Examen Enero 2016 Resuelto.pdf

Resuelto Enero 2016

Modelos de Computación (2015/16)
3º Grado en Ingeniería Informática y Doble Grado
28 de Enero de 2016

Normas para la realización del examen: **Duración: 2:30 horas**

- El ejercicio 5 es voluntario y sirve para subir la nota (hasta 1 punto).

◁ Ejercicio 1 ▷ Preguntas tipo test [2.5 puntos]

Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El lenguaje de las palabras sobre $\{0, 1\}$ en las que hay el doble de numero de ceros que de unos es regular
2. Dada una gramática independiente del contexto sin producciones nulas, siempre se puede construir una gramática sin producciones unitarias que genere exactamente el mismo lenguaje que la gramática original
3. La gramática compuesta por la siguientes reglas de producción $\{S \to AB|BA, B \to a|b, A \to a|aA\}$ es ambigua
4. El complementario de un lenguaje con un número finito de palabras es siempre regular
5. En una gramática independiente del contexto en forma normal de Chomsky puede haber una palabra generada que tenga infinitos árboles de derivación distintos
6. En el algoritmo que transforma un autómata con pila a una gramática libre de contexto, hay que añadir las reglas $S \to [q_1, Z_0, q_0]$, donde q_0 es el estado inicial y Z_0 el símbolo inicial de la pila
7. La intersección de dos lenguajes aceptados por autómatas con pila no deterministas da lugar a un lenguaje independiente del contexto
8. En un autómata con pila determinista no puede haber transiciones nulas
9. Todo lenguaje aceptado por un autómata finito no determinista puede también ser aceptado por un autómata finito determinista
10. El conjunto de cadenas formado por las fechas con el formato dd/mm/aaaa (dos dígitos para el día, dos para el mes y cuatro para el año, separados por el carácter '/') forman un lenguaje regular

◁ Ejercicio 2 ▷ [2.5 puntos]

Construir un Autómata Finito Determinístico minimal que acepte el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$S \to AB$	$A \to Aa$	$A \to Ac$
$A \to b$	$B \to bBb$	$B \to b$

◁ Ejercicio 3 ▷ [2.5 puntos]

Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere el siguiente lenguaje sobre el alfabeto $\{0, 1\}$

$$L = \{uu^{-1}ww^{-1} : u, w \in \{0, 1\}^*\}$$

Comprueba con el algoritmo CYK si la cadena 011001 pertenece al lenguaje generado por la gramática

◁ Ejercicio 4 ▷ [2.5 puntos]

Determinar si los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ son regulares y/o independientes del contexto. Justifica las respuestas

1. $L_1 = \{u \in \{0, 1\}^* : u$ no contiene la subcadena '01' y el número de 1's es impar $\}$
2. L_2 el conjunto de los palindromos que tienen la misma cantidad de 0's que de 1's
3. $L_3 = \{ucx : u, x \in \{0, 1\}^*, u^{-1}$ es una subcadena de $x\}$ donde c es un símbolo que no está en $\{0, 1\}$ (este lenguaje está realmente definido sobre el alfabeto $\{0, 1, c\}$)
4. L_4 el complementario del lenguaje $\{0^i 1^i \mid i \geq 0\}$

◁ Ejercicio 5 ▷ Ejercicio Adicional Voluntario [+1 puntos]

Si L_1 y L_2 son lenguajes, sea $L_1 \circ L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2, |x| = |y|\}$. Demostrar que si L_1 y L_2 son regulares, entonces $L_1 \circ L_2$ es independiente del contexto. Dar un ejemplo en el que L_1 y L_2 son regulares y $L_1 \circ L_2$ no lo es

Modelos de Computación
28 de Enero del 2016

1. 1. No es regular porque se necesita un autómata con pila. Falso.

2. Sí se puede, por ejemplo con el algoritmo de Chomsky
Verdad

3. $S \to A \to aA \to aa$
$S \to BA \to aa$ } ambigua. Verdad

4. Los regulares son cerrados para las operación de complemento. Por tanto, verdad.

5. Una gramática inherentemente ambigua puede pasarse a FNC. Dicha gramática puede tener infinitos árboles de derivación. Verdad.

7. $L_1 = \{a^n b^n c^m\}$ $L_2 = \{a^n b^m c^m\}$ $L_1 \cap L_2 \neq$ libre de contexto.

Demostrado con contraejemplo $\to$ falso.

8. Verdad. En caso contrario sería AFND.

9. Verdad.

10. Verdad. Su expresión regular es eso mismo.

¿6?

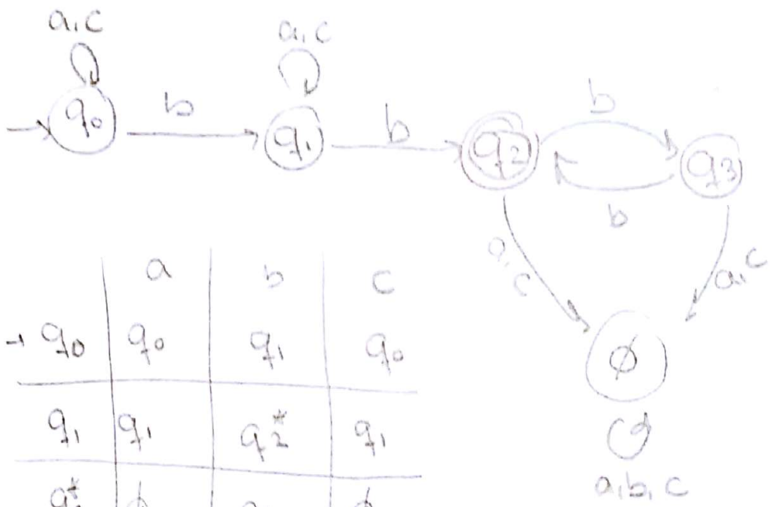
2. $S \to AB$

$A \to Ac \mid Aa \mid b$

$B \to bBb \mid b$

La expresión regular correspondiente es:

$(c+a)^* b (c+a)^* (bb)^* b$ y un AFD:



	a	b	c
$\to q_0$	q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2^*	q_1
q_2^*	ϕ	q_3	ϕ
q_3	ϕ	q_2^*	ϕ
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ

3. $L = \{ uu^{-1} ww^{-1} : u, w \in \{0,1\}^* \}$

Una gramática que genera L sería:

$S \to AB$
$A \to 0A0 \mid 1A1 \mid \varepsilon$
$B \to 0B0 \mid 1B1 \mid \varepsilon$

$S \to AB$
$A \to CAC \mid UAU \mid \varepsilon$
$B \to CBC \mid UAU \mid \varepsilon$
$C \to 0$
$U \to 1$

$S \to AB$
$A \to CD \mid UE \mid \varepsilon$
$B \to CF \mid UG \mid \varepsilon$
$C \to 0$
$U \to 1$
$D \to AC$
$E \to AU$
$F \to BC$
$G \to BU$

$S \to AB \mid A \mid B$
$A \to CD \mid UE$
$B \to CF \mid UG$
$D \to AC \mid C$
$E \to AU \mid U$
$F \to BC \mid C$
$G \to BU \mid U$
$C \to 0$
$U \to 1$

$S \to AB \mid CD \mid UE \mid CF \mid UG$
$A \to CD \mid UE$
$B \to CF \mid UG$
$D \to AC \mid 0$
$E \to AU \mid 1$
$F \to BC \mid 0$
$G \to BU \mid 1$
$C \to 0$
$U \to 1$

1,6					
1,5	2,6				
1,4	2,5 3,2	3,6			
1,3 —	2,4 2,2	3,5 2,3	4,6		
1,2 —	2,3 1,2 S, A, B	3,4 1,3 —	4,5 1,4 S, A, B	5,6 —	
1,1 C, F, D	2,2 U, G, E	3,3 U, G, E	4,4 C, F, D	5,5 C, F, D	6,6 U, G, E
0	1	1	0	0	1

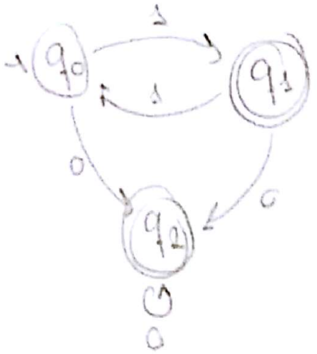
$$X_{i,j} = (X_{i,i}, X_{i+1,j})$$

$$(X_{i,i+1}, X_{i+2,j})$$

$$\vdots$$

$$(X_{i,j-1}, X_{j,j})$$

4. $L_1 = \{u \in \{0,1\}^*$: u no contiene '01' y el número de 1's es impar$\}$



$\Rightarrow$ regular & libre de contexto (CFL)

$L_2 =$ {el conjunto de palíndromos que tiene la misma cantidad de 0's que de 1's}.

$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon \Rightarrow CFL$

Lema del bombeo para lenguajes regulares:

$\exists n : \forall x \in L_2$ con $|x| \geq n$ $\exists u,v,w \in \Sigma^*$: $x = uvw$ con $\begin{cases} |uv| \leq n \\ v \neq \varepsilon \\ \forall i \geq 0, uv^iw \in L_2 \end{cases}$

$x = 0^n 1^{2n} 0^n \in L_2$

$$\left.\begin{array}{l} u = 0^m \\ v = 0^k \\ w = 0^{n-k-m} 1^{2n} 0^n \end{array}\right\} \begin{array}{l} m+k \leq n \Rightarrow |uv| \leq n \\ k > 0 \Rightarrow v \neq \varepsilon \end{array}$$

¿$\forall i \geq 0$ $uv^iw \in L_2$? $i = 0$ $\quad x_i = 0^m 0^{n-k-m} 1^{2n} 0^n =$
$= 0^{n-k} 1^{2n} 0^n$

Como $k > 0$, x_i no es palíndromo, ni tiene el mismo número de 0's que de 1's. Queda demostrado por contradicción que L_2 no es regular.

$L_3 = \{ucx : u,x \in \{0,1\}^*, u^{-1} \text{ subcadena de } x\}$

Obviamente no es ni regular ni independiente de contexto sobre el alfabeto $\{0,1\}$ porque no se puede generar con dicho alfabeto.

L_4 = complementario de $\{0^i 1^i \mid i \geq 0\}$

Parte 1: cualquier cadena que empiece por 1:

$S \to 1A \quad A \to 0A \mid 1A \mid \varepsilon$

Parte 2: las cadenas de tipo $0^n 1^m$ con $n \neq m$:

$S \to 0C \quad A \to 0C \mid 0C1 \mid \varepsilon$

$S \to B1 \quad B \to B1 \mid 0B1 \mid \varepsilon$

Parte 3: cualquier cadena que empiece por 0(s) seguido de 1(s) y un 0 y después cualquier cadena.

$S \to 0D \quad D \to 0D \mid 1E \quad E \to 1E \mid 0F \quad F \to 0F \mid 1F \mid \varepsilon$

Con esto hemos construido una gramática independiente del contexto.

Para ver que no es regular, se aplica el lema del bombeo con, por ejemplo, $x = 0^n 1^{2n} 0^n \in L_4$, que ya hemos demostrado en L_1 que no es regular.