Boole

domingo, 22 de enero de 2017 22:39

ÁLGEBRA DE BOOLE

Forma Canónica disyuntiva: suma de minterminos (1) (m_n)

Forma canónica conjuntiva: suma de maxterminos (0) (M_n)

Forma reducida
- → Karnaught
- → MÉTODO DE LOS CONSENSOS:
  - Escribir la ecuación en forma disyuntiva
  - Se añaden los consensos
  - Se eliminan los términos por adsorción

- Formas irreducibles: Cuadricula de Makclusney.

- Karnaught da una forma reducida no simplificable. Macklusney da todas ellas.

$\vee$ → SUPREMO M.C.D.

$\wedge$ → ÍNFIMO m.c.m.

¿Cómo sabemos el complementario?

"Los factores que faltan"

Ej → En D((210),|) si queremos calcular el complementario de 14, como los factores de 210 son $2\cdot3\cdot5\cdot7$, entonces el complementario de 14 son "los que le faltan", es decir $3\cdot5$ (pq $14 = 2\cdot7$).

Coátomos

Es el complemento de los átomos

Siempre son uno menos de los que tienes

Ej → 21 como ínfimo de coátomos

21 está formado por los átomos 3 y 7, entonces deberemos coger los tres que incluyen a 3 y 7

$2\cdot3\cdot5\cdot7 \rightarrow \quad 3\cdot5\cdot7 \wedge 3\cdot7\cdot2$

$105 \wedge 42 = 21$ //

Retículo distributivo

En los retículos distributivos, si un elemento tiene complemento, éste es único

Todos los de divisibilidad son distributivos

Complemento

El complemento de un elemento es aquel que al hacer

le supremo con él se obtiene el "1" del conjunto
y al hacer el ínfimo el "0".

* Grafos

Algoritmo de demolición.

- localizamos el de mayor grado y lo transformo en cero (pongo un "–")
- Bajo una unidad a los n más grandes.

Repetimos los pasos anteriores.

- Cuando no se pueda rebajar más
  - Todo 0
  - nº par de 1

  → Grafo

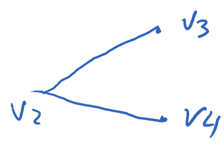
Algoritmo de reconstrucción

- Miramos el último anulado y lo añadimos.
- Lo unimos a los que aumentan una unidad
- Se repite el proceso.

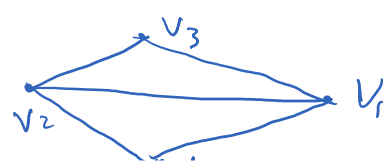
Vg

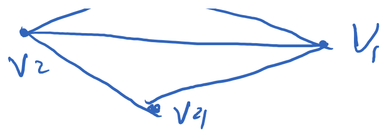
V_1	V_2	V_3	V_4
3	3	2	2
–	2	1	1
–	–	0	0

· Tomo V_2 y lo uno a V_3 y V_4



· Tomo V_1 y lo uno a los rebajados a 1, es decir, V_2, V_3 y V_4





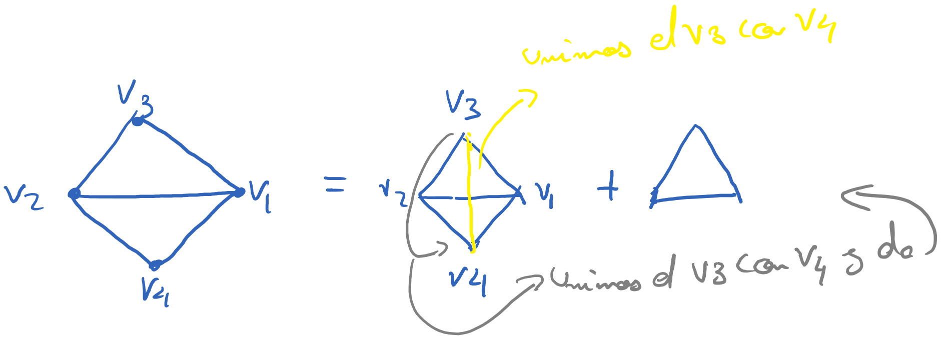
es el grafo resultante

* Coloración de grafos.

• Algoritmo.

Hay que llegar a tener todos los grafos completos, es decir, que todos los vértices estén unidos con todos.

Para ello, unimos dos vértices, y sumamos el grafo que resulta de "fusionar" los dos vértices.



Hemos llegado a dos grafos completos. Ponemos $x^{\underline{n}}$ donde n es el nº de vértices.

$$P(G) = x^{\underline{4}} + x^{\underline{3}} = \underbrace{x(x-1)(x-2)(x-3)}_{x^{\underline{4}}} + \underbrace{x(x-1)(x-2)}_{x^{\underline{3}}}$$

Lo anterior es el polinomio cromático, se puede desarrollar.

$P(x) = x(x-1)(x-2)^2$ → Entonces cuando sustituyes x te da el nº de formas con las que se puede pintar el grafo con x colores.

El número cromático es la menor potencia descendente.

$x^4 + x^3$ → El número cromático es 3.

- Grafo de Euler

Un grafo es de Euler si solo si todos los vértices tienen grado par. Es condición suficiente.

Un camino es de Euler si tiene dos vértices de grado impar.

HABER SI NOS MORIMOS

* Lógica proposicional.

- Afirmaciones verdaderas o falsas.

Es satisfacible si la unión del antecedente y consecuente negado es insatisfacible.

- Davis-Putnam.

Aplicamos Davis-Putnam a la proposición anterior. Para ello:

- Trasformamos la afirmación a su forma clausular. Usamos las equivalencias lógicas. Las $\wedge$ se sustituyen por comas.

$\{c \to d, a \to b, \neg(\neg d \to a), \neg b \to a\} \models \neg(b \to \neg c)$

$\downarrow$ Negamos el consecuente y lo unimos a los otros.

$\{c \to d, a \to b, \neg(\neg d \to a), \neg b \to a, b \to \neg c\}$

$\downarrow$ Equivalencias lógicas (ver chuleta)

$\{\neg c \vee d, \neg a \vee b, \neg(d \vee a), b \vee \neg a, \neg b \vee \neg c\}$

$\downarrow$ $\hookrightarrow \neg d \wedge \neg a \Rightarrow \wedge$ se sustituye por ","

$\{\neg c \vee d, \neg a \vee b, \neg d, \neg a, b \vee \neg a, \neg b \vee \neg c\}$

- Tomamos una cláusula unit. Si aparece en los otros miembros no se pone, si aparece su negado se toma el resto. Los demás se dejan tal cual.

$\downarrow \neg a$

$\{\neg c \vee d, \neg d, b, \neg b \vee \neg c\}$

$\downarrow \neg d$

$\{\neg c, b, \neg b \vee \neg c\}$

$\downarrow b$

$\{\neg c, \neg b \vee \neg c\}$

$\downarrow \neg c$

$\{\square\}$

Repetimos mientras haya cláusulas unit.

Para $a = 0$
$d = 0$
$b = 1$
$c = 0$
es falsa. Si no hubiéramos usado alguna letra, le daríamos el valor que quisiéramos

- Hemos llegado a la cláusula vacía, por lo que el conjunto es satisfacible. Por la primera proposición, concluimos que la afirmación inicial es falsa.

POLINOMIOS DE GEGALKINE.

$\neg \alpha \equiv 1 + \alpha$ (operaciones en $\mathbb{Z}_2$)

$\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \cdot \beta$

$\alpha \wedge \beta \equiv \alpha + \beta + \alpha\beta$

$\alpha \rightarrow \beta \equiv 1 + \alpha + \alpha\beta$

$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv 1 + \alpha + \beta$

¡ $1 + 1 = 0$!

Recurrencia

lunes, 23 de enero de 2017 18:11

* RECURRENCIA

- Ecuaciones lineales homogéneas de orden K:

Ecuación característica:

$$\boxed{A_n x^k + A_{n-1} x^{k-1} + \dots + A_{n-k+1} x + A_{n-k} = 0}$$

* Una raíz

$a_{n+1} = 2a_n$

$a_n - 2a_{n-1} = 0$

$x - 2 = 0$ (1)

Pasar todo al primer miembro y aplicar la regla anterior.

Sol. General → $\boxed{g(n) = raíz^n \cdot A}$

Sol. Particular → $a_1 = 2$

$2 = A \cdot 2^1 \Rightarrow A = 1$

$\boxed{P(n) = 2^n}$

* Dos raíces

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$

$x^2 - x - 1 = 0$ (φ, $\bar{\varphi}$)

$\boxed{\text{Sol. General} \rightarrow g(n) = A \cdot raíz^n + B \cdot raíz^n}$

* Raíz Multiple

$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$

$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$

(3)

$a_n = 6a_{n-1} + 9a_{n-2}$

$x^2 - 6x + 9 = 0$ — 3, 3

$\boxed{\text{Sol. General} \rightarrow S(n) = (A \cdot n + B)\ \text{raíz}^n}$

- Ecuaciones NO homogéneas lineales.

Ecuación característica:

$$(C_n x^k + C_{n-1} x^{k-1} + \dots + C_{n-k})(x-b)^{gr(p)+1} = 0$$

donde k es el mayor índice restado a n.

$a_n = 2a_{n-1} + 3^n$

n multiplicado por algo

↳ $p(n) = $ — → grado $= 0 \Rightarrow$ orden $=$ $gr + 1 = 1$ *

↳ $b^n = 3^n$

x elevado a k por el coeficiente del a_n correspondiente

$$(1x - 2x^0)\underbrace{(x-3)^{1}}_{(x-b)^{\text{orden}}}$$

A partir de aquí, utilizamos las ecuaciones y fórmulas anteriores, del sistema HOMOGÉNEO.

TABLA

Ecuaciones Generales

UNA RAÍZ	$g(n) = raíz^n \cdot A$
DOS RAÍCES	$g(n) = A \cdot raíz^n + B \cdot raíz^n$
RAÍCES MÚLTIPLES	$S(n) = (A \cdot n + B)\, raíz^n$

Ej

$a_n = 3^n - n$

$1(x-3)(x-1)^2 \to$ grado+1

"Hay que separar" el 3^n de n dado

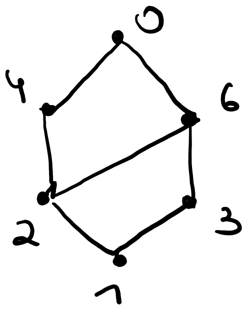
Lógica de enunciados

sábado, 4 de febrero de 2017 13:34

Relacion

sábado, 4 de febrero de 2017 10:54

7 Diagrama de Hasse de {0,1,3,4,6} por divisibilidad



¿Es retículo distributivo?

Cuando cumple:

- $a \vee (b \wedge c)$
- $a \wedge (b \vee c)$

Si tiene complemento, tiene sólo 1

SÍ ES → isomorfo a la divisibilidad de 12

Aquí los complementos serían 4 y 3 y 1 y 0, y ambos cumplen que el complemento es único.

8

	x	y	z	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Canónica disjuntiva

Cogemos los minterminos (todos los que van al 1)

$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 =$

$= \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

Canónica conjuntiva

Cogemos los maxterminos (los que van a 0)

$M_0 + M_7 = (x+y+z) \cdot (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}) =$

$= x\bar{z} + \bar{y}z + \bar{x}y + y\bar{z} + x\bar{z} + x\bar{y}$

Karnaugh

		00 $\bar{x}\bar{y}$	01 $\bar{x}y$	11 xy	10 $x\bar{y}$
1	z		1	1	1
0	$\bar{z}$	1	1		1

$\bar{x}\bar{z} + yz + x\bar{y}$

Canónica disjuntiva reducida

000 010

000 010
011 111
101 100

Necesitamos consensos

1. Multiplicar la canónica conjuntiva
2. Método de Quine
3. Método de Samu

En este caso como la forma conjuntiva es fácil, usamos esta

$x\bar{z} + \bar{y}z + \bar{x}y + y\bar{z} + \bar{x}z + x\bar{y}$ → Consensos por columnas

		$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$xy\bar{z}$
A	$x\bar{z}$				X		X
B	$\bar{y}z$	X				X	
C	$\bar{x}y$		X	X			
D	$y\bar{z}$		X				X
E	$\bar{x}z$	X		X			
F	$x\bar{y}$				X	X	

← fila de disyuntiva

Marcamos las casillas cuando la fila contiene a la columna.

Numeramos las filas

$(B+E)\cdot(C+D)\cdot(C+E)\cdot(A+F)\cdot(B+F)(A+D)$

Multiplicando:

$= ADE + BCF + ACEF + \cancel{ABDE} + ABDF + BCDE$

Aquí tener en cuenta absorción!

Las escribimos como xyz:

Cada uno de los sumandos es una forma disyuntiva no simplificable

Ej → $x\bar{z} + \bar{y}z + \bar{x}z$ sería ADE

---

12 Encontrar un grafo de 5 vértices con grados 4 2 3 3 2 utilizando el algoritmo de

demolición – reconstrucción.

V_1 V_2 V_3 V_4 V_5

4 2 3 3 2

- Cogemos el + grande

$\underline{4}$ 2 3 3 2

- A los 4 mayores se les rebaja uno

4 2 3 3 2

– 1 2 2 1

Y así sucesivamente

– 0 – 1 1 → He acabado pq es un nº par de 1

– 0 – – 0

Pero podríamos hasta todos cero

Para construir el grafo

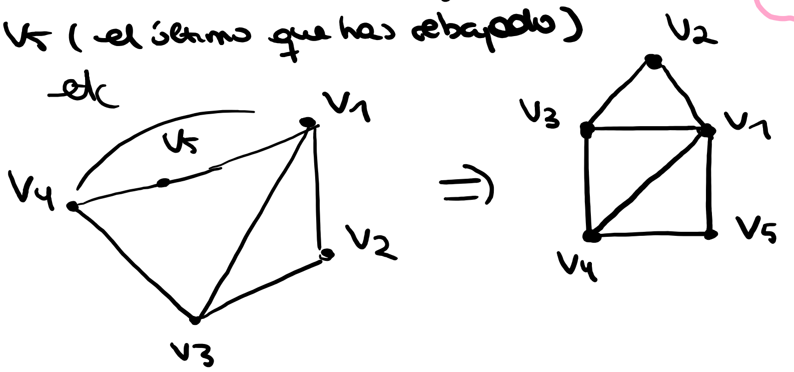
raya
quitado
raya
quitado
...

Cogemos el último que he rebajado

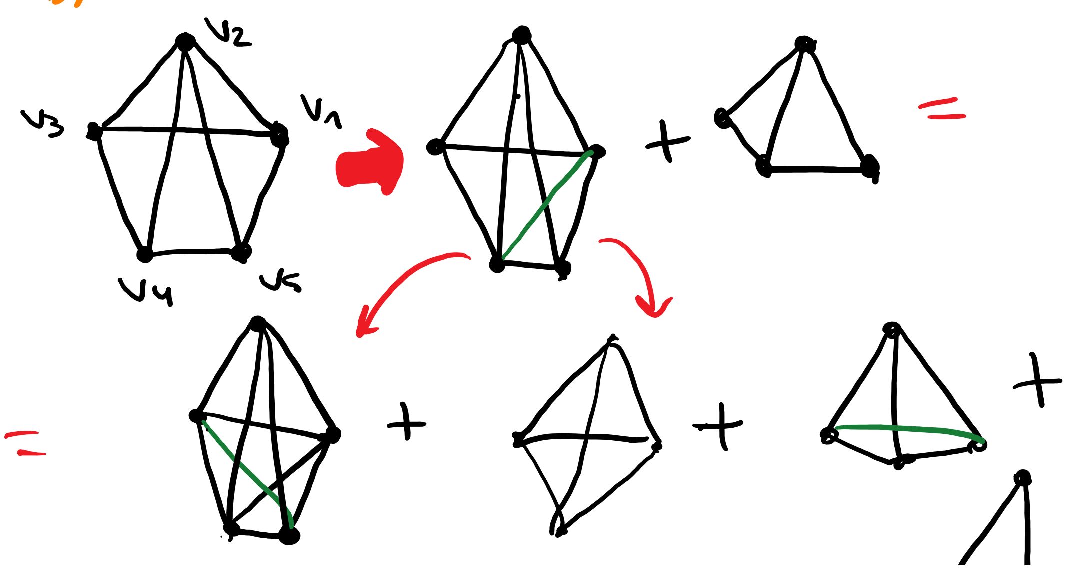
V_4 (el último de la raya)

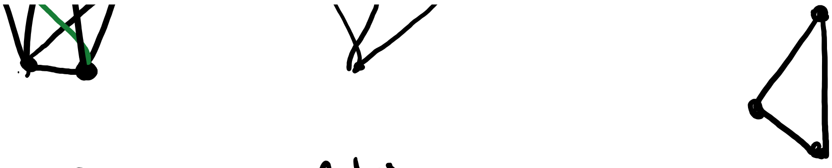
V_5 (el último que has rebajado)

etc



b) Polinomio cromático





Ya están todos completos

$k^{\text{nº vértices}}$

nº cromático
menor exponentes

$k^5 + k^4 + k^4 + k^3$

$x^5 + x^4 + x^4 + x^3$

$\boxed{\text{nº crom.} = 3}$

Polinomio cromático

Como me preguntas de cuántas formas se pueden colorear: 6

$P(G) = 6^5 + 6^4 + 6^4 + 6^3 = 1560$

descendente

$6(6-1)(6-2)(6-3)\ldots$

$(a \wedge b) \to c,\ (\neg a \wedge \neg b) \to d,\ a \leftrightarrow b \models c \vee d$

$(a \wedge b) \to c,\ (\neg a \wedge \neg b) \to d,\ a \leftrightarrow b,\ \neg(c \vee d)$

$\neg(a \wedge b) \vee c,\ \neg(\neg a \wedge \neg b) \vee d,\ (a \to b) \wedge (b \to a),\ \neg c \wedge \neg d$

$\neg a \vee \neg b \vee c,\ a \vee b \vee d,\ \neg a \vee b \wedge \neg b \vee a,\ \neg c \wedge \neg d$

la $\wedge$ se sustituye por una coma

$\neg a \vee \neg b \vee c,\ a \vee b \vee d,\ \neg a \vee b,\ \neg b \vee a,\ \neg c,\ \neg d$

$\Downarrow \neg c$

$\neg a \vee \neg b,\ a \vee b \vee d,\ \neg a \vee b,\ \neg b \vee a,\ \neg d$

$\Downarrow \neg d$

$\neg a \vee \neg b,\ a \vee b,\ \neg a \vee b,\ \neg b \vee a$

LMD

No hay cláusula UNIT $\Rightarrow$ ¿hay literal puro?
NO

le doy valores a la a

$\Rightarrow \boxed{a = 1}\ \neg b, b \Rightarrow \{\square\}$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$ $\neg b, b \Rightarrow \{\square\}$

$\Rightarrow \boxed{a=0}$ $b, b, \neg b \Rightarrow \{\square\}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ INSATISFACIBLE $\Rightarrow$ la de partida es satisfacible

Es satisfacible para

- $\neg c \Rightarrow \boxed{c=0}$
- $\neg d \Rightarrow \boxed{c=0}$
- como a y b no las hemos utilizado cero o uno

18

Di razonadamente si son unificables o no la siguiente pareja de fórmulas y, caso de serlo, da un unificador de máxima generalidad

$$\{R(f(h(z),v), g(h(a)), z), R(f(v,y), g(y), a)\}$$

Igualamos y despejamos

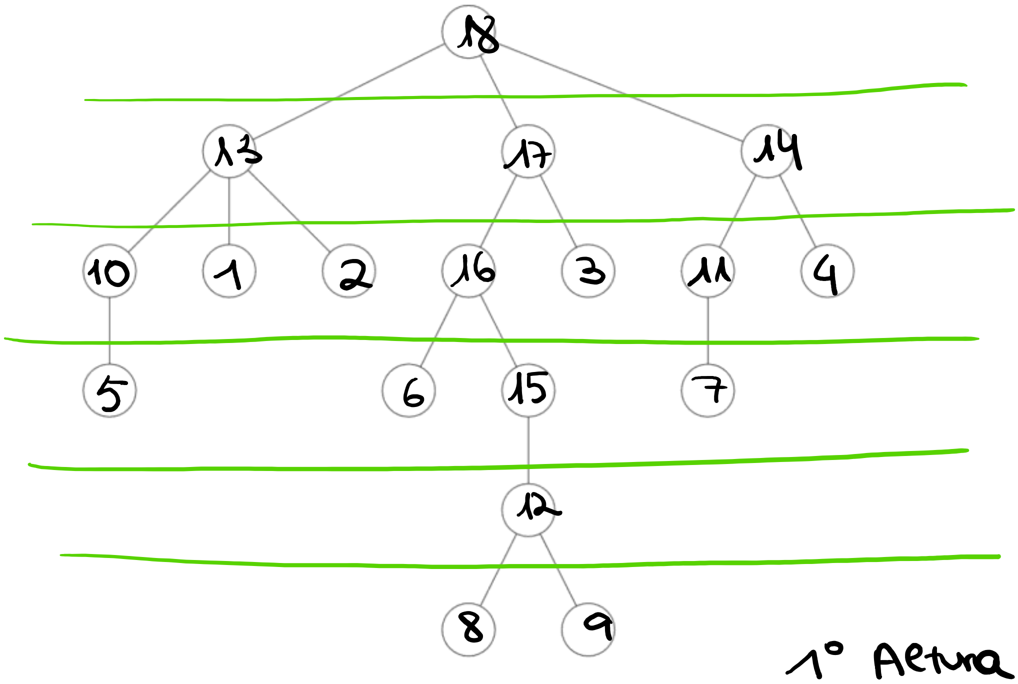
$$\left.\begin{array}{l} f(h(z),v) = f(v,y) \\ g(h(a)) = g(y) \\ z = a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h(z) = v \\ v = y \\ \boxed{h(a) = y} \\ \boxed{z = a} \\ \boxed{v = h(a)} \end{array}$$

Por tanto

$$\boxed{(z|a)(v|h(a))(y|h(a))}$$

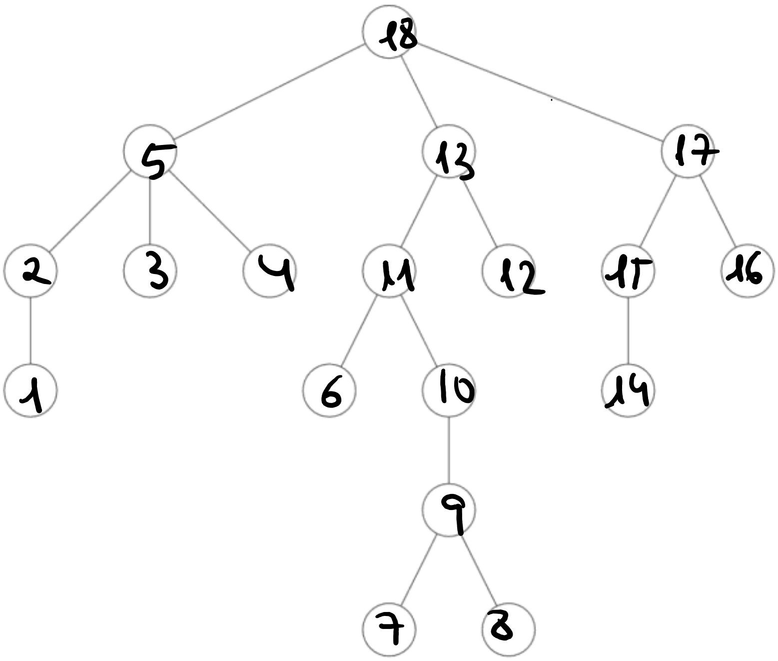
EJERCICIOS DE GRAFOS

BOTTOM UP

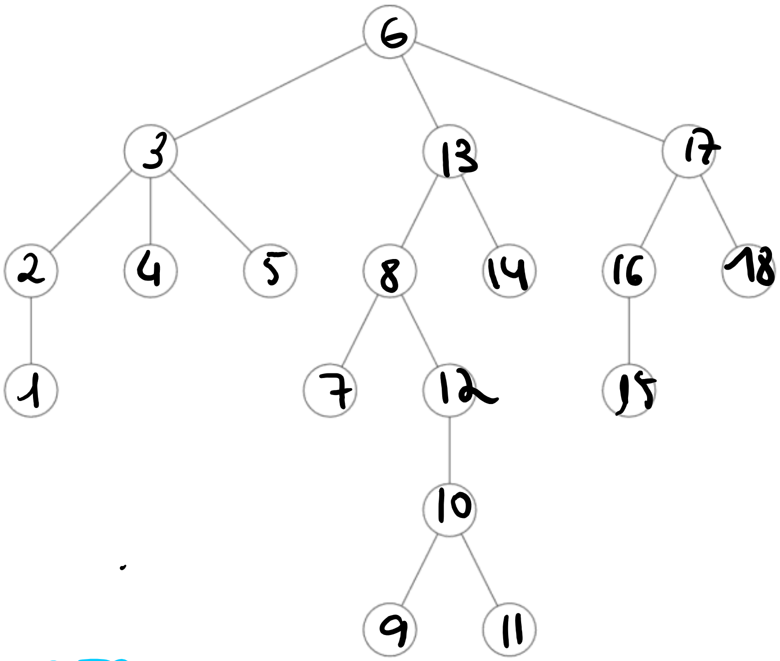


1° Altura
2° Profundidad

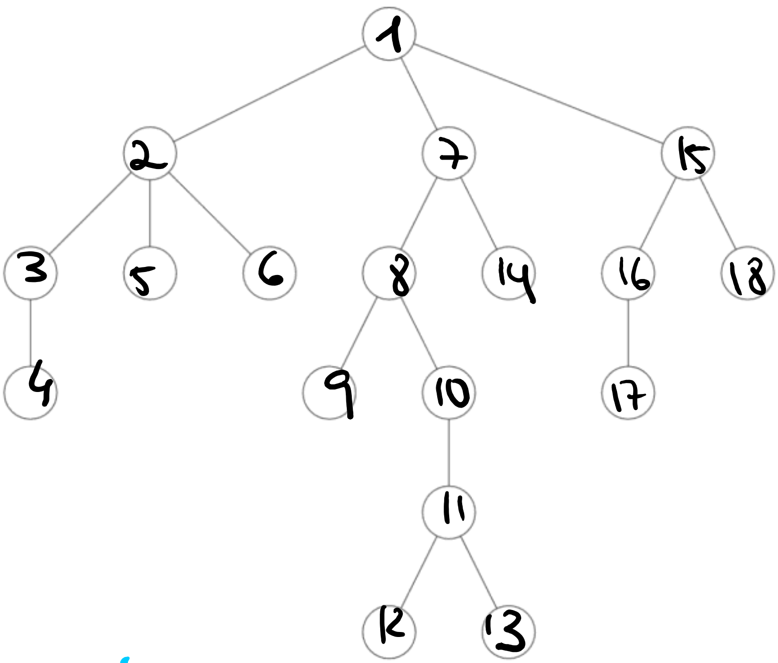
POST ORDER



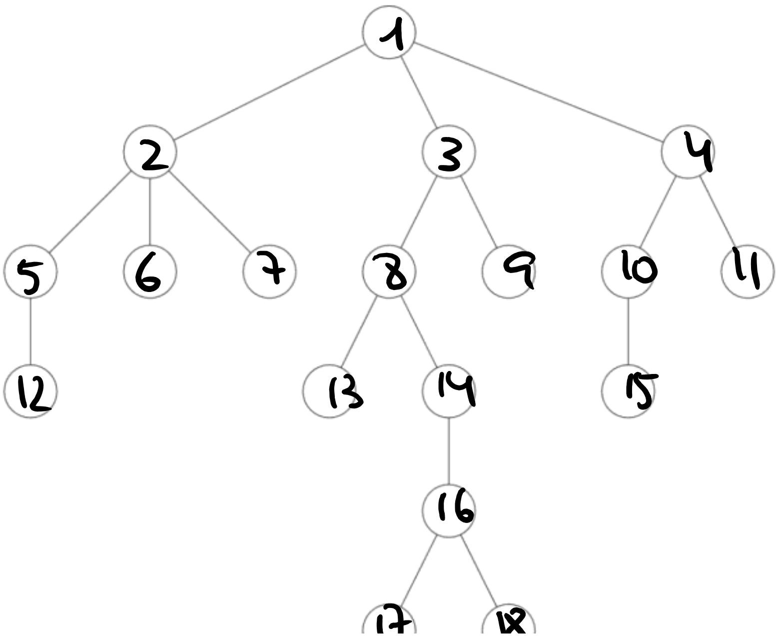
IN ORDER

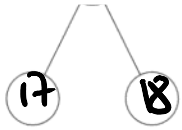


PRE ORDER

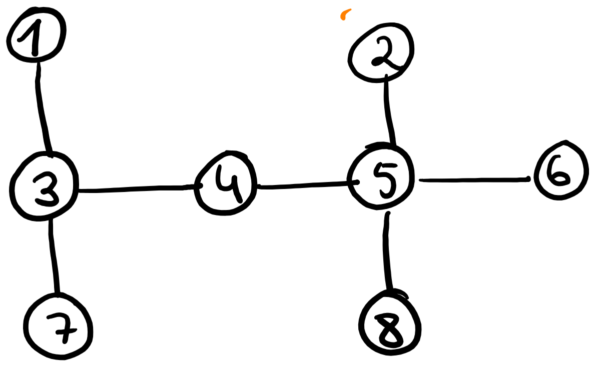


TOP DOWN





PRÜFER (49)



Hoja más pequeña

1 (unida al 3) → 1^{er} número = 3

2 (hoja más chica) → unida al 5 → 5

6 más pequeña unida al 5 → 5

7 unida a 3 → 3

3 unida al 4 → 4

4 unida al 5 → 5

Hasta quedarse con un segmento

Por tanto el código es: $\boxed{3,5,5,3,4,5}$

Representar árbol con código 2,1,5,7,4 — los que quedan sin rodear

Queremos representar este código

código +2

segmento inicial

3 2 1 4 5

este código

$* \; (2, 1, 5, 7, 4)$

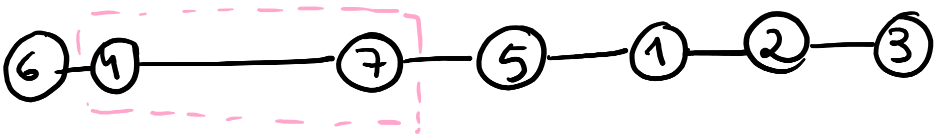
$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{array}$

los vamos tapando

$\begin{array}{ccccccc} 3 & 2 & 1 & & 4 & 5 & \\ \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\} \end{array}$

menor q no está contido en *

segmento inicial



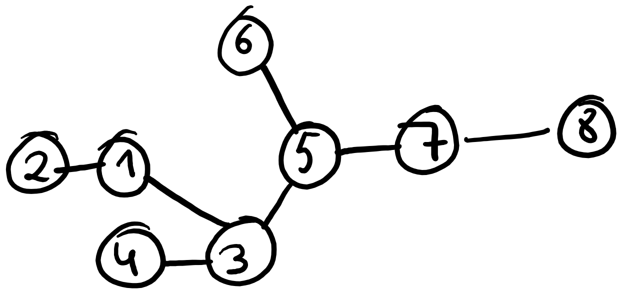
los vamos uniendo

58

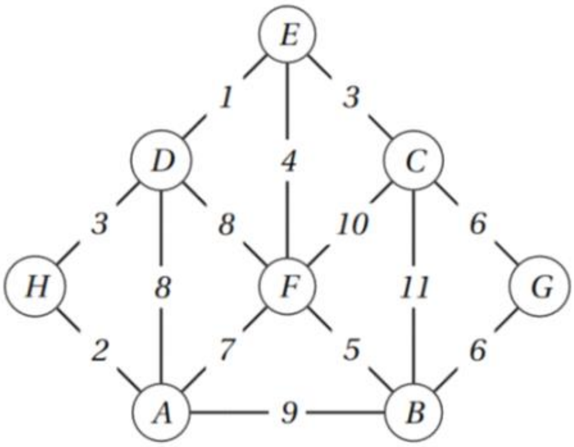
1, 3, 3, 5, 5, 7

$\begin{array}{cccccc} (1, & 3, & 3, & 5, & 5, & 7) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{array}$

$\begin{array}{cccccccc} 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & & \\ \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8\} \end{array}$



57 ÁRBOL PONDERADO



CONSTRUCTIVO → Coger los caminos más baratos

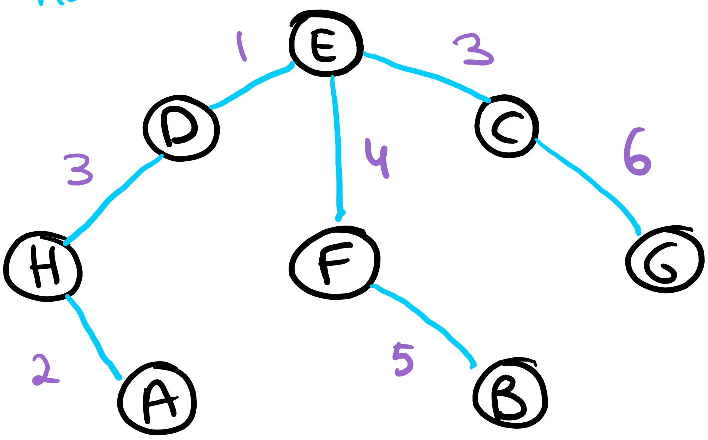
$\underbrace{DE}_{1}, \underbrace{HA}_{2}, \underbrace{EC}_{3}, \underbrace{DH}_{3}, \underbrace{EF}_{4}, \underbrace{FB}_{5}, \underbrace{CG}_{6}, \underbrace{GB}_{6}, \underbrace{FA}_{7}, \underbrace{DF}_{8},$

no no no

$\underbrace{DA}_{8}, \underbrace{AB}_{9}, \underbrace{FC}_{10}, \underbrace{CB}_{11}$

no no no

↑ que no formen ciclo



$\boxed{\text{Peso} = 24}$

DESTRUCTIVO De mayor a menor (será al revés)

Orden decreciente y voy rompiendo ciclo, que no deje de ser conexo.

60 (combinatoria)

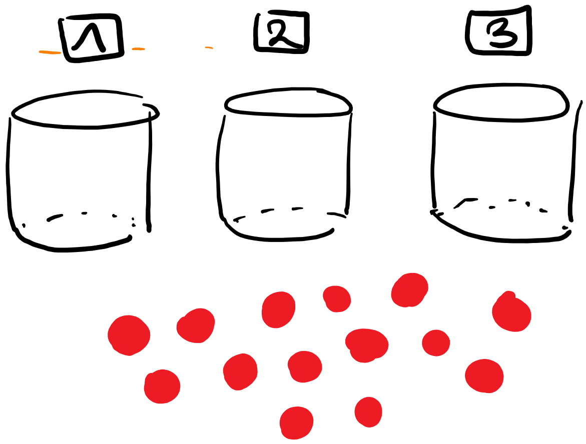
(60) (combinatoria)

Dadas 14 bolas rojas indistinguibles

3 urnas distinguibles

¿De cuántas formas pueden repartirse las bolas en las urnas si suponemos que no puede haber un número par en todas y cada una de las urnas.

¿0 es par?



No pueden ser todas pares a la vez

Repartir 14 bolas para que queden pares es lo mismo que repartir 7 bolas

n obj iguales

k cajas distintas

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

$$\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!\,7!} = 36$$

Total $120 - 36 = 84$

(35) EL QUE CAE!

9 jugadores de baloncesto

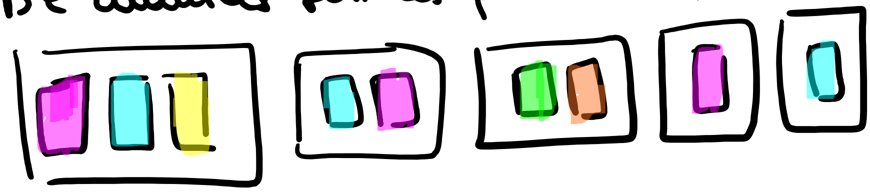
1 habitación triple

2 dobles

2 individuales

¿De cuántas formas pueden repartirse los jugadores?

¿De cuántas formas pueden repartirse los jugadores?



$\binom{9}{3}$ → elegimos 3 para la triple

$\binom{9-3}{2} \to \binom{6}{2}$ Quedan 6 y tenemos que dividirnos en una doble

$\binom{4}{2}$ → 4 van a otra doble

$\binom{2}{1}$ → 2 personas

$\binom{1}{1}$ → Te ha tocado !

Por tanto tenemos:

$$\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1} = \frac{9!}{3!\,6!}\cdot\frac{6!}{2!\,4!}\cdot 2 = \frac{9!}{24} = \underline{\underline{15120 \text{ formas}}}$$

- Hay 3 primos que tienen que ir a la misma

⟹ Por tanto la triple está adjudicada

$$\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1} =$$

- Si son 2 hermanos → pueden ir → triple / → doble

→ Si van a la triple → queda "1 individual"

$\binom{7}{1} = 7$ y los demás a las dobles e individuales

→ Si van a la doble

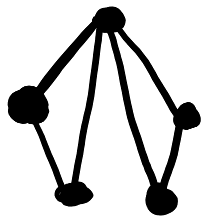
- Son indistinguibles → doble adjudicada

$\binom{7}{3}$ → triple $\binom{4}{2}$ → doble $\binom{2}{1}$ → individual $\binom{1}{1}$

- Son distinguibles → multiplico ×2 porque hay el doble de combinaciones posibles

Para calcular el total tan sólo hay que sumar todas las opciones. → Sale 1680

48 (Se repite muuuucho)

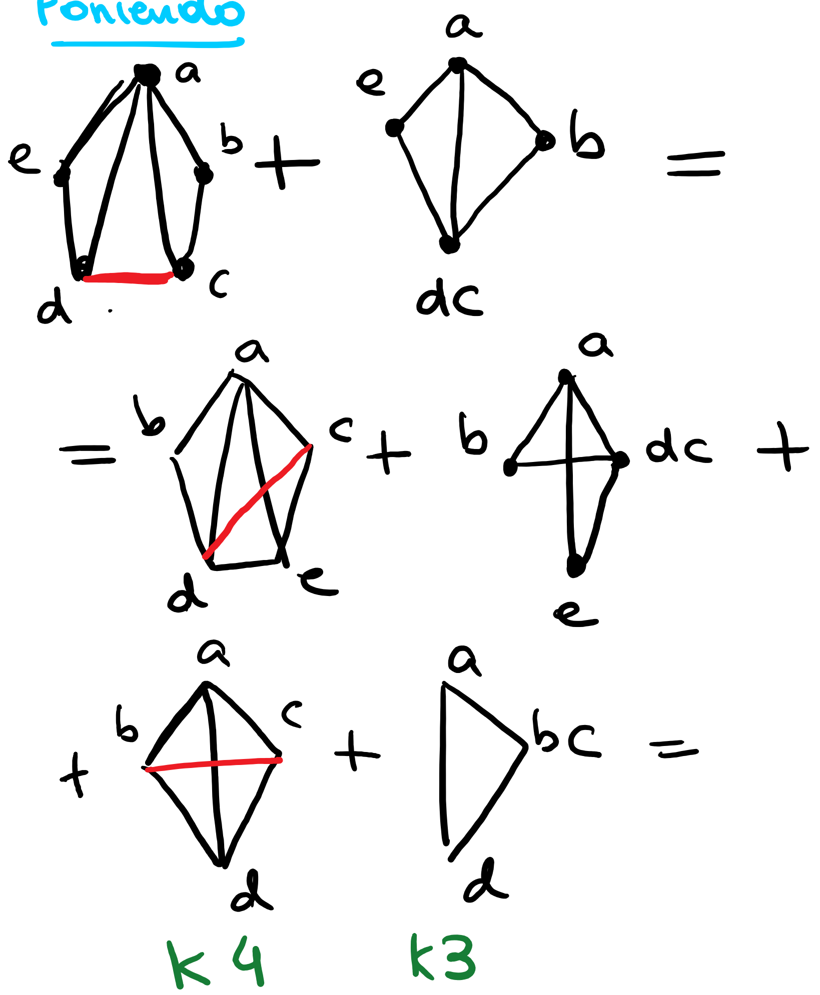


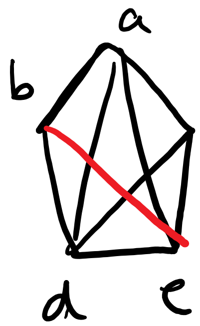
Polinomio cromático

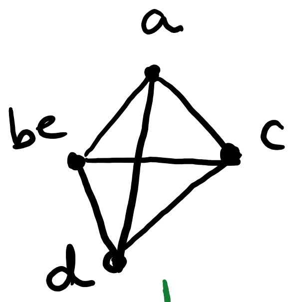
Número cromático

De cuántas formas se puede colorear de 5 colores

Poniendo

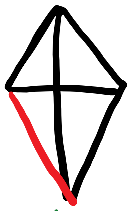
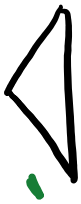


$=$ 

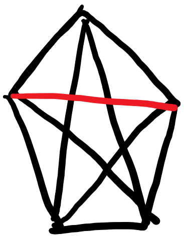
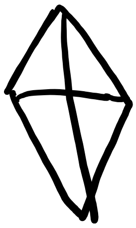
$+$ 

$+$

K'_4

$+$   $+ K_4 + K_3$

K''_4 K'_3

$=$  $+$  $+ K_4 + K_3 + K'_4 + K''_4 + K'_3$

K_5 K_4'''

Por tanto queda:

$$K_5 + 4K_4 + 2K_3$$

$$\boxed{P_G(x) = x^{\underline{5}} + 4x^{\underline{4}} + 2x^{\underline{3}}}$$

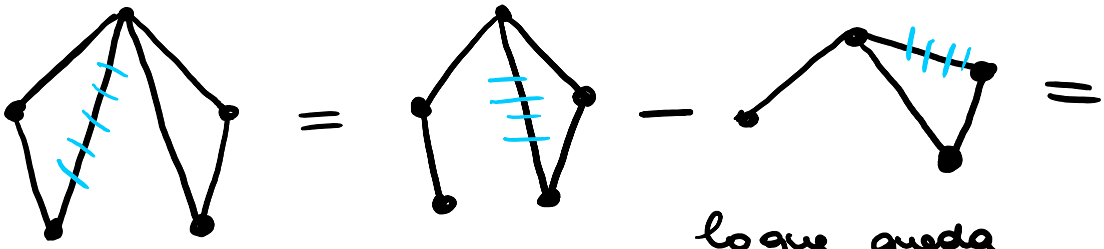
Número cromático (más peq) $\Rightarrow \boxed{3}$

Para saber formas con 5 $\rightarrow$ sustituir

Chuleta descendente $x^{\underline{5}} = \dfrac{x!}{(x-5)!}$

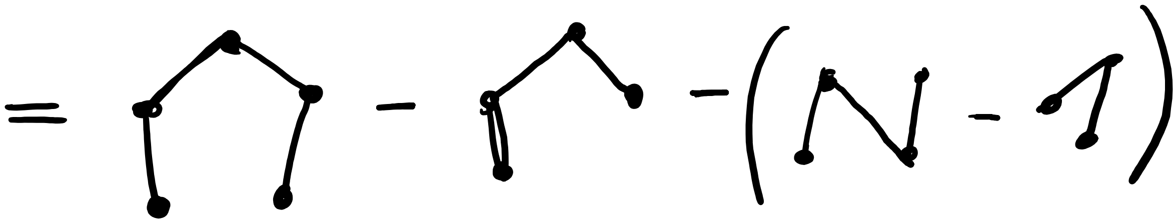
DEMOLICIÓN

Buscamos una cadena o un completo (P o K)



(1)

lo que queda uniendo (1)



$P_5 - 2P_4 + P_3$

núm vértices − 1

$P_5 = x \cdot (x-1) \quad = x(x-1)^4$

$2P_4 = 2x(x-1)^3$

$P_3 = x(x-1)^2$

$$\boxed{P_G(x) = x(x-1)^4 - 2x(x-1)^3 + x(x-1)^2}$$

Num cromático → cuando no te dé 0 → 3

27

33 gr 1

25 gr 2

15 gr 3

resto gr 4

¿Cuántos vértices hay en total?

Fórmula de Euler

La suma de los grados es igual a dos veces el número de lados

La suma de los grados ...
número de lados

$$33+50+45+4x = 2x+144$$
$$2x = 16$$
$$8 = x$$
$$x+73 = \underline{\underline{81}} \rightarrow 81 \text{ vértices}$$

Un árbol sólo tiene una cara

$$v-e+c=2$$
$$v-e=1$$
$$v=e+1$$
$$e=v-1$$

Un árbol sólo tiene una cara

29 $D(30)$ calcular $15 \wedge (2 \vee \overline{10})$ y $(\overline{15} \vee 3) \wedge (6 \wedge 10)$

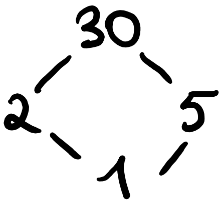
Encontrar un subconjunto de $D(30)$ que sea un retículo pero que no sea un subretículo de D(3

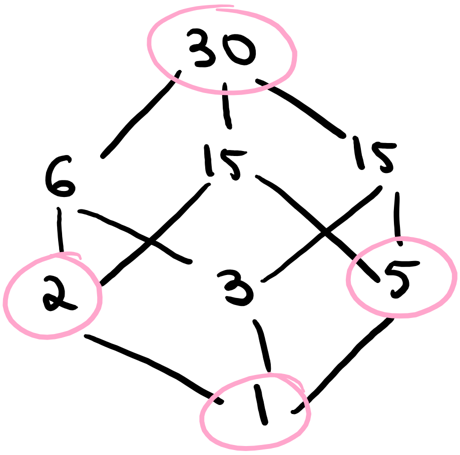
$$D(30) = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$15 \wedge (2 \vee \overline{10}) = 15 \wedge (2 \vee 3) = 15 \wedge 6 = 3 \,//$$
$$(\overline{15} \vee 3) \wedge (6 \wedge 10) = (2 \vee 3) \wedge 2 = 6 \wedge 2 = \underline{\underline{2}}$$

Retículo → Cada 2 elementos tengan ínfimo y supremo

Subretículo → Retículo dentro de otro que para cualquier dos que cojas el supremo y el ínfimo permanecen dentro del mismo





LÓGICA PROPOSICIONAL

32 Decir si las siguientes fórmulas son unificables. En el caso de que lo sean, encontrar un unificador de máxima generalidad.

$$P(x, g(x), y, h(x,y)) \quad y \quad P(u, v, e(v), w)$$

Igualamos cada miembro

Necesitamos variable / término

$$\begin{cases} x = u \\ g(x) = v \\ y = e(v) \\ h(x,y) = w \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = u \\ v = g(x) \\ y = e(g(x)) \\ w = h(u, e(g(x))) \end{array}$$

$x = u$

$v =$