligned}$$

por lo que la solución particular es para todo natural n:[1]

$$x_n = 2^n + n2^{n-1}$$

□

[1] Observar que para $n = 0$ aún tiene sentido $2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$ y es $1 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Observación 3.2. En el que caso $k = 2$, suponiendo que el polinomio característico de la relación de recurrencia —que tendrá coeficientes reales— es irreducible, entonces no tendrá raíces reales y sí las dos complejas y distintas (si tiene una compleja, la otra debe ser la conjugada). En este caso aún es posible la resolución de la recurrencia, basta considerar que el cuerpo en el que se formula es el de los números complejos.

Antes de abordar el siguiente ejemplo debemos recordar algo sobre los número complejos:

1. Dado un número complejo $z = x + iy$, definimos $|z|$ por la siguiente igualdad:
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
2. Dado un número complejo $z = x + iy$, definimos $Re(z)$ e $Im(z)$ con las siguientes igualdades:
$$Re(z) = x \qquad\qquad Im(z) = y$$
3. Para todo número complejo z no nulo existen un número real r_z y un ángulo θ_z, expresado en radianes, tal que:
$$z = r_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$$
4. Dado un número complejo z no nulo,
$$\begin{aligned} r_z &= |z| \\ \theta_z &= \begin{cases} 2\arctan\frac{Im(z)}{Re(z)+|z|} & \text{, si } z \notin \mathbb{R}^- \\ \pi & \text{, si } z \in \mathbb{R}^- \end{cases} \end{aligned}$$
5. El *Teorema de DeMoivre* que dice que si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ y n es un número natural, entonces:
$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

y recordar también la fórmula trigonométrica:
$$\operatorname{tg}(\frac{a}{2}) = \frac{\sin a}{1+\cos a}$$

Ejemplo 3.3. Calcule $(1 + i\sqrt{3})^{10}$

Solución. Sea $z = 1 + i\sqrt{3}$. Se tiene que $r_z = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Por otra parte, dado que $z \notin \mathbb{R}^-$:
$$\frac{Im(z)}{Re(z) + |z|} = \frac{\sqrt{3}}{1+2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
y sabemos que $\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$. Mulitplicando por 2, resulta $\pi/3 = 2\arctan(1/\sqrt{3})$ y por tanto $\theta_z = \pi/3$. Entonces:
$$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$$
y por tanto
$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})^{10} &= 2^{10}(\cos(10\pi/3) + i\sin(10\pi/3)) \\ &= 2^{10}(\cos((2\cdot 3 + 2\cdot 2)\pi/3) + i\sin((2\cdot 3 + 2\cdot 2)\pi/3)) \\ &= 2^{10}(\cos(2\pi + 4\pi/3) + i\sin(2\pi + 4\pi/3)) \\ &= 2^{10}(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)) \\ &= 2^{10}((-1/2) - i(\sqrt{3}/2)) \\ &= -2^9(1 + i\sqrt{3})\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.4. Encuentre la expresión polar de $z = 1 + i$

Solución. Sea $z = 1 + i$. Entonces: $|z| = \sqrt{2}$, $Re(z) = 1$ e $Im(z) = 1$. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{2}} &= \frac{2}{2\sqrt{2}+2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{\sin(\pi/4)}{1+\cos(\pi/4)} \\
&= \tan(\frac{\pi/4}{2})
\end{aligned}$$

luego $\pi/4 = 2\arctan(\frac{1}{1+\sqrt{2}})$. Por tanto:

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$$

□

Ejemplo 3.5. Resuelva la relación de recurrencia dada por $u_n = 2(u_{n-1} - u_{n-2})$, para todo $n \geq 2$. Particularice el resultado suponiendo que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

Solución. La recurrencia propuesta es de orden 2 y su ecuación característica es:

$$0 = x^2 - 2x + 2$$

que tiene por soluciones $1 \pm i$. Según sabemos:

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$$

De lo detallado en la observación 3.1 resulta entonces que:

$$x_n = (\sqrt{2})^n(k_1\cos(n\pi/4) + k_2\sin(n\pi/4))$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}
1 = u_0 &= k_1\cos 0 + k_2\sin 0 = k_1 && \Rightarrow k_1 = 1 \\
2 = u_1 &= \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + k_2\sin(\pi/4)) \\
&= 1 + k_2 && \Rightarrow k_2 = 1
\end{aligned}$$

Así pues, la solución general está dada por:

$$x_n = (\sqrt{2})^n(\cos(n\pi/4) + \sin(n\pi/4))$$

para todo número natural n. Observe que esta solución no contiene números complejos. Esto se debe a que los valores c_1 y c_2 de la observación 3.1 son complejos conjugados, y por tanto k_1 y k_2 son entonces reales. □

Ejemplo 3.6. Halle u_{12} si $u_{n+1}^2 = 5u_n^2$, $u_n \geq 0$, $n \geq 0$ y $u_0 = 2$.

Solución. No se trata de una relación de recurrencia lineal en u_n, pero se puede tratar como tal. Para ello hagamos un cambio de variable, a saber, $b_n = u_n^2$. Entonces la nueva relación es $b_{n+1} = 5b_n$, $n \geq 0$, $b_0 = 4$. La solución es entonces, $b_n = 4 \cdot 5^n$ y por tanto $u_n = 2\sqrt{5}^n$, $n \geq 0$. Así $u_{12} = 31250$. □

Ejemplo 3.7. Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_n = nu_{n-1}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

y particularice el resultado suponiendo $u_0 = 1$.

Solución. Se trata de una relación (lineal homogénea), pero **no** de coeficientes constantes. La resolveremos usando la inducción. Se tiene:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= 1 \cdot x_0 = 1 \\
x_2 &= 2x_1 = 2 \cdot 1 \\
x_3 &= 3x_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
x_4 &= 4x_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
\vdots & \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Es muy fácil demostrar por inducción que $x_n = n!$, o sea $\{x_n\}$ es la sucesión que cuenta el número de permutaciones de n objetos. □

Ejercicio 3.1. Considere las siguientes recurrencias:

$$\begin{aligned}
s_n &= 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1}, \quad n \geq 2 \\
t_n &= s_{n-1} + t_{n-1}, \quad n \geq 2
\end{aligned}$$

y resuelva la primera.

Solución. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
s_n &= 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1} \\
s_{n-1} &= 2s_{n-2} + s_{n-3} + 4t_{n-2}
\end{aligned}$$

Si restamos la segunda igualdad de la primera tenemos:

$$\begin{aligned}
s_n - s_{n-1} &= (2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1}) - (2s_{n-2} + s_{n-3} + 4t_{n-2}) \\
&= 2s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4t_{n-1} - 4t_{n-2} \\
s_n &= 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4t_{n-1} - 4t_{n-2} \\
&= 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4(t_{n-1} - t_{n-2})
\end{aligned}$$

Por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned}
t_n &= s_{n-1} + t_{n-1} \\
t_{n-1} &= s_{n-2} + t_{n-2} \\
t_{n-1} - t_{n-2} &= s_{n-2}
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
s_n &= 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4(t_{n-1} - t_{n-2}) \\
&= 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4s_{n-2} \\
&= 3s_{n-1} + 3s_{n-2} - s_{n-3}
\end{aligned}$$

En definitiva:

$$s_n = 3s_{n-1} + 3s_{n-2} - s_{n-3}$$

recurrencia que tiene por ecuación característica:

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1) \\ &= (x+1)(x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

y por tanto, sus soluciones son: -1, $2 \pm \sqrt{3}$. Así pues,

$$s_n = c_1(2+\sqrt{3})^n + c_2(2-\sqrt{3})^n + c_3(-1)^n$$

Abordando el problema matricialmente, tenemos que la recurrencia propuesta puede ser expresada mediante la igualdad siguiente:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si A es la matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resulta que el polinomio característico de A es:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= (\lambda+1)(\lambda - 2 + \sqrt{3})(\lambda - 2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Por lo que A es diagonalizable y existen una matriz regular P y una matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$. En realidad:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 2 & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12}(1-\sqrt{3}) & \frac{1}{12}(-1-\sqrt{3}) & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12}(1+\sqrt{3}) & \frac{1}{12}(-1+\sqrt{3}) & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y por tanto:

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & (2+\sqrt{3})^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

□

4. Teoría de la Recurrencia Lineal No Homogénea

Definición 4.1. Sea k un número natural. Una relación de *recurrencia lineal no homogénea* de orden k es cualquier igualdad de la forma:

$$u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + \cdots + a_ku_{n-k} + f(n), \text{ para todo } n \geq k \tag{8}$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son constantes y $f(n)$ es una función no idénticamente nula que depende únicamente de n, que denominaremos *función de ajuste*. Su relación de recurrencia lineal homogénea asociada es:

$$u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + \cdots + a_ku_{n-k} \tag{9}$$

El orden, el polinomio caracterítico y la ecuación característica de la relación de recurrencia 8 es el de la relación de recurrencia 9.

Teorema 4.1. *Si $\{x_n^{(p)}\}$ es una solución particular de la relación de recurrencia lineal no homogénea:*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n),$$

entonces toda solución es de la forma $\{x_n^{(p)} + x_n^{(h)}\}$, donde $\{x_n^{(h)}\}$ es una solución de la relación de recurrencia lineal homogénea asociada.

Demostración. Como $\{x_n^{(p)}\}$ es una solución particular de la relación de recurrencia lineal no homogénea, sabemos que

$$x_n^{(p)} = a_1 x_{n-1}^{(p)} + a_2 x_{n-2}^{(p)} + \cdots + a_k x_{n-k}^{(p)} + f(n)$$

Si $\{y_n\}$ es otra solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea, sabemos que:

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_k y_{n-k} + f(n)$$

Restando la primera de esta igualdades de la segunda, obtenemos que:

$$y_n - x_n^{(p)} = a_1(y_{n-1} - x_{n-1}^{(p)}) + a_2(y_{n-2} - x_{n-2}^{(p)}) + \cdots + a_k(y_{n-k} - x_{n-k}^{(p)})$$

Por tanto, $\{y_n - x_n^{(p)}\}$ es una solución de la relación de recurrencia lineal homogénea asociada, que denotamos por $\{x_n^{(h)}\}$. Por tanto, $y_n = x_n^{(p)} + x_n^{(h)}$ para todo natural n. □

Corolario 4.2. *Sea la relación de recurrencia lineal no homogénea:*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + q(n)s^n, \tag{10}$$

donde, $a_k \neq 0$, s es una constante y $q(n)$ es un polinomio. Entre las soluciones de la recurrencia 10 tiene una, $\{x_n^{(p)}\}$, de la forma:

$$x_n^{(p)} = n^m p(n) s^n \tag{11}$$

para todo natural n, donde m es la multiplicidad de s como raíz del polinomio característico de la recurrencia 10 y $p(n)$ es un polinomio de grado menor o igual que el grado de $q(n)$.

Observación 4.1. Téngase en cuenta que:

- Podríamos dar una expresión general de los coeficientes de $p(n)$ en la solución particular de la igualdad 11, pero sería complicada. Para conocer el polinomio $p(n)$ en los casos prácticos, se lleva la solución 11 —con sus coeficientes indeterminados— a la ecuación de recurrencia y, efectuadas las operaciones, se llega a una igualdad entre polinomio del mismo grado: uno conocido y el otro desconocido. Ello produce un sistema de ecuaciones en los coeficientes indeterminados de $p(n)$ que, resuelto, permite conocerlos.
- La solución particular de la expresión 11 no puede adaptarse a condiciones iniciales arbitrarias; así pues, podría no ser la solución que se estuviese buscando.
- En ese caso sería imprescindible encontrar *todas* las soluciones mediante lo indicado por el Teorema 4.1 y luego seleccionar la específica cumpliendo las condiciones iniciales.

5. Ejemplos de Recurrencia Lineal No Homogénea

Observación 5.1. Considere lo siguiente:

1. Cuando $f(n) = b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0$ estamos en el caso particular $s = 1$ de $f(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0)s^n$.
2. Cuando $f(n) = s^n$, estamos en el caso particular $b_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq t$ y $b_0 = 1$.
3. En lo sucesivo a la solución particular la representaremos por $\{x_n^{(p)}\}$.

Ejemplo 5.1. Considere la relación de recurrencia:

$$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + f(n)$$

La ecuación característica de su relación de recurrencia homogénea asociada es:

$$0 = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

1. Si $f(n) = 2n^2$, entonces $x_n^{(p)} = c_2n^2 + c_1n + c_0$.
2. Si $f(n) = 5^n(3n^2 + 2n + 1)$, entonces $x_n^{(p)} = 5^n(c_2n^2 + c_1n + c_0)$.
3. Si $f(n) = 5^n$, entonces $x_n^{(p)} = c5^n$ (¿por qué?).
4. Si $f(n) = 2^n(3n + 1)$, entonces $x_n^{(p)} = 2^n n(c_1n + c_2)$ (¿por qué?).

Ejemplo 5.2. Considere la relación de recurrencia:

$$u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2} + f(n)$$

La ecuación característica de su relación de recurrencia homogénea asociada es:

$$0 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

1. Si $f(n) = 3^n$, entonces $x_n^{(p)} = 3^n cn^2$.
2. Si $f(n) = 3^n(5n + 1)$, entonces $x_n^{(p)} = 3^n n^2(c_1n + c_0)$.
3. Si $f(n) = 2^n(5n + 1)$, entonces $x_n^{(p)} = 2^n(c_1n + c_0)$.

Ejemplo 5.3. Resuelva la relación $u_n = u_{n-1} + 3n^2$, para todo $n \geq 1$.

Solución. La ecuación característica de la recurrencia es $x - 1 = 0$, por lo que no tiene más que la solución 1 y es de multiplicidad 1. Para poder aplicar el Corolario 4.2 identifiquemos los valores s y t. Como $f(n) = 3n^2 = (3n^2)1^n$, entonces: $s = 1$ (que es raíz de mutiplicidad 1 de la ecuación característica) y $t = 2$, por lo que para todo natural n se tiene:

$$\begin{aligned}
x_n^{(p)} &= n^1(c_2n^2 + c_3n + c_4) \\
&= c_2n^3 + c_3n^2 + c_4n \\
x_{n-1}^{(p)} &= c_2(n-1)^3 + c_3(n-1)^2 + c_4(n-1) \\
&= c_2(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + c_3(n^2 - 2n + 1) + c_4(n-1) \\
&= c_2n^3 + (c_3 - 3c_2)n^2 + (3c_2 - 2c_3 + c_4)n + c_3 - c_2 - c_4 \\
x_n^{(p)} - x_{n-1}^{(p)} &= c_2n^3 + c_3n^2 + c_4n - c_2n^3 - (c_3 - 3c_2)n^2 - (3c_2 - 2c_3 + c_4)n - c_3 + c_2 + c_4 \\
&= 3c_2n^2 + (2c_3 - 3c_2)n - c_3 + c_2 + c_4
\end{aligned}$$

Al ser $\{x_n^{(p)}\}$ solución de la ecuación, se debe cumplir:

$$3c_2n^2 + (2c_3 - 3c_2)n - c_3 + c_2 + c_4 = 3n^2$$

de lo que surge el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
3c_2 &= 3 & &\Rightarrow c_2 = 1 \\
2c_3 - 3c_2 &= 0 & \Rightarrow 2c_3 = 3 \quad &\Rightarrow c_3 = \frac{3}{2} \\
c_4 + c_2 - c_3 &= 0 & \Rightarrow c_4 = c_3 - c_2 &= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En definitiva, para todo n:

$$\begin{aligned} x_n^{(p)} &= n(n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}) \\ &= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ &= \frac{1}{2}(2n^3 + 3n^2 + n) \end{aligned}$$

Por otra parte $\{x_n^{(h)}\}$ está definida por $x_n^{(h)} = c_1 1^r = c_1$, para todo natural n. Del Teorema 4.1 tenemos que la solución general es $\{x_n\}$ definida por $\{x_n^{(p)} + x_n^{(h)}\}$, es decir

$$x_n = c_1 + \frac{1}{2}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

para todo número natural n. □

Ejemplo 5.4. Resuelva la relación de recurrencia $u_n = 3u_{n-1} + 5 \cdot 7^n$

Solución. La solución de la relación homogénea asociada es $u_n^{(h)} = c_1 \cdot 3^n$. Puesto que $f(n) = 5 \cdot 7^n$, buscamos una solución particular $u_n^{(p)}$ de la forma $c_2 \cdot 7^n$. Como $u_n^{(p)}$ debe ser una solución de la relación no homogénea dada, sustituimos $u_n^{(p)} = c_2 \cdot 7^n$ en la relación dada resultando:

$$c_2 \cdot 7^n - 3c_2 \cdot 7^{n-1} = 5 \cdot 7^n, \quad n \geq 1$$

Si dividimos entre 7^{n-1}, vemos que $7c_2 - 3c_2 = 5 \cdot 7$ por lo que $c_2 = 35/4$ y

$$a_n^{(p)} = \frac{35}{4}7^n = \frac{5}{4}7^{n+1}, \quad n \geq 0$$

La solución general es

$$x_n = c \cdot 3^n + \frac{5}{4}7^{n+1}$$

y ahora buscamos la particular de nuestro problema con la ayuda de los valores de frontera. Si $2 = x_0 = c_1 + \frac{5}{4}7$, entonces $c = -\frac{27}{4}$ y

$$x_n = \frac{5}{4}7^{n+1} - \frac{1}{4}3^{n+3}, \quad n \geq 0.$$

□

Ejemplo 5.5. Resuelva la relación de recurrencia $u_n = 3u_{n-1} + 5 \cdot 3^n$, donde $n \geq 1$ y $u_0 = 2$

Solución. Como en ejercicios anteriores, $x_n^{(h)} = c_1 3^n$, pero en este caso $x_n^{(h)}$ y $f(n)$ no son linealmente independientes. Como resultado, buscamos una solución particular $x_n^{(p)}$ de la forma $c_2 n 3^n$ (¿Qué ocurre si sustituimos $x_n^{(p)} = c_2 3^n$ en la relación dada?). Al sustituir $x_n^{(p)} = c_2 n 3^n$ en la relación dada obtenemos

$$\begin{aligned} c_2 n 3^n - 3c_2(n-1)3^{n-1} &= 5 \cdot 3^n \\ c_2 n - c_2(n-1) &= 5 \\ c_2 &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo natural n se tiene $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = (c_1 + 5n)3^n$. Si $x_0 = 2$, la solución general queda particularizada en $x_n = (2 + 5n)3^n$, para todo natural n. □

Ejemplo 5.6. Dé el número de pasos mínimos necesarios para completar un juego de las *Torres de Hanoi* en función del número de discos n con los que cuente.

Solución. Para $n \geq 0$, sea u_n el número de movimientos necesarios para pasar los n discos de la vástago 1 a la vástago 3. Entonces para $n+1$ discos hacemos lo siguiente:

1. Pasamos los n discos de arriba desde el vástago 1 al vástago 2. Esto se realiza en u_n pasos.
2. Pasamos el disco más grande (el que hace de base de la torre) del vástago 1 al vástago 3. Esto se hace en un paso.
3. Por último pasamos, de nuevo, los n discos del vástago 2 sobre el disco mayor, que ahora está en la vástago 3. Esto requiere otros u_n movimientos.

Lo dicho sugiere la relación $u_{n+1} = 2u_n + 1$, donde $n \geq 0$ y $u_0 = 0$. Para $u_{n+1} - 2u_n = 1$, $x_n^{(h)} = c_1 2^n$. Como $f(n) = 1$ no es solución de $u_{n+1} - 2u_n = 0$, tomamos $x_n^{(p)} = c_2 \cdot 1^n = c_2$. De la relación anterior vemos que $c_2 = 2c_2 + 1$, por lo que $c_2 = -1$ y $x_n = c_1 2^n - 1$. De $0 = u_0 = c_1 - 1$ concluimos que $c_1 = 1$ y que $x_n = 2^n - 1$, $n \geq 0$. □

$f(n)$	$u_n^{(p)}$ de tanteo
c, constante	a, constante
cn	$c_0 n + c_1$
cn^2	$c_0 n^2 + c_1 n + c_2$
cn^t, t entero postivo	$c_t n^t + c_{t-1} n^{t-1} + \cdots + c_0$
cr^n, r constante	ar^n
$cn^t r^n$	$r^n(c_t n^t + c_{t-1} n^{t-1} + \cdots + c_0)$
$c \sin \alpha n$	$a \sin \alpha n + b \cos \alpha n$
$c \cos \alpha n$	$a \sin \alpha n + b \cos \alpha n$
$cr^n \sin \alpha n$	$r^n(a \sin \alpha n + b \cos \alpha n)$
$cr^n \cos \alpha n$	$r^n(a \sin \alpha n + b \cos \alpha n)$

Figura 1: Elecciones de $u_n^{(p)}$ según $f(n)$, si r no es sol. de la ecuación característica.

Teorema 5.1. *Sean las relaciones de recurrencia no homogénea siguientes:*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n), \tag{12}$$

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + g(n), \tag{13}$$

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n) + g(n), \tag{14}$$

Si $\{x_n\}$ es una solución de la relación 12 e $\{y_n\}$ es una solución de la relación 13, entonces $\{x_n + y_n\}$ es una solución de la relación 14.

Demostración. Si $\{x_n\}$ es una solución de la relación 12 entonces.

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_k y_{n-k} + f(n)$$

y si $\{u_n\}$ es una solución de la relación 13 entonces.

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_k y_{n-k} + g(n)$$

Sumando ambas igualdades se tiene:

$$x_n + y_n = a_1(x_{n-1} + y_{n-1}) + a_2(x_{n-2} + y_{n-2}) + \cdots + a_k(x_{n-k} + y_{n-k}) + f(n) + g(n) = 0$$

De donde, $\{x_n + y_n\}$ es una solución de la relación 14. □

Ejercicio 5.1. Encuentre una expresión no recurrente para la sucesión definida por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} u_0 &= 2, \\ u_1 &= 2, \\ u_n &= u_{n-2} + 2^n + (-1)^n, \text{ siempre que } n \geq 2. \end{aligned}$$

Solución. La recurrencia planteada en el enunciado es lineal no homogénea y, en este caso, $f(n) = 2^n + (-1)^n$. La ecuación característica asociada es:

$$x^2 - 1 = 0$$

que tiene como soluciones ± 1. Dado que -1 es solución de la ecuación característica, en parte según afirma el Corolario 4.2, tenemos que $\{x_n^{(p)}\}$, donde $x_n^{(p)} = c_3 2^n + c_4 n(-1)^n$ para todo natural n, es una solución particular de la recurrencia (-1 es raíz de la ecuación característica a la vez que parte de $f(n)$). También sabemos que $\{x_n^{(h)}\}$, donde $x_n^{(h)} = c_1(-1)^n + c_2$ para todo natural n, es una solución de la recurrencia homogénea asociada. Nuestra labor consiste ahora en encontrar los coeficientes involucrados, haciendo notar que el cálculo de los coeficientes c_3 y c_4 no requiere las condiciones iniciales (también llamadas "de frontera"). Para ello consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= c_3 2^{n+2} + c_4(n+2)(-1)^n \\ &= 4c_3 2^n + c_4(n+2)(-1)^n \end{aligned}$$

Por una parte $\{x_n^{(p)}\}$, al ser solución de la recurrencia, cumplirá:

$$x_{n+2}^{(p)} - x_n^{(p)} = 2^{n+2} + (-1)^{n+2}$$

Por otra, se tiene:

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} - x_n^{(p)} &= 4c_3 2^n + c_4(n+2)(-1)^n - c_3 2^n - c_4 n(-1)^n \\ &= (4c_3 - c_3)2^n + (c_4(n+2) - c_4 n)(-1)^n \\ &= 3c_3 2^n + 2c_4(-1)^n \end{aligned}$$

y uniendo los dos resultados concluimos que:

$$3c_3 2^n + 2c_4(-1)^n = 4 \cdot 2^n + (-1)^n$$

Así pues, basta tomar $c_3 = \frac{4}{3}$ y $c_4 = \frac{1}{2}$ y en definitiva:

$$x_n^{(p)} = \tfrac{4}{3}2^n + \tfrac{1}{2}n(-1)^n$$

Ahora, según Teorema 4.1 compondremos la solución $\{x_n\}$ como suma, se decir, para todo número natural n: $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$. Según esto,

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_1(-1)^n + c_2 + \frac{4}{3}2^n + \frac{1}{2}n(-1)^n \\ &= c_2 + \frac{4}{3}2^n + (\frac{1}{2}n + c_1)(-1)^n \end{aligned} \tag{15}$$

La expresión 15 representa la solución general de la relación de recurrencia. El cálculo de c_1 y c_2 requiere el uso de las condiciones iniciales. En efecto:

$$\begin{aligned} 2 = x_0 &= c_2 + \frac{4}{3} + c_1 \\ 2 = x_1 &= c_2 + \frac{4}{3} \cdot 2 + (\frac{1}{2} + c_1)(-1) \\ &= c_2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - c_1 \\ &= c_2 - c_1 + \frac{13}{6} \end{aligned}$$

y de aquí al siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_1 & + & c_2 = \frac{2}{3} \\ c_2 & - & c_1 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

que resuelto aporta $c_1 = \frac{5}{12}$ y $c_2 = \frac{1}{4}$. Llevando estos valores a la expresión 15 resulta:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{4}{3}2^n + (\frac{1}{2}n + \frac{5}{12})(-1)^n + \frac{1}{4} \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + (\frac{6n+5}{12})(-1)^n + \frac{1}{4} \\ &= \frac{2^{n+4}+3}{12} + (\frac{6n+5}{12})(-1)^n \end{aligned}$$

y entonces la **solución** es:

$$x_n = \frac{2^{n+4}+3}{12} + (\frac{6n+5}{12})(-1)^n$$

para todo número natural n. □

Ejercicio 5.2. Obtener dos soluciones distintas del problema de recurrencia lineal no homogénea siguiente:

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + (-2)^n$$

Solución. El enunciado plantea resolver la siguiente recurrencia lineal no homogénea:

$$x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = (-2)^n$$

La ecuación característica de esta recurrencia es $x^2 - 2x + 1 = 0$, es decir, $(x-1)^2 = 0$. Por tanto, la ecuación tiene como raíz a 1 con multiplicidad 2. Así $\{x_n^{(h)}\}$ y $\{x_n^{(p)}\}$ vienen definidas para todo n según:

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= c_1 + nc_2 \\ x_n^{(p)} &= c_3(-2)^n \end{aligned}$$

En esta situación está claro que:

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= c_3(-2)^{n+2} \\ &= 4c_3(-2)^n \\ x_{n+1}^{(p)} &= c_3(-2)^{n+1} \\ &= -2c_3(-2)^n \end{aligned}$$

de donde:

$$x_n^{(p)} - 2x_{n-1}^{(p)} + x_{n-2}^{(p)} = (-2)^{n+2}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} 4(-2)^n &= (-2)^{n+2} \\ &= 4c_3(-2)^n - 2(-2c_3(-2)^n) + c_3(-2)^n \\ &= 9c_3(-2)^n \end{aligned}$$

de donde $c_3 = \frac{4}{9}$. Ahora, según Teorema 4.1 compondremos la solución $\{x_n\}$ como suma, se decir, para todo número natural n: $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$. Según esto, la solución general $\{x_n\}$ es la que viene definida para todo natural n por:

$$x_n = \frac{4}{9}(-2)^n + nc_2 + c_1$$

Para concluir el ejercicio ofrecemos dos soluciones particulares elegidas al azar, digamos, la que cumple $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y la que cumple $x_0 = 1$, $x_1 = 0$:

- $x_0 = 0$, $x_1 = 1$; tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4}{9} + 0c_2 + c_1 && \Rightarrow c_1 = -\frac{4}{9} \\ 1 &= \frac{4}{9}(-2) + c_2 - \frac{4}{9} && \Rightarrow c_2 = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

y por tanto, para todo número natural n:

$$x_n = \frac{4}{9}(-2)^n + \frac{7}{3}n - \frac{4}{9}$$

- $x_0 = 1$, $x_1 = 0$; tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4}{9} + 0c_2 + c_1 && \Rightarrow c_1 = \frac{5}{9} \\ 0 &= \frac{4}{9}(-2) + c_2 - \frac{5}{9} && \Rightarrow c_2 = \frac{3}{9} \end{aligned}$$

y por tanto, para todo número natural n:

$$x_n = \frac{4}{9}(-2)^n + \frac{3}{9}n + \frac{5}{9}$$

□

6. Ejercicios

1. Resuelva la relación de recurrencia:
$$u_n = u_{n-1} + d$$
y encuentre la solución particular que cumple $u_0 = a$, donde a es una constante (*progresión artimética*). (sol. $x_n = dn + a$)

2. Resuelva la relación de recurrencia:
$$u_n = ku_{n-1}$$
y encuentre la solución particular que cumple $u_0 = a$, donde a es una constante (*progresión geométrica*). (sol. $x_n = ak^n$)

3. Resuelva la relación de recurrencia:
$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0, \text{ para todo } n \geq 0.$$
y encuentre la solución particular que cumple: $u_0 = 1$ y $u_1 = 6$.

4. Resuelva el problema de recurrencia:
$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n, \text{ para todo } n \geq 0.$$
y encuentre la solución particular que cumple: $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ y $u_2 = 15$.

5. Encuentre la representación polar de los siguientes números complejos:

   a) $z_1 = -1 - i$ (sol. $r_1 = \sqrt{2}$ y $\theta_1 = -3\pi/4$)
   b) $z_2 = 2 + 2i$ (sol. $r_2 = 2\sqrt{2}$ y $\theta_2 = \pi/4$)
   c) $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$ (sol. $r_3 = \sqrt{2}$ y $\theta_3 = 2\pi/3$)
   d) $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$ (sol. $r_4 = \sqrt{2}$ y $\theta_4 = -\pi/3$)
   e) $z_5 = 2i\sqrt{3}$ (sol. $r_5 = 2$ y $\theta_5 = \pi/2$)

6. Resuelva la relación de recurrencia:
$$u_{n+2} = -4u_n$$
(sol. $x_n = 2^n(k_1 \cos \frac{n\pi}{2} + k_2 \sin \frac{n\pi}{2})$

7. Resuelva la relación de recurrencia:
$$u_{n+2} = -4u_{n+1} - 16u_n$$
(sol. $x_n = 4^n(k_1 \cos \frac{2n\pi}{3} + k_2 \sin \frac{2n\pi}{3})$

8. Dese una explicación de cada una de las afirmaciones hechas en el Ejemplo 5.1 y cada una de las hechas en el Ejemplo 5.2.

9. Resuelva la relación de recurrencia:
$$u_{n+2} = -4u_{n+1} - 3u_n + 5(-2)^n$$
(sol. $x_n = c_1(-3)^n + c_2(-1)^n - 5(-2)^n$)

10. Resuelva la relación de recurrencia:
$$u_{n+2} = -4u_{n+1} + 6 \cos \frac{n\pi}{2} + 3 \sin \frac{n\pi}{2}$$
(sol. $x_n = 2^n(c_1 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2}) + 2 \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2})$

11. Resuelva la relación de recurrencia:
$$u_{n+2} = -4u_{n+1} - 16u_n + 4^{n+2} \cos \frac{n\pi}{2} - 4^{n+3} \sin \frac{n\pi}{2}$$
(sol. $x_n = 4^n(c_1 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2} + 4 \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2})$

12. Resuelva la relación de recurrencia:
$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n + 3^n$$
(sol. $x_n = (c_1 + c_2 n + \frac{n^2}{18})3^n$)

13. Resuelva la relación de recurrencia:
$$u_{n+3} = -5u_{n+2} - 8u_{n+1} - 4u_n + 2(-1)^n + (-2)^{n+3}$$
(sol. $x_n = (1 - 2n)(-1)^n + (3 + 2n + n^2)(-2)^n$)

14. Resuelva el siguiente problema de recurrencia:
$$u_n - 2u_{n-1} = (n+5)3^n \tag{16}$$

15. Resuelva la recurrencia:
$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n, \text{ para todo } n \geq 0.$$
y encuentre la solución particular que cumple: $u_0 = 0$ y $u_1 = 1$.

16. Resuelva la recurrencia:
$$u_{n+1} = 3u_n + 2n, \text{ para todo } n \geq 0.$$
y encuentre la solución particular que cumple $u_1 = 3$.

17. Resuelva el problema de recurrencia:
$$u_n - 2u_{n-1} = 3^n, \text{ para todo } n \geq 1.$$
y encuentre la solución particular que cumple $u_1 = 5$.

18. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n-1} + 9u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

y encuentre la solución particular que cumple $u_0 = 1$ y $u_1 = 4$.

19. Un ciudadano pide un préstamo de S cantidad de dinero a pagar en T plazos. Si I es el interés del préstamo por plazo, ¿qué pago constante P debe realizar al final de cada plazo? (sol. $P = SI(1-(1+I)^{-T})^{-1}$)

20. Para $n \geq 2$, supongamos que hay n personas en una fiesta y que cada una de ellas da la mano (exactamente una vez) a todas las demás personas (y nadie estrecha su propia mano). Si u_n es el número de apretones de mano en esas condiciones, dar una expresión suya. (sol. $x_n = \frac{n(n-1)}{2}$), $\quad n \geq 2$)

21. Para $n \geq 1$, sea C un conjunto que contiene 2^n números reales. ¿Cuántas comparaciones deben efectuarse entre pares de números de C para determinar los elementos máximo y mínimo de C?

22. Sea n cualquier número natural y consideremos x_n definido por:

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} 2^{n-i} 3^i$$

Encontrar el valor de x_n.