Capítulo 7

Formas Normales

7.1. Formas normales

En esta sección vamos a tratar de obtener, a partir de una sentencia (una fórmula en la que no aparecen variables libres), una fórmula más sencilla para el tratamiento posterior. La forma que necesitamos es la **forma clausular** y son pasos previos las formas prenexa y de Skolem.

7.1.1. Forma normal prenexa.

Para este apartado, no necesitamos que la fórmula sea una sentencia.
Una fórmula se dice que está en forma prenexa si se escribe:

$$C_1x_1C_2x_2\ldots C_nx_n\Phi$$

donde C_i es un cuantificador (universal o existencial) y Φ es una fórmula sin cuantificadores.

Ejemplo 7.1.1.

1. $\forall x(H(x) \wedge Q(x,a))$

2. $\exists x\forall y(P(x,y) \vee Q(b))$

3. $\forall x\exists y(P(x,y) \to Q(b))$

4. $H(a)$

5. $\exists xH(x)$

6. $\forall x\exists y\exists zR(x,y,z)$

7.1.2. Método para calcular la forma prenexa de una fórmula

Para esto, utilizaremos las equivalencias explicadas en *Algunas equivalencias lógicas*, y que recordaremos a continuación, así como las equivalencias dadas en el tema primero cuando estudiamos la lógica proposicional.

1. $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$.
2. $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$.
3. $\forall x\alpha \wedge \beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$ si x no es libre en β.
4. $\forall x\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$ si x no es libre en β.
5. $\exists x\alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$ si x no es libre en β.

6. $\exists x\alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$ si x no es libre en β.
7. $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$.
8. $\exists x\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$.
9. $\forall x\alpha \equiv \forall y\alpha_{x|y}$ si y no aparece en la fórmula α.
10. $\exists x\alpha \equiv \exists y\alpha_{x|y}$ si y no aparece en la fórmula α.
11. $\forall x\alpha \equiv \alpha$ si x no es libre en α.
12. $\exists x\alpha \equiv \alpha$ si x no es libre en α.
13. $\forall x\forall y\alpha \equiv \forall y\forall x\alpha$.
14. $\exists x\exists y\alpha \equiv \exists y\exists x\alpha$.

Ejemplo 7.1.2.

1 $\forall xS(x) \to \exists z\forall yR(z, y)$

Sustituimos la implicación

a) $\neg\forall xS(x) \vee \exists z\forall yR(z, y)$

Intercambiamos cuantificador y negación (equivalencia primera)

b) $\exists x\neg S(x) \vee \exists z\forall yR(z, y)$

Llegados aquí tenemos tres opciones para continuar. Analicemos las tres:

Opción 1

Puesto que la variable x no es libre en la fórmula $\exists z\forall yR(z, y)$, podemos incluirla dentro del radio de acción de $\exists x$ (equivalencia sexta).

c-1) $\exists x(\neg S(x) \vee \exists z\forall yR(z, y))$.

Como no hay ninguna ocurrencia libre de z en $\neg S(x)$, introducimos $\neg S(x)$ en el radio de acción de $\exists z$ (equivalencia sexta).

d-1) $\exists x\exists z(\neg S(x) \vee \forall yR(z, y))$.

Y como la variable y no aparece en $\neg S(x)$, podemos introducirla, en virtud de la equivalencia cuarta, en el radio de acción de $\forall y$.

e-1) $\exists x\exists z\forall y(\neg S(x) \vee R(z, y))$.

Y llegamos así a una fórmula, equivalente a la de partida, que se encuentra en forma prenexa.

Opción 2

Introducimos $\exists x\neg S(x)$ en el radio de acción de $\exists z$, lo que podemos hacer pues la variable z no aparece de forma libre en $\exists x\neg S(x)$

c-2) $\exists z(\exists x\neg S(x) \wedge \forall yR(z, y))$.

Repetimos lo mismo con $\forall y$.

d-2) $\exists z\forall y(\exists x\neg S(x) \wedge R(z, y))$.

Y por último introducimos $R(z, y)$ en el radio de acción de $\exists x$.

e-2) $\exists z\forall y\exists x(\neg S(x) \wedge R(z, y))$.

Opción 3

Puesto que tenemos la disyunción de dos fórmulas, ambas iniciadas con el cuantificador $\exists$, renombramos las variables para poder hacer uso de la equivalencia octava. En este caso, cambiamos la variable z por x (equivalencia décima), ya que x no aparece en la fórmula $R(z, y)$.

c-3) $\exists x\neg S(x) \vee \exists x\forall yR(x, y)$.

"Sacamos factor común" $\exists x$ (equivalencia octava)

d-3) $\exists x(\neg S(x) \vee \forall yR(x, y))$

Por último, como y no es libre en la fórmula $\neg S(x)$, podemos desplazar el cuantificador correspondiente (equivalencia cuarta).

e-3) $\exists x \forall y(\neg S(x) \vee R(x,y))$.

Las tres fórmulas son equivalentes, y están en forma prenexa. Sin embargo, la última es más sencilla al aparecer en ella menos cuantificadores y menos variables. Y de las dos primeras, aunque aparentemente tienen la misma forma, es mejor la primera, pues los cuantificadores existenciales se encuentran más a la izquierda que en la segunda. En el siguiente apartado, veremos el porqué de esta última afirmación.

2 $\forall x(R(x,y) \wedge \neg\forall y R(x,y))$

Nótese que esta fórmula no es una sentencia pues la primera aparición de la variable y es libre. Veremos, no obstante, como obtener una forma normal prenexa.

Al obtener la forma prenexa, las variables que tenga una ocurrencia libre, seguirán siendo libres en la forma prenexa.

Intercambiamos la negación y el cuantificador (equivalencia primera)

a) $\forall x(R(x,y) \wedge \exists y \neg R(x,y))$

La variable y es libre en la fórmula $R(x,y)$ así que no puede incluirse en el radio de acción de un cuantificador con la misma variable. Renombramos entonces la variable y como z (equivalencia décima)

b) $\forall x(R(x,y) \wedge \exists z \neg R(x,z))$

Desplazamos el cuantificador $\exists z$ (equivalencia quinta)

c) $\forall x \exists z(R(x,y) \wedge \neg R(x,z))$

Y obtenemos y una forma normal prenexa. La ocurrencia libre de y se ha mantenido, mientras que la ocurrencia ligada se ha sustituido por otra variable (z) que sigue estando cuantificada.

3 $\exists x R(x,y) \vee [\forall x S(x) \wedge \neg\exists z R(a,z)]$

Intercambiamos negación y cuantificador (equivalencia segunda).

a) $\exists x R(x,y) \vee [\forall x S(x) \wedge \forall z \neg R(a,z)]$

Tenemos ahora la conjunción de dos fórmulas que se inician con $\forall$. Si renombramos las variables de forma que tengamos la misma en ambas, podremos reducir un cuantificador. Por tanto, y puesto que en $R(a,z)$ no aparece la variable x, cambiamos la z por x (equivalencia novena)

b) $\exists x R(x,y) \vee [\forall x S(x) \wedge \forall x \neg R(a,x)]$

Y ahora, por la equivalencia séptima obtenemos

c) $\exists x R(x,y) \vee \forall x(S(x) \wedge \neg R(a,x))$

También aquí podemos tomar dos caminos:

Opción 1

Como x no es libre en $\forall x(S(x) \wedge \neg R(a,x))$, podemos incluirlo en el radio de acción de $\exists x$

d-1) $\exists x(R(x,y) \vee \forall x(S(x) \wedge \neg R(a,x)))$

Pero ahora no podemos incluir $R(x,y)$ en el radio de acción de $\forall x$, pues la ocurrencia de x en $R(x,y)$ es libre (aunque no lo sea en la fórmula total). Renombramos entonces la variable x de $\exists x$ por z (también podríamos cambiar $\forall x$ por $\forall z$, y el resultado sería el mismo). En tal caso, en el radio de acción de $\exists x$, es decir, en $R(x,y) \vee \forall x(S(x) \wedge \neg R(a,x))$ debemos sustituir todas las ocurrencias libres de x por z. Nos queda entonces (equivalencia décima)

e-1) $\exists z(R(z,y) \vee \forall x(S(x) \wedge \neg R(a,x)))$

Nótese que las apariciones de x en $S(x)$ y $R(a,x)$ son ligadas, por tanto no se realiza ninguna sustitución.

Ahora ya sí podemos incluir $R(z,y)$ dentro del radio de acción de $\forall x$ (equivalencia cuarta)

f-1) $\exists z \forall x(R(z,y) \vee (S(x) \wedge \neg R(a,x)))$.

Que está en forma prenexa.

Opción 2

Como x no es libre en $\exists x R(x,y)$, por la equivalencia cuarta tenemos *d-2)* $\forall x(\exists xR(x,y) \vee (S(x) \wedge \neg R(a,x)))$.

Al ser la variable x libre en $S(x) \wedge \neg R(a,x)$, cambiamos x por z (equivalencia décima)

e-2) $\forall x(\exists zR(z,y) \vee (S(x) \wedge \neg R(a,x)))$.

Y ahora sí podemos introducir $S(x) \wedge \neg R(a,x)$ en el radio de acción de $\exists z$ (equivalencia sexta).

f-2) $\forall x\exists z(R(z,y) \vee (S(x) \wedge \neg R(a,x)))$.

Si comparamos las dos fórmulas que nos han salido, vemos que la única diferencia está en el orden de los cuantificadores. En general, no es posible intercambiar los cuantificadores $\forall$ y $\exists$, aunque como vemos en este caso, en ocasiones sí pueden ser intercambiados. En general, esto podrá hacerse cuando las variables cuantificadas con $\forall$ y $\exists$ no aparezcan en un mismo predicado.

De las dos formas prenexas que nos han salido, aunque son equivalentes, es preferible quedarnos con la primera, pues al hacer la forma de Skolem nos va a resultar una fórmula más sencilla.

4 $\forall x\forall z(\forall zP(x,z) \wedge \forall xP(x,z)) \rightarrow \forall x(\exists yP(x,y) \wedge \forall xQ(x))$

Comenzamos sustituyendo la implicación.

a) $\neg\forall x\forall z(\forall zP(x,z) \wedge \forall xP(x,z)) \vee \forall x(\exists yP(x,y) \wedge \forall xQ(x))$

Intercambiamos cuantificador y negación (equivalencia primera). Hacemos esto dos veces.

b) $\exists x\exists z\neg(\forall zP(x,z) \wedge \forall xP(x,z)) \vee \forall x(\exists yP(x,y) \wedge \forall xQ(x))$

Con las leyes de De Morgan

c) $\exists x\exists z(\neg\forall zP(x,z) \vee \neg\forall xP(x,z)) \vee \forall x(\exists yP(x,y) \wedge \forall xQ(x))$

Otra vez intercambiamos cuantificador y negación

d) $\exists x\exists z(\exists z\neg P(x,z) \vee \exists x\neg P(x,z)) \vee \forall x(\exists yP(x,y) \wedge \forall xQ(x))$

Vamos a seguir dos caminos a partir de aquí (que realmente podrían ser 4, pues inicialmente vamos a trabajar independientemente las dos partes de la fórmula).

Opción 1

Puesto que la variable z aparece libre en $\exists x\neg P(x,z)$, sustituimos z por otra variable que no puede ser x. Tomamos, por ejemplo, y.

En la segunda parte de la fórmula, introducimos $\forall xQ(x)$ en el radio de acción de $\exists y$.

e-1) $\exists x\exists z(\exists y\neg P(x,y) \vee \exists x\neg P(x,z)) \vee \forall x(\exists y(P(x,y) \wedge \forall xQ(x)))$

Introducimos $\exists x\neg P(x,z)$ en el radio de acción de $\exists y$ (equivalencia sexta) y renombramos la variable x en $\forall xQ(x)$ (equivalencia novena).

f-1) $\exists x\exists z(\exists y(\neg P(x,y) \vee \exists x\neg P(x,z))) \vee \forall x\exists y(P(x,y) \wedge \forall zQ(z))$

Renombramos la variable x de $\exists x\neg P(x,z)$ (no podemos usar ni y ni z) e introducimos $P(x,y)$ en el radio de acción de $\forall z$.

g-1) $\exists x\exists z\exists y(\neg P(x,y) \vee \exists t\neg P(t,z)) \vee \forall x\exists y\forall z(P(x,y) \wedge Q(z))$

Extendemos $\exists t$ hasta $\neg P(x,y)$ (equivalencia sexta)

h-1) $\exists x\exists z\exists y\exists t(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \forall x\exists y\forall z(P(x,y) \wedge Q(z))$

Renombramos las variables de la segunda parte de la fórmula (equivalencias novena y décima)

i-1) $\exists x\exists z\exists y\exists t(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \forall u\exists v\forall w(P(u,v) \wedge Q(w))$

Y ahora, en siete pasos, introducimos todo en el radio de acción de los cuantificadores.

j-1) $\exists x\exists z\exists y\exists t\forall u\exists v\forall w(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee (P(u,v) \wedge Q(w))$

Aunque al estar unidas ambas fórmulas por un conector $\vee$ podríamos haber procedido, desde h-1), como sigue:

i-1) $\exists x\exists z\exists y\exists t(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \forall u\exists t\forall w(P(u,t) \wedge Q(w))$

j-1) $\exists x\exists z\exists y(\exists t(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \forall u\exists t\forall w(P(u,t) \wedge Q(w)))$

k-1) $\exists x\exists z\exists y\forall u(\exists t(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \exists t\forall w(P(u,x) \wedge Q(w)))$

l-1) $\exists x\exists z\exists y\forall u\exists t((\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \forall w(P(u,x) \wedge Q(w)))$

m-1) $\exists x\exists z\exists y\forall u\exists t\forall w((\neg P(x,y)\vee\neg P(t,z))\vee(P(u,x)\wedge Q(w)))$

Opción 2

En la primera parte de la fórmula hacemos uso de la equivalencia sexta, pero en sentido inverso al que lo hemos hecho habitualmente (la variable z no es libre en $\exists z\neg P(x,z)$), mientras que en la segunda parte usamos la séptima (también en sentido inverso al usado en otras ocasiones).

e-2) $\exists x(\exists z\neg P(x,z)\vee\exists z\exists x\neg P(x,z))\vee(\forall x\exists yP(x,y)\wedge\forall x\forall xQ(x))$

Ahora, en la primera parte repetimos lo que acabamos de hacer, mientras que en la segunda parte hacemos uso de la undécima equivalencia

f-2) $(\exists x\exists z\neg P(x,z)\vee\exists z\exists x\neg P(x,z))\vee(\forall x\exists yP(x,y)\wedge\forall xQ(x))$

Las equivalencias décimo cuarta y séptima nos transforman esta fórmula en:

g-2) $(\exists x\exists z\neg P(x,z)\vee\exists x\exists z\neg P(x,z))\vee\forall x(\exists yP(x,y)\wedge Q(x))$

Y ahora, como $\alpha\vee\alpha\equiv\alpha$, y por la equivalencia quinta tenemos:

h-2) $\exists x\exists z\neg P(x,z)\vee\forall x\exists y(P(x,y)\wedge Q(x))$

Renombramos las variables en la segunda parte:

i-2) $\exists x\exists z\neg P(x,z)\vee\forall y\exists z(P(y,z)\wedge Q(y))$

j-2) $\exists x\forall y(\exists z\neg P(x,z)\vee\exists z(P(y,z)\wedge Q(y)))$

k-2) $\exists x\forall y\exists z(\neg P(x,z)\vee(P(y,z)\wedge Q(y)))$.

Tras estos ejemplos, no es difícil ver que se tiene el siguiente teorema.

Teorema 7.1.1. *Para toda fórmula existe otra que es lógicamente equivalente con ella y está en forma normal prenexa.*

7.1.3. Forma normal de Skolem

Una fórmula está en forma normal de Skolem si está en forma prenexa y en ella no aparecen cuantificadores existenciales. Por tanto una fórmula en forma de Skolem tiene la apariencia

$$\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_n\Phi$$

donde Φ es una fórmula sin cuantificadores.

Ejemplo 7.1.3. *Las siguientes fórmulas están en forma de Skolem.*

1. $\forall x(H(x)\wedge Q(x,a))$
2. $\forall y(P(a,y)\vee Q(b))$
3. $\forall x(P(x,f(x))\to Q(b))$
4. $\forall x\forall y(Q(x,y)\to H(x))$
5. $H(b)$
6. $\forall xR(x,f(x),g(x))$

7.1.4. Método para calcular una forma de Skolem de una fórmula en forma prenexa

En general, no para toda fórmula existe otra que sea equivalente a ella y que esté en forma de Skolem. Entonces, si queremos calcular una forma de Skolem vamos a tener que perder la equivalencia.

Recordemos que nuestro problema a resolver era estudiar si un conjunto de fórmulas es o no satisfacible.

Vamos entonces a transformar cada fórmula de un conjunto dado en otra que esté en forma de Skolem, de forma que, aunque no sea equivalente podamos asegurar que el conjunto inicial es satisfacible si, y sólo si, lo es el conjunto con las fórmulas transformadas.

Para esto, sólo hay que aprender cómo eliminar los cuantificadores existenciales. Para ello cada variable cuantificada existencialmente se va a sustituir por un **término** al mismo tiempo que se elimina el cuantificador correspondiente. El término por el que se sustituye será:

Caso 1 Un símbolo de constante si el cuantificador existencial que la acompaña no va precedido por ningún cuantificador universal. El nombre del símbolo debe ser elegido entre los que no aparezcan en la fórmula (o en el conjunto de fórmulas que se maneje).

Caso 2 Un símbolo de función cuya ariedad sea igual al número de variables cuantificadas universalmente y que precedan a la variable a sustituir. La función debe aplicarse a todas estas variables, y el símbolo elegido no puede aparecer en la fórmula ni en el conjunto de fórmulas que se maneje.

Ejemplo 7.1.4.

1. $\exists x \forall y(\neg S(x) \vee R(x, y))$.

Como el cuantificador existencial no va precedido por ninguno universal estamos en el Caso 1 y la variable correspondiente, x, se sustituye por una constante que no aparezca en la fórmula, por ejemplo a; entonces la forma de Skolem queda

$$\forall y(\neg S(a) \vee R(a, y))$$

2. $\forall x \exists z(R(x, y) \wedge \neg R(x, z))$.

Como el cuantificador existencial va precedido por uno universal estamos en el Caso 2, elegimos un símbolo de función que no aparezca, por ejemplo f y sustituimos la variable z por el término $f(x)$, por ser x la variable que acompaña al cuantificador universal que precede al existencial que vamos a eliminar. La forma de Skolem queda:

$$\forall x(R(x, y) \wedge \neg R(x, f(x)))$$

3. $\forall x \exists y \exists z R(x, y, z)$.

Primero eliminamos el cuantificador que lleva la variable y, como lo precede uno universal con la variable x, sustituimos y por una función de x, por ejemplo $f(x)$ puesto que el símbolo f no aparece. Queda entonces $\forall x \exists z R(x, f(x), z)$ y ahora procedemos a eliminar el cuantificador que acompaña a z, como el símbolo de función f ya aparece tomamos por ejemplo g, sustituimos entonces z por $g(x)$ y obtenemos

$$\forall x R(x, f(x), g(x))$$

4. $\forall x \exists y \forall z \exists u(R(x, y, u) \vee S(y, f(z)))$ *Para eliminar el cuantificador que acompaña a y elegimos un símbolo de función que no aparezca, por ejemplo g y sustituimos y por $g(x)$, queda*

$$\forall x \forall z \exists u(R(x, g(x), u) \vee S(g(x), f(z)))$$

ahora u tiene que ser sustituída por otro término con un símbolo de función diferente, digamos h, en el que intervienen las dos variables cuantificadas universalmente que preceden a u, x y z, así nos queda:

$$\forall x \forall z(R(x, g(x), h(x, z)) \vee S(g(x), f(z)))$$

5. $\forall x \forall y \exists u(R(x, y, u) \vee S(y, f(u)))$

En este caso u se sustituye por una función que depende de x y y, digamos $g(x, y)$ y por supuesto en todas las apariciones:

$$\forall x \forall y(R(x, y, g(x, y)) \vee S(y, f(g(x, y))))$$

Observaciones:

1. La forma de Skolem de una fórmula no es única, aunque por abuso del lenguaje utilizamos el artículo determinado para nombrarla.

2. La forma de Skolem puede calcularse para cualquier fórmula, no es necesario que se trate de una sentencia. Si la fórmula no está en forma prenexa es conveniente transformarla previamente en una fórmula en forma prenexa.

3. Una fórmula y su forma de Skolem no son necesariamente lógicamente equivalentes (de hecho, lo normal es que no lo sean). Sin embargo tenemos el siguiente resultado:

Teorema 7.1.2. *Sea Γ un conjunto de fórmulas, y sea Γ^* el conjunto que resulta de sustituir cada fórmula de Γ por su forma de Skolem. Entonces*

$$\Gamma \text{ es insatisfacible si, y sólo sí, } \Gamma^* \text{ es insatisfacible}$$

Lo que sigue, hasta que se inicia el aparatado de *Forma Clausular* es una justificación (no una demostración) del teorema que acabamos de dar. Es conveniente leerlo, aunque no necesario.

Para esto, vamos a analizar algunos ejemplos.

Ejemplo 7.1.5. *Comenzamos con una fórmula sencilla. Por ejemplo, $\exists x \forall y P(x, y)$*

Dicha fórmula es satisfacible. Para comprobarlo, vamos a dar una estructura en la que se interprete como cierta.

- *El universo es* $\mathbb{Z}$
- $P(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x \cdot y = 0 \\ 0 & si\ x \cdot y \neq 0 \end{cases}$

Claramente, la fórmula es válida en la estructura dada, pues existe un número entero (el cero) que al multiplicarlo por cualquier entero sale 0.

Consideramos ahora la forma de Skolen de la fórmula dada, que sería $\forall y P(a, y)$

Para comprobar que es satisfacible esta fórmula, basta considerar la estructura que hemos tomado en la fórmula anterior, pero ahora debemos también asignar un valor a la constante a. Le asignamos el valor 0 *(que es el valor que le dábamos a x en la primera fórmula, y que hacía cierta la fórmula $\forall y P(x, y)$). Es decir, consideramos la estructura*

- *El universo es* $\mathbb{Z}$
- $a = 0$
- $P(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x \cdot y = 0 \\ 0 & si\ x \cdot y \neq 0 \end{cases}$

Y la fórmula $\forall x P(a, x)$ es válida en esa estructura. El hecho de encontrar una estructura que hace satisfacible a la fórmula $\exists x \forall y P(x, y)$ nos da una estructura en la que es satisfacible su forma de Skolem.

Es claro que las fórmulas $\exists x \forall y P(x, y)$ y $\forall y P(a, y)$ no son equivalentes. Basta, por ejemplo, considerar la estructura

- *El universo es* $\mathbb{Z}$
- $a = 1$
- $P(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x \cdot y = 0 \\ 0 & si\ x \cdot y \neq 0 \end{cases}$

Hemos tomado $\alpha = \exists y \forall x P(x, y)$, y a partir de que α es satisfacible (pues hemos encontrado una estructura que la hace cierta) hemos visto que su forma de Skolem es también satisfacible (encontrando una estructura, relacionada con la primera, que la hace cierta).

Vamos a ver que si partimos de una estructura que hace cierta a $\forall x P(a, x)$ (la forma de Skolem de α podemos obtener una estructura que hace cierta a α.

Consideramos por ejemplo la estructura dada por

- *El universo es* $\mathbb{N}$
- $a = 0$
- $P(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y \\ 0 & si\ x > y \end{cases}$

Obviamente, para esta estructura se tiene que $I(\forall x P(a, x)) = 1$. Consideramos ahora la estructura con el mismo universo y la misma asignación del predicado P (no necesitamos asignar constantes), es decir,

- *El universo es* $\mathbb{N}$
- $P(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \le y \\ 0 & si\ x > y \end{cases}$

Entonces se tiene que $I(\alpha) = 1$*, pues existe un valor de la variable* y *(concretamente* $y = 0$*) para el que es cierta* $\forall x P(x,y)$*.*

Por tanto, de la satisfacibilidad de $\forall x P(a,x)$ *hemos deducido la satisfacibilidad de* $\exists y \forall x P(x,y)$*.*

Vamos a ver ahora un caso en el que el cuantificador existencial no se encuentra en primer lugar. Por ejemplo, consideramos la fórmula $\forall x \exists y P(x,y)$

La fórmula es satisfacible, pues es válida en la siguiente estructura

- *El universo es* $\mathbb{Z}$
- $P(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x + y = 3 \\ 0 & si\ x + y \neq 3 \end{cases}$

En este caso, la existencia de un valor de la variable y *que haga cierta la fórmula está ligado al valor de* x*. Por tanto, este valor de* y *será función (dependerá) del valor que tome la variable* x*. Habrá que sustituirlo entonces por una función que dependa de* x*.*

En nuestro ejemplo, se tiene que $y = 3 - x$*. Por tanto, la siguiente estructura*

- *El universo es* $\mathbb{Z}$
- $f(x) = 3 - x$
- $P(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x + y = 3 \\ 0 & si\ x + y \neq 3 \end{cases}$

es un modelo para la fórmula $\forall x P(x, f(x))$*, que es la forma de Skolen de* $\forall x \exists y P(x,y)$*.*

Al igual que antes, es fácil ver que de un modelo de $\forall x P(x, f(x))$ *podemos obtener un modelo para* $\forall x \exists y P(x,y)$*.*

Vamos por último a ver un ejemplo en el que intervienen varias fórmulas:

Sea $\Gamma = \{\forall x (Q(x) \to \exists y R(y,x));\ \forall x \exists y R(x,y);\ \exists x \exists y \neg R(x,y)\}$

Puesto que la primera fórmula no está en forma prenexa, la pasamos a dicha forma canónica, y nos queda entonces:

$$\Gamma = \{\forall x \exists y (Q(x) \to R(y,x));\ \forall x \exists y R(x,y);\ \exists x \exists y \neg R(x,y)\}$$

Este conjunto es satisfacible. Basta considerar la estructura:

- *Como universo, los números enteros.*
- $Q(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ par \\ 0 & si\ x\ es\ impar \end{cases}$
- $R(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ 2x = y \\ 0 & si\ 2x \neq y \end{cases}$

La primera fórmula es válida en esta estructura, pues dado un número par podemos encontrar otro número entero que al hacerle el doble nos de el de partida; la segunda también es válida, pues para cualquier x *basta tomar* $y = 2x$ *para hacerla cierta; la tercera es obviamente válida.*

Calculamos la forma de Skolen de cada una de las fórmulas. Para la primera, como la variable y*, que es la cuantificada existencialmente está precedida por una variable cuantificada universalmente, la sustituimos por una función monaria. Nos queda entonces* $\forall x (Q(x) \to R(f(x), x))$

Para la segunda procedemos de igual forma, pero no podemos utilizar ahora el mismo símbolo de función que en la primera fórmula. Sustituimos entonces y *por* $g(x)$*. Queda entonces* $\forall x R(x, g(x))$

En la tercera fórmula, sustituimos cada una de las variables por constantes (distintas).

Nos queda entonces el conjunto

$$\Gamma^* = \{\forall x (Q(x) \to R(f(x), x));\ \forall x R(x, g(x));\ \neg R(a,b)\}$$

El hecho de que el conjunto Γ fuera satifacible en la estructura dada, se traduce ahora en que Γ^* es satisfacible en la siguiente estructura.

- *Como universo, los números enteros.*

- $Q(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ par \\ 0 & si\ x\ es\ impar \end{cases}$

- $R(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ 2x = y \\ 0 & si\ 2x \neq y \end{cases}$

- $f(x) = E\left(\frac{x}{2}\right)$ *(donde $E(x)$ denota la parte entera de x)*

- $g(x) = 2x$

- $a = 2$; $b = 5$.

Nótese que si hubiésemos empleado el mismo símbolo de función en la primera y en la segunda fórmula, no habríamos podido encontrar así una función f que hiciera válida a las dos fórmulas.

7.1.5. Forma clausular

En primer lugar debemos establecer la definición de **cláusula** para lo que describimos algunos conceptos previos:

Literal es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.

Ejemplo 7.1.6.

1. $P(a)$
2. $Q(x, y, b)$
3. $\neg H(x, f(x, a), y)$

Cierre universal de una fórmula sin cuantificadores es la fórmula que resulta al cuantificar universalmente **todas** las variables que aparezcan.

Ejemplo 7.1.7.

1. $P(a)$ *es su propio cierre universal,*
2. $Q(x, y, b)$ *tiene cierre universal* $\forall x \forall y Q(x, y, b)$,
3. *el cierre universal de* $\neg H(x, f(x, a), y)$ *es* $\forall x \forall y \neg H(x, f(x, a), y)$
4. $P(a) \vee Q(x, y, b) \vee \neg H(x, f(x, a), y)$ *tiene cierre universal*
$$\forall x \forall y \forall z (P(a) \vee Q(x, y, b) \vee \neg H(x, f(x, a), z))$$

Cláusula es el cierre universal de una disyunción de literales.

Ejemplo 7.1.8.

1. $P(a)$,
2. $\forall x \forall y Q(x, y, b)$,
3. $\forall x \forall y \neg H(x, f(x, a), y)$
4. $\forall x \forall y \forall z (P(a) \vee Q(x, y, b) \vee \neg H(x, f(x, a), z))$

Por último, una fórmula está en **forma normal clausular** si es conjunción de cláusulas.

Observaciones:

1. No toda fórmula tiene forma clausular, sólo si es **sentencia**.
2. Toda sentencia que esté en forma de Skolem es semánticamente equivalente a una forma clausular.
3. Se incluye como fórmula en forma clausular aquella que es disyunción de cero literales. Dicha fórmula se denomina *cláusula vacía*, la representaremos como $\square$, y por definición es insatisfacible.

7.1.6. Método para calcular la forma de clausular de una fórmula en forma de Skolem

Puesto que la forma de Skolem es prenexa, obviamos los cuantificadores y trabajamos con la fórmula sin ellos. Sobre ésta usaremos las propiedades

1. $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$,
2. $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
3. $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
4. $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
5. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

de una forma similar a como se hace en lógica proposicional hasta llegar a una **conjunción** de fórmulas del tipo

$$C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_n$$

donde C_i es un literal. Una vez obtenida esta forma, utilizamos la propiedad

$$\forall x(\Phi \wedge \Psi) \equiv \forall x\Phi \wedge \forall x\Psi$$

para llegar a la forma clausular. Esto supone que **en la práctica sólo hay que trabajar con la fórmula sin cuantificadores de la forma normal de Skolem.**

Ejemplo 7.1.9.

1. $\forall x(P(x, f(x)) \to Q(b))$.

Puesto que trabajamos sólo con los literales podemos olvidarnos por el momento de los términos que involucran y usar una notación abreviada con los símbolos de predicados, es decir, en este caso:

$$P \to Q$$

entonces $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$ *que ya es una disyunción de literales. Por tanto, la forma clausular de la fórmula de partida tiene una sola cláusula que es*

$$\forall x(\neg P(x, f(x)) \vee Q(b))$$

2. $\forall x\forall y(R(x) \vee (Q(x, y) \wedge P(y) \wedge R(x)))$.

Trabajamos con $R \vee (Q \wedge P \wedge R))$ *y obtenemos* $R \vee (Q \wedge P \wedge R)) \equiv (R \vee Q) \wedge (R \vee P) \wedge (R \vee R)$ *lo que nos daría tres cláusulas (dos conjunciones separan tres cláusulas), y en la última nos queda* $R(x) \vee R(x) \equiv R(x)$ *así, tendríamos la fórmula*

$$\forall x\forall y(R(x) \vee Q(x, y)) \wedge (R(x) \vee P(y)) \wedge R(x) \equiv$$

$$\equiv \forall x\forall y(R(x) \vee Q(x, y)) \wedge \forall x\forall y(R(x) \vee P(y)) \wedge \forall xR(x)$$

donde en la última cláusula se ha eliminado el cuantificador $\forall y$ *puesto que en la fórmula que le sigue la variable* y *no es libre (en este caso porque no aparece).*

Observación: *Si la fórmula anterior hubiese sido*

$$\forall x\forall y(R(x) \vee (Q(x, y) \wedge P(y) \wedge R(f(x))))$$

el procedimiento sería similar, pero habría que tener en cuenta que en la última cláusula las dos apariciones de R *no son el mismo literal puesto que en uno aparece una variable y en el otro una función :* $R(x) \vee R(f(x))$ *y por tanto no puede simplificarse a* $R(x)$.

Teorema 7.1.3. *Sea* $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ *un conjunto de sentencias. Para cada fórmula* $\gamma_i \in \Gamma$ *calculamos su forma clausular. Supongamos que esta forma clausular es* $C_{i1} \wedge C_{i2} \wedge \cdots \wedge C_{im_i}$*. Formamos el conjunto* Γ^{**} *con todas las cláusulas que aparecen en las distintas formas clausulares (es decir,* $\Gamma^{**} = \{C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{nm_n}\}$*).*

Entonces se tiene que Γ *es insatisfacible si, y sólo si,* Γ^{**} *es insatisfacible.*

En el caso de que no todas las fórmulas de que partimos sean sentencias, tenemos un resultado similar que vamos a ver a continuación. Antes necesitamos los siguientes lemas.

Lema 7.1.1. *Sea* $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ *un conjunto de fórmulas, y* $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \cdots \gamma_n$*.*

Entonces Γ *es insatisfacible si, y sólo si,* γ *es una contradicción.*

Intuitivamente, el lema es claro.

Decir que Γ es insatisfacible significa que no puede haber ninguna interpretación para la que todas las fórmulas sean ciertas a la vez. Es decir, para cualquier estructura y cualquier valoración v, hay alguna fórmula del conjunto Γ, digamos γ_i tal que $I^v(\gamma_i) = 0$. Pero esto es lo mismo que decir que $I^v(\gamma_1) \cdot I^v(\gamma_2) \cdots I^v(\gamma_n) = 0$.

Tenemos por tanto que $I^v(\gamma) = I^v(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) = 0$ para cualquier interpretación I^v.

Lema 7.1.2. *Sea* α *una fórmula en un lenguaje de primer orden, y sea* x *una variable que aparece libre en la fórmula* α*. Entonces* α *es contradicción si, y sólo si,* $\exists x\alpha$ *es una contradicción.*

También este lema es claro. El que α sea una contradicción se traduce en que, dada una estructura, para cualquier valor que le demos a la variable x, $v(x)$, se tiene que $I^v(\alpha) = 0$. Pero esto significa que $I^v(\exists x\alpha) = 0$.

Por tanto, tenemos que, dada una estructura, la fórmula $\exists x\alpha$ se interpreta como falsa.

Teorema 7.1.4. *Sea* $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$*. Supongamos que el conjunto de variables que tienen alguna ocurrencia libre en las fórmulas de* Γ *es* $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$*.*

Entonces Γ *es insatisfacible si, y sólo si, la fórmula* $\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$ *es una contradicción.*

Notemos que la fórmula $\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$ es una sentencia, y por tanto a esta fórmula le podemos hacer su forma clausular y reducir el problema a estudiar si un conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible.

Ejemplo 7.1.10. *Sean las fórmulas*

$$\alpha_1 = \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x) \to \exists y(R(x,y) \wedge S(y))).$$
$$\alpha_2 = \exists y \forall x((R(y,x) \to T(x)) \wedge T(y) \wedge P(y).$$
$$\alpha_3 = \exists x(T(x) \wedge (Q(x) \vee S(x))).$$

Supongamos que queremos ver si $\{\alpha_1, \alpha_2\} \vDash \alpha_3$*.*

Vamos a transformar este problema en estudiar si un conjunto de cláusulas es o no insatisfacible. Para ello, vemos en primer lugar que lo anterior es equivalente a probar que el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \neg\alpha_3\}$ *es insatisfacible. Calculamos una forma clausular de cada una de las fórmulas.*

- *Para* α_1 *tenemos:*

  $\forall x(P(x) \wedge \neg Q(x) \to \exists y(R(x,y) \wedge S(y)))$
  $\forall x(\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists y(R(x,y) \wedge S(y)))$
  $\forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \vee \exists y(R(x,y) \wedge S(y)))$
  $\forall x \exists y((\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (R(x,y) \wedge S(y)))$ *Forma normal prenexa*
  $\forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (R(x,f(x)) \wedge S(f(x))))$ *Forma normal de Skolem*
  $\forall x((\neg P(x) \vee Q(x) \vee R(x,f(x))) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x) \vee S(f(x))))$
  $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x) \vee R(x,f(x))) \wedge \forall x(\neg P(x) \vee Q(x) \vee S(f(x)))$ *Forma clausular*

- *Para* α_2*:*

  $\exists y \forall x((R(y,x) \to T(x)) \wedge T(y) \wedge P(y))$ *Forma normal prenexa*
  $\forall x((R(a,x) \to T(x)) \wedge T(a) \wedge P(a))$ *Forma normal de Skolem*
  $\forall x((\neg R(a,x) \vee T(x)) \wedge T(a) \wedge P(a))$
  $\forall x(\neg R(a,x) \vee T(x)) \wedge T(a) \wedge P(a)$ *Forma clausular*

Y para $\neg\alpha_3$*:*

$\neg\exists x(T(x)\wedge(Q(x)\vee S(x)))$	
$\forall x\neg(T(x)\wedge(Q(x)\vee S(x)))$	*Forma normal prenexa y de Skolem*
$\forall x(\neg T(x)\vee\neg(Q(x)\vee S(x)))$	
$\forall x(\neg T(x)\vee(\neg Q(x)\wedge\neg S(x)))$	
$\forall x((\neg T(x)\vee\neg Q(x))\wedge(\neg T(x)\vee\neg S(x)))$	
$\forall x(\neg T(x)\vee\neg Q(x))\wedge\forall x(\neg T(x)\vee\neg S(x))$	*Forma clausular*

Y el problema es ahora probar que el siguiente conjunto de cláusulas

$$\Gamma=\left\{\begin{array}{lll}\neg P(x)\vee Q(x)\vee R(x,f(x)); & \neg R(a,x)\vee T(x); & T(a);\quad P(a)\\ \neg P(x)\vee Q(x)\vee S(f(x)); & \neg T(x)\vee\neg Q(x); & \neg T(x)\vee\neg S(x)\end{array}\right\}$$

es o no insatisfacible. Esto lo veremos más adelante, cuando estudiemos resolución.

Al escribir las cláusulas no escribimos los cuantificadores. Esto no significa que no estén. Pero como en una cláusula todas las variables están cuantificadas universalmente, no es necesario especificarlo cuando las escribimos (se sobreentiende que es así).