TEMA 2. geo 3.pdf

Apuntes T2

TEMA 2 : ESPACIOS MÉTRICOS EUCLÍDEOS.

Recordatorio Geometría II :

$g: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ es una métrica si es una forma bilineal y simétrica, es decir:

1) $g(\lambda u + \mu v, w) = \lambda g(u,w) + \mu g(v,w)$
2) $g(u,v) = g(v,u)$

Fijamos una base B de V ($\{v_1, \dots, v_n\}$), ya podemos escribir:

$g(u,v) = u_B^t \, M \, v_B$ " M matriz asoc. a g en la base B

$$\begin{array}{ccc} & \text{filas} & \text{colum.} \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} g(v_1,v_1) & \cdots & g(v_1,v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ g(v_n,v_1) & \cdots & g(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$, es decir $M = (g_{ij})$ con $g_{ij} = g_{ji} \rightsquigarrow M$ simétrica $\Downarrow$ diagonaliz.

Se puede encontrar otra base B' de forma que la matriz $M(g, B')$ es de la forma:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 \ddots 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 \ddots -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \ddots 0 \end{array}\right)$$

, B' no es única, pero sí lo es,

el nº de 1s, −1s y 0s $\rightsquigarrow$ signatura (r, s) $\nearrow$ $r = rg(M)$ ó nº 1s $= r$? ; $\searrow$ $s =$ nº −1s (índice)

Def.: Un prod. escalar (o métrica euclídea) cuando $rg(M) =$ nº 1s $= n = \dim(V)$, es decir, no hay 0s ni −1s ; $M =$ Identidad.

Es decir, es una forma bilineal simétrica positiva:

1) $\searrow$
Recordatorio anterior
2) $\nearrow$

3) $g(v,v) \geq 0$ y $g(v,v) = 0 \iff v = 0$

Ejemplos: (en $\mathbb{R}^2$)

1) $g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$

$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es un prod. escalar.

2) $g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1,y_1)\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 5x_1x_2$

nº ceros ($g(u,v)=0$)

Es degenerada $\rightarrow$ rad$(g) = 1$

Como $5>0 \rightarrow g$ es semidef. pos. $\rightarrow$ rg$(g) = 1 < 2$
$\rightarrow s = 0$

3) $g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 - y_1y_2$

$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;; rg $= 2 = \dim(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ no degenerada $\Rightarrow$ rad$(g) = \{0\}$
$s = 1$ (índice)

$\hookrightarrow$ ¿$v / g(v,v) = 0$?
$\hookrightarrow v = (1,1)$

Def.: Llamamos norma de un vector $v \in V$ a $\|v\| = \sqrt{g(v,v)}$

Def: Dados $u, v \in V - \{0\}$, llamamos ángulo entre u y v al único $\theta \in [0,\pi]$ tal que $\cos\theta = \dfrac{g(u,v)}{\|u\|\|v\|} \in [-1,1]$

Se suele denotar como $\theta = \measuredangle(u,v)$

Def: Sea (V,g) un plano euclídeo dónde tenemos fijada una orientación, es decir, fijamos una base $B = \{v_1, v_2\}$.
Diremos que $B' = \{w_1, w_2\}$ base de V está positivamente (resp. negativam.) orientada si $\det(M, B, B') > 0$

Dados $u_1, u_2 \in V - \{0\}$, — tomamos un vector y lo normalizamos
llamamos $w_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ y $w_2 \in V$ el único vector unitario / $\{w_1, w_2\}$ es base ortonormal posit. orientada.

$\dfrac{u_2}{\|u_2\|}$ se escribe de forma única como:

$\dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \cos(\alpha) w_1 + \operatorname{sen}(\alpha) w_2$ para cierto $\alpha \in (-\pi, \pi]$ ó $[0, 2\pi]$

Propiedades:

1) $\measuredangle cr(u,-v) = -\measuredangle cr(u,v) = \measuredangle cr(-u,v) = -\measuredangle cr(-u,-v)$

Salvo si $\measuredangle cr(u,v) = \pi$, que se tiene $\measuredangle \sigma(u,-v) = \pi$

2) $\measuredangle cr(u,v) + \measuredangle cr(v,w) = \measuredangle cr(u,w)$

Por tanto $= \measuredangle cr(u,r) + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ (en realidad $k \in \{-1,0,1\}$)

3) Dada una base ortonormal positiva β y $u,v \in V - \{0\}$ con coordenadas $u_B = (x_1,y_1)$, $v_B = (x_2,y_2) \Rightarrow \det_B(u,v) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \operatorname{sen}\alpha$

Decimos que $u,v \in V$ son ortogonales (o perpend.) cuando $<u,v> = 0$
($\Longleftrightarrow \measuredangle(u,v) = \pi/2$ ó $u=0, v=0$)

Llamamos $U^{\perp} = \{v \in V \,/\, <v,u> = 0,\ \forall u \in U\} \leq V$

2.1. ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO:

Diremos que un esp. afín es euclídeo cuando $\exists$ un prod. escalar en $\vec{A}$

Nota: $A \equiv (A, \vec{A}, \varphi, <\cdot,\cdot>)$

Dado $p,q \in A$ e.a.e, def. distancia entre p y q como:

$\boxed{dis(p,q) = \|\vec{pq}\|}$, pero para poder llamarlo así, ha de cumplir:

Propiedades:

I) $dist(q,p) = \|\vec{qp}\| = \|-\vec{pq}\| = \|\vec{pq}\| = dist(p,q)$ " SIMÉTRICA

II) $dist(p,q) \geq 0$, $\forall p,q \in A$ y $dist(p,q) = 0 \Longleftrightarrow p = q$

III) $dist(p,q) \leq dist(p,r) + dist(r,q)$. La igualdad se da cuando el punto r esté entre ambos ($r \in [p,q]$)

Nota: $[p,q] = \{p + \lambda\vec{pq} \,/\, \lambda \in [0,1]\}$. $dist(p, p+\lambda\vec{pq}) = \|\overrightarrow{p\,(p+\lambda\vec{pq})}\| =$
$= \|\lambda\vec{pq}\| = |\lambda|\,\|\vec{pq}\|$

Del mismo modo que hemos def. distancia entre puntos, podemos hacerlo entre subesp.

Sean S y T subesp. afines de A, $p \in A$. Def. la distancia entre p y T:

$$\boxed{dist(p,T) = \inf\{dist(p,q) \,/\, q \in T\}}$$

Ejemplos:

1) En $\mathbb{R}^n$ definimos $<(x_1,...,x_n)(y_1,...,y_n)> = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.

$p=(p_1,...,p_n)$, $q=(q_1,...,q_n)$

$$dist(p,q) = \|\vec{pq}\| = \sqrt{(q_1-p_1)^2+...+(q_n-p_n)^2}$$

2) $P_n[\mathbb{R}]$, $p=p(x)$, $q=q(x) \in P_n(\mathbb{R})$

$$<p,q> = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \; ; \; dist(p,q) = \|\vec{pq}\| = \sqrt{\int_0^1 (q(x)p(x))^2 dx}$$

3) En $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $M,N \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$<M,N> = traza(M^tN) \; ; \; dist(M,N) = \|N-M\| = \sqrt{traza((N-M)^t(N-M))}$$

Por ejemplo:

$M=(1,2,3)$, $N=(0,1,2) \Rightarrow \vec{MN} = (-1,-1,-1)$

$$dist(M,N)^2 = traza\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}(-1,-1,-1)\right) = traza\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix} = 3$$

$\hookrightarrow dist(M,N) = \sqrt{3}$

$$M = \begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix} , \; N = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \therefore \vec{MN} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$dist(M,N)^2 = traza\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}\right) = traza\begin{pmatrix}1 & & \\ & 10 & \\ & & 5\end{pmatrix} = 16$$

$\hookrightarrow dist(M,N) = 4$.

Sean S y T dos rectas afines a $\mathcal{A}$ tales que $S \cap T \neq \emptyset$. Definimos el ángulo entre S y T como el menor de los ángulos que forman vectores $u \in \vec{S}$ y $v \in \vec{T}$.

Es decir:

- Tomamos $u \in \vec{S}$, $v \in \vec{T}$
- Calculamos $\measuredangle(u,v)$

$$\measuredangle(S,T) = \begin{cases} \measuredangle(u,v) & \text{si } \in [0,\pi/2] \\ \pi - \measuredangle(u,v) & \text{si } > \pi/2 \end{cases}$$

Ejemplos:

En $P_2(\mathbb{R})$ consideramos el prod. esc. $<p(x),q(x)> = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Dadas las rectas,

$S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) / p(0)=5, p''(8)=4\}$
$T = \{$ " $/ p'(0)=0, p'(1)=4\}$
$\Rightarrow$ Comprobamos que se cortan en un punto y su ángulo.

Tenemos $p(x)=a+bx+cx^2$; $p'(x)=b+2cx$; $p''(x)=2c$.

$\boxed{S}$ $p(0) = \underline{5=a}$
$p''(8)=2c=4 \Rightarrow \underline{c=2}$
$\Big\}$ $S=\{5+bx+2x^2 / b\in\mathbb{R}\}$

$\boxed{T}$ $p'(0)=\underline{0=b}$
$p'(1)=b+2c \Rightarrow \underline{c=2}$
$\Big\}$ $T=\{a+2x^2/a\in\mathbb{R}\}$

$\boxed{S\cap T} = \{5+2x^2\} \leftarrow$ punto $p_0(x)$
↳ viene de los valores de a, b y c en total $(a=5, c=2, b=0)$

¿Qué ángulo forman?

$\boxed{\vec{S}}$ $p_1(x)=5+3x+2x^2 \in S$ "Con S. Ref $R=\{1,x,x^2\}$".
$q_1(x)=5+2x^2 \in S$

$\overrightarrow{p_1q_1} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(son vectores)}}}{q_1-p_1} = -3x \in \vec{S}$ .. $\dim(\vec{S})=1 \Rightarrow \vec{S} = \mathcal{L}(\{-3x\}) = \mathcal{L}(\{x\})$

De hecho $S = \underbrace{5+2x^2}_{\text{punto } p_0} + \mathcal{L}(\{-3x\})$.

$\boxed{\vec{T}}$ $T = 2x^2+\{a/a\in\mathbb{R}\} = 2x^2+\mathcal{L}(\{1\})$

Para el ángulo, es igual $\measuredangle(S,T) = \measuredangle(1,x)$

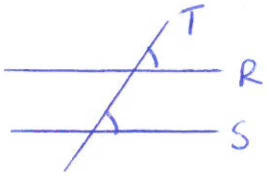
Calculemos $\measuredangle(1,x) \Rightarrow \cos\measuredangle(1,x) = \dfrac{<1,x>}{\|1\|\,\|x\|} = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/3} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\Downarrow$
$\measuredangle(1,x)=\pi/6$

$<1,x> = \int_0^1 x = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1/2$

$\|1\|^2 = \int_0^1 1\,dx = x\Big]_0^1 = 1 \Rightarrow \|1\|=1$

$\|x\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\Big]_0^1 = 1/3 \Rightarrow \|x\| = \sqrt{3}/3$

Observación: Sean S, R y T 3 rectas afines de $\mathbb{A}$ / $S \parallel R$ y T secante con S y R entonces



$$\sphericalangle(S,T) = \sphericalangle(R,T)$$

Def.: Decimos que S y T son perpendiculares (u ortogonales) y escribimos $S \perp T$, si $\vec{S} \perp \vec{T}$, es decir, si $\langle u,v \rangle = 0 \quad \forall u \in \vec{S}$ y $v \in \vec{T}$

Observación: Dos subesp. perpendiculares no tienen porqué cortarse.

$S \perp T \not\Rightarrow S \cap T \neq \emptyset$

$\mathcal{U} \leq V$, $\mathcal{U}^{\perp} = \{v \in V / \langle u,v \rangle 0, \forall u \in \mathcal{U}\}$

Proposición: Dado un subesp. cualquiera afín y $p \in \mathbb{A}$, $\exists!\, T \subset \mathbb{A}$ subesp. afín / $p \in T$, $T \perp S$ y $\dim T + \dim S = \dim \mathbb{A}$

El subesp. $\mathbb{O}$ (trivial) es perpendicular a todos

Obs: Si $S = \mathbb{A} \Rightarrow \vec{T} = \{0\} \Rightarrow T = \{p\}$

$p \in T$

Dem: $T = p + \vec{S}^{\perp}$

Observación: En la proposición, si $p \in S \Rightarrow S \cap T = \{p\}$

Observación: Si $S \perp T \Rightarrow \vec{S} \subseteq \vec{T}^{\perp}$ y $\vec{T} \subseteq \vec{S}^{\perp}$

Def.: Decimos que un sist. de ref. $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ de $\mathbb{A}$ es ortonormal (cartesiano/euclídeo) cuando la base asociada $\mathcal{B} = \{\underbrace{\overrightarrow{p_0p_1}}_{v_1}, \dots, \underbrace{\overrightarrow{p_0p_n}}_{v_n}\}$ es una base ortonormal de $\vec{\mathbb{A}}$.

Observación: Si $\mathcal{R} = \{p_0 ; \mathcal{B}\}$ es ortonormal y $p_{\mathcal{R}} = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow$
base orton.
$$p_{\mathcal{R}} = (\overrightarrow{p_0p})_{\mathcal{B}}$$

$\Rightarrow x_i = \langle v_i, \overrightarrow{p_0p} \rangle$.

Observación: Si $\underset{\{p_0,\mathcal{B}\}}{\mathcal{R}}$ y $\underset{\{p_0,\mathcal{B}'\}}{\mathcal{R}'}$ son sist. ref. ortonormales con bases asociadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ resp.,

$$\Rightarrow M(Id, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline p_{0_{\mathcal{R}'}} & \underbrace{M(Id, \mathcal{B}, \mathcal{B}')}_{\in O(n,\mathbb{R})} \end{array}\right)$$

ortonormales

2.2. MOVIMIENTO RÍGIDO:

Def.: Decimos que una aplicación afín $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ entre e.a. euclídeos, es una isometría afín cuando $\vec{f}: \vec{\mathcal{A}} \to \vec{\mathcal{A}}'$ es una isometría lineal. En el caso el ei que sean iguales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ (igual φ e igual $\langle , \rangle$), diremos que f es un mov. rígido.

Recordatorio: $F(V,g) \to (V',g)$ isometría lineal si es un isomorfismo lineal que cumple:

$\forall u,v \in V$, $g(u,v) = g'(F(u),F(v))$

Lema: Si $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es una isometría afín $\Rightarrow \dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}'$ y $M(\vec{f}, B, B') \in O(n,\mathbb{R})$ si B y B' son bases ortonormales.

Además, se cumple:

- f preserva distancias: $dist_{\mathcal{A}'}(f(p),f(q)) = dist_{\mathcal{A}}(p,q)$.
- f es conforme: es decir, conserva ángulos.

  Si R y S son rectas secantes $\Rightarrow \measuredangle_{\mathcal{A}'}(f(R),f(S)) = \measuredangle_{\mathcal{A}}(R,S)$

Dem: $dist_{\mathcal{A}'}(f(p),f(q)) \overset{def}{=} \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\|_{\mathcal{A}'} \overset{def}{=} \sqrt{\langle \overrightarrow{f(p)f(q)}, \overrightarrow{f(p)f(q)} \rangle_{\mathcal{A}'}} \underset{f \text{ afín}}{=}$

$$= \sqrt{\langle \vec{f}(\overrightarrow{pq}), \vec{f}(\overrightarrow{pq}) \rangle_{\mathcal{A}'}} \underset{f \text{ isom.}}{=} \sqrt{\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq} \rangle_{\mathcal{A}}} \overset{def}{=} \|\overrightarrow{pq}\|_{\mathcal{A}} = dist_{\mathcal{A}}(p,q)$$

- Como $\vec{f}$ es biyectiva, también lo es f, y por tanto $f(R)$ y $f(S)$ son rectas secantes.

  Dem: Si $v \in \vec{R}$, $v \neq 0 \Rightarrow \vec{f}(v) \neq 0$ y $\vec{f}(v) \in \overrightarrow{f(R)} = \vec{f}(\vec{R})$

  $w \in \vec{S}$, $w \neq 0 \Rightarrow \underset{\neq 0}{\vec{f}(w)} \in \overrightarrow{f(S)}$, $\cos \measuredangle_{\mathcal{A}'}(\vec{f}(v), \vec{f}(w)) \overset{def}{=} \dfrac{\langle \vec{f}(v), \vec{f}(w) \rangle_{\mathcal{A}'}}{\|\vec{f}(v)\|_{\mathcal{A}'} \|\vec{f}(w)\|_{\mathcal{A}'}} \overset{def}{=}$

  $$\overset{\vec{f} \text{ isom.}}{=} \frac{\langle v, w \rangle_{\mathcal{A}}}{\|v\|_{\mathcal{A}} \|w\|_{\mathcal{A}}} = \cos \measuredangle_{\mathcal{A}}(u,w)$$

Ejemplos:

1) $f: A \longrightarrow A'$ constante; $f(p) = p'$ $\forall p \in A$, no es biyectiva, salvo si $\dim(A) = \dim(A') = 0$.

2) $f: A \longrightarrow A$ traslación; $f(p) = p + v$, $v \in \vec{A}$ fijo f afín y biyectiva.

$\vec{f} = Id_{\vec{A}}$ isom. $\Rightarrow f$ isometría afín.

Ejercicio:

Si $f: A \longrightarrow A'$ conserva distancias, es decir, $dist_{A'}(f(p), f(q)) = dist_A(p,q)$ $\forall p,q \in A$

$\Rightarrow f$ inyectiva.

Propiedades (isom. afín):

1) $f_1: A \longrightarrow A'$ y $f_2: A' \longrightarrow A''$ isometrías afines $\Rightarrow f_2 \circ f_1: A \longrightarrow A''$ isom. a.

2) $f: A \longrightarrow A'$ isometría afín $\Rightarrow f^{-1}: A' \longrightarrow A$ isom. afín.

Consecuencia:

$\mathcal{M} = \{f: A \longrightarrow A$ mov. rígido$\}$ es un grupo con la composición de aplicaciones.

Ejercicio:

Prueba que cualesquiera dos esp. afines euclídeos son isométricos, es decir, si A, A' son e.a.e., $\dim A = \dim A' \Rightarrow \exists f: A \longrightarrow A'$ isom. afín.

Equivalent.: Todo e.a.e. de dim n es isométrico a $\mathbb{R}^n$ con el prod. esc. usual.

↪ Basta tomar un S. Ref. ortonormal $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n\}$ ($\Longleftrightarrow B = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$ ortonormal de $\vec{A}$)

y considerar la única aplic. afín $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

tal que $f(p_0) = (0, \dots, 0)$; $f(p_i) = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } i\text{-ésima}}}{1}, 0, \dots, 0)$.

(equiv., $\vec{f}$ lleva B en la base usual de $\mathbb{R}^n$)

RESULTADOS DE CLASIFICACIÓN :

Sean $R=\{p_0; B\}$ y $R'=\{p_0'; B'\}$ sist. ref. ortonormales de A y A', resp. $f: A \to A'$ afín.

$f(p)_{R'} = f(p_0)_{R'} + \underbrace{M(\vec{f}, B, B')}_{M} p_R$. f isom. afín $\Leftrightarrow \vec{f}$ isom. l. $\Leftrightarrow M \in O(n, \mathbb{R})$ si $\dim A = n$

DIM. 2

$B=\{e_1, e_2\}$, $B'=\{e_1', e_2'\}$

$\vec{f}(e_1)_{B'} = (a,b)$ / $a^2+b^2=1$

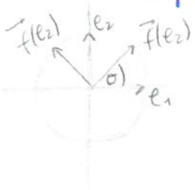
$\vec{f}(e_2)_{B'} = \pm(-b,a)$

$\det(\vec{f})=1 \Rightarrow \vec{f}(e_2)=(-b,a) \Rightarrow M=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$\det(\vec{f})=-1 \Rightarrow \vec{f}(e_2)=(b,-a) \Rightarrow M=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

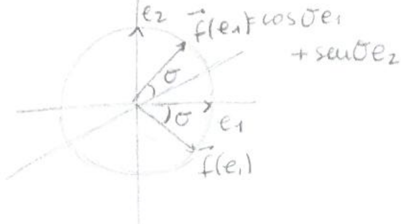
" $a^2+b^2=1 \Rightarrow \exists\, \theta \in (-\pi, \pi]$ / $a=\cos\theta$; $b=\operatorname{sen}\theta$

• Suponemos ahora $\boxed{A'=A}$ y $\boxed{R'=R}$



$\vec{f}$ es giro (o rotación) de ángulo θ en $\vec{A}$

$\vec{f}$ es una simetría ortogonal respecto de la recta vectorial con vector director $(\cos\theta/2, \operatorname{sen}\theta/2)$



$\boxed{\det(\vec{f})=1}$ $p_R=(x,y)$

$f(p)_R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

¿P_f? $f(x,y)=(x,y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{vmatrix} = 2(1-a)$

•) $a=1$ ($\Leftrightarrow \vec{f}(e_1)=e_1$, y $\vec{f}(e_2)=e_2$) $\Leftrightarrow \vec{f}=Id_{\vec{A}} \Rightarrow f$ traslación de vector $v_B=(c,d)$
$\hookrightarrow v = ce_1+de_2$

Si $v_B=(0,0) \Leftrightarrow f=Id_A \Leftrightarrow P_f=A$

$v_B \neq (0,0) \Rightarrow P_f \neq \emptyset$.

•) $a \neq 1$, única sol. del sistema " $P_f=\{1 \text{ punto}\}$

En este caso, f es la rotación (o giro) de centro el p. fijo y ángulo θ.

$\boxed{\det(\vec{f}) = -1}$

$f(x,y)_R = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $a^2+b^2=1$.

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 - b^2 = \lambda^2 - 1$, $\exists B' = \{v_1, v_2\}$ base ortonormal de $\vec{V}_p$ de $\vec{f}$

$M(\vec{f}, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ahora $R = \{p_0, B'\}$, $p_{R'} = (x', y')$

$f(x',y')_{R'} = \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+c' \\ d'-y' \end{pmatrix}$, $(x',y') \in P_f \iff \begin{cases} x'+c' = x' \iff \underline{c'=0} \\ d'-y' = y' \iff \underline{y' = d'/2} \end{cases}$

- $P_f \neq \phi \iff c' = 0$, en cuyo caso, P_f = recta con ec. imp. $y' = d'/2$
- En general, $f(x',y')_{R'} = \begin{pmatrix} c' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ d'-y' \end{pmatrix}$ es decir, $f = f_2 \circ f_1$ donde

  $f_1(x',y') = (x', d'-y') \rightsquigarrow$ simetría respecto la recta $y' = d'/2$

  $f_2(x',y') = (x'+c', y') \rightsquigarrow$ traslación de vector $v = c'v_1$

- Si $P_f \neq \phi$ ($\iff c' = 0$) $\Rightarrow f$ es la simetría resp. de la recta P_f (sim. axial)

  Si $P_f = \phi$ ($\iff c' \neq 0$) $\Rightarrow f$ es sim. axial con desplazamiento.

Elem. notables: recta respecto la que se hace la simetría ($y' = d'/2$) y $\vec{v}$ de desplaz.

RESUMEN

$\det(P_f) \backslash P_f$	A	Recta R	Un punto p_0	ϕ
1	Id_A	—	Giro de áng. $\sigma \in [-\pi, \pi]$, $\sigma \neq 0$ y centro p_0; cuando $\sigma = \pi$, f es simet. central resp. p_0	Traslación con vector v
-1	—	Simetría orton. resp. de R	—	Simetría axial con deslizamiento

DIM 3 :

$\vec{f}$ = isometría lineal de $\vec{A}$; $\dim(\vec{A})=3$

$\exists B=\{e_1,e_2,e_3\}$ b. orton. de $\vec{A}$ y $\exists \sigma\in[0,\pi]$ / $M(\vec{f},B)$ viene dada por :

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ 0 & \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}$ si $\det(\vec{f})=1$

② $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ 0 & \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}$ si $\det(\vec{f})=-1$

Casos (según σ) :

①
- Si $\sigma=0 \Rightarrow \vec{f}=Id_{\vec{A}}$
- Si $0<\sigma<\pi \Rightarrow \vec{f}$ rotac. de ángulo σ alrededor de la recta $\mathcal{L}(\{e_1\})$
- Si $\sigma=\pi \Rightarrow \vec{f}$ sim. orton. resp. del plano $\mathcal{L}(\{e_2,e_3\})$

②
- Si $\sigma=0 \Rightarrow \vec{f}$ sim. orton. resp. $\mathcal{L}(\{e_2,e_3\})$ sim. especular
- Si $\sigma=\pi \Rightarrow \vec{f}=-Id_{\vec{A}}$ sim. resp. de origen sim. central
- Si $0<\sigma<\pi \Rightarrow \vec{f}$ compos. de una rotación de áng. σ en el plano $\mathcal{L}(\{e_2,e_3\})$ con una sim. orton. resp. $\mathcal{L}(\{e_2,e_3\})$

A eae. , $\dim(A)=3$,, $R=\{p_0,B\}$ sist. ref. ortonormal.

$\boxed{\det(\vec{f})=1}$

$p_R=(x,y,z)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = f(p)_R = \underset{f(p_0)_R}{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ 0 & \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con } \sigma\in[0,\pi]$$

·) $\sigma=0 \Rightarrow f$ es traslac. de vector $v=ae_1+be_2+ce_3 \Rightarrow f=Id_A$, si $v=0$;
$f=$ trasl. v si $v\neq 0$.

·) $\sigma\neq 0 \Rightarrow$ ¿P_f? $\begin{cases} x'=x+a \\ \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \end{cases}$

Es una rotación en un plano con esp. de dim $\mathcal{L}\{e_2,e_3\}$ de áng. σ y centro (y_0,z_0). Luego $P_f=\emptyset \iff x=x+a \iff a=0$

f es la comp. de la rotación de áng. σ alrededor de la recta R , $R=q_0+\mathcal{L}(\{e_1\})$, siendo $q_{0_R}=(0,y_0,z_0)$ y la traslación de $\vec{v}$; $v=ae_1$.

• Si $a=0 \Rightarrow f$ es una rotación alrededor de una recta R de ángulo θ.
• Si $a\neq 0 \Rightarrow f$ se llama mov. helicoidal de ang. θ, traslación $v=ae_1$

CASOS PARTICULARES:

$\left.\begin{array}{l}\theta=\pi \\ a=0\end{array}\right\} \Rightarrow f$ simetría ortogonal respecto de R (simetría axial)

Elem. notables: recta R y deslizam. V.

$\left.\begin{array}{l}\theta=\pi \\ a\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow f$ simetría axial con deslizamiento.

$\boxed{\det(\vec{f})=-1}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = a - x & (*1) \\ \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} & (*2) \end{cases}$$

$a - x = x \iff \frac{a}{2} = x$

$f(a/2, y, z) \in \{x = a/2\}$, es decir, el plano π de ec. $x = a/2$ es invariante por f.

Casos:

1) $\theta = 0$ y $(b,c) = (0,0)$

$(*2)$ se convierte en $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow$ "Identidad en este plano", luego $P_f = \pi$

Si tomamos $p_0 = (a/2, 0, 0)$ como origen, queda $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

f es la simetría ortogonal respecto del plano π (sim. especular)

2) $\theta = 0$, $(b,c) \neq (0,0)$

f es la composición de la sim. ortog. respecto al plano π compuesta con una traslación de vector $v = be_2 + ce_3 \neq 0$ (sim. especular con deslizam.)

¿Cómo calcular π? Calculando V_{-1} de $\vec{f}$ tenemos la dirección.

3) $\theta \neq 0 \Rightarrow (*2)$ nos da un giro en el plano YZ con un único punto fijo (y_0, z_0)

$$\Rightarrow P_f = \langle \underbrace{(a/2, y_0, z_0)}_{q_0} \rangle$$

f es la composición de una sim. ortogonal respecto de Π con un giro de ángulo θ en el plano Π.

CASO ESPECIAL:

Si $\theta = \pi \Rightarrow f$ es la simetría central respecto del punto fijo q_0

RESUMEN:

$\det(\vec{f}) \backslash P_f$	A	Plano Π	Recta R	Punto q_0	$\emptyset$
1	Id_A	—	Rotación de áng. $\theta \in (0, \pi]$ alrededor de R	—	Traslación t_v, $v \neq 0$ es un mov. helicoidal de áng. $\theta \in (0, \pi]$ y R y traslación v.
-1	—	Simetría respecto del plano Π	—	Comp. de simetría respecto de Π que pasa por q_0 con una rotación de áng. θ, alred. de $R = q_0 + \vec{\Pi}^\perp$	Simetría especular respecto de un plano Π con desliz. $v \in \vec{\Pi}$

Ejemplo (típico):

Comprueba que $f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - 1\right)$ es un mov. rígido de $\mathbb{R}^2$, clasifícalo y calcula sus elem. notables

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \cos \pi/3 & \operatorname{sen} \pi/3 \\ \operatorname{sen} \pi/3 & -\cos \pi/3 \end{pmatrix}$$

Si nos damos cuenta... $\vec{f}$ es la simetría respecto de la recta $L(\{(\cos \pi/6, \operatorname{sen} \pi/6)\})$

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = I_2 \quad , \quad |M| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists^{-1} M^{-1} = M^t \Rightarrow M \in O(\mathbb{R}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{f}$ es isometría lineal $\Rightarrow f$ mov. rígido

↳ la base usual es ortonormal

Como $\det(\vec{f}) = -1 \longrightarrow$ Simetría resp. una recta R posib. con deslizam.

$\boxed{P_f}$ $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 = x \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 = y \end{array}\right\} \rightarrow$ No hay solución $\Rightarrow P_f = \emptyset \Rightarrow$ Hay deslizamiento.

$\boxed{V_1 \text{ de } \vec{f}}$ ya que $\vec{R} = V_1$

$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = x \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = y \end{array}\right\}$ $x = \sqrt{3}y \Rightarrow V_1 = \mathcal{L}(\{(\sqrt{3}, 1)\})$

La recta R tiene ec. implíc. de la forma $\underline{x - \sqrt{3}y = 0}$

$\boxed{¿c?}$

Sea $(x_0, y_0) \in R \Rightarrow f(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y_0 + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 - \frac{y_0}{2} - 1\right) \in R$

$\Rightarrow c = \frac{x_0}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y_0 + 1 - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0 - \frac{y_0}{2} - 1\right) \underset{\text{operando}}{=} -x_0 + \sqrt{3}y_0 + 1 + \sqrt{3} =$

$= -c + 1 + \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{c = \frac{1+\sqrt{3}}{2}}$

$\Rightarrow R$ tiene ec. implícita.

$v = \overrightarrow{p_0 f(p_0)} = \left(\frac{3\sqrt{3}-2}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

CONTINUACIÓN T.2 :

ALGUNOS RESULTADOS CLÁSICOS :

Sea A un plano afín, definimos la circunferencia de centro $p_0 \in A$ y radio $R > 0$ como: $C(p_0, R) = \{p \in A \,/\, d(p_0, p) = R\}$

En general, si $\dim(A) = n$, podemos definir la esfera de centro $p_0 \in A$ y radio $R > 0$, como: $S(p_0, R) = \{p \in A \,/\, \underbrace{d(p_0, p)}_{\|\overrightarrow{p_0 p}\|} = R\}$

En un espacio afín euclídeo A, un triángulo viene dado por 3 puntos a. indep. $T = \{a, b, c\} \in A$

Dichos puntos se llaman vértices de T y los lados vienen dados por:

$[a, b] = \{a + \lambda \overrightarrow{ab} \,/\, \lambda \in [0, 1]\} = \{a + t \frac{\overrightarrow{ab}}{\|\overrightarrow{ab}\|} \,/\, t \in [0, \|\overrightarrow{ab}\|]\}$

De la misma manera def. $[b, c]$ y $[c, a]$:

$[b, c] = \{b + \lambda \overrightarrow{bc} \,/\, \lambda \in [0, 1]\}$

$[c, a] = \{c + \lambda \overrightarrow{ca} \,/\, \lambda \in [0, 1]\} = [a, c]$

Las longitudes de cada lado será: $\ell([a, b]) = \|\overrightarrow{ab}\|$

T es un triángulo rectángulo cuando 2 lados sean ortogonales ($\overrightarrow{ab} \perp \overrightarrow{ac}$)

En tal caso, llamamos catetos a los lados con extremos 'a' e hipotenusa a $[b, c]$

Teorema de Pitágoras:

Sea $T = \{a, b, c\}$ triángulo y $\overrightarrow{ab} \perp \overrightarrow{ac} \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{bc}\|^2 = \|\overrightarrow{ab}\|^2 + \|\overrightarrow{ac}\|^2}$

Dem: trivial.

En un triángulo $T = \{a, b, c\}$ def. ángulo interior en el vértice 'a' como el áng. orientado: $\hat{a} = \measuredangle_{or}(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$

Calculando en el plano $\langle T \rangle$ y con la orientación inducida por la base $\{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\}$ del plano.

NOTA: tanto b como c, las bases son las que definen la orientación. En b será $\{\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}\}$ y en c $\{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}\}$

Proposición:

La suma de los áng. interiores de un triang. es igual a π :: $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=\pi$

Dem:

$$\hat{a}+\hat{b}+\hat{c} = \measuredangle_{or}(\vec{ab},\vec{ac}) + \measuredangle_{or}(\vec{bc},\vec{ba}) + \measuredangle_{or}(\vec{ca},\vec{cb}) = \measuredangle_{or}(\vec{ab},\vec{ac}) +$$

$$+ \measuredangle_{or}(\vec{bc},\vec{ba}) + \measuredangle_{or}(\vec{ac},-\vec{cb}) = \measuredangle_{or}(\vec{ab},\vec{bc}) + \measuredangle_{or}(\vec{bc},\vec{ba}) + 2k\pi =$$

$$= \underbrace{\measuredangle_{or}(\vec{ab},\vec{ba})}_{\pi} + 2(k+k')\pi \Rightarrow \pi + 2(k+k')\pi \quad :: \; k,k' = \{0,1,-1\}$$

$2(k+k')\pi \in \{-4\pi,-2\pi,0,2\pi,4\pi\}$ pero como $\hat{a},\hat{b},\hat{c} \in (0,\pi) \Rightarrow \hat{a}+\hat{b}+\hat{c} \in (0,3\pi)$

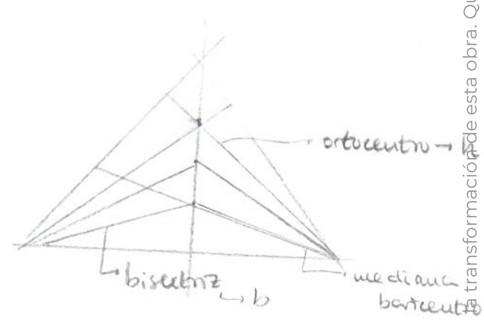
$\hat{a}+\hat{b}+\hat{c} = \pi + 2(k+k')\pi \iff \underline{\underline{\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=\pi}}$

En la geometría esférica, $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c} > \pi$ y en la hiperbólica $< \pi$.

Teorema Euler:

El circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo están alineados

Dem:



$$g = a + \frac{1}{3}(\vec{ab}+\vec{ac}) = b + \frac{1}{3}(\vec{bc}+\vec{ba})$$

Sea $h = h_{g,-1/2}$, $h(a) = m_a$

$$h(a) = g - \tfrac{1}{2}\vec{ga} = b + \tfrac{1}{3}(\vec{bc}+\vec{ba}) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{ab}+\vec{ac}\right) =$$

$$= b + \tfrac{1}{3}\vec{ba} + \tfrac{1}{6}\vec{ab} + \tfrac{1}{6}\vec{ac}$$

Recordar que H_a = altura que pasa por a

$H_a = a + \mathcal{L}(\{\vec{bc}\})^\perp = a + \mathcal{L}(\{v\})$, $v \perp \vec{bc}$

h es homotecia, luego lleva cada recta en una paralela.

Luego $h(H_a) = m_a + \mathcal{L}(\{\vec{bc}\})^\perp \equiv$ mediatriz del lado $[b,c]$

Análogam.,

$H_b = b + \mathcal{L}(\{\vec{ac}\})^\perp \Rightarrow h(H_b) = m_b + \mathcal{L}(\{\vec{ac}\})^\perp \equiv$

$\equiv$ mediatriz de $[a,c]$

Igual con H_c

g = baricentro

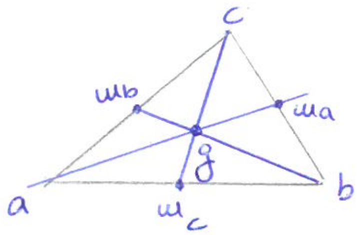
$h = h_{g,-1/2}$

$h(a) = m_a =$

$= b + \tfrac{1}{2}\vec{bc}$

$h(b) = m_b$

$h(c) = m_c$



$\Rightarrow$ Ortocentro, $H_a \cap H_b \cap H_c = \underbrace{\{O\}}_{\text{ortoc. de } T}$

$h(O) \in \underbrace{h(H_a) \cap h(H_b) \cap h(H_c)}_{=\{p_0\}}$, con $p_0 \equiv$ circuncentro de T.

$p_0 = h(O) = g - \frac{1}{2}\overrightarrow{gO} \Rightarrow \overrightarrow{gp_0} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{gO} \Rightarrow \{g, p_0, O\}$ afinm. depend.,
es decir, alineados.

Teorema de Thales y semejanzas:

Def: Decimos que una aplicación $f: A \longrightarrow A$ es una semejanza si es la composición de un movimiento rígido y una homotecia.

Dos "objetos afines" son semej. si $\exists$ una semejanza que lleva de uno a otro.

Observaciones:

1) Los mov. rígidos son semejanzas
2) Las homotecias son también semejantes
3) Toda semejanza es conforme, es decir, conserva ángulos
4) Se mantiene la proporcionalidad en las semejanzas.

$h \equiv$ homotecia de centro p_0 y razón λ.

$h(p) = p_0 + \lambda\overrightarrow{p_0p}$.

$$d(h(p_1), h(p_2)) = d(p_0 + \lambda\overrightarrow{p_0p_1}, p_0 + \lambda\overrightarrow{p_0p_2}) = \|(p_0 + \lambda\overrightarrow{p_0p_1})(p_0 + \lambda\overrightarrow{p_0p_2})\| =$$
$$= \|\lambda\overrightarrow{p_0p_2} - \lambda\overrightarrow{p_0p_1}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{p_0p_2} + \overrightarrow{p_1p_0}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{p_1p_2}\| = |\lambda|\, d(p_1, p_2).$$

Luego, la distancia entre la imagen de dos puntos es proporcional a la distancia entre los puntos.

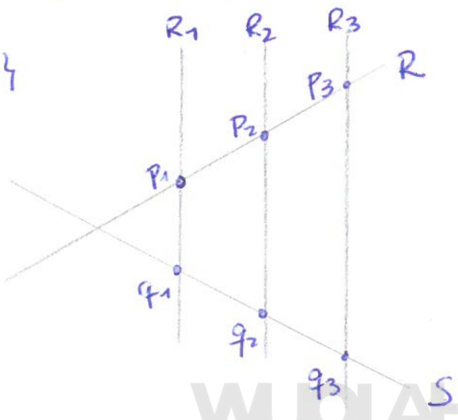
T. Thales:

Sean R_1, R_2, R_3 rectas paralelas en A, $\dim(A) = 2$ y sean R y S dos rectas tal que $\vec{R} \neq \vec{R_1}$ y $\vec{S} \neq \vec{R_1}$

Llamamos $p_i = R \cap R_i$, $q_i = S \cap R_i$, $i \in \{1,2,3\}$

Entonces:

$$\frac{d(p_1,p_2)}{d(q_1,q_2)} = \frac{d(p_1,p_3)}{d(q_1,q_3)} = \frac{d(p_2,p_3)}{d(q_2,q_3)}$$



Dem: Consideramos $f: A \longrightarrow A$ proyección sobre S en la dirección de $\vec{R}_1$

$f(p_i) = q_i$, ya que $\overrightarrow{p_i q_i} \in \vec{R}_1$

Como $\overrightarrow{p_1 p_2}, \overrightarrow{p_1 p_3} \in \vec{R} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{p_1 p_2} = \lambda \overrightarrow{p_1 p_3}$

$$\left[\overrightarrow{q_1 q_2} = \overrightarrow{f(p_1) f(p_2)} = \vec{f}(\overrightarrow{p_1 p_2}) = \vec{f}(\lambda \overrightarrow{p_1 p_3}) = \lambda \vec{f}(\overrightarrow{p_1 p_3}) = \lambda \overrightarrow{f(p_1) f(p_3)} = \lambda \overrightarrow{q_1 q_3} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d(q_1, q_2)}{d(q_1, q_3)} = \frac{\|\overrightarrow{q_1 q_2}\|}{\underbrace{\|\overrightarrow{q_1 q_3}\|}_{\neq 0}} = |\lambda| = \frac{d(p_1, p_2)}{d(p_1, p_3)}$$