Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 2 - Mayorantes, minorantes, supremo, ínfimo.

1. Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Prueba que $\sup(A) \leqslant \operatorname{ínf}(B)$.

2. Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un conjunto mayorado, $s = \sup A$ y $\varepsilon > 0$. ¿Se puede asegurar que existe algún $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a < s$? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, dar un contraejemplo y modificar las desigualdades anteriores para que sea cierto.

3. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Prueba que:

   i) Si $A \subseteq B$ entonces $\sup(A) \leqslant \sup(B)$, $\operatorname{ínf}(A) \geqslant \operatorname{ínf}(B)$.

   ii) $\sup(A \cup B) = \operatorname{máx}\{\sup(A), \sup(B)\}$.

4. Sean A y B conjuntos acotados de números reales tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

   a) Prueba que $A \cap B$ está acotado y que

   $$\operatorname{máx}\{\operatorname{ínf}(A), \operatorname{ínf}(B)\} \leqslant \operatorname{ínf}(A \cap B), \qquad \sup(A \cap B) \leqslant \operatorname{mín}\{\sup(A), \sup(B)\}$$

   b) Prueba con un ejemplo que las dos desigualdades pueden ser estrictas.

   c) Prueba que si A y B son intervalos, dichas desigualdades son igualdades.

5. Sean A, B, conjuntos no vacíos de números reales. Definimos los conjuntos:

   $$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

   Supuesto que A y B están acotados, prueba que:

   $$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \qquad \operatorname{ínf}(A - B) = \operatorname{ínf}(A) - \sup(B).$$

6. Sean A, B, conjuntos no vacíos de números reales. Definimos $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Supuesto que A y B son conjuntos mayorados de números reales positivos, prueba que:

   $$\sup(AB) = \sup(A)\sup(B), \quad \operatorname{ínf}(AB) = \operatorname{ínf}(A)\operatorname{ínf}(B).$$

7. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos. Supongamos que A está mayorado y que $\beta = \operatorname{ínf}(B) > 0$. Definamos:

   $$C = \left\{\frac{a}{b} : a \in A,\ b \in B\right\}.$$

   Prueba que C está mayorado y se verifica la igualdad:

   $$\sup(C) = \frac{\sup(A)}{\operatorname{ínf}(B)}.$$

   ¿Qué ocurre si $\operatorname{ínf}(B) = 0$?

8. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y supongamos que $\operatorname{ínf}(A) > \sup(B)$. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{a-b} \,:\; a \in A, b \in B \right\}$$

Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\operatorname{ínf}(A) - \sup(B)}$.

9. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{a^2+b} \,:\; a \in A,\, b \in B \right\}$$

Calcula el extremo inferior de C. ¿Qué pasa si alguno de los conjuntos A o B no está mayorado?

10. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales tales que $B \subset \mathbb{R}^+$ y A está mayorado. Sea $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \operatorname{ínf}(B)$. Supongamos que $\alpha < \beta^2$. Definamos: $C = \left\{ \dfrac{1}{b^2-a} \,:\; b \in B, a \in A \right\}$. Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$.

11. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Prueba que el conjunto

$$C = \left\{ ab - c^2 \,:\; a \in A,\, b \in B,\, c \in B \right\}$$

está mayorado y calcula su supremo.

12. Sea $A = \left\{ (-1)^n \dfrac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Calcula $\operatorname{ínf}(A)$ y $\sup(A)$. ¿Tiene A máximo o mínimo?

13. Considera los conjuntos

$$A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ 3 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \left\{ \left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Calcula el supremo y el ínfimo de A, B, C e indica cuáles de ellos tienen máximo o mínimo. Comprueba si se verifican las igualdades $\sup(C) = \sup(A)\sup(B)$, $\operatorname{ínf}(C) = \operatorname{ínf}(A)\operatorname{ínf}(B)$. ¿Hay alguna contradicción con lo establecido en el ejercicio 6?

14. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos la "distancia de x a A" por:

$$\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{ínf}\{|x-a| : a \in A\}.$$

Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leqslant |x - y|.$$

15. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente verificando que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo $x \in [a, b]$. Prueba que hay algún punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

Sugerencia: considera el supremo del conjunto $\{x \in [a, b] : x \leqslant f(x)\}$.