PRÁCTICAS TEMA 1.pdf

Practicas T1

2º Geometría III

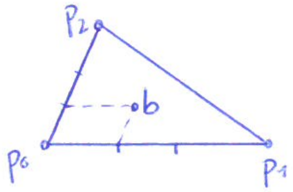
Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
UGR - Universidad de Granada

PRÁCTICAS (T. 1)

1) $\phi: V \times V \longrightarrow V$ dado por $\phi(u,v) = 2u - v$, ¿C E.a. en V?

2) $p_0, \dots, p_k \in A$, $b = p_0 + \frac{1}{n+1} \sum \overrightarrow{p_0 p_i}$

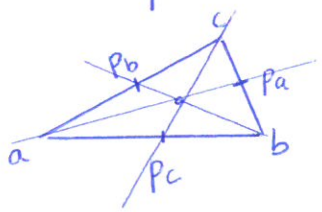


$$\underset{j \neq 0}{p_j} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0} \overrightarrow{p_j p_i} = p_0 + \overrightarrow{p_0 p_j} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0} \overrightarrow{p_j p_0} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0} \overrightarrow{p_i p_0} =$$

$$= p_0 + \overrightarrow{p_0 p_j} + \frac{1}{n+1}(n+1)\overrightarrow{p_j p_0} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0} \overrightarrow{p_0 p_i} = p_0 + \cancel{\overrightarrow{p_0 p_j}} - \cancel{\overrightarrow{p_0 p_j}} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0} \overrightarrow{p_0 p_i} =$$

$$= p_0 + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0} \overrightarrow{p_0 p_i}$$

3) Probar que las medianas se cortan en el baricentro.



* la mediana que pasa por a y por $p_a = b + 1/2\, \overrightarrow{bc} = a + \overrightarrow{ab} + 1/2\, \overrightarrow{bc} =$

$= a + \overrightarrow{ab} + 1/2\,(\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac}) = a + \overrightarrow{ab} - 1/2\, \overrightarrow{ab} + 1/2\, \overrightarrow{ac} =$

$= a + 1/2\,(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac})$

por $\frac{1}{n+1}$ del ej. anterior

* Tenemos que probar que m_a pasa por el baricentro $B = a + 1/3\,(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac})$

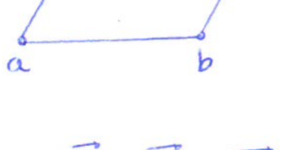
$m_a = a + \mathcal{L}(\{\overrightarrow{a p_a}\})$

* Tenemos que probar que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ / $B = a + \lambda \overrightarrow{a p_a}$

$\overrightarrow{a p_a} = \overrightarrow{a(a + 1/2(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac}))} \underset{\overrightarrow{p(p+v)} = v}{=} 1/2(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac})$

¿$\exists \lambda$ / $a + 1/3(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac}) = a + \lambda/2(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac})$? Sí, $\lambda = 2/3$

7)



Hipótesis: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ / $\overrightarrow{ab} = \lambda \overrightarrow{dc}$ y $\exists \mu$ / $\overrightarrow{ad} = \mu \overrightarrow{bc}$

$\Rightarrow$ hay que probar que λ y $\mu = 1$

$$\lambda \overrightarrow{dc} = \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc} + \overrightarrow{cb} = \mu \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{dc} - \overrightarrow{bc} \iff \begin{matrix} (\lambda - 1)\overrightarrow{dc} + (1-\mu)\overrightarrow{bc} = 0 \\ (1 - \lambda)\overrightarrow{cd} + (\mu - 1)\overrightarrow{cb} \end{matrix}$$

$\Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{matrix}$ //

Ejercicio $\longrightarrow$ Calcula las coordenadas de un punto R' en función de las coordenadas de R.

Sea $d' \in A$ un punto $(d')_{R'} = (d_1, d_2) \iff$ (*)

(*) $d' = a' + d_1(-\vec{ab} - \vec{ac}) + d_2(-3\vec{ab} - \vec{ac})$

$d' = a' - d_1\vec{ab} - d_1\vec{ac} - 3d_2\vec{ab} - d_2\vec{ac}$

$d' = a + 2\vec{ab} - d_1\vec{ab} - d_1\vec{ac} - 3d_2\vec{ab} - d_2\vec{ac} =$

$= a + (2 - d_1 - 3d_2)\vec{ab} + (-d_1 - d_2)\vec{ac} \iff$

$\iff (d')_R = (\underbrace{2 - d_1 - 3d_2}_{x}, \underbrace{-d_1 - d_2}_{y})$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 - d_1 - 3d_2 \\ y = -d_1 - d_2 \end{array}\right\}$ despejar d_1 y d_2 en función de x e y

o bien los ponemos de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x/2 - 1 - y/2 \\ -3/2\, x + 3 + 1/2\, y \end{pmatrix} //$$

Ejercicio $\longrightarrow$ Dem. que la recta afín de $\mathbb{R}^3$ es la intersección de 2 planos afines
¿Cierto en $\mathbb{R}^n$?

Una recta en $\mathbb{R}^3$ se puede ver como el conj. de soluc. de un sist. de 2 ec. lin.:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \longrightarrow \text{define un plano } \Pi_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \longrightarrow \text{define otro plano } \Pi_1 \neq \Pi_2 \end{cases}$$

¿En $\mathbb{R}^n$?

En $\mathbb{R}^n$ una recta está determinado por n-1 ecuaciones y un plano n-2.

12)

$a' = a + 2\vec{ab}$
$b' = a + \vec{ab} - \vec{ac}$
$c' = a - \vec{ab} - \vec{ac}$

Para probar que es S.R:

① $\vec{a'b'}$ y $\vec{a'c'}$ deben de ser lin. indep.

$\vec{a'b'} = \vec{ab} - \vec{ac} - 2\vec{ab} = -3\vec{ab} - \vec{ac}$

$\boxed{1^a \text{ forma}}$

$(\vec{a'b'})_B = (-1,-1)$; $(\vec{a'c'})_B = (-3,-1)$

$M(B',B) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ su det $\neq 0 \Rightarrow$ sí //

$\boxed{2^a \text{ forma}}$

Supong. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ " $-3\vec{ab} - \vec{ac} = \lambda(-\vec{ab} - \vec{ac}) \Rightarrow$

$\Rightarrow -3\vec{ab} - \vec{ac} = -\lambda\vec{ab} - \lambda\vec{ac} \iff (\lambda-3)\vec{ab} + (\lambda-1)\vec{ac} = 0 \iff$

$\underset{\text{l. indep.}}{\iff} \lambda - 3 = 0 = \lambda - 1$!! $\longrightarrow$ SON LIN. INDEP.

13) $p \in A$ probar que $S = p + \vec{S} \iff p \in S$.

i) $\Rightarrow$ | ($S = p + \vec{S}$ entonces puedo escribir cualquier punto $\underset{}{p'} = p + u$, donde $u \in \vec{S}$) sobra $p' \in S$

$p = p + 0 \in p + \vec{S} = S$

ii) $p \notin S \overset{?}{\Rightarrow} S \cap (p + \vec{S}) = \phi$

Supong. $\exists q \in (p + \vec{S}) \cap S \Rightarrow \begin{cases} q = p + u,\ u \in \vec{S} \Rightarrow p = q - u \in q - \vec{S} \text{ !!} \\ \cancel{p = q - u} \quad \text{Altern. buena} \quad \vec{pq} = \overrightarrow{p(p+u)} = u \Rightarrow \vec{qp} = -u \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow p = q + \vec{qp} = q - u \in \underbrace{q}_{\in S} - \vec{S} = S$!!

23) S recta afín $\Rightarrow \dim \vec{S} = 1$
T subesp. afín, $\dim \vec{T} \geq 2$.

Supongamos que $S \cap T \neq \emptyset \Rightarrow \exists p \in S \cap T$

- Si $\vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(S \cap T) = \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) = 0 \Rightarrow S \cap T = \{p\}$
- Si $\vec{S} \cap \vec{T} \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{S} \cap \vec{T} = \vec{S} \Rightarrow \vec{S} \subseteq \vec{T} \Rightarrow S$ es paralelo a $T \Rightarrow$
$\Rightarrow$ como además $\exists p \in S \cap T \Rightarrow S \subset T$.

$$\left.\begin{array}{l} \dim T = n-1 \\ S \cap T = \emptyset \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} S \text{ paralelo a } T$$

$$\dim(S \vee T) \overset{\leq n}{=} \dim S + \dim T - \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) + 1 = 1 + n - 1 - \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) + 1 =$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) \leq \dim(\vec{S}) = 1 \Rightarrow \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) = 1$$

$\vec{S} \cap \vec{T} = \vec{S} \Rightarrow \vec{S} \subseteq \vec{T} \Rightarrow S$ es paralelo a T.

21) $\vec{A} = \vec{S} + \vec{T} \overset{?}{\Rightarrow} S \cap T \neq \emptyset$ (se cortan)

a) $0 \leq \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) = \dim(\vec{S}) + \dim(\vec{T}) - \dim(A)$

Supong. que no se cortan $(S \cap T = \emptyset) \Rightarrow \dim(S \vee T) = \dim S + \dim T - \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) + 1 =$
$= \cancel{\dim S} + \cancel{\dim T} - \cancel{\dim(\vec{S})} - \cancel{\dim(\vec{T})} + \dim A + 1 = \dim(A) + 1$!! al ser un subesp. de A no puede tener dim. mayor.

b) Si $\vec{A} = \vec{S} \oplus \vec{T} \overset{?}{\Rightarrow} S \cap T$ es un único punto.

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \dim \vec{S} + \dim \vec{T} = \dim \vec{A} \overset{(a)}{\Rightarrow} \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) = 0 \\ \text{Apartado anterior } \quad S \cap T \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \text{fin.}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \dim \vec{S} = \dim S = 1 \\ \dim \vec{T} = \dim T = \dim(A) - 1 \end{array}\right\} \overset{\vec{S} \not\subset \vec{T}}{\Longrightarrow} \vec{S} \oplus \vec{T} = \vec{A} \overset{\text{apart. ant.}}{\Longrightarrow} S \cap T = \{\text{punto}\}$$

22) $S, T \subset A$ rectas afines:

$\vec{S} \cap \vec{T} = \{0\} \Rightarrow \vec{S} \oplus \vec{T} = \vec{A} \Rightarrow S \cap T = \{1 \text{ punto}\}$

$\vec{S} \cap \vec{T} \neq \{0\} \Rightarrow \vec{S} = \vec{T} \overset{def}{\Longleftrightarrow} S \parallel T$ → Si $S \cap T \neq \phi \Rightarrow S = T$; → Si $S \cap T = \phi \Rightarrow S$ y T paralelas y dis puntos

29) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ afín: → Det → Nos da la imagen de un plano

Con puntos fijos $x+y+z=1$ y tal que $f(0,0,0) = (1,0,0)$.

¿Es f un isomorfismo afín?

→ $\{x+y+z=1\} \notin (0,0,0) \Rightarrow$ $f(1,0,0) = (1,0,0)$
$f(0,1,0) = (0,1,0)$
$f(0,0,1) = (0,0,1)$

$\vec{f}(\underbrace{1,0,0}_{\overrightarrow{(0,0,0)(1,0,0)}}) = f\,\overrightarrow{(0,0,0)(1,0,0)} = (0,0,0)$; $\vec{f}(0,1,0) = (-1,1,0)$; $\vec{f}(0,0,1) = (-1,0,1)$

$$M(\vec{f}, Bu, Bu) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → como su det. $= 0$ → No puede ser inyectiva ⇒ no biyectiva ⇒ NO ISOMORF.

Construimos la aplicación.

Tomamos como S. Ref. la usual (Ru)

$$f(x,y,z)_{Ru} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f(0,0,0)} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ej. examen (2016)

$f(1,0,2) = (0,0,2)$
$f(1,1,1) = (1,1,0)$
$f(1,2,0) = (2,2,-2)$
$f(0,0,0) = (1,1,-2)$

Tomamos $p_0 = (0,0,0)$; $p_1 = (1,0,2)$; $p_2 = (1,1,1)$; $p_3 = (1,0,2)$

$v_1 = \overrightarrow{p_0p_1} = (1,0,2)$
$v_2 = \overrightarrow{p_0p_2} = (1,1,1)$
$v_3 = \overrightarrow{p_0p_3} = (1,2,0)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ $v_1 + v_3 = 2v_2$ Tenemos q ver si con las imag. pase igual.

Sino nos damos cuenta...

$$f(x,y,z)_{Ru} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z \\ 1+a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z \\ -2+a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Sustituimos ---

$$\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+a_{11}+2a_{13}\\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+a_{11}+a_{12}+a_{13}\\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\end{pmatrix} \implies \left.\begin{array}{l} a_{11}+2a_{13}=-1 \\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=0 \\ a_{11}+2a_{12}=1 \end{array}\right\} \nexists \text{ solución.}$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+a_{11}+2a_{12}\\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\end{pmatrix}$$

27) Sea $f: A \longrightarrow A$ afín.

$P_f = \{p \in A \;/\; f(p)=p\}$. Prueba que es un subesp. afín ($P_f \subset A$), si $P_f \neq \emptyset$.

Supong. $P_f \neq \emptyset \Rightarrow \exists p \in P_f$. Tomamos $q \in A$: $f(q) = f(p+\overrightarrow{pq}) = f(p)+\vec{f}(\overrightarrow{pq}) =$
$= p + \vec{f}(\overrightarrow{pq})$.

recordar que p + lo que sea = ( ) lo q sea.

$q \in P_f \iff f(q)=q \iff q = p+\vec{f}(\overrightarrow{pq}) \iff \vec{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{pq} \iff \overrightarrow{pq} \in \operatorname{Ker}(\vec{f}-Id_{\vec{A}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ luego $P_f = p + \underbrace{\operatorname{Ker}(\vec{f}-Id_{\vec{A}})}_{\vec{P}_f}$