CONCEPTOS BÁSICOS DE ANÁLISIS REAL

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Asignatura: Cálculo I

Índice general

Prólogo

En esta asignatura vas a estudiar algunos de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático. Su nombre, “Cálculo I”, es muy desafortunado porque nada tiene que ver con las técnicas usuales del Cálculo: derivadas, integrales o ecuaciones diferenciales. Aquí vas a estudiar conceptos muy básicos pero imprescindibles porque ellos proporcionan los fundamentos para desarrollar dichas técnicas. Debes saber que esos conceptos no son necesarios para las aplicaciones prácticas del Cálculo. De hecho, no forman parte de la formación de los ingenieros. Para resolver problemas prácticos aplicando técnicas de cálculo diferencial o integral solamente es preciso conocer dichas técnicas y saber aplicarlas a situaciones concretas, no es necesario comprender sus fundamentos. Pero la formación de un matemático, y tú estás leyendo esto porque quieres serlo, tiene que incluir de forma destacada el estudio de los mismos. El Cálculo con fundamentos se llama Análisis Matemático. Los ingenieros estudian Cálculo, los matemáticos estudiamos Análisis Matemático. Lo principal en esta asignatura no son las técnicas sino los conceptos. Sucede que los conceptos más básicos son los más abstractos y por eso esta es una asignatura difícil.

Al ser tan básica, los conocimientos previos necesarios para esta asignatura son muy pocos. Es suficiente con que sepas usar las reglas de la aritmética para hacer cálculos simbólicos sencillos (por ejemplo $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y cosas así) y que tengas una capacidad normal (seguro que la tienes) para el razonamiento lógico - deductivo. Por lo demás, es conveniente que “olvides” otras cosas que puedas saber de cálculo: límites de funciones, derivadas, integrales.

En esta asignatura debes aprender a justificar matemáticamente operaciones que seguramente estás acostumbrado a realizar de forma más o menos mecánica sin entender muy bien lo que haces. Por ejemplo, piensa en la famosa “regla de los signos” ¿por qué es “$(-x)(y) = -xy$”, o ¿por qué es $0x = 0$?.

Algo que tienes que aprender es que los resultados matemáticos importantes, esos que llamamos "teoremas", están para usarse, y cada vez que uses uno de ellos deberás citarlo de forma apropiada. Así mismo las definiciones están para ser aplicadas cada vez que sea preciso.

Uno de los objetivos principales es que aprendas a escribir matemáticas de forma correcta. Esto es algo para lo que no hay reglas estrictas por lo que deberás ***practicar escribiendo tú mismo, a tu manera y con tus palabras, lo que acabas de estudiar***. Pero debes tener en cuenta que cuando se trata de explicar algo matemáticamente no hay mucho margen para la digresión o el adorno literario, debes evitar divagar.

Además de acostumbrarte a escribir lo que has estudiado, debes aprender a ***leer las matemáticas correctamente***. Esto es algo en lo que tienes que esforzarte porque solemos leer mal las matemáticas. Trataremos esto con frecuencia durante el curso.

Es muy importante que hagas los ejercicios que se proponen en los apuntes. La forma de comprobar si has entendido bien los conceptos que has estudiado es hacer ejercicios en los que tienes que usarlos. Si te gustan las matemáticas disfrutarás con el pequeño desafío que suponen los ejercicios. Si un ejercicio está ahí propuesto es porque ya tienes las herramientas para hacerlo. El tiempo que dediques a pensar un ejercicio nunca es tiempo perdido, en ese tiempo estás "haciendo matemáticas", estás desarrollando tu creatividad matemática. Comentar los ejercicios con los compañeros o hacer ejercicios en grupo son formas divertidas de estudiar.

Ejercicios.

Ejercicio A. Considera el conjunto $\left\{\dfrac{1}{n^2} : n\in\mathbb{N}\right\}$. ¿Cómo lo lees? ¿Lees las letras? ¿Lees algo así como: *"conjunto 1 dividido por n al cuadrado cuando n esta en* $\mathbb{N}$*"*? Si lees así lo estás leyendo muy mal porque *estás leyendo los símbolos no lo que estos significan*.

Describe con palabras el conjunto anterior sin usar símbolos matemáticos.

Ejercicio B. Seguro que conoces el siguiente resultado: "sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y tal que $f(a)f(b)<0$ entonces hay algún $c\in]a,b[$ tal que $f(c)=0$". ¿Cómo lo lees? Lees algo parecido a esto: *"Sea f de a b en* $\mathbb{R}$ *continua tal que f de a por f de b menor que cero entonces hay algún c en a b tal que f de c igual a cero"*. Pues si lo que reproduces mentalmente en tu cabeza se parece a eso es que no te enteras de nada. Absolutamente de nada.

Enuncia el resultado anterior sin usar símbolos matemáticos.

Ejercicio C. Lee el epígrafe 1.1.1. "*Axiomas, definiciones, teoremas, lemas, corolarios.*" de mi libro de *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*. Después de leerlo haz lo siguiente:

a) Comenta la frase de Bertrand Russell:

> *La matemática pura es aquella ciencia en la que uno no sabe de qué está hablando ni si lo que está diciendo es verdad.*

b) Explica con todo detalle qué es lo que hacemos en matemáticas cuando demostramos un teorema.

Ejercicio D. Cuando en una expresión matemática aparecen cuantificadores es muy importante el orden de los mismos. Lee las siguientes afirmaciones (se supone que $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío de números reales):

a) Para todo $x \in A$ hay un $z \in \mathbb{R}$ que verifica $z > x$.

b) Hay un $z \in \mathbb{R}$ que verifica $z > x$ para todo $x \in A$.

Explica con detalle lo que se dice en a) y en b). ¿Te parece que se dice lo mismo en ambas?

Lectura recomendada. En mi página Web: Algunos consejos para resolver problemas

Capítulo 1

Números reales. Conjuntos numerables

1.1. El cuerpo de los números reales. Operaciones algebraicas, orden.

Vamos a iniciar este curso presentando la estructura básica del Análisis Matemático: el cuerpo de los números reales. Veremos que los números reales contienen a los números racionales. Pero también hay números reales, llamados *irracionales*, que no son números racionales. Los números irracionales se descubrieron por los pitagóricos hace unos 2500 años en relación con el problema de la medida de segmentos. Este descubrimiento tuvo consecuencias de largo alcance en el desarrollo científico en Europa. Una teoría matemática de los números reales no fue elaborada hasta el último tercio del siglo XIX[1].

Solemos interpretar los números reales como puntos de una recta. Esto está muy bien como ayuda a la intuición, pero debes evitar que la intuición te haga ver como *evidentes* algunas propiedades de los números reales que no tienen nada de evidentes. Todas las propiedades de los números reales se deducen a partir de los ocho axiomas que vamos a dar a continuación. Estos axiomas definen una estructura muy abstracta en la que para nada interviene la idea de *números como puntos de una recta*. Por supuesto, dichos axiomas no nos dicen qué cosa sea un número real, sino lo que podemos hacer con los números reales; establecen, por así decir, las *reglas del*

[1]La apasionante historia de esta aventura puedes leerla en los capítulos 1 y 5 de mi libro de Cálculo

juego.

La actitud que debes tener al leer lo que sigue es *no dar por supuesto nada que no se diga de forma explícita en los axiomas*. Esto no es tan sencillo porque tú ya sabes muchas propiedades de los números, las sabes desde hace mucho tiempo, te has acostumbrado a usarlas y, aunque seguramente no sabes su justificación, consideras que no necesitan ser probadas. Estoy pensando en propiedades como, por ejemplo, $0x = 0$, $(-x)y = -xy$, $0 < 1$; pues bien, como estas propiedades *no aparecen de forma explícita en los axiomas* debes considerar que *pueden ser deducidas de los mismos*. Es a esta actitud a la que me refiero. Empecemos ya el juego.

El cuerpo de los números reales es un conjunto, que notamos $\mathbb{R}$, en el que están definidas una estructura algebraica y una estructura de orden como se indica a continuación.

Estructura algebraica.

En $\mathbb{R}$ hay dos leyes de composición llamadas adición y producto que notamos, respectivamente, por $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto xy$ que satisfacen los siguientes axiomas.

A1 [Propiedades asociativas] $(x + y) + z = x + (y + z)$; $(xy)z = x(yz)$ para todos x, y, z en $\mathbb{R}$.

A2 [Propiedades conmutativas] $x + y = y + x$; $xy = yx$ para todos x, y en $\mathbb{R}$.

A3 [Elementos neutros] Hay elementos neutros para la adición y para el producto. Dichos elementos se suponen *distintos* y se representan, respectivamente, por 0 y 1.

$$0 + x = x \quad ; \quad 1x = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

A4 [Elementos opuesto e inverso] Para cada número real x hay un número real llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.

Para cada número real x distinto de 0, $x \neq 0$, hay un número real llamado *inverso de* x, que representamos por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$.

A5 [Propiedad distributiva] $(x + y)z = xz + y\,z$ para todos x, y, z en $\mathbb{R}$.

Una de las cosas que tienes que aprender este curso es a *leer matemáticas*. Esto no es tan fácil como parece y, de hecho, con frecuencia leemos muy mal las matemáticas. Esto se debe a que con frecuencia leemos más de lo que hay escrito y damos por supuesto lo que en ningún sitio está dicho. Por ejemplo, acabas de leer el axioma A4, en él se establece que todo número real tiene un opuesto pero no se dice que tenga un *único* opuesto. Si tú lo interpretas así estás leyendo más de lo que hay en dicho axioma. Tampoco se dice en A4 que el 0 no tenga inverso. Lo que se dice es que todo elemento distinto de 0 tiene inverso. Pero, ¿y el 0? ¿tiene o no tiene inverso?

También, con frecuencia, leemos menos de lo que hay escrito, porque no prestamos atención o consideramos que lo que se dice es una obviedad o es innecesario. No leemos aquello cuyo significado no entendemos. Por ejemplo, acabas de leer el axioma A3, en él se establece que el 1 y el 0 son distintos. Pues claro, dirás, eso es una evidencia, ¿para qué hace falta decirlo? Pues sí, hay que decirlo porque pudiera ocurrir que en una estructura en la que se cumplan los axiomas A1 – A5 los elementos neutros para la adición y el producto coincidan. ¿No te lo crees? Pues es bien fácil de ejemplificar (aunque no hay muchos más ejemplos). Considera un conjunto formado por un único elemento $\mathbb{K}=\{u\}$ y definimos las operación de adición y producto por $u+u=u$ y $uu=u$. El conjunto $\mathbb{K}$ con dichas operaciones verifica los axiomas A1 – A5 y el elemento u es elemento neutro para la adición y para el producto.

Se define la *diferencia* $x-y=x+(-y)$. También, supuesto $y\neq 0$, representamos su inverso en la forma $y^{-1}=\dfrac{1}{y}$; y el producto $xy^{-1}=y^{-1}x$ lo representamos por $xy^{-1}=x\dfrac{1}{y}=\dfrac{x}{y}$.

Usando los cinco axiomas A1 – A5 podemos probar algunas propiedades conocidas de la suma y el producto.

1.1 Proposición. *Sean x,y,z,w números reales, entonces:*

i) $x+z=y+z$ *implica que* $x=y$ *(ley de cancelación para la adición).*

ii) El opuesto de un número real es único y $-(-x)=x$ *. En particular, el elemento neutro de la adición es único.*

iii) $z\neq 0$ *y* $xz=yz$ *implican que* $x=y$ *(ley de cancelación para el producto).*

iv) El inverso de un número real distinto de 0 *es único y si* $x\neq 0$ *se tiene que* $(x^{-1})^{-1}=x$*. En particular, el elemento unidad del producto es único.*

v) $x0=0$*, en consecuencia* 0 *no tiene inverso.*

vi) $xy=0$ *implica que* $x=0$ *o* $y=0$.

vii) $(-x)y=-x\,y=x(-y)$; $(-x)(-y)=xy$.

viii) Si $z\neq 0\neq w$*,* $\dfrac{x}{z}\dfrac{y}{w}=\dfrac{xy}{zw}$; $\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{w}=\dfrac{xw+zy}{zw}$.

Los cuatro primeros axiomas, A1–A4, nos dicen que $(\mathbb{R},+)$, es decir $\mathbb{R}$ con la operación adición, y $(\mathbb{R}\setminus\{0\}\,,.)$, es decir $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ con la operación producto, son *grupos abelianos*.

Los cinco axiomas A1–A5 nos dicen que $(\mathbb{R},+,.)$, es decir $\mathbb{R}$ con las dos operaciones de adición y producto, es un *cuerpo conmutativo*.

Hay ejemplos de cuerpos conmutativos muy triviales. Por ejemplo, el conjunto formado solamente por dos elementos distintos $\mathbb{K}=\{u,v\}$ con las operaciones suma, $+$, y producto, $\times$, definidas por

$$u + u = u,\ u + v = v + u = v,\ v + v = u,\ u \times u = v \times u = u \times v = u,\ v \times v = v$$

verifica los axiomas A1 – A5, y es un cuerpo conmutativo en el que u es el elemento neutro de la adición y v es elemento neutro del producto.

Antes de seguir debes recordar que el símbolo $-x$ (léase *opuesto* de x) se define por una propiedad algebraica, a saber: $-x$ es el (único) número que sumado con x es igual a 0. Hasta ahora no se ha hablado de números positivos o negativos y, el símbolo, $-x$ no tiene nada ver con esos conceptos que pasamos seguidamente a considerar.

Estructura de orden.

En $\mathbb{R}$ hay un subconjunto, que notamos $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos llamamos *números positivos*, que satisface los siguientes axiomas.

A6 [Ley de tricotomía] Para cada $x \in \mathbb{R}$ se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$; x es positivo; $-x$ es positivo.

A7 [Estabilidad de $\mathbb{R}^+$] La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Los opuestos de los números positivos, es decir los elementos del conjunto $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$, se llaman *números negativos*. Observa que 0 no es positivo ni negativo.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, decimos que x *es menor que* y o también que y *es mayor que* x, y escribimos $x < y$ o $y > x$, cuando se verifica que $y - x \in \mathbb{R}^+$. Decimos que x *es menor o igual que* y o también que y *es mayor o igual que* x, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$, cuando se verifica que $y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Equivalentemente, $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ significa que o bien es $x < y$ o es $x = y$. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}^+_{\mathrm{o}} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^-_{\mathrm{o}} = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Observa que si $x \in \mathbb{R}^-$ entonces $-x \in \mathbb{R}^+$.

Usando los siete axiomas A1 – A7 podemos probar algunas propiedades conocidas de las desigualdades.

1.2 Proposición. *Para todos x, y, z números reales se verifican las siguientes propiedades.*

i) $x \leqslant x$ (propiedad reflexiva).

ii) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ implican que $x = y$ (propiedad antisimétrica).

iii) $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ implican que $x \leqslant z$ (propiedad transitiva).

iv) Se verifica exactamente una de las tres relaciones: $x < y$, $x = y$, o $y < x$.

v) $x < y \iff x + z < y + z$.

vi) Si $z > 0$ *entonces* $x < y \iff xz < yz$.

vii) Si $z < 0$ *entonces* $x < y \iff xz > yz$.

viii) $xy > 0$ *si, y sólo si,* x *e* y *son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si* $x \neq 0$ *es* $x^2 > 0$ *y, en particular,* $1 > 0$.

ix) $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0$.

x) Si $xy > 0$ *entonces* $x < y \iff \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

Todas estas propiedades son fáciles de probar. Por ejemplo, para probar el punto *vi)*, si $x < y$ se tiene que $y - x > 0$. Si ahora es $z > 0$, también será $z(y - x) > 0$, es decir, $zy - zx > 0$, o sea, $zx < zy$. Lo único que hemos usado aquí ha sido la definición de los símbolos "$<$" y "$>$" y algunas de las propiedades A1 – A7. Un estupendo ejercicio para que compruebes tus habilidades es que demuestres todos los puntos de la proposición anterior.

La forma correcta de leer las matemáticas.

La forma en que están escritos los apartados de la proposición anterior no me gusta mucho. Voy a decirte por qué y para eso voy a tratar aquí un defecto en el que solemos caer al leer o estudiar matemáticas. Se trata de algo que realizamos de una manera mecánica, y por ello no es fácil de evitar, y que limita y condiciona mucho el alcance de lo que entendemos y aprendemos. Para ponerlo de manifiesto vamos a considerar un ejemplo. En uno de los ejercicios al final de esta sección te propongo que pruebes que la igualdad

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y} \tag{1.1}$$

nunca es cierta. Bien, supongamos que ya lo has probado. Seguidamente te pido que me digas cuándo es cierta la igualdad

$$\frac{1}{x+y^2} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y^2+z} \tag{1.2}$$

Tienes 15 segundos para contestar (y sobran 13). ¿Si? ¿No? ¡Son *la misma* igualdad! Y, aquí es a dónde yo quería llegar, si no te parecen la misma igualdad es porque *estás leyendo los símbolos y no los conceptos*, es porque ¡estás leyendo las letras! Claro, me dirás, las letras están para leerse. De acuerdo, pero hay que ir siempre al significado de lo que se lee y no quedarse en la superficie de los símbolos. Los símbolos proporcionan mucha comodidad para expresar las ideas matemáticas, pero con frecuencia, si no sabemos leer bien su significado, *los símbolos pueden ocultar los conceptos*. En el ejemplo anterior, el hecho de que la igualdad (1.1) sea falsa, se expresa de forma correcta diciendo que *"la suma de los inversos de dos números nunca es igual al inverso de su suma"*. Por tanto, la igualdad (1.2) jamás puede darse pues es la misma igualdad

(1.1) en la que se ha sustituido x por $x + y^2$ e y por z. Pero tanto x como $x + y^2$ son números reales cualesquiera e igual ocurre con z e y. ¿Te das cuenta del problema? No es igual retener la idea de que "1 dividido por x más 1 dividido por y nunca es igual a 1 dividido por $x + y$" que asimilar que "la suma de dos inversos nunca es igual al inverso de la suma". En el primer caso los símbolos x e y tienen un protagonismo que no les corresponde, ocultan el concepto: si te fijas demasiado en ellos no sabrás reconocer que (1.2) y (1.1) son la misma cosa.

Traduce los símbolos en conceptos. Cuando leas matemáticas presta atención a los conceptos y no retengas símbolos concretos.

Por ejemplo, la propiedad *vi)* de la proposición anterior debe leerse (y escribirse) en la forma: "una desigualdad es equivalente a la obtenida multiplicando sus dos lados por un mismo número positivo" o, más sencillamente, "una desigualdad se conserva al multiplicarla por un número positivo".

Es claro que entre dos números reales distintos siempre hay otros números reales, pues si $b < a$ entonces $b < (a + b)/2 < a$. Por tanto, si $b < a$ entonces hay números que son mayores que b y menores que a. En consecuencia, si a y b son números reales y no hay ningún número real que sea mayor que b y menor que a tiene que verificarse que $a \leqslant b$. Que no hay números mayores que b y menores que a puede expresarse de dos formas equivalentes: "todo número mayor que b es mayor o igual que a" y "todo número menor que a es menor o igual que b". Obtenemos así el siguiente resultado elemental pero que se utiliza con frecuencia.

1.3 Proposición. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $a \leqslant b$

ii) *Para todo $x > b$ se verifica que $x \geqslant a$.*

iii) *Para todo $x < a$ se verifica que $x \leqslant b$.*

Teniendo en cuenta las igualdades de comprobación inmediata:

$$\{x \in \mathbb{R} : x > b\} = \{b + \varepsilon : \varepsilon > 0\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : x < a\} = \{a - \varepsilon : \varepsilon > 0\} \tag{1.3}$$

la proposición 1.3 puede enunciarse como sigue:

1.4 Proposición. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $a \leqslant b$.

ii) *Para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $a \leqslant b + \varepsilon$.*

iii) *Para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $a - \varepsilon \leqslant b$.*

1.5 Definición. El **valor absoluto** de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x\,| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Geométricamente, $|x|$ es la distancia de x al origen, 0, en la recta real. De manera más general:

$$|x - y| = \text{distancia entre } x \text{ e } y$$

es la longitud del segmento de extremos x e y.

La siguiente estrategia es con frecuencia útil para probar igualdades o desigualdades entre números positivos.

1.6 Estrategia. a) Para probar que dos números positivos son iguales es suficiente probar que sus cuadrados son iguales.

b) Para probar una desigualdad entre dos número positivos es suficiente probar dicha desigualdad para sus cuadrados.

El enunciado anterior está hecho como a mi me gusta: con palabras y sin símbolos. Poniendo símbolos, lo que se dice en el enunciado es que:

Dados $a, b \in \mathbb{R}_o^+$ *para probar que* $a = b$ *es suficiente probar que* $a^2 = b^2$ *y para probar que* $a < b$ *es suficiente probar que* $a^2 < b^2$.

Todo lo dicho es consecuencia de que $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$ y se tiene que $b + a > 0$.

Establecemos seguidamente algunas propiedades importantes del valor absoluto.

1.7 Proposición. *Para* $x, y \in \mathbb{R}$ *se verifica que:*

i) $|x| = 0$ *si, y sólo si* $x = 0$, *y* $|x| > 0$ *si* $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$ *y* $\left|x^2\right| = |x|^2 = x^2$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant y \iff -y \leqslant x \leqslant y$.

v) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ *y la igualdad se da si, y sólo si,* $xy \geqslant 0$.

vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ *y la igualdad se da si, y sólo si,* $xy \geqslant 0$.

Te recuerdo que debes leer de forma correcta las propiedades anteriores: no te fijes en las letras sino en los conceptos. La propiedad *iii)* debes leerla *"el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos"*. Por su parte, propiedad *v)* dice dos cosas:

i) *El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos.*

ii) *El valor absoluto de una suma es igual a la suma de los valores absolutos si, y sólo si, todos los sumandos son positivos o todos todos los sumandos son negativos.*

La desigualdad $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ suele llamarse *desigualdad triangular*.

De aquí en adelante marcaré con una **(T)** aquellos ejercicios que forman parte de la teoría y cuyos resultados se necesitan con frecuencia para hacer otros ejercicios.

Ejercicios propuestos

1. Prueba las igualdades (1.3).

2. **(T)** Sean a, b, c números reales dados con $a > 0$. Supongamos que la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tiene dos soluciones reales $\alpha < \beta$. Estudia para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $ax^2 + bx + c > 0$. ¿Qué pasa si la ecuación tiene una única solución real doble? ¿Y si no tiene soluciones reales? ¿Cómo cambian los resultados obtenidos si se supone que $a < 0$?

3. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\dfrac{2x-3}{x+2} < \dfrac{1}{3}$.

4. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\dfrac{x^2-4x-2}{x^3+1} > 0$.

5. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left|\dfrac{x^3-5}{x^2-2x-3}\right| \leqslant 1$.

6. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left|x^2-6x+8\right| = x-2$.

7. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $|x-6|\,(1+|x-3|) \geqslant 1$.

8. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left|\dfrac{x-2}{x^2-2x-1}\right| > \dfrac{1}{2}$.

9. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\left|x^2+3x-9\right| = \left|x^2+x-6\right| + |2x-3|\,.$$

10. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $|x+1| + \left|x^2-3x+2\right| < 4$.

11. Sean $0 < a < b$. Calcula para qué valores de x se verifica que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

12. Prueba que cualesquiera sean los números reales positivos $a > 0$ y $b > 0$ se verifica que

$$\frac{a}{2(a+b)\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a+b}}$$

13. Establece condiciones para que las siguientes igualdades o desigualdades sean ciertas.

$$\begin{array}{rlrl}
\text{i)} & |x-5| < |x+1| & \text{ii)} & |x-1|\,|x+2| = 3 \\
\text{iii)} & \left|x^2-x\right| > 1 & \text{iv)} & |x-y+z| = |x| - |z-y| \\
\text{v)} & |x-1| + |x+1| < 1 & \text{vi)} & |x+y+z| = |x+y| + |z| \\
\text{vii)} & |x| - |y| = |x-y| & \text{viii)} & |x+1| < |x+3|
\end{array}$$

14. Prueba cada una de las siguientes desigualdades y estudia, en cada caso, cuando se da la igualdad.

$$\text{a) } 2xy \leqslant x^2+y^2, \ \ \text{b) } 4xy \leqslant (x+y)^2, \ \ \text{c) } x^2+xy+y^2 \geqslant 0.$$

15. Supuesto que x, y, $x+y$ son números distintos de cero, prueba que $\dfrac{1}{x+y} \neq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Estableceremos a continuación la propiedad característica de $\mathbb{R}$ y lo haremos con el llamado *axioma del continuo* o *axioma de Dedekind* pues dicho axioma refleja con precisión la idea de que *en la recta real no hay huecos* o, dicho de otra forma sugerente, *expresa numéricamente la idea de continuidad*. El enunciado que vamos a dar de este axioma no es el original sino una adaptación del mismo[2] que facilita su uso.

A8 [Axioma del continuo o de Dedekind] Dados subconjuntos no vacíos A y B de números reales tales que todo elemento de A es menor o igual que todo elemento de B, se verifica que existe un número real $z \in \mathbb{R}$ que es mayor o igual que todo elemento de A y menor o igual que todo elemento de B.

Simbólicamente:

$$\left.\begin{array}{c} \text{Ø} \neq A \subset \mathbb{R},\ \text{Ø} \neq B \subset \mathbb{R} \\ a \leqslant b\ \ \forall a \in A,\ \forall b \in B \end{array}\right\} \Longrightarrow \ \exists z \in \mathbb{R} \ \text{ verificando que } \ a \leqslant z \leqslant b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

Puedo imaginar tu asombro, incluso tu desencanto: ¿ese axioma que acabamos de enunciar desvela el secreto de los números reales? ¿Cómo es posible que durante más de 2500 años a nadie

[2] Idea de mi compañero, el profesor Rafael Payá.

se le ocurriera algo *tan evidente*? Para conocer algunos detalles de esta historia te aconsejo que leas la sección *Evolución del concepto de número* del capítulo 5 de mi libro *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*.

Los ocho axiomas A1–A8 se expresan diciendo que $\mathbb{R}$ es un *cuerpo ordenado completo*.

1.1.1. El principio del supremo. Intervalos

El axioma de Dedekind es muy intuitivo pero poco operativo. Usualmente se utilizan versiones equivalentes del mismo que vamos a exponer seguidamente.

1.8 Definición. Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Un número $v\in\mathbb{R}$ se dice que es un *mayorante o cota superior* de E si $x\leqslant v$ para todo $x\in E$.

ii) Un número $u\in\mathbb{R}$ se dice que es un *minorante o cota inferior* de E si $u\leqslant x$ para todo $x\in E$.

iii) Si hay algún elemento de E que también sea mayorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *máximo* de E y lo representaremos por $\max(E)$.

iv) Si hay algún elemento de E que también sea minorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *mínimo* de E y lo representaremos por $\min(E)$.

v) Un conjunto de números reales que tiene algún mayorante se dice que está *mayorado o acotado superiormente*.

vi) Un conjunto de números reales que tiene algún minorante se dice que está *minorado o acotado inferiormente*.

vii) Un conjunto de números reales que está mayorado y minorado se dice que está *acotado*.

Ejercicios propuestos

16. Da ejemplos de conjuntos $A\subseteq\mathbb{R}$ tales que:

i) A no está mayorado ni minorado. ii) A está mayorado pero no minorado. iii) A tiene mínimo y no tiene máximo.

17. **(T)** Prueba que un conjunto no vacío $A\subset\mathbb{R}$ está acotado si, y sólo si, hay un número real $M>0$ tal que para todo $a\in A$ se verifica que $|a|\leqslant M$.

18. Calcula el conjunto de los mayorantes y de los minorantes de A en los siguientes casos: $i)$ $A=\mathbb{R}^+$, $ii)$ $A=\mathbb{R}^-$, $iii)$ $A=\{x\in\mathbb{R}:1<x<2\}$, $iv)$ $A=\{x\in\mathbb{R}:1\leqslant x\leqslant 2\}$.

19. Sea $A=\left\{x\in\mathbb{R}^+:x^2<2\right\}$. Prueba que el conjunto de los mayorantes de A es el conjunto $B=\left\{z\in\mathbb{R}^+:z^2\geqslant 2\right\}$.

Los dos resultados que siguen son reformulaciones equivalentes del axioma de Dedekind y se usarán con frecuencia en este curso.

1.9 Teorema (Principio del supremo)**.** *Para todo conjunto de números reales no vacío y mayorado se verifica que el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.*

Demostración. Sea A un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Sea B el conjunto de todos los mayorantes de A. Por hipótesis, B es no vacío. Para todos $a \in A$ y $b \in B$ se verifica que $a \leqslant b$. En virtud del axioma del continuo, existe $z \in \mathbb{R}$ verificando que $a \leqslant z \leqslant b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. La desigualdad $a \leqslant z$ para todo $a \in A$ nos dice que z es un mayorante de A, por lo que $z \in B$. La desigualdad $z \leqslant b$ para todo $b \in B$, nos dice ahora que z es el mínimo de B. □

Razonando por analogía tú debes probar el siguiente resultado.

1.10 Teorema (Principio del ínfimo)**.** *Para todo conjunto de números reales no vacío y minorado se verifica que el conjunto de sus minorantes tiene máximo.*

1.11 Definición. Sea E un conjunto de números reales no vacío.

i) Si E está mayorado se define el *supremo o extremo superior* de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

ii) Si E está minorado se define el *ínfimo o extremo inferior* de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\operatorname{ínf}(E)$.

1.12 Observaciones. Un número $\beta \in \mathbb{R}$ es el supremo de E quiere decir, por definición, que:

1. $x \leqslant \beta$ para todo $x \in E$.
2. Ningún número menor que β es mayorante de E, es decir, para cada $u < \beta$ hay algún $x \in E$ tal que $u < x$.

   Esto puede enunciarse de forma equivalente como sigue:

   Para cada $\varepsilon > 0$ hay hay algún $x_\varepsilon \in E$ tal que $\beta - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Observa que las desigualdades $z \geqslant x$ $(\forall x \in E)$ son equivalentes a la desigualdad $z \geqslant \sup(E)$.

$$\boxed{z \geqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \geqslant \sup(E)} \tag{1.4}$$

Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de E quiere decir, por definición, que:

a) $\alpha \leqslant x$ para todo $x \in E$.

b) Ningún número mayor que α es minorante de E, es decir, para cada $v > \alpha$ hay algún $x \in E$ tal que $x < v$.

Esto puede enunciarse de forma equivalente como sigue:

Para cada $\varepsilon > 0$ hay hay algún $x_\varepsilon \in E$ tal que $x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.

Observa que las desigualdades $z \leqslant x$ $(\forall x \in E)$ son equivalentes a la desigualdad $z \leqslant \inf(E)$.

$$\boxed{z \leqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \leqslant \inf(E)} \tag{1.5}$$

1.13 Definición. Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Los intervalos de números reales pueden ser fácilmente descritos gracias a los principios del supremo y del ínfimo.

1.14 Proposición. *Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.*

Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} && \textit{(intervalo cerrado y acotado)}\\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \textit{(intervalo abierto)}\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} && \textit{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)}\\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} && \textit{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{aligned}$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado origen *del intervalo:*

$$\begin{aligned}
]-\infty,c[&= \{x \in \mathbb{R} : x < c\} && \textit{(semirrecta abierta a la izquierda)}\\
]-\infty,c] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} && \textit{(semirrecta cerrada a la izquierda)}\\
]c,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > c\} && \textit{(semirrecta abierta a la derecha)}\\
[c,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\} && \textit{(semirrecta cerrada a la derecha)}
\end{aligned}$$

Como es la primera vez que aparecen, hay que decir que los símbolos $+\infty$ (léase: “más infinito”) y $-\infty$ (léase: “menos infinito”); son eso: símbolos. No son números. Cada vez que aparece uno de ellos en una situación determinada hay que recordar cómo se ha definido su significado para dicha situación.

Los intervalos que no tienen máximo ni mínimo se llaman *intervalos abiertos*. Las semirrectas cerradas y los intervalos cerrados y acotados se llaman indistintamente *intervalos cerrados*.

Ejercicios propuestos

20. **(T)** a) Describe el conjunto de los mayorantes de un conjunto no vacío y mayorado de números reales.

b) Describe el conjunto de los minorantes de un conjunto no vacío y minorado de números reales.

21. Sea B el conjunto considerado en el ejercicio 19, y sea $\alpha = \text{mín}(B)$. Prueba que $\alpha^2 = 2$.

22. **(T)** Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Entonces $\sup(A) \leqslant \text{ínf}(B)$.

23. **(T)** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado. Definamos $-A = \{-a : a \in A\}$. ¿Qué relación hay entre los números $\sup(A)$, $\text{ínf}(A)$, $\sup(-A)$, $\text{ínf}(-A)$?

24. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Justifica las siguientes afirmaciones:

i) **(T)** Si $A \subseteq B$ entonces $\sup(A) \leqslant \sup(B)$, $\text{ínf}(A) \geqslant \text{ínf}(B)$.

ii) $\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup(A), \sup(B)\}$.

25. Sean A y B conjuntos acotados de números reales tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

a) Probar que $A \cap B$ está acotado y que

$$\text{máx}\{\text{ínf}(A), \text{ínf}(B)\} \leqslant \text{ínf}(A \cap B), \qquad \sup(A \cap B) \leqslant \text{mín}\{\sup(A), \sup(B)\}$$

b) Mostrar con un ejemplo que las dos desigualdades pueden ser estrictas.

c) Probar que si A y B son intervalos, dichas desigualdades son igualdades.

26. Sean A, B, conjuntos no vacíos de números reales. Definimos el conjunto:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Supuesto que A y B están mayorados, prueba que:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Supuesto que A y B están minorados, prueba que:

$$\text{ínf}(A + B) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B).$$

27. Sean A, B, conjuntos no vacíos de números reales. Definimos el conjunto:

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

Supuesto que A está mayorado y B está minorado, prueba que:

$$\sup(A - B) = \sup(A) - \text{ínf}(B).$$

28. Sean A, B, conjuntos no vacíos de números reales. Definimos el conjunto:

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

Supuesto que A, B, son conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos, prueba que:

$$\sup(AB) = \sup(A)\sup(B), \quad \text{ínf}(AB) = \text{ínf}(A)\,\text{ínf}(B).$$

¿Es cierto este resultado si no se supone que A y B son conjuntos de números positivos?

29. **(T)** Prueba que un intervalo $I \neq \emptyset$, es un intervalo abierto si, y sólo si, para cada $x \in I$ se verifica que hay algún número $r_x > 0$ tal que $]x - r_x, x + r_x[\subseteq I$.

30. **(T)** Dados dos números reales distintos, $x \neq y$, prueba que hay numeros $\varepsilon > 0$ tales que los intervalos $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ y $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ son disjuntos.

1.1.2. Números naturales, enteros y racionales. Principio de inducción

Nuestro punto de partida es el cuerpo de los números reales y *dentro del mismo* vamos a destacar ciertos conjuntos de números: los naturales, los enteros y los racionales.

1.15 Definición. Un conjunto A de números reales se llama *inductivo* si $1 \in A$ y siempre que un número real x está en A se verifica que $x + 1$ también está en A.

El conjunto de los números naturales, que representaremos por $\mathbb{N}$, es la intersección de todos los conjuntos inductivos de números reales.

1.16 Observación. Es claro que $\mathbb{N}$ es él mismo un conjunto inductivo: es el "más pequeño" conjunto inductivo de números reales. Este hecho, que se deduce directamente de la definición de $\mathbb{N}$, constituye el llamado "principio de inducción matemática".

Principio de inducción matemática. *Si A es un conjunto inductivo de números* naturales *entonces $A = \mathbb{N}$.*

El Principio de inducción matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.

B) Comprobamos que *si* un número n satisface la propiedad, *entonces* también el número $n+1$ la satisface. Es decir comprobamos que *si* $P(n)$ es cierta, *entonces* también lo es $P(n+1)$.

Si ahora definimos el conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es cierta}\}$, entonces el punto A) nos dice que $1 \in M$, y el punto B) nos dice que siempre que n está en M se verifica que $n+1$ también está en M. Luego M es un conjunto inductivo y, como, $M \subset \mathbb{N}$, concluimos, por el principio de inducción, que $M = \mathbb{N}$, o sea, que $P(n)$ es cierta para todo número natural n.

Observa que en B) no se dice que se tenga que probar que $P(n)$ es cierta, sino que hay que *demostrar la implicación lógica* $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$. Para demostrar dicha implicación lo que hacemos es *suponer* que $P(n)$ es cierta. Es por eso que suele llamarse a $P(n)$ la *hipótesis de inducción*.

Probaremos a continuación algunas propiedades de los números naturales.

1.17 Proposición. *Para cada número natural* $n \in \mathbb{N}$*, se verifica:*

i) $1 \leqslant n$.

ii) $n > 1$ *implica que* $(n-1) \in \mathbb{N}$.

iii) $x \in \mathbb{R}^+$ *y* $(x+n) \in \mathbb{N}$ *implican que* $x \in \mathbb{N}$.

iv) $m \in \mathbb{N}$ *y* $m > n$ *implican que* $(m-n) \in \mathbb{N}$.

v) $m \in \mathbb{N}$ *y* $n < m$ *implican que* $n+1 \leqslant m$.

vi) $m \in \mathbb{N}$ *implica que* $(m+n) \in \mathbb{N}$ *y* $mn \in \mathbb{N}$.

vii) $\mathbb{N}$ *no tiene máximo.*

Demostración. i) Basta notar que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x\}$ es inductivo, luego $\mathbb{N} \subseteq A$.

ii) Definamos $B = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n-1 \in \mathbb{N}\}$. Probaremos que $B = \mathbb{N}$. Claramente $B \subseteq \mathbb{N}$ y $1 \in B$. Supongamos que $n \in B$. Entonces $(n+1)-1 = n \in B \subseteq \mathbb{N}$ y por tanto $(n+1) \in B$. Hemos probado así que B es inductivo por lo que $B = \mathbb{N}$.

iii) Sea $C = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \,\mathrm{es\ cierta}\}$ donde, para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es la siguiente proposición:

“Si $x \in \mathbb{R}^+$ y $(x+n) \in \mathbb{N}$ entonces $x \in \mathbb{N}$”.

Probaremos que C es inductivo. Para probar que $1 \in C$ basta notar que si $x \in \mathbb{R}^+$ y $1+x \in \mathbb{N}$ entonces, por el apartado ii) anterior, tenemos que $(1+x)-1 = x \in \mathbb{N}$. Luego $1 \in C$. Supongamos que $n \in C$ y sea $z \in \mathbb{R}^+$ tal que $z+(n+1) \in \mathbb{N}$. Poniendo $x = z+1$, tenemos que $x \in \mathbb{R}^+$ y $n+x \in \mathbb{N}$ luego, por estar n en C, $x = z+1 \in \mathbb{N}$ y ahora, como ya sabemos que $1 \in C$, concluimos que $z \in \mathbb{N}$ probando así que $n+1 \in C$.

iv) Es consecuencia del punto iii) tomando $x = m - n \in \mathbb{R}^+$.

v) Por el punto iv) sabemos que $m - n \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia, por i), $m - n \geqslant 1$, esto es, $m \geqslant n + 1$.

Este resultado nos dice que $\min\{m \in \mathbb{N} : n < m\} = n + 1$, es decir, que al número natural n le sigue el $n + 1$.

vi) Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y definamos:

$$E = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}\,; \quad F = \{n \in \mathbb{N} : mn \in \mathbb{N}\}.$$

Todo lo que hay que hacer es probar que $E = F = \mathbb{N}$ para lo cual probaremos que E y F son inductivos. Por ser $\mathbb{N}$ inductivo tenemos que $1 \in E$. Supuesto $n \in E$ tenemos que $m + (n+1) = (m + n) + 1 \in \mathbb{N}$ porque $m + n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es inductivo. Luego $(n + 1) \in E$. Por tanto $E = \mathbb{N}$. Evidentemente $1 \in F$, y haciendo uso de lo ya demostrado deducimos que si $n \in F$ también $m(n + 1) = mn + m \in \mathbb{N}$ luego $(n + 1) \in F$. En consecuencia $F = \mathbb{N}$.

vii) Es inmediato que el conjunto de los números naturales no tiene máximo pues dado $n \in \mathbb{N}$ también $n + 1 \in \mathbb{N}$ y, evidentemente, $n + 1 > n$. En consecuencia no hay ningún número natural que sea mayor que todos los números naturales. $\square$

Seguidamente definimos los números enteros.

1.18 Definición. Un número real x decimos que es un *entero* si $x \in \mathbb{N}$ o $x = 0$ o $-x \in \mathbb{N}$. Representaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos ellos.

A los números naturales se les llama también *enteros positivos* y a sus opuestos *enteros negativos*.

Las propiedades de los enteros que se recogen en el siguiente resultado se deducen fácilmente de las propiedades de los naturales antes vistas y del hecho inmediato de que un número $x \in \mathbb{R}$ es un entero si, y sólo si, puede escribirse de la forma $x = p - q$ donde $p, q \in \mathbb{N}$.

1.19 Proposición. *Si p, q son números enteros se tiene que:*

i) $-p$, $p + q$, $p\,q$ *son enteros.*

ii) $p < q$ *implica que* $p + 1 \leqslant q$.

Además, el conjunto de los números enteros no tiene máximo ni mínimo.

Seguidamente definimos los números racionales de la forma usual.

1.20 Definición. Un número real x se dice que es un número *racional* si $x = p/q$ donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Representaremos con la letra $\mathbb{Q}$ el conjunto de todos los números racionales.

Las siguientes propiedades de los números racionales son de fácil comprobación.

1.21 Proposición. *Si r, s son números racionales entonces $-r$, $r+s$, rs y, si $r \neq 0$, $1/r$ son también racionales.*

La forma más corriente de imaginar los números reales consiste en verlos como los puntos de una recta. Es por ello que la afirmación *"dado cualquier número real se verifica que hay algún número natural mayor que él"* puede parecer evidente. La intuición nos dice que así *debe ser* y, de hecho, vamos a demostrarla. Observa que dicha afirmación involucra a todos los números reales y, razonablemente, no cabe esperar que pueda *demostrarse* sin hacer uso de alguna propiedad específica de $\mathbb{R}$. Para comprender adecuadamente lo que queremos hacer, conviene darse cuenta de que lo que *sí es evidente* es que dado cualquier número racional se verifica que hay algún número natural mayor que él. La dificultad está en el caso de que tengamos un número real, $x \in \mathbb{R}$, que no sea racional, pues entonces no sabemos todavía cómo relacionar dicho número con algún número natural. Por ello la afirmación anterior no es, ni mucho menos, evidente. El resultado que buscamos lo obtendremos como consecuencia del siguiente importante resultado.

1.22 Proposición.

a) Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado tiene máximo.

b) Todo conjunto de números enteros no vacío y minorado tiene mínimo.

Demostración. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y mayorado. En virtud del principio del supremo hay un número $\beta \in \mathbb{R}$ que es el mínimo mayorante de E. Puesto que $\beta - 1 < \beta$, debe haber algún $z \in E$ tal que $\beta - 1 < z$ y, claro está, $z \leqslant \beta$. Supongamos que los elementos de E son números enteros, $E \subseteq \mathbb{Z}$, y probemos que, en tal caso, debe ser $z = \beta$. Si fuera $z < \beta$ tendría que haber algún $w \in E$ tal que $z < w \leqslant \beta$ pero entonces el número $w - z$ es un entero positivo tal que $w - z < 1$ lo cual es contradictorio. En consecuencia $z = \beta \in E$ y β es el máximo de E.

Análogamente se prueba, debes hacerlo, que un conjunto no vacío y minorado de enteros tiene mínimo. □

Como consecuencia del apartado b) deducimos el siguiente resultado.

1.23 Proposición (Principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$)**.** *Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.*

Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo, obtenemos como consecuencia inmediata del apartado a) el siguiente resultado.

1.24 Proposición (Propiedad arquimediana)**.** *Dado cualquier número real se verifica que hay números naturales mayores que él.*

Durante mucho tiempo se admitió la existencia de unos números reales llamados *infinitésimos* que eran números *muy pequeños*, tan *pequeños* que al multiplicarlos por cualquier número natural seguían siendo *pequeños*. No hay números reales que tengan esta propiedad, pues si $a > 0$ es un número real (por pequeño que sea) y $b > 0$ es un número real (por grande que sea), la propiedad arquimediana nos dice que hay números naturales $n \in \mathbb{N}$ que verifican que $n > b/a$, es decir, $na > b$.

Definimos seguidamente una importante función llamada *función parte entera*.

1.25 Proposición. *Dado* $x \in \mathbb{R}$ *existe un único número entero* q *que verifica que* $q \leqslant x < q + 1$. *Dicho número entero se llama* parte entera *de* x *y se representa por* $E(x)$.

Ejercicios propuestos

31. Sea $A = \left\{1 + \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Prueba que $\inf(A) = 1$. ¿Tiene A mínimo? ¿Y máximo?

32. Calcula el $\inf(A)$ y el $\sup(A)$ donde

$$A = \left\{(-1)^n \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Debes razonar tus respuestas. ¿Tiene A máximo o mínimo?

33. Considera los conjuntos

$$A = \left\{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{3 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad C = \left\{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Calcula el supremo y el ínfimo de A, B, C e indica cuáles de ellos tienen máximo o mínimo. Comprueba si se verifican las igualdades

$$\sup(C) = \sup(A)\sup(B), \quad \inf(C) = \inf(A)\inf(B).$$

¿Hay alguna contradicción con lo establecido en el ejercicio 28?

1.1.3. Potencias, raíces y números irracionales. Conjuntos densos

Definimos seguidamente las potencias enteras de los números reales.

1.26 Definición. Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $x^1 = x$, y $x^{n+1} = x^n x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $x \neq 0$ se define $x^0 = 1$.

Para todo entero negativo q y para todo número real $x \neq 0$ se define $x^q = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-q}$.

Las siguientes propiedades de las potencias enteras se prueban fácilmente por inducción.

1.27 Proposición. *Cualesquiera sean los números reales x, y distintos de cero y los enteros m, n se verifica que:*

i) $x^m x^n = x^{m+n}$.

ii) $(xy)^n = x^n y^n$. *En particular,* $\dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$.

iii) $(x^m)^n = x^{mn}$. *En consecuencia,* $x^{2n} > 0$.

Además, si $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ *entonces se verifica que* $x < y$ *si, y sólo si,* $x^n < y^n$.

Demostración. Probaremos el punto i) y la última afirmación. Tú debes probar los puntos ii) y iii).

i) Empecemos probando que para todo entero q se tiene que $x^q x = x^{q+1}$. Si $q \in \mathbb{N}$ o si $q = -1$ no hay nada que probar. Si $q < -1$ entonces $q+1$ es un entero negativo y, de la definición dada, se deduce que

$$x^{q+1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-q-1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-q-1}\left(\frac{1}{x}\right)x = \left(\frac{1}{x}\right)^{-q} x = x^q x.$$

Fijemos ahora un entero m y probemos por inducción que $x^{m+n} = x^m x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Según acabamos de ver $x^{m+1} = x^m x$. Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ es $x^{m+n} = x^m x^n$. Entonces poniendo $q = m+n$ tenemos que q es un entero y

$$x^{m+n+1} = x^{q+1} = x^q x = x^{m+n} x = (x^m x^n) x = x^m (x^n x) = x^m x^{n+1}.$$

Finalmente, si m, n son enteros negativos

$$x^m x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-m}\left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-m-n} = x^{m+n}$$

Queda así probado el punto i).

Para probar la afirmación última notemos que si $a \in \mathbb{R}^+$ es inmediato que $a^n \in \mathbb{R}^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, si tenemos que $0 < a < 1$, multiplicando esta desigualdad por a^n tenemos que $a^{n+1} < a^n$ y, por inducción, deducimos que $a^n < 1$ para $n \in \mathbb{N}$. Ahora, si $0 < x < y$, tenemos que $0 < x/y < 1$ por lo que $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n} < 1$ y deducimos que $x^n < y^n$. Recíprocamente, si $x, y \in \mathbb{R}^+$ y $x^n < y^n$ entonces no puede ser $x = y$ y tampoco $x > y$ luego, necesariamente, es $x < y$. $\square$

Notación. Dados n números $a_1, a_2, \cdots, a_n$ representamos la suma de todos ellos por $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j$ y el producto de todos ellos por $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} a_j$.

Dados dos números enteros $n \geqslant k \geqslant 0$ se define:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{donde} \quad n! = \prod_{p=1}^{n} p$$

Es decir, $n!$ es el producto de todos los números naturales menores o iguales que n. Se define también $0! = 1$. La igualdad

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{1.6}$$

es de comprobación inmediata. A partir de ella se prueba fácilmente, por inducción sobre n, que $\binom{n}{k}$ es un número entero positivo.

El siguiente útil resultado se prueba por inducción.

1.28 Proposición (Fórmula del binomio de Newton)**.** *Cualesquiera sean los números reales* a, b *y el número natural* n *se verifica que:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Demostración. Para $n = 1$ la igualdad del enunciado es trivialmente verdadera. Supongamos que dicha igualdad se verifica para $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k
\end{aligned}$$

Lo que prueba la validez de la igualdad para $n+1$. En virtud del principio de inducción, concluimos que la igualdad del enunciado es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. □

La siguientes igualdades se usan con frecuencia.

1.29 Proposición (Suma de una progresión geométrica)**.** *Sea* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Se verifica que:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \tag{1.7}$$

Demostración. Tenemos que:

$$(x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1}-1$$

es decir

$$(x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1}-1 \tag{1.8}$$

De donde se deduce la igualdad del enunciado. □

1.30 Proposición. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$. *Entonces se verifica la igualdad:*

$$b^q - a^q = (b-a)\sum_{k=0}^{q-1} b^k a^{q-1-k} \tag{1.9}$$

Demostración. La igualdad es trivial si $a = b$. Supondremos, pues, que $a \neq b$. Sustituyendo n por $q-1$ y x por b/a en la igualdad (1.8) obtenemos:

$$\left(\frac{b}{a}-1\right)\sum_{k=0}^{q-1} \frac{b^k}{a^k} = \frac{b^q}{a^q} - 1$$

Y, multiplicando por a^q resulta:

$$(b-a)\sum_{k=0}^{q-1} b^k a^{q-1-k} = b^q - a^q$$

□

El siguiente resultado será usado enseguida.

1.31 Proposición. *Sea* A *un conjunto no vacío y mayorado de números reales positivos y* $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. *Sean* $\alpha = \text{ínf}(A)$ *y* $\beta = \sup(A)$. *Definamos el conjunto*

$$B = \left\{ a^k : a \in A \right\}$$

Se verifica que $\text{ínf}(B) = \alpha^k$ *y* $\sup(B) = \beta^k$.

Demostración. Para todo $a \in A$ se verifica que $0 < a \leqslant \beta$ lo que implica que $a^k \leqslant \beta^k$. Por tanto, β^k es un mayorante de B. Usando la igualdad (1.9) obtenemos que para todo $a \in A$ es:

$$\beta^k - a^k = (\beta - a)\sum_{j=0}^{k-1} \beta^{k-1-j} a^j \leqslant (\beta - a)\sum_{j=0}^{k-1} \beta^{k-1-j}\beta^j = (\beta - a)k\beta^{k-1}$$

Dado $\varepsilon > 0$, hay algún $a_\varepsilon \in A$ tal que $\beta - \dfrac{\varepsilon}{k\beta^{k-1}} < a_\varepsilon$. De la desigualdad anterior deducimos que $\beta^k - a_\varepsilon^k < \varepsilon$, es decir, $\beta^k - \varepsilon < a_\varepsilon^k$. Lo que prueba (ver las observaciones 1.12) que $\beta^k = \sup(B)$.

Análogamente se prueba que $\operatorname{ínf}(B) = \alpha^k$. □

Seguidamente probaremos que los números reales positivos tienen raíces de cualquier orden. En la demostración se utiliza de forma esencial el principio del supremo.

1.32 Proposición. *Dados un número real $a > 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, existe un único número real* **positivo** *$b > 0$ que verifica que $b^k = a$. Dicho número real b se llama la* raíz k-ésima o de orden k *de a y se representa por $\sqrt[k]{a}$ o por $a^{1/k}$.*

Además, si $x > 0$ e $y > 0$, se verifica que:

i) $x < y$ si, y sólo si, $\sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$,

ii) $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\sqrt[k]{y}$.

Demostración. Consideremos que $a > 1$. Definamos $E = \{t \in \mathbb{R}^+ : t^k < a\}$. Tenemos que $1 \in E$ por lo que $E \neq \varnothing$. Como $1 < a$ tenemos que $a < a^k$, por lo que para todo $t \in E$ es $t^k < a^k$ y, por tanto, $t < a$. Luego a es un mayorante de E. Por el principio del supremo, E tiene un mínimo mayorante $b = \sup(E) \in \mathbb{R}$. Probaremos que $b^k = a$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $b < b(1 + 1/n)$ por lo que $b(1 + 1/n) \notin E$, es decir, $a \leqslant b^k(1 + 1/n)^k$. Por tanto, el número a/b^k es una cota inferior del conjunto $B = \left\{(1 + 1/n)^k : n \in \mathbb{N}\right\}$ y, por tanto, $a/b^k \leqslant \operatorname{ínf}(B)$. Pero, como consecuencia del ejercicio 31 y de la proposición anterior, tenemos que $\operatorname{ínf}(B) = 1$. Luego $a/b^k \leqslant 1$, esto es, $a \leqslant b^k$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $b/(1 + 1/n) < b$, por lo que hay algún $t \in E$ tal que $b/(1+1/n) < t$, lo que implica que $b^k/(1+1/n)^k < t^k < a$. Deducimos que $b^k/a < (1+1/n)^k$ y, al igual que antes, concluimos que $b^k/a \leqslant 1$, esto es, $b^k \leqslant a$.

El caso en que $0 < a < 1$ se reduce al anterior por la consideración de $1/a$. El caso en que $a = 1$ es trivial.

Hemos probado que $b^k = a$. La unicidad de dicho número b y las afirmaciónes i) y ii) del enunciado se deducen directamente de las propiedades de las potencias naturales. □

Naturalmente, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sqrt[k]{0} = 0$, caso que no hemos considerado por su trivialidad.

Recordemos también la notación usual $\sqrt{x}$ para representar la raíz cuadrada o de orden 2 de $x \geqslant 0$, es decir $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Observa que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Si $x > 0$ y k es un entero negativo, se define $x^{1/k} = \dfrac{1}{\sqrt[-k]{x}}$.

Si $x < 0$ y k es *impar* se define $\sqrt[k]{x} = -\sqrt[k]{|x|}$.

Hasta ahora nada hemos dicho de la existencia de números reales que no sean racionales. Dichos números se llaman *irracionales*. El siguiente es un primer resultado al respecto.

1.33 Proposición. *Dados $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ y $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\sqrt[k]{n}$ o bien es un número natural o bien es irracional.*

Este resultado nos dice que, por ejemplo, $\sqrt{2}$ o $\sqrt[3]{5}$ son irracionales.

El siguiente resultado es importante para entender cómo están "repartidos" en la recta real los números racionales e irracionales.

1.34 Definición. Un conjunto A de números reales se dice que es *denso* en un intervalo I, si entre dos números reales cualesquiera de I siempre hay algún número real que está en A. En particular, A es denso en $\mathbb{R}$ si en todo intervalo abierto no vacío hay puntos de A.

1.35 Proposición. *Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$.*

1.1.4. La desigualdad de las medias

La demostración del siguiente resultado es otro ejemplo del principio de inducción.

1.36 Lema. *Si el producto de n números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual que n. Y la suma es igual a n si, y sólo si, todos ellos son iguales a 1.*

Demostración. Para cada número natural n, sea $P(n)$ la proposición "*si el producto de n números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual que n*". Demostraremos por inducción que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Trivialmente $P(1)$ es verdadera. Supongamos que $P(n)$ es verdadera. Consideremos $n+1$ números positivos no todos iguales a 1 cuyo producto sea igual a 1. En tal caso alguno de dichos números, llamémosle x_1, tiene que ser menor que 1 y otro, al que llamaremos x_2, tiene que ser mayor que 1. Notando $x_3, \cdots, x_{n+1}$ los restantes números se tiene que:

$$(x_1 x_2) x_3 \cdots x_{n+1} = 1$$

Por tanto $x_1 x_2,\ x_3, \cdots, x_{n+1}$ son n números positivos con producto igual a 1 por lo que:

$$x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \geqslant n \tag{1.10}$$

Como $0 < (1 - x_1)(x_2 - 1)$, tenemos que:

$$x_1 + x_2 > 1 + x_1 x_2 \tag{1.11}$$

De (1.101) y (1.11) se sigue que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} > n + 1$$

Observa que la desigualdad obtenida es estricta. Hemos probado así que $P(n+1)$ es verdadera. Concluimos, por el principio de inducción, que la afirmación del enunciado es verdadera para todo número natural n. □

En el siguiente teorema se establece una de las desigualdades más útiles del Cálculo.

1.37 Proposición (**Desigualdad de las medias**). *Cualesquiera sean los números positivos* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *se verifica que:*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{1.12}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demostración. Basta poner $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ y $x_i = \dfrac{a_i}{G}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, Claramente se verifica que $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ por lo que, en virtud del lema anterior, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n$ es decir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant nG$ que es la desigualdad que queremos probar. Se da la igualdad solamente cuando $x_i = 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, es decir, cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. □

Los números $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ y $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ se llaman, respectivamente, *medias geométrica y aritmética* de $a_1, a_2, \cdots, a_n$. La desigualdad de las medias tiene interesantes aplicaciones a problemas de extremos.

Ejercicios propuestos

34. Justifica las siguientes afirmaciones.

a) La suma de un número racional y un número irracional es un número irracional.

b) El producto de un número racional no cero por un número irracional es un número irracional.

c) La suma y el producto de dos números irracionales puede ser racional o irracional.

d) Los números $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ y $\dfrac{\sqrt{5} + 2}{3\sqrt{5} + 4}$ son irracionales.

35. Sean $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ con $c^2+d^2>0$ y $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. ¿Qué condiciones deben cumplir a,b,c,d para que $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ sea racional?

36. Prueba que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^4}{2}+\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n}{30}$ es un número natural.

37. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifican las desigualdades siguientes.

a) $\sqrt{n}\leqslant 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 2\sqrt{n}$

b) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\geqslant 1+\dfrac{n}{2}$

c) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1+3n}}$

38. Sea $x\in\mathbb{R}$. Prueba que $\sup\{r\in\mathbb{Q}:r<x\}=x=\inf\{s\in\mathbb{Q}:x<s\}$. ¿Permanece válido este resultado si se sustituye $\mathbb{Q}$ por un conjunto A denso en $\mathbb{R}$?

39. Prueba que el cuadrado es el rectángulo de máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

40. Calcula el rectángulo de mayor área inscrito en el círculo de ecuación $x^2+y^2=r^2$.

41. Prueba que:

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

1.2. Conjuntos infinitos y conjuntos numerables

Podemos preguntarnos cuál de los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ es “más grande”. La pregunta puede sorprender porque tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ son conjuntos “infinitos” y, ya se sabe, el infinito es ..., eso, ¡el infinito! Pues no, hay muchos “infinitos” y unos son “más infinitos” que otros... . Fué Georg Cantor (1845-1918) quien inició la teoría de conjuntos abstracta y definió el concepto de “número transfinito”, su trabajo supuso una revolución en las matemáticas y obligó a realizar un examen crítico de sus fundamentos. Nuestro propósito ahora es mucho más modesto: sólo queremos compara $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ desde el punto de vista de su “tamaño”, es decir, de su “número de elementos”. Veremos que, aunque $\mathbb{Q}$ es un conjunto infinito, sus elementos pueden ser “contados”, mientras que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ también infinito, es tan grande que es imposible “contar” sus elementos. En estas cuestiones todas las precauciones son pocas y hay que empezar a precisar conceptos.

Dado $n\in\mathbb{N}$, el conjunto $S(n)=\{k\in\mathbb{N}:k\leqslant n\}$ se llama *segmento de orden n*.

Un conjunto A se dice que es *equipotente* a otro B, y escribimos $A \sim B$, si existe una aplicación biyectiva de A sobre B. Esta relación es una relación de equivalencia entre conjuntos pues tiene las propiedades reflexiva ($A \sim A$), simétrica (si $A \sim B$ entonces también $B \sim A$) y transitiva (si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$).

Intuitivamente, es claro que dos conjuntos equipotentes tienen "igual número de elementos" ...¡aunque este "número" pueda ser infinito!

Un conjunto A se llama *finito* si es vacío o si existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que A es equipotente a $S(n)$.

El siguiente resultado puede probarse por inducción.

1.38 Proposición. *Sean n y m números naturales y supongamos que $S(n)$ y $S(m)$ son equipotentes. Entonces $n = m$.*

Se deduce de la proposición anterior que si A es un conjunto finito y no vacío hay un *único* $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim S(n)$, dicho número n se llama *número de elementos* de A y escribimos $\sharp(A) = n$. Por convenio, se acepta que $\sharp(\emptyset) = 0$. Es claro que si A es finito con n elementos y $A \sim B$ entonces B es finito con n elementos.

1.39 Proposición (Propiedades de los conjuntos finitos)**.**

a) Todo subconjunto de un conjunto finito es finito. Dicho de otra forma, si B es un conjunto finito y $f : A \to B$ es una aplicación inyectiva entonces A es finito.

b) La imagen de un conjunto finito por una aplicación es un conjunto finito. Dicho de otra forma, si A es finito y $f : A \to B$ es una aplicación sobreyectiva, entonces B es finito.

El resultado siguiente, que se usa con frecuencia, se prueba fácilmente por inducción sobre el número de elementos del conjunto.

1.40 Proposición. *Todo conjunto finito no vacío de números reales tiene máximo y mínimo.*

Un conjunto que no es finito se llama *infinito*.

¡Esto no es un juego de palabras! Nótese que acabamos de dar "contenido matemático" a dos términos hasta ahora usados de forma imprecisa. Ahora podemos *demostrar* que un conjunto A es infinito probando que cualquiera sea el número natural n *no* hay ninguna biyección de A sobre $S(n)$.

Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo deducimos, por la proposición 1.40, que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito. Por tanto, todo conjunto que contenga a $\mathbb{N}$ es infinito. También es claro que hay subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son infinitos. Probaremos ahora que $\mathbb{N}$ es el "más pequeño" conjunto infinito, pues cualquier subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

1.41 Proposición. *Sea* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *una aplicación tal que* $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se verifica entonces que* φ *es estrictamente creciente, es decir, si* n, m *son números naturales tales que* $n < m$ *entonces* $\varphi(n) < \varphi(m)$. *En particular,* φ *es inyectiva.*

Si además se supone que φ *toma valores en* $\mathbb{N}$, *esto es,* $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, *entonces:*

i) $\varphi(n) \geqslant n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

ii) Si $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, φ *es la identidad, es decir,* $\varphi(n) = n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para probar la primera afirmación del enunciado fijemos $n \in \mathbb{N}$ y probemos por inducción que $\varphi(n) < \varphi(n+k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 1$ nada hay que probar. Supuesto $\varphi(n) < \varphi(n+k)$ entonces, puesto que $\varphi(n+k) < \varphi(n+k+1)$, se sigue que $\varphi(n) < \varphi(n+k+1)$. Ahora, si $m \in \mathbb{N}$, $n < m$ tenemos que $k = m - n \in \mathbb{N}$ y $\varphi(n) < \varphi(n+k) = \varphi(m)$.

El punto i) se prueba fácilmente por inducción, pues, como $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, claramente $\varphi(1) \geqslant 1$. Supuesto que $\varphi(n) \geqslant n$ se sigue de $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ que $\varphi(n+1) > n$ y, por ser $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, concluimos que $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. Supongamos, finalmente, que $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ y consideremos el conjunto:

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \neq n\} = (\text{ por i)}) = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) > n\}$$

Si $B \neq \varnothing$ entonces, por el principio de buena ordenación, B tiene mínimo. Sea $p = \min(B)$. Tiene que haber algún $q \in \mathbb{N}$ tal que $p = \varphi(q)$. En virtud de i) debe ser $p \geqslant q$, y como $\varphi(p) > p$ tiene que ser $p > q$. Pero entonces $q \notin B$, por lo que $\varphi(q) = q$ lo cual es contradictorio. En consecuencia $B = \varnothing$, es decir $\varphi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

1.42 Proposición. *Sea* A *un conjunto infinito de números naturales. Entonces existe una única biyección creciente de* $\mathbb{N}$ *sobre* A.

Demostración. Por ser A infinito no puede estar contenido en ningún segmento $S(p)$, esto es, el conjunto $\{x \in A : p < x\}$ no es vacío cualquiera sea $p \in \mathbb{N}$. Haciendo uso del principio de buena ordenación podemos definir $f : \mathbb{N} \to A$ por:

$$f(1) = \min(A)$$
$$f(n+1) = \min\{x \in A : f(n) < x\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Con ello es claro que $f(n) < f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Del lema anterior se sigue que f es creciente e inyectiva. Probaremos que $f(\mathbb{N}) = A$. Puesto que, por su definición, es $f(\mathbb{N}) \subseteq A$, bastará probar que dicha inclusión no puede ser estricta. Pongamos $C = A \setminus f(\mathbb{N})$. Si $C \neq \varnothing$, sea $p = \min(C)$; esto es, p es el *primer* elemento de A que no está en $f(\mathbb{N})$. Es claro que $p > \min(A)$. Sea $q = \max\{x \in A : x < p\}$. Tenemos que $p > q$ y $q \in A$ pero $q \notin C$ por lo que $q \in f(\mathbb{N})$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $q = f(k)$. Entonces, como $f(k) < p$, se tiene, por ser $f(k+1) = \min\{x \in A : f(k) < x\}$, que $f(k+1) \leqslant p$. Como también es $f(k+1) > f(k) = q$ y $f(k+1) \in A$, debe ser $f(k+1) \geqslant p$. Resulta así que $f(k+1) = p$ lo cual es contradictorio. En consecuencia C tiene que ser vacío, es decir, $f(\mathbb{N}) = A$.

Para probar la unicidad de f supongamos que g es una biyección creciente de $\mathbb{N}$ sobre A. Notando g^{-1} la aplicación inversa de g, es inmediato comprobar que la aplicación $\varphi = f \circ g^{-1}$ es una biyección creciente de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$ y, por el lema anterior, debe ser la identidad, $f(g^{-1}(n)) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $f(k) = g(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

1.43 Definición. Un conjunto A se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$.

1.44 Proposición. *Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a* $\mathbb{N}$.

Demostración. Claramente todo conjunto finito es numerable. Sea A un conjunto infinito numerable y sea $\varphi : A \to \mathbb{N}$ una aplicación inyectiva. Tenemos entonces que $A \sim \varphi(A)$ por lo que, al ser A infinito, se sigue que $\varphi(A)$ también es infinito y por el teorema anterior $\varphi(A) \sim \mathbb{N}$ con lo que también $A \sim \mathbb{N}$. □

Evidentemente podemos contar los elementos de un conjunto finito y también sabemos contar los números naturales (aunque nunca acabaríamos de contarlos). En consecuencia la proposición anterior nos dice que los conjuntos numerables son aquellos cuyos elementos pueden contarse.

1.45 Proposición. *Un conjunto no vacío A es numerable si, y sólo si, hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ sobre A.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{N} \to A$ una aplicación sobreyectiva. Para cada elemento $a \in A$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : f(n) = a\}$ no es vacío por lo que podemos definir, haciendo uso del principio de buena ordenación, una aplicación $g : A \to \mathbb{N}$ por:

$$g(a) = \min\{n \in \mathbb{N} : f(n) = a\} \quad \text{para todo } a \in A$$

Con ello se tiene que $f(g(a)) = a$ para todo $a \in A$ lo que implica que g es inyectiva y por tanto que A es numerable.

La afirmación recíproca es consecuencia de la proposición anterior. □

1.46 Proposición. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *y* $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ *son equipotente a* $\mathbb{N}$.

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la aplicación dada por $\varphi(n) = (p, q)$ donde $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ verifica que $n = 2^{p-1}(2q - 1)$. Es decir, $p - 1$ es la mayor potencia de 2 que divida a n ($p = 1$ si n es impar). Es claro que la aplicación así definida es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Es fácil probar que la aplicación $\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dada por:

$$\sigma((p, q)) = \begin{cases} (p/2, q), & \text{si } p \text{ es par;} \\ ((-p + 1)/2, q), & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

es una biyección. Por tanto, la aplicación $\sigma \circ \varphi : N \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ es una biyección. □

Dados dos números racionales $r < s$, el número $\dfrac{r+s}{2}$ también es racional y $r < \dfrac{r+s}{2} < s$. Se deduce de aquí que el conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : r < x < s\}$ es no vacío y no tiene máximo (ni mínimo) por lo que deducimos que dicho conjunto es infinito. Resulta así que entre cada dos números racionales hay infinitos racionales. A pesar de ello no hay más números racionales que naturales. La intuición aquí es engañosa.

1.47 Proposición. *El conjunto de los números racionales es numerable.*

Demostración. Es consecuencia de las dos proposiciones anteriores y de que la aplicación $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(p,q) = p/q$ es sobreyectiva. □

Por ser $\mathbb{Q}$ numerable infinito sabemos que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, es decir, existen biyecciones de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q}$. Hemos respondido en parte a nuestra pregunta inicial con un resultado muy sorprendente: ¡hay tantos números racionales como números naturales! Nos falta todavía dar alguna información del tamaño de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

1.48 Proposición (Principio de los intervalos encajados)**.**

Para cada número natural n sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$. Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \text{ínf}\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

En particular, el conjunto $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *no es vacío.*

Demostración. Las hipótesis $\varnothing \neq I_{n+1} \subseteq I_n$, implican que $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Razonando como en la primera parte de 1.41, deducimos que las aplicaciones $n \mapsto a_n$ y $n \mapsto -b_n$, son crecientes, esto es, $a_n \leqslant a_m$, $b_m \leqslant b_n$ siempre que $n < m$. Ahora, dados $p, q \in \mathbb{N}$ y poniendo $k = \text{máx}\{p,q\}$, tenemos que $a_p \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant b_q$. Hemos obtenido así que cualesquiera sean los números naturales p, q es $a_p \leqslant b_q$. Luego todo elemento de $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ es mayorante de $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y por tanto $\alpha = \sup A \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo cual, a su vez, nos dice que α es un minorante de B y por tanto concluimos que $\alpha \leqslant \beta = \text{ínf}\, B$. Hemos probado i). La afirmación ii) es consecuencia de que $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ equivale a que $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que equivale a que $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, es decir $x \in [\alpha, \beta]$. □

1.49 Proposición. *Dados dos números reales $a < b$ se verifica que el intervalo $[a,b]$ no es numerable.*

Demostración. Si $[a,b]$ fuera numerable tendría que ser, en virtud de la proposición 1.44, equipotente a $\mathbb{N}$. Veamos que esto no puede ocurrir. Supongamos que $\varphi : \mathbb{N} \to [a,b]$ es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $[a,b]$. En particular φ es sobreyectiva por lo que deberá ser $[a,b] = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Obtendremos una contradicción probando que tiene que existir algún elemento $z \in [a,b]$ tal que $z \notin \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Para ello se procede de la siguiente forma. Dividimos el intervalo $[a,b]$ en tres intervalos cerrados de igual longitud:

$$\left[a, a+\frac{b-a}{3}\right], \quad \left[a+\frac{b-a}{3}, b-\frac{b-a}{3}\right], \quad \left[b-\frac{b-a}{3}, b\right]$$

y llamamos I_1 al primero de ellos (es decir el que está más a la izquierda) que no contiene a $\varphi(1)$. Dividamos ahora el intervalo I_1 en tres intervalos cerrados de igual longitud y llamemos I_2 al primero de ellos que no contiene a $\varphi(2)$. Este proceso puede “continuarse indefinidamente” pues, supuesto que $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, y que tenemos intervalos cerrados de longitud *positiva* I_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, tales que $I_{k+1} \subseteq I_k$ para $1 \leqslant k \leqslant n-1$, y $\varphi(k) \notin I_k$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, dividimos el intervalo I_n en tres intervalos cerrados de igual longitud y llamamos I_{n+1} al primero de ellos que no contiene a $\varphi(n+1)$. De esta forma para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado I_n no vacío verificándose que $I_{n+1} \subseteq I_n$ y $\varphi(n) \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El principio de los intervalos encajados nos dice que hay algún número real z que está en *todos* los I_n. Por tanto, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, por ser $z \in I_n$ y $\varphi(n) \notin I_n$, se tiene necesariamente que $z \neq \varphi(n)$, esto es, $z \notin \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$ pero evidentemente $z \in [a,b]$. □

1.50 Proposición. *$\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ son conjuntos no numerables.*

Demostración. Evidentemente todo subconjunto de un conjunto numerable también es numerable. Como acabamos de ver que hay subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son numerables deducimos que $\mathbb{R}$ no es numerable. Puesto que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ y sabemos que $\mathbb{Q}$ es numerable y $\mathbb{R}$ no lo es, deducimos que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ no es numerable. □

El teorema anterior demuestra no solamente que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ no es vacío sino que “hay muchos más números irracionales que racionales” pues mientras que podemos enumerar los racionales no podemos hacer lo mismo con los irracionales ya que no hay biyecciones de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Nótese que ésta es una demostración de *existencia* de números irracionales bastante sorprendente pues, de una parte, prueba, ¡sin necesidad de dar ningún ejemplo concreto!, que hay números irracionales pero, de hecho, prueba mucho más pues nos dice que el conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tiene muchos más elementos que $\mathbb{Q}$.

Deducimos también la siguiente estrategia *“para probar que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no es vacío es suficiente probar que su complemento $\mathbb{R}\backslash A$ es numerable”* (¡con lo cual, de hecho, estamos probando que A es infinito no numerable!).

Esta técnica de demostración de existencia es debida a Cantor, el creador de la teoría de conjuntos. También se debe a Cantor el concepto de “número transfinito” o “cardinal” o “potencia” de un conjunto. Todos los conjuntos equipotentes a $\mathbb{N}$ tienen el mismo cardinal que se representa por $\aleph_0$ (la letra $\aleph$ es la primera letra del alfabeto hebreo y se lee “aleph”) y todos los conjunto equipotentes a $\mathbb{R}$ tienen el mismo cardinal que se representa por la letra *c* y se llama “la potencia del continuo”. Aunque claramente representan “números infinitos” creo que aceptarás que $\aleph_0 < c$, desigualdad que no se pretende explicar y que sólo se pone para motivar la curiosidad por estos temas; ¡ya decíamos al principio que unos infinitos son más grandes que otros!

El siguiente resultado nos dice que si hacemos la unión de una “cantidad numerable” de conjuntos numerables obtenemos un conjunto que sigue siendo numerable. El enunciado del teorema precisa estas ideas.

1.51 Proposición. *Sea B un conjunto numerable no vacío. Supongamos que para cada $x \in B$ tenemos un conjunto numerable no vacío A_x. Se verifica entonces que el conjunto $\mathcal{A} = \bigcup_{x \in B} A_x$ es numerable.*

Demostración. Es suficiente probar que hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathcal{A}$. Por ser B numerable hay una aplicación sobreyectiva $\phi : \mathbb{N} \to B$. Para cada $x \in B$, por ser A_x numerable, hay una aplicación sobreyectiva $F_x : \mathbb{N} \to A_x$. Es muy fácil comprobar ahora que la aplicación $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ definida por $G(m,n) = F_{\phi(m)}(n)$ para todo $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es sobreyectiva. □

Ejercicios propuestos

42. i) Sean $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ y $A_1, A_2, \dots, A_p$ conjuntos numerables. Prueba que el conjunto producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p$ es numerable.

Sugerencia: procede por inducción sobre p.

ii) Prueba que el conjunto de todas las funciones polinómicas con coeficientes racionales es numerable.

Sugerencia: una función polinómica con coeficientes racionales y de grado $p \geqslant 0$ puede identificarse con un elemento de $\mathbb{Q}^{p+1}$.

Un número real x se llama *algebraico* si satisface una ecuación de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1.13}$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números enteros con $a_n \neq 0$. El número natural n se llama grado de la ecuación. Si el número x satisface (1.13) y no satisface ninguna otra ecuación polinómica del mismo tipo, es decir con coeficientes enteros, pero con grado menor que n, se dice que x es un número algebraico de grado n. Un número real que no es algebraico se llama *trascendente*.

43. i) Justifica que todo número racional es algebraico y que hay números algebraicos irracionales.

ii) Prueba que existen números trascendentes.

Sugerencia: ¿cuántos números algebraicos hay?

Capítulo 2

Sucesiones, logaritmos y exponenciales

El Análisis Matemático no tiene símbolos para las ideas confusas.
E. Picard

En el estudio de los conjuntos numerables, realizado en el Capítulo 1, hemos tenido ocasión de considerar uno de los aspectos del infinito: lo infinitamente grande. En este y en sucesivos capítulos tendremos que considerar otro aspecto del infinito que es característico del Análisis Matemático: lo infinitamente pequeño. En efecto, la peculiaridad del Análisis Matemático radica en los distintos "procesos de convergencia" o de "paso al límite" que en él se consideran; ahora bien, el concepto de "límite", en su versión más frecuente de "límite de una magnitud variable", sugiere la idea de una cantidad a la cual se acercan los valores de dicha magnitud de manera que la diferencia entre éstos y aquella llega a ser "infinitamente pequeña". La dificultad de dar un significado matemático preciso y coherente a lo "infinitamente pequeño" condujo a inventar los misteriosos *infinitésimos*, lo que sólo sirvió para hacer aún más incomprensibles los procesos de paso al límite usuales en el cálculo diferencial e integral. En este curso nos ocuparemos de tales procesos empezando por el más elemental que trata de la convergencia de sucesiones de números reales.

Pueden distinguirse cuatro partes en este capítulo. En la primera se estudian los conceptos y resultados básicos relacionados con la convergencia de sucesiones de números reales y en especial de sucesiones monótonas. En la parte segunda se definen las funciones logaritmo y exponencial naturales, probándose fácilmente las propiedades básicas de las mismas. En la tercera se prueban dos importantes resultados: el Teorema de Complitud de $\mathbb{R}$ y el Teorema de Bolzano-Weierstrass. En la última parte se estudian las sucesiones divergentes y se obtienen resultados, de gran utilidad práctica, relacionados con las "indeterminaciones" que aparecen con mayor frecuencia en el cálculo de límites, destacando el Criterio de Equivalencia Logarítmica y el Teorema de Stolz.

2.1. Sucesiones convergentes

Las sucesiones aparecen de manera natural en muchos cálculos que responden a un *esquema iterativo*. Por ejemplo, al dividir 2 entre 3 obtenemos:

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{10}+\frac{2}{3}\frac{1}{10}$$

Igualdad que podemos usar ahora para obtener:

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{10}+\left(\frac{6}{10}+\frac{2}{3}\frac{1}{10}\right)\frac{1}{10}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^2}$$

Y de nuevo

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\left(\frac{6}{10}+\frac{2}{3}\frac{1}{10}\right)\frac{1}{10^2}==\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^3}$$

y así podemos continuar tantas veces como queramos, obteniendo para cada $n\in\mathbb{N}$ la igualdad:

$$\frac{2}{3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{10^k}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^n}.$$

Escribiendo $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{10^k}$ tenemos que $0<\dfrac{2}{3}-x_n=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10^n}$. Observa que, aunque los números x_n son *todos ellos distintos* de $2/3$, dada una cota de error arbitrariamente pequeña, $\varepsilon>0$, y tomando $n_0\in\mathbb{N}$ de manera que $\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10^{n_0}}<\varepsilon$, deducimos que *para todo* número natural $n\geqslant n_0$ se verifica que $|x_n-2/3|<\varepsilon$, lo que se expresa escribiendo $2/3=\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$.

Este ejemplo está relacionado con la expresión decimal de $2/3$ que, como todos sabemos, es un decimal periódico con período igual a 6, lo que suele escribirse $2/3=0,\widehat{6}$ igualdad en la que, según se dice a veces, el símbolo $0,\widehat{6}$ debe interpretarse como que el 6 se repite infinitas veces (¡otra vez el infinito!). ¿Qué quiere decir esto? Lo que está claro es que, por mucho tiempo y paciencia que tengamos, nunca podremos escribir *infinitos* 6 uno detrás de otro... bueno, podríamos escribir algo como

$$\frac{2}{3}=0,\widehat{6}=0,6666666...(\text{ infinitos } 6)$$

lo que tampoco sirve de mucho pues seguimos sin saber cómo se interpreta esta igualdad. Pues bien, para dar un significado matemático a lo que se quiere expresar con esa igualdad hay que recurrir al concepto de límite de una sucesión tal como hemos hecho antes.

2.1 Definición. Sea A un conjunto no vacío. Una sucesión de elementos de A es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular, una sucesión de números reales es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Por ejemplo, en el *principio de los intervalos encajados* se consideró, sin nombrarla, una sucesión de intervalos (en este caso el conjunto A de la definición anterior sería el conjunto de todos los intervalos de $\mathbb{R}$). *En todo lo que sigue solamente consideraremos sucesiones de números reales por lo que, a veces, nos referiremos a ellas simplemente como "sucesiones".*

Dada una sucesión $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele notarse el número real $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra "x" nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra). La sucesión misma se representa por $\varphi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, el símbolo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe interpretarse como la **aplicación** que a cada $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número real x_n. Cuando no hay posibilidad de confusión escribimos simplemente $\{x_n\}$ en vez de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El número x_n se llama *término n-ésimo* de la sucesión; para $n = 1,\ 2,\ 3$ se habla respectivamente de primero, segundo, tercer término de la sucesión.

Dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son iguales cuando para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n = y_n$.

No hay que confundir la sucesión $\{x_n\}$, que es una aplicación, con su *conjunto imagen*, que es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los números x_n, el cual se representa por $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^{n+1}\}$ son sucesiones distintas con el mismo conjunto imagen: $\{(-1)^n : n\in\mathbb{N}\} = \left\{(-1)^{n+1} : n\in\mathbb{N}\right\} = \{-1, 1\}$.

Si α es un número real, la sucesión constante cuyos términos son todos iguales a α se representa por $\{\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$.

En todo lo que sigue las letras m, n, p, q, con o sin subíndices, representarán números naturales.

2.2 Definición. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ **converge a un número real** x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$.

Se dice también que el número x es **límite** de la sucesión $\{x_n\}$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim\{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\} \to x$.

Teniendo en cuenta que

$$|x_n - x| < \varepsilon \Longleftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Longleftrightarrow x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

resulta que $\{x_n\}$ converge a x si dado cualquier número $\varepsilon > 0$ se verifica que *todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante* están en el intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

También podemos reformular la definición dada considerando para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto de números naturales $A_\varepsilon = \{n\in\mathbb{N} : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\}$. Tenemos entonces que:

$$\boxed{\lim\{x_n\} = x \iff \big[\forall\varepsilon > 0 \ \text{ el conjunto } A_\varepsilon = \{n\in\mathbb{N} : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\} \ \text{ es finito}\,\big]} \tag{2.1}$$

Esta forma de expresar la convergencia puede ser útil para probar que una sucesión dada, $\{x_n\}$ no converge a x. Para ello basta encontrar un número $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto A_ε sea infinito.

La definición 2.2 es típica del Análisis pues en ella se está definiendo *una igualdad*, $\lim\{x_n\} = x$, en términos de *desigualdades*: $|x_n - x| < \varepsilon$ siempre que $n \geqslant m_\varepsilon$.

El número natural m_ε, cuya existencia se afirma en la definición anterior, cabe esperar que dependa del número $\varepsilon > 0$, lo que explica la notación empleada. Lo usual es que m_ε tenga que ser tanto más grande cuanto más pequeño sea el número $\varepsilon > 0$. Conviene observar que si p es un número natural tal que $p > m_\varepsilon$ entonces para p, al igual que para m_ε, se verifica que si n es cualquier número natural mayor o igual que p se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Es decir, si $\{x_n\}$ converge a x, entonces para cada $\varepsilon > 0$ dado hay, de hecho, *infinitos* números naturales m_ε para los que se satisface lo dicho en la defición anterior.

Veamos con unos sencillos, pero importantes ejemplos, cómo se usa la definición 2.2 para probar que una sucesión converge.

2.3 Ejemplo. *La sucesión $\{1/n\}$ es convergente a cero.*

Para probarlo, dado $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifique que $|1/n - 0| = 1/n < \varepsilon$. Como $1/n \leqslant 1/m$ siempre que $n \geqslant m$, bastará tomar como número m cualquier natural que verifique que $1/m < \varepsilon$, es decir, $m > 1/\varepsilon$. *Que, efectivamente, hay números naturales, m, que verifican la condición $m > 1/\varepsilon$ cualquiera sea el número $\varepsilon > 0$ dado, es justamente lo que dice la propiedad arquimediana del orden de $\mathbb{R}$.* Pues bien, cualquier $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 1/\varepsilon$ nos sirve como apropiado m_ε, pero parece razonable tomar el más pequeño de todos ellos que será la parte entera de $1/\varepsilon$ más una unidad, es decir, $m_\varepsilon = E(1/\varepsilon) + 1$. Hemos demostrado así que $\lim\{1/n\} = 0$. ♦

Observación. Observa que si $\varepsilon > 0$ es un número racional, entonces será de la forma $\varepsilon = p/q$ con $p, q\in\mathbb{N}$. Por lo que bastará tomar $m_\varepsilon = q + 1$ para asegurarnos de que siempre que $n \geqslant m_\varepsilon$ se tenga que $1/n < \varepsilon$. La dificultad está cuando el número $\varepsilon > 0$ no es racional porque entonces hay que relacionar dicho número con un natural, cosa no del todo evidente.

2.4 Ejemplo. *Dado un número real $x \in]-1,1[$, se verifica que la sucesión de las potencias de x, $\{x^n\}$, converge a cero.*

En efecto, como $|x| < 1$ podemos escribir $|x|$ en la forma $|x| = 1/(1+\rho)$ para conveniente $\rho > 0$ (de hecho $\rho = \dfrac{1-|x|}{|x|}$ pero eso no interesa ahora). Dado $\varepsilon > 0$, puesto que

$$|x^n - 0| = |x|^n = \frac{1}{(1+\rho)^n} \leqslant \frac{1}{1+n\rho} < \frac{1}{n\rho}$$

bastará tomar un m_ε tal que $\dfrac{1}{\rho m_\varepsilon} < \varepsilon$, por ejemplo, $m_\varepsilon = E\left(\dfrac{1}{\rho\varepsilon}\right) + 1$, para garantizar que $|x^n - 0| < \varepsilon$ siempre que $n \geqslant m_\varepsilon$. ♦

2.5 Ejemplo. *La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente.*

En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$ y definamos $\varepsilon_x = \max\{|1-x|/2, |1+x|/2\}$. Claramente $\varepsilon_x > 0$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ tenemos que $|(-1)^{2m} - x| = |1-x|$, $|(-1)^{2m+1} - x| = |1+x|$. Como alguno de los números $|1-x|$, $|1+x|$ es mayor que ε_x, resulta que el conjunto $A_{\varepsilon_x} = \{n \in \mathbb{N} : |(-1)^n - x| \geqslant \varepsilon_x\}$ es infinito, por lo que $\{(-1)^n\}$ no es convergente a x. ♦

Ejercicios propuestos

44. **(T)** Prueba que $\lim\{x_n\} = 0 \iff \lim\{|x_n|\} = 0$.

45. **(T)** Prueba que $\lim\{x_n\} = x \iff \lim\{x_n - x\} = 0 \iff \lim\{|x_n - x|\} = 0$.

46. **(T)** Prueba que $\lim\{x_n\} = x \Rightarrow \lim\{|x_n|\} = |x|$. ¿Es cierta la implicación contraria?

47. **(T)** Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\lim\{x_n\} = x$.

b) Para todo intervalo *abierto* I que contiene a x se verifica que todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante están en I.

¿Permanece cierto este resultado si en b) se consideran intervalos cualesquiera?

48. Dado $\varepsilon > 0$, calcula $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifique $|x_n - x| < \varepsilon$ donde x_n, x vienen dados en cada caso por:

a) $x_n = \dfrac{2n+3}{3n-50}$, $x = \dfrac{2}{3}$; b) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $x = 0$

c) $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$, $x = 1$; d) $x_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, $x = 0$

49. Supuesto que $\lim\{x_n\} = x$, prueba que el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tiene máximo y mínimo.

50. **(T)** Sea A un conjunto no vacío y mayorado de números reales. Prueba que un número real, β, es el supremo de A si, y sólo si, β es un mayorante de A y hay alguna sucesión de puntos de A que converge a β.

Enuncia y prueba una caracterización análoga para el extremo inferior de un conjunto.

51. **(T)** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Prueba que A es denso en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, todo número real es límite de alguna sucesión de elementos de A.

52. **(T)** Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$ para todo $n \geqslant p$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

Aplicación: Dados $a \in]-1,1[$, $k \in \mathbb{N}$, prueba que $\lim_{n\to\infty} \{n^k a^n\} = 0$.

53. Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión cuyo conjunto imagen es denso en un intervalo I no vacío y no reducido a un punto. Sean $a, b \in I$ con $a < b$. Prueba que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in]a,b[\}$ es infinito. Deduce que para todo $x \in I$ y para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon\}$ es infinito.

Observa que en la definición 2.2 no se exige que el límite sea único, por ello si $\{x_n\}$ converge a x es lícito preguntar si puede haber otro número real y *distinto* de x tal que $\{x_n\}$ también converja a y. La respuesta es que no.

2.6 Proposición. *Una sucesión convergente tiene un único límite*.

Demostración. Sea $\{x_n\} \to x$ e $y \neq x$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap]y-\varepsilon, y+\varepsilon[= \emptyset$. Puesto que $\{x_n\} \to x$ el conjunto $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x - x_n| \geqslant \varepsilon\}$ es finito. Puesto que si $|x - x_n| < \varepsilon$ entonces $|y - x_n| \geqslant \varepsilon$, tenemos que $B_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |y - x_n| \geqslant \varepsilon\} \supset \mathbb{N} \setminus A_\varepsilon$ y, por tanto, B_ε es infinito, lo que prueba que $\{x_n\}$ no converge a y. $\square$

2.1.1. Sucesiones convergentes y estructura de orden de $\mathbb{R}$

Como hemos indicado antes, para estudiar la convergencia de una sucesión dada no suele ser lo más aconsejable usar, de entrada, la definición 2.2. Es preferible intentar primero otros caminos. Generalmente lo que suele hacerse en la práctica consiste en relacionar dicha sucesión con otras más sencillas o que ya han sido previamente estudiadas y deducir de dicha relación si nuestra sucesión es o no es convergente y, cuando lo sea, el valor de su límite. Por ello son de gran utilidad los resultados que siguen en los que se estudia cómo se comportan las sucesiones convergentes respecto de la estructura algebraica y de orden de $\mathbb{R}$.

Para evitar tediosas repeticiones en los enunciados, usaremos con frecuencia el símbolo $\lim\{x_n\} = x$, que deberá leerse así: la sucesión $\{x_n\}$ es convergente y el número real x es su límite.

2.7 Proposición. *Supongamos que* $\lim\{x_n\} = x$, $\lim\{y_n\} = y$ *y que el conjunto de números naturales* $A = \{n\in\mathbb{N} : x_n \leqslant y_n\}$ *es infinito. Entonces se verifica que* $x \leqslant y$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Bastará probar que $x < y + \varepsilon$. Por hipótesis existen m_1, m_2 tales que

$$x - \varepsilon/2 < x_p < x + \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad y - \varepsilon/2 < y_q < y + \varepsilon/2 \tag{2.2}$$

para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$. Puesto que el conjunto A del enunciado es un conjunto infinito de números naturales podemos asegurar que hay algún $m \in A$ tal que $m \geqslant \max\{m_1, m_2\}$. Por tanto las desigualdades 2.2 se cumplen para $p = q = m$, además como $m \in A$ se tiene que $x_m \leqslant y_m$. Deducimos que $x - \varepsilon/2 < x_m \leqslant y_m < y + \varepsilon/2$ y, por tanto, $x < y + \varepsilon$. □

Un caso particular de la proposición anterior, pero frecuente en la práctica, es cuando ocurre que para todos los términos a partir de uno en adelante se verifica que $x_n \leqslant y_n$. Hay que advertir que, incluso en este último caso, *aún cuando las desigualdades sean estrictas no puede asegurarse que* $\lim\{x_n\} = x$ *sea estrictamente menor que* $\lim\{y_n\} = y$. Por ejemplo, si $x_n = 0$ e $y_n = 1/n$, es claro que $x_n < y_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ pero $x = 0 = y$.

2.8 Proposición (Principio de las sucesiones encajadas). *Supongamos que* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *son sucesiones tales que* $\lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = \alpha$ *y existe un número natural* m_0 *tal que para todo* $n \geqslant m_0$ *se verifica que* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, *entonces la sucesión* $\{y_n\}$ *es convergente y* $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existen m_1, m_2 tales que

$$\alpha - \varepsilon < x_p < \alpha + \varepsilon \quad \text{y} \quad \alpha - \varepsilon < z_q < \alpha + \varepsilon \tag{2.3}$$

para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$. Sea $m_3 = \max\{m_0, m_1, m_2\}$. Para todo $n \geqslant m_3$ las desigualdades 2.3 se cumplen para $p = q = n$, además como $n \geqslant m_0$ se tiene que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Deducimos que, para todo $n \geqslant m_3$, se verifica que

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < \alpha + \varepsilon$$

y, por tanto, $\alpha - \varepsilon < y_n < \alpha + \varepsilon$, es decir, $\lim\{y_n\} = \alpha$. □

El principio de las sucesiones encajadas es de gran utilidad y se usa con mucha frecuencia. Naturalmente, cuando apliquemos dicho principio a un caso concreto, la sucesión $\{y_n\}$ del enunciado será la que queremos estudiar y tendremos que ser capaces de "inventarnos" las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ de manera que se cumplan las condiciones del enunciado. Veamos un ejemplo.

2.9 Ejemplo. *La sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}$ es convergente a 1.*

Pongamos $y_n = \sqrt[n]{n}$. La elección de $\{x_n\}$ es inmediata: $x_n = 1$. Un poco más difícil es la elección de $\{z_n\}$. Para ello apliquemos la desigualdad de las medias a los números $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1,\ x_{n-1} = x_n = \sqrt{n}$ para obtener que para todo $n \geqslant 2$

$$\sqrt[n]{n} \leqslant \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Por tanto, tomando $z_n = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, es inmediato que $\lim\{z_n\} = 1$ y concluimos, por el principio de las sucesiones encajadas, que $\lim\{\sqrt[n]{n}\} = 1$. ♦

Una consecuencia inmediata de la proposición 2.8 es que **si cambiamos arbitrariamente un número finito de términos de una sucesión, la nueva sucesión así obtenida es convergente si lo era la de partida y con su mismo límite**. Esto es lo que dice el siguiente resultado.

2.10 Corolario. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones cuyos términos son iguales a partir de uno en adelante, es decir, hay un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ es $x_n = y_n$. Entonces $\{x_n\}$ converge si, y sólo si, $\{y_n\}$ converge en cuyo caso las dos sucesiones tienen igual límite.*

2.11 Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Decreciente** si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Estrictamente decreciente** si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Monótona** si es creciente o decreciente.

- **Estrictamente monótona** si es estrictamente creciente o decreciente.

Nótese que si una sucesión $\{x_n\}$ es creciente (resp. decreciente) entonces se verifica que $x_m \leqslant x_n$ (resp. $x_m \geqslant x_n$) siempre que $m \leqslant n$.

2.12 Proposición. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$. Todos los términos de $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante estarán en el intervalo $]x-1, x+1[$, es decir, hay un número $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica que $|x_n - x| < 1$, lo que implica que

$$|x_n| \leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x| \quad \text{para todo } n \geqslant m.$$

Tomando $M = \max\{1+|x|, |x_1|, \dots, |x_m|\}$, máximo cuya existencia está garantizada por ser un conjunto finito, tenemos que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

La proposición anterior es útil a veces para probar que una sucesión *no* es convergente: para ello basta probar que no está acotada.

2.13 Ejemplo. *La sucesión $\{H_n\}$ definida por $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, no es convergente.* ♦

Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} H_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \geqslant \\ &\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

de donde se deduce que la sucesión $\{\sum_{k=1}^{n} 1/k\}$ no está mayorada. Esta sucesión recibe el nombre de **serie armónica**.

2.1.2. Sucesiones monótonas

La proposición recíproca de la anterior no es cierta: la sucesión $\{(-1)^n\}$ es acotada y sabemos que *no* es convergente. No obstante, hay un caso especial muy importante en que sí es cierta la recíproca.

2.14 Teorema. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ es:*

i) creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$ donde $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Además se verifica que $x_n < \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien que todos los términos a partir de uno en adelante son iguales a β.

ii) decreciente y minorada, entonces $\lim\{x_n\} = \alpha$ donde $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Además se verifica que $\alpha < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien que todos los términos a partir de uno en adelante son iguales a α.

Demostración. Probaremos $i)$ quedando la demostración de $ii)$ como ejercicio. La hipótesis de que $\{x_n\}$ es mayorada garantiza, por el principio del supremo, la existencia del número real $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\beta - \varepsilon < \beta$, tiene que haber algún término x_m de la sucesión tal que $\beta - \varepsilon < x_m$. Puesto que la sucesión es creciente para todo $n \geqslant m$ se verificará que $x_m \leqslant x_n$ y, por tanto $\beta - \varepsilon < x_n$. En consecuencia $\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$ para todo $n \geqslant m$. Hemos probado así que $\lim\{x_n\} = \beta$. Finalmente, si hay algún término igual a β, $x_{m_0} = \beta$, entonces para todo $n \geqslant m_0$ tenemos que $\beta = x_{m_0} \leqslant x_n \leqslant \beta$ por lo que $x_n = \beta$. □

2.15 Ejemplo. *La sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, es convergente.* ♦

En efecto, como

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0$$

se sigue que $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, es una sucesión creciente. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ es:

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \overset{(n}{\cdots} + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

por lo que también está mayorada. Concluimos, por el teorema anterior, que dicha sucesión es convergente.

Conviene advertir que cuando se dice que una sucesión es monótona *no se excluye* la posibilidad de que, de hecho, sea estrictamente monótona. Es por ello que, en general, suele hablarse de sucesiones monótonas y tan sólo cuando tiene algún interés particular se precisa si son estrictamente monótonas.

2.16 Observación. *Si una sucesión $\{x_n\}$ es creciente a partir de uno de sus términos, es decir, si hay un número m_0 tal que $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \geqslant m_0$ – tales sucesiones se llaman* ***eventualmente crecientes*** *– entonces se sigue del teorema anterior y del corolario 2.10 que, si dicha sucesión está mayorada, es convergente y $\lim\{x_n\} = \sup\{x_n : n \geqslant m_0\}$.*

Una observación correspondiente puede hacerse para sucesiones que son decrecientes a partir de uno de sus términos; tales sucesiones se llaman ***eventualmente decrecientes****.*

2.1.3. Álgebra de límites

En los resultados anteriores han intervenido de manera esencial las propiedades de la estructura de orden de $\mathbb{R}$. Vamos a estudiar ahora el comportamiento de las sucesiones convergentes respecto de la adición y el producto de números reales. Los resultados que vamos a obtener, conocidos tradicionalmente con el nombre de *álgebra de límites*, son básicos para el estudio de la convergencia de sucesiones.

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n + y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_n y_n\}$.

2.17 Proposición. *El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada es una sucesión convergente a cero.*

Demostración. Sea $\lim\{x_n\} = 0$, e $\{y_n\}$ acotada. Sea $c > 0$ tal que $|y_n| \leqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural m tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica que $|x_n| < \varepsilon/c$. Deducimos que, para todo $n \geqslant m$, se verifica que $|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \frac{\varepsilon}{c}c = \varepsilon$, lo que prueba que $\lim\{x_n y_n\} = 0$. □

2.18 Teorema. *Supongamos* $\lim\{x_n\} = x$ *y* $\lim\{y_n\} = y$. *Entonces se verifica* $\lim\{x_n + y_n\} = x + y$, $\lim\{x_n y_n\} = xy$. *Si además suponemos que* $y_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y también que* $y \neq 0$, *entonces* $\lim\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = \dfrac{x}{y}$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis existen m_1, m_2 tales que

$$x - \varepsilon/2 < x_p < x + \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad y - \varepsilon/2 < y_q < y + \varepsilon/2 \tag{2.4}$$

para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$. Sea $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Para todo $n \geqslant m_0$ las desigualdades 2.4 se cumplen para $p = q = n$, por lo que, sumándolas término a término, deducimos que

$$x + y - \varepsilon < x_n + y_n < x + y + \varepsilon$$

cualquiera sea $n \geqslant m_0$, lo que prueba que $\lim\{x_n + y_n\} = x + y$.

Por otra parte, teniendo en cuenta las proposiciones 2.12 y 2.17, se deduce de las hipótesis hechas que $\lim\{(x_n - x)y_n\} = \lim\{x(y_n - y)\} = 0$. Se deduce ahora de lo arriba probado y de la igualdad

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y)$$

que $\lim\{x_n y_n - xy\} = 0$, es decir, $\lim\{x_n y_n\} = xy$.

Finalmente, para probar que $\lim\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = \dfrac{x}{y}$, probaremos que la sucesión

$$\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right\} = \left\{\frac{x_n y - y_n x}{y_n y}\right\}$$

converge a cero, para lo cual, teniendo en cuenta que $\lim\{x_n y - y_n x\} = xy - yx = 0$, y la proposición 2.17, bastará probar que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ está acotada. Puesto que $\lim\{y_n\} = y$, se deduce de la desigualdad

$$||y_n| - |y|| \leqslant |y_n - y|$$

que $\lim\{|y_n|\} = |y|$. Por tanto todos los términos de la sucesión $\{|y_n|\}$ a partir de uno en adelante estarán en el intervalo $]|y|/2, \to[$, es decir, hay un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_0$ es $|y_n| > |y|/2$. Pongamos $K = \max\left\{\dfrac{1}{|y_1|}, \dfrac{1}{|y_2|}, \dots, \dfrac{1}{|y_{m_0}|}, \dfrac{2}{|y|}\right\}$. Se tiene entonces que $\dfrac{1}{|y_n|} \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos probado así que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ está acotada, lo que concluye la demostración del teorema. □

Hay que leer con atención las hipótesis del teorema anterior para no hacer un uso incorrecto del mismo. En particular, no hay que olvidar que *la suma de dos sucesiones no convergentes puede ser una sucesión convergente*. Por ejemplo, las sucesiones $x_n = n$, $y_n = -n$, no son convergentes pues no están acotadas, pero su suma $x_n + y_n = 0$ es, evidentemente, convergente. Por tanto, *antes de escribir* $\lim\{x_n + y_n\} = \lim\{x_n\} + \lim\{y_n\}$, hay que asegurarse de que estos últimos límites existen, es decir, que las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ convergen, pues pudiera ocurrir que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ fuera convergente y no lo fueran las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. Análogamente, basta considerar las sucesiones $x_n = y_n = (-1)^n$, para convencerse de que *el producto de dos sucesiones no convergentes puede ser una sucesión convergente* y, en consecuencia, observaciones análogas a las hechas antes respecto de la suma también pueden hacerse respecto del producto de sucesiones.

Ejercicios propuestos

54. Estudia la convergencia de las sucesiones:

a) $x_n = n^2\left(\dfrac{n+1}{3n}\right)^n$; **b)** $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ $(a > 0, b > 0)$

c) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$; **d)** $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right)$

e) $x_n = \dfrac{E(n^5 x)}{n^5}$ $(x \in \mathbb{R})$; **f)** $x_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n}$

Sugerencias: en todos los casos puede usarse el principio de las sucesiones encajadas. Para **d)** prueba que, si $x > -1$, entonces se verifica que $\dfrac{x}{x+2} < \sqrt{1+x} - 1 < \dfrac{x}{2}$.

55. Calcula los límites de las sucesiones:

a) $x_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$.

b) $y_n = \sqrt{n}\left(\sqrt[4]{4n^2+3} - \sqrt{2n}\right)$.

c) $z_n = \dfrac{n+1}{n^2+1} + \dfrac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n+n}{n^2+n}$.

56. **(T)** a) Sea $a > 0$. Prueba que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$ es monótona y convergente y calcula su límite.

b) Supongamos que $\{x_n\} \to x > 0$. Prueba que $\lim \{\sqrt[n]{x_n}\} = 1$.

En el siguiente ejercicio la estrategia es siempre la misma: estudiar la monotonía y la acotación.

57. Estudia, en cada uno de los siguientes casos, la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

a) $x_1 = 1, \;\; x_{n+1} = \sqrt{3x_n}\,$;

b) $x_1 = 1, \;\; x_{n+1} = \dfrac{4+3x_n}{3+2x_n}\,$;

c) $x_1 = \alpha, \;\; x_{n+1} = \dfrac{x_n - 2}{x_n + 4} \quad (-2 < \alpha < -1)$;

d) $x_1 = \alpha, \;\; x_{n+1} = \alpha + (x_n)^2 \quad (\alpha > 0)$;

e) $x_1 = \alpha, \;\; 3x_{n+1} = 2 + (x_n)^3 \quad (-2 < \alpha < 1)$;

f) $x_1 = 5, \;\; x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{5}{x_n}\right)$

g) $x_1 = 1, \;\; x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$

h) $x_1 = 4 \;\; x_{n+1} = \dfrac{6+6x_n^2}{11+x_n^2}$.

58. Dado $a > 0$ con $a \neq 3$, sea $\{x_n\}$ la sucesión definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}.$$

Estudia la monotonía y la convergencia de dicha sucesión.

Sugerencia. Deberás distinguir los casos $a > 3$ y $a < 3$, y tener en cuenta el signo del polinomio $x^2 - 2x - 3$.

59. Se define una sucesión $\{x_n\}$ por $x_1 = 2$, y para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + 5}{x_n + 3}$$

1. Prueba que la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente creciente y mayorada.
2. Prueba que $0 < \sqrt{5} - x_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{5}(\sqrt{5} - x_n)$.
3. Calcula $n \in \mathbb{N}$ por la condición de que $0 < \sqrt{5} - x_{n+1} < 10^{-4}$.

60. Dados $b_1 > a_1 > 0$, definamos para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Prueba que las sucesiones así definidas son monótonas y convergen al mismo número (que se llama **media aritmético-geométrica** de a_1 y b_1).

61. **(T)** Dadas dos funciones polinómicas P, Q, tales que el grado de Q es mayor o igual que el grado de P y $Q(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, prueba que la sucesión $\left\{ \dfrac{P(n)}{Q(n)} \right\}$ es convergente y calcula su límite.

62. Calcula los límites de las sucesiones:

$$\textbf{a)}\ x_n = \sqrt{n^2+3n+2} - n \qquad \textbf{b)}\ x_n = \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)$$

$$\textbf{c)}\ x_n = \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}$$

2.2. Logaritmos y exponenciales

En esta sección vamos a definir dos de las más importantes funciones de las matemáticas: la función logaritmo natural y la función exponencial. La siguiente desigualdad será de gran utilidad en lo que sigue.

2.19 Proposición (Desigualdad básica)**.** *Cualesquiera sean los números reales positivos distintos* a, b, *y para todo número natural* n, *se verifica que*

$$\boxed{ab^n < \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1}} \tag{2.5}$$

Demostración. En la desigualdad de las medias

$$\sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1},$$

donde los $n+1$ números $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ son positivos y no todos ellos iguales, hagamos $a_1 = a$, $a_2 = \cdots = a_{n+1} = b$, con lo que obtenemos

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1} \tag{2.6}$$

desigualdad que es equivalente a la del enunciado sin más que elevar a la potencia de orden $n+1$. □

Usaremos también el hecho elemental (ver ejercicios 48 y 56) de que para todo $a > 0$ es $\lim\{\sqrt[n]{a}\} = 1$.

No está de más recordar que, dado $x \geqslant 0$ y $n \in \mathbb{N}$, representamos por $\sqrt[n]{x}$ al único número real mayor o igual que 0 cuya potencia n-ésima es igual a x. Naturalmente, $\sqrt[1]{x} = x$.

2.20 Proposición. *Para todo número real positivo* $x \neq 1$ *se verifica que la sucesión* $\{n(\sqrt[n]{x}-1)\}$ *es estrictamente decreciente y convergente.*

Demostración. Basta hacer en (2.6) $a = 1$, $b = \sqrt[n]{x}$, para obtener que $\sqrt[n+1]{x} < \dfrac{n\sqrt[n]{x}+1}{n+1}$, es decir, $(n+1)\sqrt[n+1]{x} < n\sqrt[n]{x}+1$; sumando ahora $-n-1$ en ambos lados resulta $(n+1)(\sqrt[n+1]{x}-1) < n(\sqrt[n]{x}-1)$, lo que prueba que la sucesión es estrictamente decreciente. Si $x > 1$ dicha sucesión converge por ser decreciente y estar minorada por cero. Si $0 < x < 1$ podemos escribir $n(\sqrt[n]{x}-1) = -n(\sqrt[n]{1/x}-1)\sqrt[n]{x}$, y como $\lim\{\sqrt[n]{x}\} = 1$, y $1/x > 1$, deducimos, por lo ya visto, que también hay convergencia en este caso. $\square$

2.21 Definición. *La función* ***logaritmo natural****, también llamada* ***logaritmo neperiano*** *o, simplemente, logaritmo, es la función* $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *definida para todo* $x > 0$ *por*

$$\log(x) = \lim_{n\to\infty}\{n(\sqrt[n]{x}-1)\}.$$

El siguiente resultado es consecuencia de la proposición anterior y del teorema (2.14).

2.22 Proposición. *Para todo* $x > 0$, $x \neq 1$, *y para todo* $n\in\mathbb{N}$ *se verifica que:*

$$\log(x) = \inf\{n(\sqrt[n]{x}-1) : n\in\mathbb{N}\} < n(\sqrt[n]{x}-1) \tag{2.7}$$

2.23 Teorema. *Cualesquiera sean los números positivos* x, y *se verifica que*

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y); \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y).$$

Además la función logaritmo es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$.

Demostración. Tomando límites en la igualdad

$$n(\sqrt[n]{xy}-1) = n(\sqrt[n]{x}-1)\sqrt[n]{y} + n(\sqrt[n]{y}-1)$$

y teniendo en cuenta que $\lim\{\sqrt[n]{y}\} = 1$, obtenemos $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. Como, evidentemente, $\log(1) = 0$, haciendo en esta igualdad $x = 1/y$ deducimos que $\log(1/y) = -\log(y)$. Lo que, a su vez, implica que

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(x\frac{1}{y}\right) = \log(x) - \log(y).$$

La desigualdad (2.7) implica que $\log(t) < 0$ para todo $t \in]0,1[$. Si x, y son números positivos tales que $x < y$, entonces $0 < x/y < 1$ por lo que $\log(x) - \log(y) = \log(x/y) < 0$, es decir, $\log(x) < \log(y)$, lo que prueba que la función logaritmo es estrictamente creciente. $\square$

Nuestro propósitop ahora es probar que la función logaritmo es una biyección de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$. Para ello bastará probar que es sobreyectiva ya que, al ser estrictamente creciente, es inyectiva. El siguiente resultado será de utilidad a este respecto.

2.24 Lema. *Sea* $\lim\{x_n\} = x$ *cumpliéndose que* $0 < x_n < x$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces se verifica que* $\lim\{n(\sqrt[n]{x_n} - 1)\} = \log(x)$.

Demostración. Puesto que

$$n(\sqrt[n]{x_n} - 1) - \log(x) = n(\sqrt[n]{x_n} - 1) - n(\sqrt[n]{x} - 1) + n(\sqrt[n]{x} - 1) - \log(x) =$$
$$= n(\sqrt[n]{x_n} - \sqrt[n]{x}) + n(\sqrt[n]{x} - 1) - \log(x)$$

bastará probar que $n(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_n}) \to 0$. Para ello pongamos $z_n = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_n}$, con lo que $z_n > 0$ y $\sqrt[n]{x} = z_n + \sqrt[n]{x_n}$, lo que implica que

$$x = (z_n + \sqrt[n]{x_n})^n = x_n\left(1 + \frac{z_n}{\sqrt[n]{x_n}}\right)^n > x_n\left(1 + \frac{z_n}{\sqrt[n]{x}}\right)^n \geqslant x_n\left(1 + \frac{nz_n}{\sqrt[n]{x}}\right)$$

de donde se sigue que $0 < nz_n < \dfrac{x - x_n}{x_n}\sqrt[n]{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y concluimos, por el principio de las sucesiones encajadas, que $nz_n = n(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_n}) \to 0$. □

El número e.

Dado $n \in \mathbb{N}$, haciendo en la desigualdad (2.5) $a = 1$, $b = 1 + \dfrac{1}{n}$, obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Sustituyendo en (2.5) n por $n + 1$, $a = 1$, $b = n/(n + 1)$ y pasando a inversos obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Hemos probado así que la sucesión $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente e $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es estrictamente decreciente. Además, como $x_1 \leqslant x_n < y_n \leqslant y_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que ambas sucesiones son acotadas y, al ser monótonas, son convergentes. Como $y_n = x_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ se sigue que $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$. El valor común de este límite es un número real que se representa por la letra "e". Así, $\mathrm{e} \in \mathbb{R}$ es el número real definido por:

$$\mathrm{e} = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$$

y también

$$\mathrm{e} = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \inf\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

En particular, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}} \tag{2.8}$$

Haciendo $n = 1$, $m = 6$ obtenemos una primera aproximación de e, $2 < \mathrm{e} < 3$.

2.25 Proposición. *Dado un número real $x \neq 0$ se verifica que*

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

para todo número natural $n > -x$. Además la sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y su límite es un número real positivo.

Demostración. Para $n\in\mathbb{N}$ tal que $n > -x$ se tiene que $1+\frac{x}{n} > 0$. Haciendo en la desigualdad básica $a = 1$, $b = 1+\frac{x}{n}$, obtenemos que $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$. Hemos probado así que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ es eventualmente estrictamente creciente y, según lo dicho en la observación 2.19, para probar que converge es suficiente probar que está acotada. Para ello sea $p\in\mathbb{N}$ tal que $p \geqslant |x|$. Se tiene que

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| = \left|1+\frac{x}{n}\right|^n \leqslant \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{p}{n}\right)^n .$$

Sabemos, por lo ya visto, que $\left\{\left(1+\frac{p}{n}\right)^n\right\}$ es creciente, por lo que

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{p}{np}\right)^{np} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p < \mathrm{e}^p .$$

Deducimos así que $\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| < \mathrm{e}^p$ para todo $n\in\mathbb{N}$, lo que prueba que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ está acotada. Finalmente, como se indicó en la observación 2.19, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\} = \sup\left\{\left(1+\frac{x}{p+n}\right)^{p+n} : n\in\mathbb{N}\right\}$$

y, por tanto, $0 < \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$. □

2.26 Definición. La **función exponencial** es la función $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ definida para todo $x\in\mathbb{R}$ por:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}.$$

Observa que $\exp(1) = \mathrm{e}$, y que $\exp(0) = 1$. .

2.27 Teorema. *La función logaritmo es una biyección de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$ cuya inversa es la función exponencial.*

Demostración. Dado $t\in\mathbb{R}$, fijemos $p\in\mathbb{N}$, $p > -t$, y definamos

$$x_n = \frac{1}{2}\exp(t) \;\text{ para } 1\leqslant n\leqslant p, \quad x_n = \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \;\text{ para } n\geqslant p+1.$$

Tenemos que $\lim\{x_n\} = \exp(t)$ y además $0 < x_n < \exp(t)$. Aplicamos ahora el lema 2.24 a dicha sucesión $\{x_n\}$ para obtener que

$$\lim\{n(\sqrt[n]{x_n} - 1)\} = \log(\exp(t)).$$

Por otra parte, para todo $n \geqslant p + 1$ se tiene que

$$n(\sqrt[n]{x_n} - 1) = n\left(\sqrt[n]{\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n} - 1\right) = n\left(1 + \frac{t}{n} - 1\right) = t,$$

Luego, por la unicidad del límite, ha de ser $t = \log(\exp(t))$. Hemos probado así que la función logaritmo es sobreyectiva y, como ya sabíamos, también es inyectiva. Queda así probado que dicha función es una biyección de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$. La igualdad $\log(\exp(t)) = t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, nos dice ahora que la función exponencial es la biyección inversa de la función logaritmo. □

2.28 Corolario. *La función exponencial es estrictamente creciente en* $\mathbb{R}$ *y se verifica que*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

cualesquiera sean los números reales x *e* y*.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $x = \log(\exp(x))$, $y = \log(\exp(y))$ y que el logaritmo es estrictamente creciente, se deduce que si $x < y$ entonces ha de ser necesariamente $\exp(x) < \exp(y)$. De otra parte, como

$$\log(\exp(x + y)) = x + y = \log(\exp(x)) + \log(\exp(y)) = \log(\exp(x)\exp(y))$$

se sigue que $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$. Haciendo en esta igualdad $x = -y$ obtenemos $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$ por lo que $\exp(x - y) = \exp(x)\exp(-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$. □

2.2.1. Potencias reales

Pretendemos dar significado a la expresión x^y para todo número real positivo x y todo número real y. Ya hemos definido, en el Capítulo 1, las potencias enteras de un número real y estudiado sus propiedades. También hemos definido y estudiado las propiedades de las raíces n-ésimas, esto es, de las potencias de la forma $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Dados $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, definimos $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$. Notemos primero que $(\sqrt[q]{x}\,)^p = \sqrt[q]{x^p}$ pues

$$\left((\sqrt[q]{x}\,)^p\right)^q = (\sqrt[q]{x}\,)^{pq} = \left((\sqrt[q]{x}\,)^q\right)^p = x^p.$$

Naturalmente, debemos probar que si $p/q = m/n$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^{p/q} = x^{m/n}$. En efecto, puesto que $pn = qm$ tenemos que

$$\left((\sqrt[q]{x}\,)^p\right)^{qn} = \left((\sqrt[q]{x}\,)^q\right)^{pn} = x^{pn} = x^{qm} = \left((\sqrt[n]{x}\,)^n\right)^{qm} = \left((\sqrt[n]{x}\,)^m\right)^{qn}$$

es decir, $\left(x^{p/q}\right)^{qn} = \left(x^{m/n}\right)^{qn}$, lo que implica que $x^{p/q} = x^{m/n}$. En consecuencia, si r es un número racional podemos definir, sin ambigüedad alguna, la potencia x^r por $x^r = x^{p/q}$, donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ son tales que $r = p/q$.

Observa que la definición de x^r para r racional se reduce a las ya conocidas para los casos particulares en que r es un entero o el inverso de un natural, así mismo la notación empleada es coherente con las notaciones usadas antes para tales casos particulares.

2.29 Proposición. *Para todo número racional* $r \in \mathbb{Q}$ *y todo número real* y *se verifica que* $\exp(ry) = (\exp(y))^r$. *En particular,* $\exp(r) = \mathrm{e}^r$. *Además, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se verifica que*

$$\exp(x) = \sup\{\mathrm{e}^r : \ r \in \mathbb{Q}, \ r < x\}.$$

Demostración. Utilizando la propiedad de la exponencial $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, se prueba fácilmente por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $y \in \mathbb{R}$ se verifica que $\exp(ny) = (\exp(y))^n$. Si ahora n es un entero negativo tenemos que:

$$\exp(ny) = \exp(-n(-y)) = (\exp(-y))^{-n} = \left(\frac{1}{\exp(y)}\right)^{-n} = \exp(y)^n$$

Concluimos que $\exp(ny) = (\exp(y))^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $y \in \mathbb{R}$. Deducimos ahora que $\left(\exp\left(\frac{1}{m}y\right)\right)^m = \exp(y)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, esto es, $\exp\left(\frac{y}{m}\right) = \sqrt[m]{\exp(y)}$. Luego, $\exp\left(\frac{n}{m}y\right) = \left(\exp\left(\frac{y}{m}\right)\right)^n = \left(\sqrt[m]{\exp(y)}\right)^n$, de donde se sigue la primera afirmación del enunciado. En particular, $\exp(r) = (\exp(1))^r = \mathrm{e}^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Dado $x \in \mathbb{R}$, sea $C = \{\mathrm{e}^r : \ r \in \mathbb{Q}, \ r < x\}$. Claramente $\exp(x)$ es un mayorante de C por lo que $\alpha = \sup(C) \leqslant \exp(x)$. Si fuera $\alpha < \exp(x)$, entonces $\log(\alpha) < x$ y, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, hay algún $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\log(\alpha) < r < x$. Pero entonces se tiene que $\alpha < \exp(r) = \mathrm{e}^r$, lo que es contradictorio pues $\mathrm{e}^r \in C$. Luego $\alpha = \exp(x)$. □

La proposición anterior justifica la notación que suele usarse para $\exp(x)$, dicho número se representa simbólicamente por e^x y puede interpretarse como “la potencia x del número e”. En lo sucesivo nosotros también usaremos dicha notación y reservaremos la notación $\exp(\cdot)$ para aquellos casos en que aparezcan expresiones complicadas en el exponente.

Acabamos de probar que $(\mathrm{e}^y)^r = \mathrm{e}^{ry}$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y todo $r \in \mathbb{Q}$. Dado $x > 0$, ponemos $y = \log(x)$ y obtenemos que $x^r = \exp(r\log(x))$. Esta igualdad, válida para todo $x > 0$ y para todo $r \in \mathbb{Q}$, justifica la siguiente definición.

2.30 Definición. Dados dos números reales $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, se define la potencia x^y de **base** x y **exponente** y como el número real dado por

$$\boxed{x^y = \exp(y\log(x))}$$

Definimos también $0^x = 0$ para todo $x > 0$ y $0^0 = 1$.

Los comentarios anteriores justifican la consistencia de esta definición con la antes dada para exponentes racionales, así como la coherencia de las notaciones empleadas en ambos casos. Las propiedades básicas de las potencias de base y exponentes reales se indican a continuación y se proponen como fácil ejercicio.

2.31 Proposición (Leyes de los exponentes)**.** *Cualesquiera sean $a > 0$, $b > 0$ y para todos x, y en $\mathbb{R}$, se verifica que*

$$a^{x+y} = a^x a^y; \quad (a^x)^y = a^{xy}; \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

2.32 Definición. Dado un número positivo $a > 0$ la función $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $\exp_a(x) = a^x$, se llama **función exponencial de base** a.

Dado un número positivo $a > 0$ y $a \neq 1$, la función $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}^+$ por $\log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$, se llama **función logaritmo de base** a.

Dado un número real b la función de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, definida para todo $x > 0$ por $x \mapsto x^b$, se llama **función potencia de exponente** b.

Las propiedades de las funciones exponenciales, logaritmos y potencias, acabadas de definir, se deducen fácilmente de las propiedades de la función exponencial y de la función logaritmo natural; por ejemplo, la función logaritmo de base a es la función inversa de la exponencial de base a.

Vamos a ver a continuación algunas desigualdades de gran utilidad en las que intervienen las funciones exponencial y logaritmo.

2.33 Proposición. *a)* $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ *para todo $x > -1$, y la desigualdad es estricta si $x \neq 0$.*

b) $\left| \dfrac{\log(1+x)}{x} - 1 \right| < \dfrac{|x|}{1+x}$ *para todo $x > -1$, $x \neq 0$.*

c) $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\,\mathrm{e}^x$ *para todo número real x, y la desigualdad es estricta si $x \neq 0$.*

d) $\left| \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1 \right| < |\,\mathrm{e}^x - 1|$ *para todo $x \neq 0$.*

Demostración. *a)* Sabemos que $\log(t) < n(t^{1/n} - 1)$ para todo $t > 0$, $t \neq 1$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, para $n = 1$, $\log(t) < t - 1$ para todo $t > 0$, $t \neq 1$. Sustituyendo t por $1 + x$

obtenemos $\log(1+x) < x$ para todo $x > -1$, $x \neq 0$. Para estos valores de x se tiene que el número $z = \dfrac{1}{1+x} - 1$ también verifica que $z > -1$, $z \neq 0$, luego, por lo ya visto, se tendrá que $\log(1+z) < z$, es decir, $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x)$. Queda así probado el punto *a)*.

b) Se deduce fácilmente de *a)* dividiendo ambos lados de la desigualdad por x y tratando por separado el caso en que $x > 0$ y el caso en que $x < 0$.

c) Si $x \neq 0$, el número $z = \mathrm{e}^x - 1$ verifica que $z > -1$, y $z \neq 0$, por consiguiente $\dfrac{z}{1+z} < \log(1+z) < z$, es decir, $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} < x < \mathrm{e}^x - 1$, y de aquí se sigue de forma inmediata la desigualdad del apartado *c)*.

d) Se deduce fácilmente de *c)* dividiendo ambos lados de la desigualdad por x y tratando por separado el caso en que $x > 0$ y el caso en que $x < 0$. □

2.2.2. Sucesiones de exponenciales y logaritmos

A continuación vamos a estudiar sucesiones de exponenciales y logaritmos. El resultado básico al respecto es el siguiente.

2.34 Proposición. *a) Una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, la sucesión $\{\mathrm{e}^{x_n}\}$ converge a e^x.*

b) Una sucesión de números positivos $\{y_n\}$ converge a un número positivo $y > 0$ si, y sólo si, la sucesión $\{\log(y_n)\}$ converge a $\log(y)$.

Demostración. Teniendo en cuenta que la función exponencial es creciente, se deduce inmediatamente que si $\{x_n\}$ está acotada entonces también $\{\mathrm{e}^{x_n}\}$ está acotada. Esta observación, junto con la desigualdad

$$x_n \leqslant \mathrm{e}^{x_n} - 1 \leqslant x_n \, \mathrm{e}^{x_n}$$

probada en la proposición anterior, y el principio de las sucesiones encajadas, nos permiten deducir que si $\lim\{x_n\} = 0$ entonces $\lim\{\mathrm{e}^{x_n}\} = 1$. Si ahora suponemos que $\lim\{x_n\} = x$, se tiene que $\lim\{x_n - x\} = 0$ y, por lo ya visto, $\lim\{\mathrm{e}^{x_n - x}\} = 1$, de donde, por ser $\mathrm{e}^{x_n} = \mathrm{e}^{x_n - x}\,\mathrm{e}^x$, se sigue que $\lim\{\mathrm{e}^{x_n}\} = \mathrm{e}^x$. Hemos probado una parte de la afirmación *a)* del enunciado.

Supongamos ahora que $\{y_n\}$ es una sucesión de números positivos con $\lim\{y_n\} = 1$. Pongamos $z_n = y_n - 1$. Claramente $z_n > -1$, por lo que, según hemos probado en la proposición anterior, se verifica la desigualdad

$$\frac{z_n}{1+z_n} \leqslant \log(1+z_n) = \log(y_n) \leqslant z_n.$$

Teniendo ahora en cuenta que $\lim\{z_n\} = 0$ deducimos, por el principio de las sucesiones encajadas, que $\lim\{\log(y_n)\} = 0$. Si ahora suponemos que $\lim\{y_n\} = y$ siendo $y > 0$, entonces

$\lim\left\{\dfrac{y_n}{y}\right\} = 1$ y, por lo ya visto, será $\lim\left\{\log\left(\dfrac{y_n}{y}\right)\right\} = = \lim\{\log(y_n) - \log(y)\} = 0$, es decir, $\lim\{\log(y_n)\} = \log(y)$. Hemos probado una parte de la afirmación *b)* del enunciado.

Las afirmaciones recíprocas se deducen de las ya probadas:

Si $\{\mathrm{e}^{x_n}\}$ converge a e^x, entonces haciendo $y_n = \mathrm{e}^{x_n}$ e $y = \mathrm{e}^x$, se verificará, por lo ya visto, que $\{x_n\} = \{\log(y_n)\}$ converge a $x = \log(y)$.

Si $\{\log(y_n)\}$ converge a $\log(y)$, haciendo $x_n = \log(y_n)$ y $x = \log(y)$, se verificará, por lo ya visto, que $\{y_n\} = \{\mathrm{e}^{x_n}\}$ converge a $y = \exp(x)$. □

El siguiente resultado es uno de los más útiles para el cálculo de límites de sucesiones.

2.35 Teorema. *a) Para toda sucesión* $\{x_n\}$ *tal que* $-1 < x_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\{x_n\} = 0$, *se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{1/x_n} = \mathrm{e}\,.$$

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ *tal que* $\lim\{x_n\} = 0$ *y* $x_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} = 1.$$

Demostración. *a)* En virtud de la desigualdad probada en el punto *b)* de la proposición 2.33, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\left|\frac{\log(1+x_n)}{x_n} - 1\right| < \frac{|x_n|}{1+x_n}$$

de donde se sigue inmediatamente que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1$. Deducimos ahora que

$$\lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{1/x_n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\log(1+x_n)}{x_n}\right) = \exp(1) = \mathrm{e}\,.$$

b) Puesto que $\lim\{\mathrm{e}^{x_n}\} = 1$ y, en virtud de la desigualdad probada en el punto *d)* de la proposición 2.33, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} - 1\right| < |\,\mathrm{e}^{x_n} - 1|,$$

deducimos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} = 1$. □

2.36 Corolario. *a) Para toda sucesión* $\{x_n\}$ *tal que* $0 < x_n \neq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\{x_n\} = 1$, *se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(x_n)}{x_n - 1} = 1.$$

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ *tal que* $x_n \notin [-1,0]$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim \left\{\dfrac{1}{x_n}\right\} = 0$, *se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}\,.$$

Demostración. Poniendo, según sea el caso *a)* o el *b)*, $z_n = x_n - 1$, o $z_n = \dfrac{1}{x_n}$, tenemos que, en cada caso, la sucesión $\{z_n\}$ verifica las hipóptesis del punto *a)* del teorema 2.35 por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+z_n)}{z_n} = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} (1+z_n)^{1/z_n} = \mathrm{e},$$

equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(x_n)}{x_n - 1} = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}\,. \quad \square$$

Ejercicios propuestos

63. ¿Cuál de los dos números $1.234.567^{1.234.568}$ y $1.234.568^{1.234.567}$ es el mayor?.

64. Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < \mathrm{e}^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

65. **(T)** Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n), \qquad y_n = x_n - \frac{1}{n}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente e $\{y_n\}$ es estrictamente creciente. Deduce que ambas sucesiones convergen a un mismo número. Dicho número se llama la *constante de Euler*, se representa por la letra griega γ.

a) Deduce que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{\log(n)} = 1$.

b) Justifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right\} = \log 2$.

c) Justifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \log 2$.

66. a) Prueba las desigualdades

$$0 < \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < x \;\; (x > 0); \qquad x < \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < 0 \;\; (x < 0).$$

b) Dado $x \neq 0$ definamos $x_1 = x$, y para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \log \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n}.$$

Estudia la convergencia de $\{x_n\}$.

67. Calcula los límites de las sucesiones

$$\textbf{a)}\ \frac{\log(n)}{n(\sqrt[n]{n}-1)}\,;\quad \textbf{b)}\ \frac{n\log(1+1/n)-1}{(1+1/n)^n-\mathrm{e}}\,;\quad \textbf{c)}\ n\big(\sqrt[n]{2-1/n}-1\big);$$

Sugerencia: todo lo que se necesita es el teorema 2.35 y su corolario.

2.3. Sucesiones parciales y valores de adherencia

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales; dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente*, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{\sigma(n)}$ se representa por $\{x_{\sigma(n)}\}$ y se dice que es una **sucesión parcial** de $\{x_n\}$. Nótese que $\{x_{\sigma(n)}\}$ no es otra cosa que la composición de las aplicaciones $\{x_n\}$ y σ, esto es, $\{x_{\sigma(n)}\} = \{x_n\} \circ \sigma$.

2.37 Ejemplos. Las sucesiones $\{1/n^2\}$ y $\{2^{-n}\}$ son sucesiones parciales de la sucesión $\{1/n\}$.

Dado $q \in \mathbb{N}$ las sucesiones $\{x_{q+n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_{qn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones parciales de $\{x_n\}$.

Las sucesiones $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n-1}\}$ son sucesiones parciales de $\{x_n\}$.

Se dice que un número real z es un **valor de adherencia** de una sucesión $\{x_n\}$ si hay alguna sucesión parcial de $\{x_n\}$ que converge a z.

2.38 Proposición. *Si $\{y_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ es una sucesión parcial de $\{y_n\}$, entonces $\{z_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. En particular, un valor de adherencia de una sucesión parcial de $\{x_n\}$ también es un valor de adherencia de $\{x_n\}$.*

Demostración. Pongamos $y_n = x_{\sigma(n)}$, $z_n = y_{\varphi(n)}$ donde $\sigma, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ son aplicaciones estrictamente crecientes. Definiendo $\psi = \sigma \circ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se tiene que ψ es estrictamente creciente y $z_n = y_{\varphi(n)} = x_{\sigma(\varphi(n))} = x_{\psi(n)}$. $\square$

Los siguientes resultados que vimos en el capítulo I serán usados en lo que sigue.

2.39 Proposición.

a) *Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que $\varphi(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

b) *Sea A un conjunto infinito de números naturales. Entonces existe una biyección creciente de $\mathbb{N}$ sobre A.*

2.40 Proposición. *Si* $\lim\{x_n\} = x$, *toda sucesión parcial de* $\{x_n\}$ *también converge a* x. *En particular, una sucesión convergente tiene como único valor de adherencia su límite.*

Demostración. Sea $\{x_n\} \to x$, y $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica que $|x_n - x| < \varepsilon$. Puesto que $\sigma(n) \geqslant n$, para todo $n \geqslant m$ se tiene que $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$. Lo que prueba que $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$. □

El resultado anterior es muy útil para probar que una sucesión *no* es convergente pues para ello basta con que tenga una sucesión parcial no convergente o dos sucesiones parciales convergentes a límites distintos.

La sucesión $\{(-1)^n\}$ tiene las sucesiones parciales $\{(-1)^{2n}\} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{(-1)^{2n-1}\} = \{-1\}_{n\in\mathbb{N}}$ que convergen respectivamente a 1 y a -1. Volvemos a obtener así que $\{(-1)^n\}$ no es convergente.

Damos a continuación una útil caracterización de los valores de adherencia de una sucesión.

2.41 Proposición. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión y* x *un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) x *es un valor de adherencia de* $\{x_n\}$.

ii) Para todo intervalo abierto I *que contiene a* x *se verifica que el conjunto de números naturales* $\{n\in\mathbb{N} : x_n \in I\}$ *es infinito.*

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ *el conjunto de números naturales* $\{n\in\mathbb{N} : x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon\}$ *es infinito.*

Demostración. Supongamos que hay una sucesión parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$, convergente a x. Dado un intervalo abierto I que contenga a x, sabemos que hay un número $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \geqslant m_0$ se verifica que $x_{\sigma(p)} \in I$. Deducimos que

$$\{n\in\mathbb{N} : x_n \in I\} \supseteq \{\sigma(p) : p \geqslant m_0\}$$

y, por ser la aplicación σ, estrictamente creciente, y por tanto inyectiva, el conjunto $\{\sigma(p) : p \geqslant m_0\}$ es infinito, luego también lo es el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I\}$. Hemos probado así que *i)* implica *ii)*. Siendo evidente que *ii)* implica *iii)*, para acabar probaremos que *iii)* implica *i)*.

Por hipótesis para todo $k \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$A_k = \{n\in\mathbb{N} : x - 1/k < x_n < x + 1/k\}$$

es infinito. Por tanto, cualesquiera sean los números naturales k, p, el conjunto

$$B_{p,k} = \{n \in A_k : n > p\}$$

no es vacío. Haciendo uso del principio de buena ordenación podemos definir $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:

$$\begin{aligned} &\varphi(1) = \text{mín}(A_1) \\ &\varphi(k+1) = \text{mín}(B_{\varphi(k),k+1}) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Con ello es claro que $\varphi(k) < \varphi(k+1)$, y $\varphi(k) \in A_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto $\{x_{\varphi(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ y como $|x - x_{\varphi(n)}| < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $\{x_{\varphi(n)}\}$ converge a x. $\square$

2.3.1. El teorema de Bolzano - Weierstrass

Es importante advertir que una sucesión *puede tener un único valor de adherencia y no ser convergente*. Por ejemplo, la sucesión dada para todo $n \in \mathbb{N}$ por $x_n = (1 + (-1)^n)n + 1/n$, no es convergente y tiene a 0 como único valor de adherencia. También puede ocurrir que una sucesión, la de los números naturales por ejemplo, no tenga *ningún* valor de adherencia. Vamos a ver a continuación que estos comportamientos no pueden darse con sucesiones acotadas.

2.42 Lema. *Toda sucesión de números reales tiene una sucesión parcial monótona.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant x_p \quad \text{para todo } p > n\}$$

Podemos visualizar el conjunto A como sigue. Consideremos en el plano los segmentos de extremos (n, x_n) y $(n+1, x_{n+1})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Resulta así una línea poligonal infinita y podemos imaginar que dicha línea es el perfil de una cordillera cuyas cumbres y valles son los puntos (n, x_n). Imaginemos ahora que los rayos de luz del Sol, paralelos al eje de abscisas, iluminan dicha cordillera por el lado derecho (el Sol estaría, pues, situado en el infinito del eje de abscisas positivo). Pues bien, un número natural n pertenece al conjunto A si el punto (n, x_n) está iluminado y no pertenece a A si dicho punto está en sombra.

Supongamos que A es infinito. En tal caso sabemos (ver proposición 2.39) que hay una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente con $\varphi(\mathbb{N}) = A$. Resulta ahora evidente que la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente pues todos los puntos $(\sigma(n), x_{\sigma(n)})$ están iluminados y, por tanto, ninguno de ellos puede hacerle sombra a uno anterior. De manera más formal, como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\sigma(n) \in A$ se verifica que $x_{\sigma(n)} \geqslant x_p$ para todo $p \geqslant \sigma(n)$; en particular, como $\sigma(n+1) > \sigma(n)$, se tiene que $x_{\sigma(n)} \geqslant x_{\sigma(n+1)}$.

Si A es finito podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $A = \varnothing$. En tal caso, para todo $n \in \mathbb{N}$ hay algún $p > n$ tal que $x_n < x_p$ (pues todo punto (n, x_n) está en sombra). Podemos definir ahora una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\sigma(1) = 1 \\ &\sigma(n+1) = \text{mín}\{p \in \mathbb{N} : \sigma(n) < p \text{ y } x_{\sigma(n)} < x_p\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

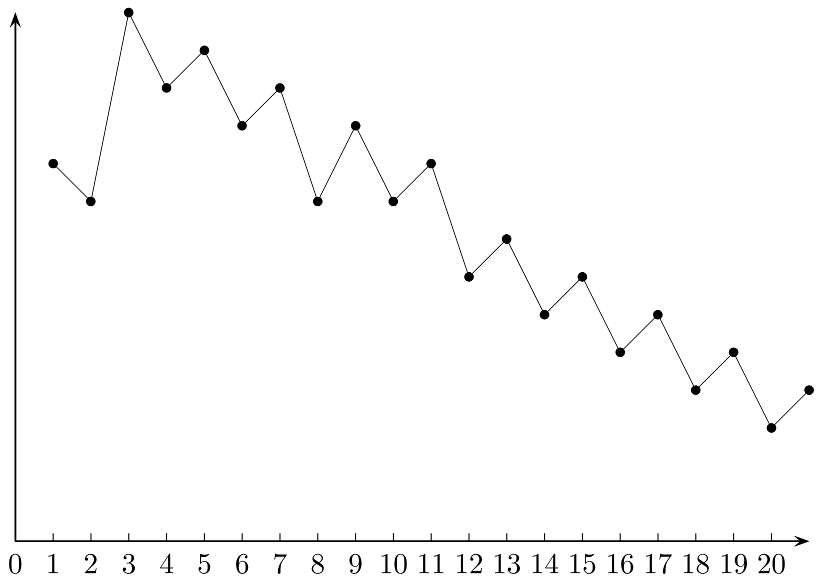


Figura 2.1. Puntos de sol y de sombra

Resulta ahora evidente que la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es estrictamente creciente pues cada punto $(\sigma(n), x_{\sigma(n)})$ deja en la sombra al anterior. $\square$

Como consecuencia de este lema, de que toda sucesión parcial de una sucesión acotada es una sucesión acotada y del teorema 2.14, obtenemos el siguiente importante resultado.

2.43 Teorema (Teorema de Bolzano -Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna sucesión parcial convergente. Equivalentemente, toda sucesión acotada de números reales tiene al menos un valor de adherencia.*

Podemos precisar algo más este resultado.

2.44 Proposición. *Una sucesión acotada no convergente tiene al menos dos valores de adherencia.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ acotada y no convergente. Sea z un valor de adherencia de $\{x_n\}$. Como $\{x_n\}$ no converge a z tiene que haber un $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - z| \geqslant \varepsilon\}$ es infinito. Por la proposición 2.39 sabemos que hay una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\sigma(\mathbb{N}) = A_\varepsilon$. Pongamos $y_n = x_{\sigma(n)}$. La sucesión $\{y_n\}$ está acotada y, por tanto tiene algún valor de adherencia $w = \lim\{y_{\varphi(n)}\}$. Sabemos por la proposición 2.38 que w también es valor de adherencia de $\{x_n\}$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\left|y_{\varphi(n)} - z\right| = \left|x_{\sigma(\varphi(n))} - z\right| \geqslant \varepsilon$, deducimos que $|w - z| \geqslant \varepsilon$ y por tanto $w \neq z$. $\square$

2.45 Corolario. *Una sucesión acotada es convergente si y sólo si tiene un único valor de adherencia.*

Ejercicios propuestos

68. Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que las sucesiones parciales $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{3n}\}$, son convergentes. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

69. **(T)** Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que $\{x_{2n}\} \to a$ y $\{x_{2n-1}\} \to b$. Prueba que los únicos valores de adherencia de $\{x_n\}$ son a y b. Justifica que si $a = b$ entonces $\{x_n\}$ es convergente.

70. Sabemos que existen biyecciones de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q}$; sea φ una de ellas y sea $\{x_n\}$ la sucesión de números reales definida por $x_n = \varphi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que todo número real es un valor de adherencia de $\{x_n\}$.

71. Sea A el conjunto de los valores de adherencia de una cierta sucesión acotada. Sea $z = \lim\{z_n\}$ donde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in A$. Prueba que $z \in A$.

72. Dados $b > a > 0$, estudia la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = a, \;\; x_2 = b, \;\; x_{n+2} = \frac{2x_n x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}.$$

2.3.2. Condición de Cauchy. Teorema de Complitud de $\mathbb{R}$

Si volvemos a leer la definición de sucesión convergente, parece que para estudiar la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ debemos ser capaces de "adivinar", de alguna manera, su posible límite. De hecho, una idea bastante extendida consiste en pensar que es lo mismo probar la convergencia de una sucesión que calcular su límite. Esto no es del todo correcto; son relativamente pocas las sucesiones convergentes cuyo límite puede efectivamente calcularse. Cuando se estudia la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$, la mayoría de las veces, lo que conocemos es, justamente, la sucesión y, naturalmente, se desconoce su posible límite el cual pudiera, incluso, no existir. Por ello interesa tener *criterios de convergencia intrínsecos a la sucesión*, es decir, que no hagan intervenir a un objeto en principio *extraño* a ella como es su posible límite. El teorema 2.14 proporciona, precisamente, un criterio de convergencia intrínseco para sucesiones *monótonas*. Usando dicho criterio hemos probado, en el ejemplo 2.15, la convergencia de una sucesión *sin necesidad de conocer su límite*.

A continuación vamos a establecer un criterio intrínseco de convergencia para sucesiones que es más general pues puede aplicarse a cualquier sucesión. Este criterio fué formulado por Bolzano en 1817 y también, independientemente, por Cauchy en 1821, y establece una condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión. Dicha condición se conoce con el nombre de *condición de Cauchy.*

2.46 Definición. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ satisface la **condición de Cauchy**, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

La demostración *rigurosa* de la *suficiencia* de esta condición no es fácil, ya que debe probarse la *existencia* de un límite y ello no puede hacerse sin un *conocimiento profundo de la estructura de los números reales* el cual no llegaría hasta 1872 gracias a los trabajos de Weierstrass, Cantor y Dedekind.

2.47 Teorema (Teorema de complitud de $\mathbb{R}$)**.** *Una sucesión de números reales es convergente si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy. Probemos primero que $\{x_n\}$ está acotada. Tomando $\varepsilon = 1$, la condición de Cauchy implica que hay $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_{m_0}| < 1$ para todo $p \geqslant m_0$. Como $|x_p| \leqslant |x_p - x_{m_0}| + |x_{m_0}|$, deducimos que $|x_p| < 1 + |x_{m_0}|$ para $p \geqslant m_0$. En consecuencia si definimos $M = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{m_0}|, 1 + |x_{m_0}|\}$, cuya existencia está garantizada por ser un conjunto finito, obtenemos que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos probado así que $\{x_n\}$ está acotada.

El teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial convergente $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$. Probaremos que $\{x_n\} \to x$. Dado $\varepsilon > 0$, por la condición de Cauchy, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p, q \geqslant m_1$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon/2$. También existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_2$ se verifica que $\left|x_{\sigma(n)} - x\right| < \varepsilon/2$. Sea $m = \text{máx}\,\{m_1, m_2\}$. Para todo $n \geqslant m$ se verifica que:

$$|x_n - x| \leqslant \left|x_n - x_{\sigma(n)}\right| + \left|x_{\sigma(n)} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Lo que prueba que $\{x_n\}$ converge a x.

Recíprocamente, si $\{x_n\}$ es convergente y $\text{lím}\{x_n\} = x$, dado $\varepsilon > 0$, hay un número $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo número natural $n \geqslant m_\varepsilon$ se tiene que $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Deducimos que si p, q son números naturales mayores o iguales que m_ε entonces

$$|x_p - x_q| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por tanto la sucesión $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy. □

2.48 Observación. *La condición de Cauchy para sucesiones dada en la definición 2.46, puede también expresarse de una manera equivalente, aunque formalmente distinta, como sigue:*

Una sucesión $\{x_n\}$ *satisface la condición de Cauchy, si para cada* $\varepsilon > 0$, *existe un número natural* m_ε, *tal que para todo* $p \geqslant m_\varepsilon$ *y* para todo número natural h, *se verifica que* $|x_{p+h} - x_p| < \varepsilon$.

Equivalentemente, una sucesión $\{x_n\}$ *verifica la condición de Cauchy si, y sólo si, la sucesión* $\{\rho_n\}$ *dada para todo* $n \in \mathbb{N}$ *por:*

$$\rho_n = \sup\{|x_{n+h} - x_n| : h \in \mathbb{N}\}$$

converge a cero.

Puesto que, evidentemente, para cada $h \in \mathbb{N}$ se tiene que $|x_{n+h} - x_n| \leqslant \rho_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy entonces para cada $h \in \mathbb{N}$ se verifica $\lim_{n\to\infty}\{x_{n+h} - x_n\} = 0$. Es importante observar que una sucesión $\{x_n\}$ puede verificar esta última condición y no ser convergente, es decir, no satisfacer la condición de Cauchy. Un ejemplo de ello lo proporciona la serie armónica, esto es, la sucesión $\{H_n\}$ dada por $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Hemos visto que dicha sucesión no es convergente y, por tanto, no verifica la condición de Cauchy. Sin embargo, *fijado un número natural* $h \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$0 < H_{n+h} - H_n = \frac{1}{n+h} + \frac{1}{n+h-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \frac{h}{n}$$

y, como $\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{h}{n}\right\} = 0$, por el principio de las sucesiones encajadas obtenemos que $\lim_{n\to\infty}\{H_{n+h} - H_n\} = 0$. Observa que si hacemos $h = 2^{2(m+n)} - n$ entonces, recordando que $H_{2^p} > 1 + p/2$, tenemos:

$$H_{n+h} - H_n = H_{2^{2(m+n)}} - H_n > H_{2^{2(m+n)}} - n > 1 + m + n - n = m + 1$$

lo que prueba que el conjunto $R_n = \{H_{n+h} - H_n : h \in \mathbb{N}\}$ ni siquiera está mayorado para ningún $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicios propuestos

73. ¿Puede existir una sucesión acotada de números reales, $\{x_n\}$, tal que $|x_m - x_n| \geqslant 10^{-10}$ siempre que $m \neq n$?.

74. **(T)** Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$, $M > 0$ y $p \in \mathbb{N}$, tales que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M\rho^n$ para todo $n \geqslant p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

75. **(T)** Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$ $p \in \mathbb{N}$, tales que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leqslant \rho|x_{n+1} - x_n|$ para todo $n \geqslant p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

76. Estudia la convergencia de las sucesiones definidas para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$\textbf{a)}\ x_1 = 1,\ \ x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}\,; \quad \textbf{b)}\ x_1 = \sqrt{2},\ \ x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}.$$

2.4. Sucesiones divergentes

Vamos a estudiar ahora un tipo muy particular de sucesiones *no convergentes* pero que, a pesar de ello, presentan una determinada regularidad. El teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que toda sucesión acotada tiene algún valor de adherencia; es natural preguntarse cómo son las sucesiones que no tienen ningún valor de adherencia. Desde luego, tales sucesiones no pueden ser acotadas; todavía más, en virtud del teorema antes citado, tales sucesiones *no pueden tener ninguna sucesión parcial acotada*. Esta condición necesaria es también suficiente, pues, si no hay sucesiones parciales acotadas, tampoco puede haber sucesiones parciales convergentes.

2.49 Proposición. *Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales equivalen las siguientes afirmaciones:*

a) $\{x_n\}$ no tiene ningún valor de adherencia;

b) $\{x_n\}$ no tiene ninguna sucesión parcial acotada;

c) Para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $|x_n| \geqslant K$.

Demostración. La equivalencia entre *a)* y *b)* ya ha sido justificada en el comentario precedente y también es evidente que *c)* implica *a)*. Por otra parte, si se satisface *b)*, entonces para todo $K > 0$ el conjunto $A_K = \{n \in \mathbb{N} : |x_n| < K\}$ es necesariamente finito, ya que, en otro caso, la proposición 1.42 implicaría la existencia de una sucesión parcial acotada de $\{x_n\}$ en contra de lo supuesto. Definamos, si $A_K =$, $m_K = 1$ y, en otro caso, $m_K = \text{máx}(A_K) + 1$. Se tiene entonces que $|x_n| \geqslant K$ para todo $n \geqslant m_K$. Hemos probado que *b)* implica *c)* lo que concluye la demostración. □

2.50 Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- **Positivamente divergente**, y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

- **Negativamente divergente**, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, si para todo número real $K < 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \leqslant K$.

- **Divergente** cuando $\{|x_n|\} \to +\infty$.

Observa que si $\{x_n\} \to +\infty$, o si $\{x_n\} \to -\infty$, entonces *también* $\{|x_n|\} \to +\infty$, pero la afirmación recíproca no es cierta en general.

Evidentemente, una sucesión divergente no está acotada y, por tanto, no es convergente. Es importante observar que las afirmaciones recíprocas no son ciertas. Por ejemplo, la sucesión $\{x_n\}$ dada para todo $n \in \mathbb{N}$ por $x_{2n-1} = 0$, $x_{2n} = n$, no está acotada y la sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente y ninguna de ellas es divergente. Estas observaciones elementales deben tenerse muy presentes para no caer en el error de afirmar que las sucesiones no convergentes o las no acotadas son divergentes.

En la siguiente proposición se exponen algunas propiedades elementales, pero importantes, de las sucesiones divergentes.

2.51 Proposición. *i) Supuesto $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.*

ii) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{-x_n\} \to -\infty$.

iii) La suma de una sucesión divergente con una sucesión acotada es una sucesión divergente del mismo tipo que la primera.

iv) Toda sucesión positivamente divergente (resp. negativamente divergente) está minorada (resp. mayorada).

v) La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

vi) El producto de dos sucesiones divergentes (resp. positivamente divergentes) es otra sucesión divergente (resp. positivamente divergente).

vii) El producto de una sucesión divergente por una sucesión que converge a un número positivo es otra sucesión divergente del mismo tipo que la primera.

Vamos a estudiar a continuación algunas importantes propiedades de las sucesiones divergentes de logaritmos y exponenciales.

2.52 Proposición. *a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:*

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{\mathrm{e}^{x_n}\} \to +\infty$.

ii) $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{\mathrm{e}^{x_n}\} \to 0$.

b) Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

iii) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to +\infty$.

iv) $\{x_n\} \to 0$ *si, y sólo si,* $\{\log(x_n)\} \to -\infty$.

Demostración. Si $\{x_n\} \to +\infty$ entonces, como $\mathrm{e}^{x_n} \geqslant 1+x_n > x_n$, se sigue que $\{\mathrm{e}^{x_n}\} \to +\infty$.

Si $\{x_n\} \to -\infty$ entonces, por lo ya visto, $\{\mathrm{e}^{-x_n}\} = \{1/\mathrm{e}^{x_n}\} \to +\infty$, por lo que, $\{\mathrm{e}^{x_n}\} \to 0$.

Hemos probado una parte de las afirmaciones *a)* del enunciado.

Si $\{x_n\} \to +\infty$ entonces, dado $K > 0$, existe $m_K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant \mathrm{e}^K$ y, por tanto, $\log(x_n) \geqslant K$.

Si $\{x_n\} \to 0$ siendo $x_n > 0$, se sigue que $\{1/x_n\} \to +\infty$ y, por lo ya visto, la sucesión $\{-\log(x_n)\} = \{\log(1/x_n)\}$ diverge positivamente, o sea, $\{\log(x_n)\} \to -\infty$.

Hemos probado una parte de las afirmaciones *b)* del enunciado.

Las afirmaciones restantes se deducen de las ya probadas procediendo de forma similar a como se hizo en la proposición 2.34. □

El siguiente resultado es de gran importancia. En él se comparan los "órdenes de crecimiento" de las funciones logaritmo, potencias y exponenciales, resultando que el logaritmo crece más lentamente que cualquier potencia positiva y éstas, a su vez, crecen más lentamente que la exponencial.

2.53 Proposición. *Sea* $\alpha > 0$, *y* $\{x_n\}$ *una sucesión de números positivos. Se verifica que:*

i) Si $\{x_n\} \to +\infty$, *entonces* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\log(x_n)\right|^\mu}{x_n^\alpha} = 0$ *cualquiera sea* $\mu \in \mathbb{R}$.

ii) Si $\{x_n\} \to 0$, *entonces* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n^\alpha \left|\log(x_n)\right|^\mu = 0$ *cualquiera sea* $\mu \in \mathbb{R}$.

iii) Si $\{x_n\} \to +\infty$, *entonces* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^\alpha}{\mathrm{e}^{\mu x_n}} = 0$ *cualquiera sea* $\mu > 0$.

Demostración. i) Como para $x > 0$ es $\log x \leqslant 2(\sqrt{x}-1) < 2\sqrt{x}$, se sigue que $\dfrac{\log x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. A partir de un cierto término en adelante se verificará que:

$$0 \leqslant \alpha \frac{\log(x_n)}{x_n^\alpha} = \frac{\log(x_n^\alpha)}{x_n^\alpha} < \frac{2}{\sqrt{x_n^\alpha}}.$$

Como $\{\sqrt{x_n^\alpha}\} \to +\infty$, por el principio de las sucesiones encajadas resulta $\left\{\dfrac{\log(x_n)}{x_n^\alpha}\right\} \to 0$. Ahora, si $\mu > 0$, tenemos que

$$\frac{\left|\log(x_n)\right|^\mu}{x_n^\alpha} = \left(\frac{\left|\log(x_n)\right|}{x_n^\rho}\right)^\mu$$

donde $\rho = \alpha/\mu$ es un número positivo, y deducimos de lo ya probado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\big|\log(x_n)\big|^{\mu}}{x_n^{\alpha}} = 0.$$

El caso en que $\mu \leqslant 0$ es inmediato.

ii) Es consecuencia directa del punto anterior puesto que $\{1/x_n\} \to +\infty$.

iii) Haciendo en i) $\alpha = 1$, sustituyendo $\{x_n\}$ por $\{\mathrm{e}^{x_n}\}$ y μ por α, se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^{\alpha}}{\mathrm{e}^{x_n}} = 0$, y podemos ahora sustituir x_n por μx_n para obtener finalmente que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\mu\, x_n}} = 0$. □

Vamos a introducir a continuación un concepto muy útil para estudiar la convergencia o divergencia de un producto de varias sucesiones.

2.54 Definición. Se dice que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Por ejemplo, las sucesiones $\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\}$ y $\{\log n\}$ son asintóticamente equivalentes (ver el ejercicio 65-a)).

Es de comprobación inmediata que la relación de *equivalencia asintótica*, que acabamos de definir, es una *relación de equivalencia*, es decir, tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Además dicha relación es *compatible con el producto de sucesiones*, es decir, si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ entonces $\{x_n z_n\} \sim \{y_n z_n\}$ cualquiera sea la sucesión $\{z_n\}$ de términos no nulos. Es importante observar que *la relación de equivalencia asintótica no es compatible con la suma de sucesiones*. Por ejemplo, si $x_n = n+1$, $y_n = n + 1/n$ y $z_n = -n$, es claro que $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ pero $\{x_n + z_n\} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es asintóticamente equivalente a $\{y_n + z_n\} = \{1/n\}$.

El siguiente resultado nos dice que para estudiar la convergencia de un producto de varias sucesiones podemos sustituir las que queramos por otras que sean asintóticamente equivalentes, sin que ello afecte a la convergencia o divergencia del producto ni a su eventual límite.

2.55 Proposición. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes y $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera. Se verifica que:*

i) $\{x_n z_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones tienen el mismo límite.

ii) $\{x_n z_n\}$ es divergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es divergente, en cuyo caso ambas sucesiones son divergentes del mismo tipo.

En particular, $\{x_n\}$ es convergente (resp. divergente) si, y sólo si, $\{y_n\}$ es convergente (resp. divergente), en cuyo caso ambas tienen igual límite (resp. son divergentes del mismo tipo).

Demostración. Las afirmaciones hechas en $i)$ y $ii)$ son consecuencia de que

$$\lim\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \lim\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\} = 1.$$

Si, por ejemplo, $\{y_n z_n\}$ es convergente (resp. divergente) entonces como

$$\{x_n z_n\} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}\{y_n z_n\},$$

se sigue, en virtud del teorema 2.18 (resp. del punto $(vi$ de la proposición 2.53), que $\{x_n z_n\}$ también es convergente (resp. divergente) y tiene el mismo límite (resp. el mismo tipo de divergencia) que $\{y_n z_n\}$.

La afirmación hecha al final del enunciado es consecuencia de lo anterior tomando $z_n = 1$. $\square$

2.4.1. Indeterminaciones y sucesiones de potencias

Frecuentemente hay que estudiar la convergencia o divergencia de una suma o producto de dos sucesiones precisamente cuando las reglas que hemos visto en secciones anteriores no pueden aplicarse. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las sucesiones $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ no está determinado por el de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Por ejemplo, si sabemos que $\{x_n\} \to +\infty$ y que $\{y_n\} \to -\infty$, ¿qué podemos decir del comportamiento de la sucesión $\{x_n + y_n\}$? Respuesta: absolutamente nada. Baste para convencerse de ello la consideración de los siguientes casos:

$$\begin{array}{lll} x_n = 2n, & y_n = -n; & \{x_n + y_n\} = \{n\} \to +\infty \\ x_n = n, & y_n = -2n; & \{x_n + y_n\} = \{-n\} \to -\infty \\ x_n = n+1, & y_n = -n; & \{x_n + y_n\} = \{1\} \to 1 \\ x_n = (-1)^n + n, & y_n = (-1)^n - n; & \{x_n + y_n\} = \{2(-1)^n\} \end{array}$$

En consecuencia, las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Análogamente, si sabemos que $\{x_n\} \to 0$ y que $\{y_n\}$ es divergente, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión $\{x_n y_n\}$; la cual se dice que es **"una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$". Las indeterminaciones que aparecen al estudiar el cociente de dos sucesiones divergentes o de dos sucesiones que convergen a cero, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$", pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

Todavía hemos de considerar nuevas indeterminaciones que van a surgir al considerar *sucesiones de potencias*, es decir, sucesiones de la forma $\{x_n^{y_n}\}$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos e $\{y_n\}$ es una sucesión cualquiera de números reales. Puesto que $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$, teniendo en cuenta las proposiciones 2.34 y 2.52, la convergencia o divergencia de la sucesión $\{x_n^{y_n}\}$ vendrá determinada por la de $\{y_n \log(x_n)\}$; la cual, a su vez, está determinada en todos los casos por el comportamiento de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, excepto cuando dicha sucesión $\{y_n \log(x_n)\}$ es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

a) $\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación "1^∞")

b) $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "∞^0")

c) $\{x_n\} \to 0$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "0^0")

Ni que decir tiene que no hay técnicas generales que permitan "resolver las indeterminaciones"; ¡no serían tales si las hubiera! Es por ello que, los límites indeterminados, requieren un estudio particular en cada caso. Muchos de los ejercicios propuestos en este capítulo consisten, precisamente, en estudiar sucesiones que responden a alguno de los tipos de indeterminación antes considerados. Esto no es por capricho; la mayoría de los límites que tienen algún interés matemático son límites indeterminados. Expondremos a continuación algunos resultados muy útiles para el estudio de los mismos. Empezaremos por un importante resultado que permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^∞" y "$0\,\infty$".

2.56 Teorema (Criterio de equivalencia logarítmica)**.** *Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:*

i) $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L$ *si, y sólo si,* $\lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$.

ii) $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty$ *si, y sólo si,* $\{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$.

iii) $\{x_n^{y_n}\} \to 0$ *si, y sólo si,* $\{y_n(x_n - 1)\} \to -\infty$.

Demostración. Puesto que $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$, las afirmaciones hechas en *i), ii)* y *iii)*, se deducen de las proposiciones 2.34 y 2.52, sin más que tener en cuenta que, en virtud del corolario 2.36, las sucesiones $\{\log(x_n)\}$ y $\{x_n - 1\}$ son asintóticamente equivalentes, por lo que, en virtud de la proposición 2.55, si una de las sucesiones $\{y_n \log(x_n)\}$ e $\{y_n(x_n - 1)\}$ es convergente (resp. divergente a $+\infty$ o a $-\infty$), la otra también es convergente con igual límite (resp. divergente a $+\infty$ o a $-\infty$). $\square$

Vamos a exponer a continuación un útil resultado que, en muchas ocasiones, permite resolver indeterminaciones de la forma "∞/∞".

2.57 Teorema (Criterio de Stolz)**.** *Sea $\{y_n\}$ una sucesión positivamente divergente y estrictamente creciente y sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión. Supongamos que*

$$\left\{\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}\right\} \to L$$

donde $L \in \mathbb{R}$*, o* $L = +\infty$*, o* $L = -\infty$*. Entonces se verifica también que* $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} \to L$ *.*

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $L \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe, por hipótesis, un número natural k, tal que para todo $q \geqslant k$ se verifica que

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{q+1} - x_q}{y_{q+1} - y_q} < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $y_{q+1} - y_q > 0$ obtenemos para todo $q \geqslant k$ que:

$$(L - \varepsilon/2)(y_{q+1} - y_q) \leqslant x_{q+1} - x_q \leqslant (y_{q+1} - y_q)(L + \varepsilon/2)$$

Sea $n \geqslant k$. Sumando estas desigualdades desde $q = k$ hasta $q = n$ obtenemos fácilmente:

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_k}{y_{n+1} - y_k} < L + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.9}$$

Teniendo en cuenta ahora la igualdad

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - L = \frac{x_k - L y_k}{y_{n+1}} + \left(1 - \frac{y_k}{y_{n+1}}\right)\left(\frac{x_{n+1} - x_k}{y_{n+1} - y_k} - L\right)$$

deducimos que:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - L\right| \leqslant \left|\frac{x_k - L y_k}{y_{n+1}}\right| + \left|\frac{x_{n+1} - x_k}{y_{n+1} - y_k} - L\right| \tag{2.10}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\big\{(x_k - L y_k)/y_{n+1}\big\} = 0$, existe un número natural q tal que, para todo $n \geqslant q$, se verifica

$$\left|\frac{x_k - L y_k}{y_{n+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Teniendo en cuenta (2.9) y (2.10), deducimos que para todo $n \geqslant \max\{k, q\}$ se verifica que:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - L\right| < \varepsilon.$$

Hemos probado, pues, que $\lim\limits_{n\to\infty}\big\{x_n/y_n\big\} = L$.

Supongamos ahora que $L = +\infty$. En tal caso, existirá un $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \geqslant k$ se tendrá:

$$\frac{x_{p+1} - x_p}{y_{p+1} - y_p} > 1 \implies x_{p+1} - x_p > y_{p+1} - y_p \tag{2.11}$$

Deducimos que la sucesión $\{x_n\}$ es eventualmente estrictamente creciente. Además, sumando las desigualdades (2.11) desde $p = k$ hasta $p = n-1$, resulta que para todo $n > k$ es $x_n - x_k > y_n - y_k$. Y, como $\{y_n\} \to +\infty$, se sigue que $\{x_n\} \to +\infty$. Podemos suponer, pues no es restrictivo hacerlo, que $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Podemos usar ahora lo ya probado, intercambiando las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, para obtener que

$$\lim\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\} = \lim\left\{\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}\right\} = 0$$

de donde se sigue que $\{x_n/y_n\} \to +\infty$.

El caso $L=-\infty$ se reduce al previo cambiando la sucesión $\{x_n\}$ por $\{-x_n\}$. $\square$

Es importante observar que, aún en las hipótesis del Criterio de Stolz, puede ocurrir que $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ sea convergente pero no lo sea $\left\{\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}$; es decir, el Criterio de Stolz da una condición suficiente pero no necesaria para la convergencia o divergencia de $\{x_n/y_n\}$ (véase el ejercicio 82).

Del Criterio de Stolz se deducen dos útiles criterios para estudiar la convergencia de sucesiones de medias aritméticas o geométricas.

2.58 Proposición (Criterio de la media aritmética)**.** *Supongamos que* $\{a_n\} \to L$ *donde* L *es un número real, o* $L=+\infty$*, o* $L=-\infty$*. Entonces se verifica que*

$$\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\} \to L.$$

Demostración. Basta aplicar el Criterio de Stolz a las sucesiones $x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $y_n=n$. $\square$

2.59 Proposición (Criterio de la media geométrica)**.** *Supongamos que* $\{a_n\} \to L$ *donde* $\{a_n\}$ *es una sucesión de números positivos y* L *es un número real o bien* $L=+\infty$*. Entonces se verifica que*

$$\left\{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right\} \to L.$$

Demostración. Lo afirmado se deduce del criterio de la media aritmética y de las proposiciones 2.34 y 2.52 teniendo en cuenta que

$$\log\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right) = \frac{\log(a_1)+\log(a_2)+\cdots+\log(a_n)}{n}. \ \square$$

2.60 Corolario. *Supongamos que* $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to L$ *donde* $\{x_n\}$ *es una sucesión de números positivos y* L *es un número real o bien* $L=+\infty$*. Entonces se verifica que* $\{\sqrt[n]{x_n}\} \to L$.

Demostración. Aplíquese el criterio de la media geométrica a la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Ejercicios propuestos

77. Supongamos que $\{x_n\} \to 0$, siendo $-1 < x_n \neq 0$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Prueba que $\{(1+x_n)^\alpha - 1\}$ es asintóticamente equivalente a $\{\alpha x_n\}$.

78. Prueba que la sucesión $\{\log n!\}$ es asintóticamente equivalente a $\{n \log n\}$.

79. Prueba que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{1+1/n^\alpha} - 1\right\}$ es asintóticamente equivalente a $\left\{1/n^{\alpha+1}\right\}$, donde $\alpha > 0$.

80. Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

a) $x_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, donde $\alpha > -1$.

b) $x_n = \sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)} - n$, donde $k \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

c) $x_n = \left(\dfrac{\alpha\sqrt[n]{a} + \beta\sqrt[n]{b}}{\alpha+\beta}\right)^n$ donde $a > 0$, $b > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \neq 0$.

d) $x_n = \left(\dfrac{1 + 2^{p/n} + 3^{p/n} + \cdots + p^{p/n}}{p}\right)^n$, donde $p \in \mathbb{N}$.

e) $x_n = n\left(\dfrac{1 + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \dfrac{1}{k+1}\right)$, donde $k \in \mathbb{N}$.

f) $x_n = \left(\dfrac{3}{4}\dfrac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}\right)^{n^2}$

g) $x_n = n\left[\left(1 + \dfrac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n - 1\right]$

h) $x_n = \dfrac{1}{n}\left(n + \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{n-2}{3} + \cdots + \dfrac{2}{n-1} + \dfrac{1}{n} - \log(n!)\right)$

i) $x_n = \left(\dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^{n\log n}$

j) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}$ $(p, q \in \mathbb{N})$

81. Sean a, b números positivos; definamos $x_k = a + (k-1)b$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y sea G_n la media geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y A_n su media aritmética. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{G_n}{A_n}$.

Aplicación: Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

82. Sea $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, $x \neq y$. Definamos $z_{2n-1} = x_n$, y $z_{2n} = y_n$. Prueba que la sucesión $\left\{\dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}\right\}$ es convergente.

83. Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones de números positivos tales que $\{(x_n)^n\} \to x > 0$, $\{(y_n)^n\} \to y > 0$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, con $\alpha + \beta = 1$, calcula $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n)^n$.

2.4.2. Límites superior e inferior

Sea $\{x_n\}$ una sucesión **acotada** y para cada $n\in\mathbb{N}$ definamos

$$A_n = \{x_p : p \geqslant n\}$$

Como $A_n \subseteq A_1$ y, por hipótesis, A_1 es un conjunto acotado, A_n también está acotado. Definamos

$$\alpha_n = \text{ínf}(A_n), \qquad \beta_n = \sup(A_n)$$

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ se tiene que $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$, $\beta_{n+1} \leqslant \beta_n$. Por tanto la sucesión $\{\alpha_n\}$ es creciente y $\{\beta_n\}$ es decreciente. Además $\alpha_1 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant \beta_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y concluimos, por el teorema 2.14, que ambas sucesiones son convergentes. El número $\alpha = \text{lím}\{\alpha_n\}$ se llama **límite inferior de la sucesión** $\{x_n\}$ y se representa por $\text{lím inf}\{x_n\}$ y también $\underline{\text{lím}}\{x_n\}$. El número $\beta = \text{lím}\{\beta_n\}$ se llama **límite superior de la sucesión** $\{x_n\}$ y se representa por $\text{lím sup}\{x_n\}$ y también por $\overline{\text{lím}}\{x_n\}$. Nótese que $\alpha \leqslant \beta$ y además α y β vienen dados por:

$$\alpha = \text{lím}\{\alpha_n\} = \sup\{\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}, \qquad \beta = \text{lím}\{\beta_n\} = \text{ínf}\{\beta_n : n\in\mathbb{N}\}$$

2.61 Teorema. *Una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, su límite superior y su límite inferior son iguales, en cuyo caso ambos coinciden con el límite de la sucesión.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ acotada, $\alpha = \text{lím inf}\{x_n\}$, $\beta = \text{lím sup}\{x_n\}$. Supongamos que $\{x_n\}$ es convergente con $\text{lím}\{x_n\} = x$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \geqslant m_0$ es $x - \varepsilon/2 < x_p < x + \varepsilon/2$. Por tanto $x - \varepsilon/2$ es un minorante de $A_{m_0} = \{x_p : p \geqslant m_0\}$ y, en consecuencia, $x - \varepsilon/2 \leqslant \alpha_{m_0}$. También, por análogas razones, $\beta_{m_0} \leqslant x + \varepsilon/2$. Como además $\alpha_{m_0} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \beta_{m_0}$, resulta que:

$$x - \varepsilon/2 \leqslant \alpha_{m_0} \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \beta_{m_0} \leqslant x + \varepsilon/2 \tag{2.12}$$

De donde se sigue que $\beta - \alpha \leqslant \varepsilon$. Hemos probado que para todo $\varepsilon > 0$ es $\beta \leqslant \alpha + \varepsilon$ lo que, como ya sabemos, implica que $\beta \leqslant \alpha$ y, en consecuencia $\alpha = \beta$. Deducimos ahora de las desigualdades 2.12 que, para todo $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon/2 \leqslant \alpha = \beta \leqslant x + \varepsilon/2$ y, por tanto, $x \leqslant \alpha = \beta \leqslant x$, o sea, $x = \alpha = \beta$.

Recíprocamente, si $\alpha = \beta$, como para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\alpha_n \leqslant x_n \leqslant \beta_n$, podemos aplicar el principio de las sucesiones encajadas y deducimos que $\{x_n\}$ es convergente y $\text{lím}\{x_n\} = \alpha = \beta$. □

Como tendremos ocasión de comprobar en el próximo capítulo, es conveniente extender la definición de límites superior e inferior a sucesiones no acotadas.

2.62 Definición. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

i) Si $\{x_n\}$ no está mayorada definimos $\operatorname{lím\,sup}\{x_n\} = +\infty$.

ii) Si $\{x_n\}$ no está minorada definimos $\operatorname{lím\,inf}\{x_n\} = -\infty$.

iii) Si $\{x_n\}$ está mayorada, $\beta_n = \sup\{x_p : p \geqslant n\}$, y $\{\beta_n\} \to \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, definimos $\operatorname{lím\,sup}\{x_n\} = \beta$.

iv) Si $\{x_n\}$ está minorada, $\alpha_n = \operatorname{ínf}\{x_p : p \geqslant n\}$, y $\{\alpha_n\} \to \alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definimos $\operatorname{lím\,inf}\{x_n\} = \alpha$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$ se conviene que $-\infty < x < +\infty$.

2.63 Proposición. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera de números positivos. Se verifica que:*

$$\underline{\text{lím}}\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \leqslant \underline{\text{lím}}\{\sqrt[n]{x_n}\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{\sqrt[n]{x_n}\} \leqslant \overline{\text{lím}}\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \tag{2.13}$$

Ejercicios propuestos

84. Calcula los límites superior e inferior de la sucesión $\{x_n\}$ dada en cada caso por:

$$a)\ x_n = (-1)^n, \quad b)\ x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \quad c)\ x_n = n - E(n/3)$$

85. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas. Prueba que:

i) $\underline{\text{lím}}\{x_n\} = -\overline{\text{lím}}\{-x_n\}$.

ii)

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\} + \underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \underline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\} + \overline{\text{lím}}\{y_n\}$$

iii) Si $x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\}\underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \underline{\text{lím}}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\}\overline{\text{lím}}\{y_n\}.$$

iv) Si $\text{lím}\{x_n\} = x > 0$, entonces

$$\underline{\text{lím}}\{x_n y_n\} = x\,\underline{\text{lím}}\{y_n\}, \quad \overline{\text{lím}}\{x_n y_n\} = x\,\overline{\text{lím}}\{y_n\}.$$

Prueba con ejemplos que las desigualdades en ii) y iii) pueden ser estrictas.

86. Sea $\{x_n\}$ acotada, y sea z un valor de adherencia de dicha sucesión. Prueba que $\underline{\text{lím}}\{x_n\} \leqslant z \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\}$.

87. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Prueba que $\operatorname{lím\,sup}\{x_n\} = \operatorname{lím\,inf}\{x_n\} = L$ si, y sólo si, $\{x_n\} \to L$.

Capítulo 3

Series de números reales

Aquiles alcanzó a la tortuga y se sentó confortablemente sobre su espalda. ¿De modo que has llegado al final de nuestra carrera?– dijo la tortuga –. ¿A pesar de que realmente consiste en una serie infinita *de distancias? Yo creía que algún necio había demostrado que esto no podía hacerse.*

Lewis Carroll

3.1. Conceptos básicos

En este capítulo continuamos con el estudio de las sucesiones empezado en el capítulo anterior. La novedad es que ahora vamos a considerar un tipo *particular* de sucesiones que, sin exagerar, puede afirmarse que son las más útiles del Análisis. Estas sucesiones se llaman *series*.

En lo que sigue vamos a considerar sucesiones de números reales por lo que evitaremos esa innecesaria precisión.

3.1 Definición. Dada una sucesión $\{a_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{A_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$, es decir:

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,\ A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \dots$$

o, si te gusta más, $A_1 = a_1$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$. La sucesión $\{A_n\}$ así definida se llama *serie de término general* a_n o *serie definida por la sucesión* $\{a_n\}$, y la representaremos por $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ o, más sencillamente, $\sum a_n$. El número $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ se llama *suma parcial de orden* n de la serie $\sum a_n$.

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión***. Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, ***los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series***. En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es “acotada”, “convergente” o “positivamente divergente”.

Si una serie $\sum a_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*. Naturalmente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es el número definido por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

La igualdad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$, hay un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k - S\right| < \varepsilon$.

3.2 Ejemplo (Serie geométrica). Dado un número x, la sucesión $\{1+x+x^2+\cdots+x^n\}$ se llama serie geométrica de razón x. Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$. Es costumbre representar la serie geométrica de razón x con el símbolo $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$. Dicha serie converge si, y sólo si, $|x| < 1$, en cuyo caso se verifica que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \,. \tag{3.1}$$

Todas las afirmaciones hechas se deducen de que si $x \neq 1$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}. \tag{3.2}$$

De esta igualdad se deduce que para $x \neq 1$ la convergencia de la serie geométrica $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ equivale a la convergencia de la sucesión $\{x^n\}$.

Si $|x| < 1$ entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$ y obtenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1).$$

Si $|x| > 1$ o $x = -1$ la sucesión $\{x^n\}$ no converge; y si $x = 1$ entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1$ tampoco converge.

♦

3.3 Ejemplo (Serie armónica). La serie de término general $1/n$, es decir, la sucesión $\{H_n\}$ donde $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, que simbólicamente representamos por $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, se llama **serie armónica**. Se verifica que la serie armónica diverge positivamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\} = +\infty.$$

En efecto, tomando logaritmos en las conocidas desigualdades:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

deducimos

$$\frac{1}{k+1} < \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}$$

que podemos escribir en la forma:

$$\frac{1}{k+1} < \log(k+1) - \log(k) < \frac{1}{k} \tag{3.3}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, sumamos las desigualdades (3.3) para $k = 1, 2, \ldots, n$ y obtenemos

$$H_{n+1} - 1 < \log(n+1) < H_n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.4}$$

La desigualdad $H_n > \log(n+1)$ implica que la serie armónica es positivamente divergente. De las desigualdades (3.4) también se deduce que que para todo $n \in \mathbb{N}$, es:

$$1 < \frac{H_n}{\log(n+1)} < \frac{H_{n+1}}{\log(n+1)} < 1 + \frac{1}{\log n}$$

y, por el principio de las sucesiones encajadas, concluimos que $\{H_n/\log n\} \to 1$. Es decir las sucesiones $\{H_n\}$ y $\{\log(n)\}$ son asintóticamente equivalentes. ♦

3.4 Ejemplo (Serie armónica alternada). Se llama así la serie de término general $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; es decir, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Se verifica que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a $\log 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\log 2.$$

Para probarlo consideremos la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = H_n - \log(n)$. Teniendo en cuenta las desigualdades (3.3), obtenemos:

$$x_n - x_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Luego $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente. Además, por (3.4), $x_n > H_n - \log(n+1) > 0$. Concluimos que $\{x_n\}$ es convergente.

Pongamos $A_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Tenemos que:

$$A_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n =$$

$$= x_{2n} + \log(2n) - x_n + \log n = x_{2n} - x_n + \log 2$$

Como $\{x_{2n}\}$ es una sucesión parcial de la sucesión convergente $\{x_n\}$ tenemos que $\{x_{2n} - x_n\} \to 0$; y por tanto $\lim\{A_{2n}\} = \log 2$. Como $A_{2n-1} = A_{2n} + \frac{1}{2n}$, deducimos que también $\lim\{A_{2n-1}\} = \log 2$. Concluimos que $\lim\{A_n\} = \log 2$. ♦

El siguiente ejemplo te ayudará a entender el concepto de serie convergente. Vamos a ver que modificando el orden de los términos en una serie convergente podemos obtener otra serie convergente con distinta suma.

3.5 Ejemplo (Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma). Como hemos visto, la serie armónica alternada es la sucesión que se obtiene sumando ***consecutivamente*** los términos de la sucesión

$$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \dots\dots\right\} \tag{3.5}$$

Vamos a cambiar el orden de los términos en esta sucesión poniendo uno positivo seguido de dos negativos manteniendo sus posiciones relativas. Obtenemos así la sucesión

$$\left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, -\frac{1}{16}, \dots\dots\right\}, \tag{3.6}$$

cuya serie asociada, obtenida sumando ***consecutivamente*** sus términos, es la sucesión $\{S_n\}$ dada por:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1\\
S_2 &= 1-\frac{1}{2}\\
S_3 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\\
S_4 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\\
S_5 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\\
S_6 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\\
\dots\dots &= \dots\dots\\
S_9 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\\
\dots\dots &= \dots\dots\\
S_{3n} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{4j-2}-\frac{1}{4j}\right)
\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
S_{3n} &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right)-\frac{1}{4n}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{4n}\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}.
\end{aligned}$$

Deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{2n}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2}\log 2.$$

Es claro que $\lim\{S_{3n}-S_{3n-1}\} = \lim\{S_{3n}-S_{3n-2}\} = 0$ de donde se sigue que:

$$\lim\{S_n\} = \frac{1}{2}\log 2.$$

Es decir, hemos probado que la serie obtenida reordenando los términos de la serie armónica alternada por el criterio de sumar uno positivo seguido de dos negativos, es convergente y su suma es $\frac{1}{2}\log 2$. ♦

La *suma* de una serie convergente no es una suma

El ejemplo anterior pone claramente de manifiesto que la *suma* de una serie convergente no es una suma en el sentido usual de la palabra, es decir, no es una suma algebraica de números. Observa que los *conjuntos* de números (3.5) y (3.6) son los mismos pero las series correspondientes tienen *distinta* suma; la primera tiene *suma* $\log 2$ y la segunda $\frac{1}{2}\log 2$. Si la suma de una serie consistiera en sumar los infinitos términos de una sucesión, entonces el orden en que los sumáramos sería indiferente porque la suma de números tiene la propiedad conmutativa. Debes tener claro, por tanto, que cuando calculas la suma de una serie no estás haciendo una suma infinita sino que estás calculando un *límite de una sucesión* cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión dada. Insisto: calcular la suma de una serie no es una operación algebraica, no consiste en sumar infinitos términos, es un proceso analítico que supone un límite.

3.1.1. La particularidad del estudio de las series

Ahora viene la pregunta del millón: si las series no son nada más que sucesiones, ¿por qué dedicarles una atención especial? La respuesta a esta pregunta es que en el estudio de las series hay una *hipótesis implícita*. A saber: se supone que las series son sucesiones demasiado difíciles de estudiar *directamente*.

La característica que distingue el estudio de las series es la siguiente: se trata de deducir propiedades de la serie $\{A_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, a partir del comportamiento de $\{a_n\}$. Es decir, los resultados de la teoría de series dan información sobre la sucesión $\{A_n\}$ haciendo hipótesis sobre la sucesión $\{a_n\}$. ¿Por qué esto es así?, ¿no sería más lógico, puesto que lo que queremos es estudiar la serie $\{A_n\}$, hacer hipótesis directamente sobre ella? La razón de esta forma de proceder es que, por lo general, no se conoce una expresión de la suma $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ que permita hacer su estudio de forma directa; es decir, la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ no es posible "realizarla" en la práctica. Por ello, en el estudio de las series se supone implícitamente que *la sucesión* $\{a_n\}$ *es el dato que podemos utilizar*. Naturalmente, esto hace que el estudio de las series se preste a muchas confusiones porque, aunque su objetivo es obtener propiedades de la serie $\{A_n\}$, las hipótesis y la notación $\sum a_n$ hacen siempre referencia a la sucesión $\{a_n\}$, por lo que puede caerse en el error de creer que lo que se está estudiando es dicha sucesión $\{a_n\}$ cuando lo que realmente se estudia es la sucesión $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$. Un error muy común y que debes evitar es confundir las sucesiones $\{a_n\}$ y $\sum a_n$: ¡son sucesiones muy diferentes!

Si lo piensas un poco, esta forma de proceder no es del todo nueva. Ya estás acostumbrado a usar la derivada de una función para estudiar propiedades de la función; pues bien, la situación aquí es parecida: para estudiar la serie $\sum a_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ (la función) estudiamos la sucesión $\{a_n\}$ (la derivada). Un buen ejemplo de esto que digo son los criterios de convergencia que veremos dentro de poco.

Otra dificultad adicional en el estudio de las series es la notación tan desafortunada que se emplea. En la mayoría de los textos se representa con el mismo símbolo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la serie (que es una sucesión) y su suma (que es un límite que no siempre existe). Esto es un disparate: se está confundiendo una sucesión con un número. ¿Es lo mismo la sucesión $\{1/n\}$ que el número 0 que es su límite? En ninguna parte verás escrita la igualdad disparatada $\{1/n\} = 0$ ¿Por qué entonces, al tratar con series, se confunde el número $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ con $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2^k}$ que es la sucesión $\displaystyle\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right\} = \left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\}$?

Quizás esto se debe a que, parece increíble pero es cierto, no hay acuerdo unánime para representar de forma apropiada la serie de término general a_n. La notación que estamos usando aquí, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$, tiene la ventaja de que es clara y evita las confusiones que estoy comentando, pues permite distinguir entre la serie y su eventual suma. Tiene el inconveniente de que la mayoría de los autores no la usan (quizás porque la desconocen). Estoy convencido de que las ventajas de esta notación compensan ampliamente este posible inconveniente. Es más, confío en que dicha notación acabe imponiéndose y siendo aceptada universalmente. Pero esto no va a suceder pasado mañana, por eso te advierto de que en los libros encontrarás las usuales notaciones confusas que no distinguen entre la serie (una sucesión) y su posible límite (su suma).

Todavía queda una última sorpresa. Estamos de acuerdo en que las series son sucesiones. ¿Muy especiales? En absoluto. Toda sucesión podemos verla, si así nos interesa, como una serie. Pues *toda sucesión $\{a_n\}$ es la serie definida por la sucesión de sus diferencias*, esto es, por la sucesión $\{d_n\}$ dada por:

$$d_1 = a_1,\ d_2 = a_2 - a_1,\ d_3 = a_3 - a_2, \ldots, d_{n+1} = a_{n+1} - a_n, \ldots$$

Es claro que $a_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} d_j$. Por tanto, toda sucesión podemos considerarla como una serie. En resumen, series y sucesiones son lo mismo: toda serie es una sucesión y toda sucesión puede ser vista como una serie. *Lo que distingue a la teoría de series es el punto de vista específico de su estudio*, pero sus resultados pueden aplicarse a cualquier sucesión.

Convenios de notación. Usaremos la notación $\sum a_n$ para representar la serie de término general a_n. Por tanto, una última vez lo repito, $\sum a_n$ es una sucesión, más concretamente, $\sum a_n$ es la aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ que a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

A pesar de lo dicho, también usaré de vez en cuando la notación $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ para la serie de término general a_n. Creo que un uso adecuado de ambas notaciones es la mejor forma de ayudarte para que tengas siempre presente que la sucesión que estamos estudiando es $\sum a_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y no $\{a_n\}$.

A veces conviene considerar, por comodidad, series que empiezan en un índice entero $q \in \mathbb{Z}$, usaremos en tal caso la notación $\displaystyle\sum_{n \geqslant q} a_n$. Por ejemplo, es más cómodo escribir $\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} \frac{1}{\log n}$ que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\log(n+2)}$.

3.1.2. Propiedades básicas de las series convergentes

Es importante que te des cuenta de que cambiar un solo término en la sucesión $\{a_n\}$ se traduce en cambiar infinitos términos en la serie $\sum a_n$. El siguiente resultado nos dice que si cambiamos un número finito de términos en una sucesión $\{a_n\}$ ello no afecta a la posible convergencia de la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ pero sí afecta a la suma de dicha serie.

3.6 Proposición. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones y supongamos que hay un número $q \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant q + 1$ es $a_n = b_n$. Entonces se verifica que las series $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ o bien convergen ambas o no converge ninguna, y en el primer caso se verifica que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{j=1}^{q} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{j=1}^{q} b_j .$$

Demostración. Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $\alpha = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_j$, $\beta = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} b_j$. Las afirmaciones hechas se deducen todas de que para todo $n \geqslant q + 1$ se verifica la igualdad:

$$\sum_{k=q+1}^{n} a_k = A_n - \alpha = \sum_{k=q+1}^{n} b_k = B_n - \beta$$

Observa que los números α y β son constantes fijas. De la igualdad $A_n + \alpha = B_n + \beta$, válida para todo $n \geqslant q + 1$, deducimos que las series $\sum a_n = \{A_n\}$ y $\sum b_n = \{B_n\}$ ambas convergen o ninguna converge. Cuando hay convergencia tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \{A_n - \alpha\} = \lim_{n\to\infty} \{A_n\} - \alpha = \lim_{n\to\infty} \{B_n - \beta\} = \lim_{n\to\infty} \{B_n\} - \beta .$$

Lo que prueba la igualdad del enunciado. □

Consideremos una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$. Dado $q\in\mathbb{N}$ definamos $b_n = 0$ para $1 \leqslant n \leqslant q$, $b_n = a_n$ para todo $n \geqslant q+1$. La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ se llama **serie resto de orden** q de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$. Es usual representar dicha serie resto con la notación $\sum\limits_{n\geqslant q+1} a_n$. De la proposición anterior deducimos que las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant q+1} a_n$ ninguna converge o ambas convergen y, cuando esto ocurre es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{q} a_k = \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n.$$

No lo olvides: para calcular la suma de una serie convergente debes tener siempre presente el índice desde el que empieza la serie.

El siguiente resultado es importante porque establece una condición necesaria general para la convergencia de una serie.

3.7 Proposición (Condición necesaria para la convergencia de una serie). *Para que la serie* $\sum a_n$ *sea convergente es necesario que* $\operatorname{lím}\{a_n\} = 0$.

Demostración. Si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces $\operatorname{lím}\{A_n\} = \operatorname{lím}\{A_{n-1}\} = S$ es un número real. Como para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$ tenemos que $a_n = A_n - A_{n-1}$, deducimos que $\operatorname{lím}\{a_n\} = \operatorname{lím}\{A_n\} - \operatorname{lím}\{A_{n-1}\} = S - S = 0$. □

Esta condición necesaria no es suficiente: $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ pero la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ no es convergente. Se trata de una condición necesaria para la convergencia de una serie, por tanto cuando dicha condición no se cumple la serie no es convergente.

3.8 Ejemplo. Las series $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ no son convergentes porque:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}}, \qquad \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \to 1.$$

♦

Ejercicios propuestos

88. Prueba, usando resultados conocidos para sucesiones, que si las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ son convergentes, y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, entonces se verifica que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\alpha a_n + \beta b_n)$ también es convergente y su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

89. Supongamos que la serie $\sum_{n\geqslant 1}(a_n + b_n)$ es convergente. ¿Qué se puede decir de la convergencia de las series $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$?

90. Prueba que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ es convergente y calcula su suma.

Sugerencia. Expresa el término general en la forma $x_n - x_{n+1}$ para una conveniente sucesión $\{x_n\}$.

91. Prueba que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3n+4}{n^3+3n^2+2n}$ es convergente y calcula su suma.

Sugerencia. Factoriza el polinomio x^3+3x^2+2x y expresa el término general de la serie como sumas de fracciones más sencillas.

92. Prueba las igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}\right)=\log 2$

b) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{\log 2}{2}.$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{3}{2}\log 2.$

3.2. Criterios de convergencia para series de términos positivos

Una serie $\sum a_n$ tal que $a_n \geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, se dice que es una *serie de términos positivos*. Observa que una serie de términos positivos es una sucesión creciente por lo que o bien es convergente (cuando está mayorada) o es positivamente divergente.

3.9 Proposición (Criterio básico de convergencia). *Una serie de términos positivos* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente si, y sólo si, está mayorada, es decir, existe un número* $M>0$ *tal que para todo*

$n\in\mathbb{N}$ *se verifica que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M$*, en cuyo caso su suma viene dada por:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Una serie de términos positivos que no está mayorada es (positivamente) divergente.

3.10 Ejemplo. La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ es convergente. En efecto, para todo $k\in\mathbb{N}$ se verifica:

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

Y, por tanto, para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2$. ♦

3.11 Proposición. *La serie* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ *es convergente y su suma es el número* e.

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \tag{3.7}$$

El número e *es irracional.*

Demostración. Recuerda que se define $0! = 1$ por lo que la serie del enunciado es la sucesión:

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!} = \left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right\} = \left\{1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right\}$$

Pongamos $T_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ y $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant S_n \end{aligned}$$

Hemos probado que para todo $n\in\mathbb{N}$ es $T_n \leqslant S_n$.

Ahora, dado $m\in\mathbb{N}$ para todo $n \geqslant m$ se tiene que:

$$T_n \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Sabemos que $\lim\{T_n\} = \mathrm{e}$, por lo que tomando límites:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\{T_n\} \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!} = S_m$$

La desigualdad obtenida $\mathrm{e} \geqslant S_m$ es válida para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto implica que la sucesión $\{S_n\}$ es convergente y $\mathrm{e} \geqslant S = \lim\{S_n\}$. Pero también, tomando límites en la desigualdad $T_n \leqslant S_n$, es $\mathrm{e} \leqslant S$. Por tanto:

$$\mathrm{e} = S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

De esta igualdad se deduce fácilmente que el número e es irracional. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$0 < \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} < \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \frac{1}{n!}\frac{1}{n}$$

Si e fuera racional, $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, multiplicando por $q!$ la desigualdad:

$$0 < \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$$

se tiene que:

$$0 < (q-1)!p - q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q} \leqslant 1.$$

Pero el número $(q-1)!p - q! \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$ es un número entero y por tanto es imposible que sea mayor que 0 y menor que 1. Esta contradicción muestra que e es irracional. □

Si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es una serie de términos positivos, suele escribirse $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ para indicar que dicha serie converge. Diremos que una serie de términos positivos es divergente para indicar que es positivamente divergente.

Teniendo en cuenta la proposición 3.6, los criterios que siguen pueden aplicarse para estudiar la convergencia de series cuyos términos son todos positivos a partir de uno de ellos en adelante.

3.12 Proposición (Criterio básico de comparación). *Sean* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *y* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \leqslant b_n$ *para todo* $n > k$. *Entonces se verifica que si la serie* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *es convergente, también* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente o, equivalentemente, si la serie* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es divergente también* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *es divergente.*

Demostración. Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Las hipótesis hechas implican que para todo $n > k$ es $A_n \leqslant B_n + A_k$. Deducimos que si $\{B_n\}$ está mayorada también lo está $\{A_n\}$. □

3.13 Ejemplo. La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\log n}$ es divergente porque es de términos positivos, $\dfrac{1}{\log n}\geqslant\dfrac{1}{n}$ y la serie armónica es divergente.

La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ es convergente porque es de términos positivos y:

$$\log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\log\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\log\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)<\frac{1}{n^2+2n}<\frac{1}{n^2},$$

y la serie $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2}$ es convergente.

La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ es convergente. Para ello usamos otra vez la desigualdad:

$$\frac{1}{n+1}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

De la que se deduce:

$$0<\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}.$$

♦

3.14 Proposición (Criterio límite de comparación). *Sean* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_n$ *y* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}b_n$ *dos series de términos positivos, y supongamos que*

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\to L\in\mathbb{R}_o^+\cup\{+\infty\}.$$

a) Si $L=+\infty$ *y* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}b_n$ *es divergente también* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_n$ *es divergente.*

b) Si $L=0$ *y* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}b_n$ *es convergente también* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_n$ *es convergente.*

c) Si $L\in\mathbb{R}^+$ *las series* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_n$ *y* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}b_n$ *son ambas convergentes o ambas divergentes.*

En particular, si dos sucesiones de números positivos, $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *son asintóticamente equivalentes, las respectivas series,* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *ambas convergen o ambas divergen.*

Demostración. Supongamos que $L\in\mathbb{R}^+$. Sea $0<\alpha<L<\beta$. Todos los términos de la sucesión $\{a_n/b_n\}$, a partir de uno en adelante, están en el intervalo $]\alpha,\beta[$, es decir, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant k$ es $\alpha<a_n/b_n<\beta$, y, por tanto, $\alpha\, b_n<a_n<\beta\, b_n$. Concluimos, por el criterio de comparación, que la convergencia de una de las series implica la convergencia de la otra. Queda, así, probado el punto *c)* del enunciado. Los puntos *a)* y *b)* se prueban de manera parecida. □

3.15 Ejemplo. Las series $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ son divergentes porque son de términos positivos y se verifica que sus términos generales son asintóticamente equivalentes al término general de la serie armónica $\dfrac{1}{n}$.

La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\right)$ es convergente por ser de términos positivos y verificarse que $\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n^2}}-1\sim\dfrac{1}{5n^2}$ y la serie $\sum\dfrac{1}{5n^2}$ es convergente. ♦

El siguiente criterio nos va a permitir estudiar la convergencia de unos tipos de series que se usan con frecuencia para comparar con otras.

3.16 Proposición (Criterio de condensación de Cauchy)**.** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos. Se verifica que las series $\{A_n\}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, donde*

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,, \quad B_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}$$

ambas convergen o ambas divergen.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} A_n &\leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \leqslant \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} = B_n \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}B_n &= \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} \leqslant \\ &\leqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &= A_{2^n} \end{aligned}$$

Las desigualdades $A_n \leqslant B_n$ y $B_n \leqslant 2\,A_{2^n}$, implican, en virtud del criterio básico de convergencia, que las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n = \{A_n\}$ y $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n} = \{B_n\}$ ambas convergen o ambas divergen. □

Para poder usar los criterios de comparación, necesitamos conocer ejemplos de series convergentes con las que poder comparar una serie dada. Unas series de términos positivos muy útiles para comparar con otras series son las siguientes.

3.17 Proposición (Series de Riemann). *Dado un número real α, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ se llama serie de Riemann de exponente α. Dicha serie es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.*

Demostración. Si $\alpha \leqslant 0$, entonces la sucesión $\{1/n^\alpha\}$ no converge a cero y, por tanto, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ es divergente. Si $\alpha > 0$, aplicando el criterio de condensación con $a_n = 1/n^\alpha$, obtenemos que

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n} = \sum_{n\geqslant 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n\geqslant 0} (2^{1-\alpha})^n$$

es una serie geométrica de razón $2^{1-\alpha}$, por lo que será convergente si, y sólo si, $2^{1-\alpha} < 1$, o, equivalentemente, $\alpha > 1$. $\square$

3.18 Ejemplo. La serie $\sum \log\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, donde $\alpha\in\mathbb{R}$, es una serie de términos positivos. No converge si $\alpha \leqslant 0$ porque entonces su término general no tiende a cero. Supuesto $\alpha > 0$, su término general es asintóticamente equivalente a $\dfrac{1}{n^\alpha}$ por lo que converge si, y sólo si, $\alpha > 1$.

La serie $\sum n^\beta\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right)$, donde α y β son números reales, no converge para ningún valor de β si $\alpha < 0$, porque en tal caso su término general no converge a cero. Si $\alpha = 0$ converge si $-\beta > 1$. Si $\alpha > 0$ converge si y sólo si, $\alpha - \beta > 1$ porque es una serie de términos positivos y su término general es asintóticamente equivalente a $\dfrac{1}{n^{\alpha-\beta}}$. ♦

Vamos a estudiar a continuación unas series más generales que las series de Riemann. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ se llama **serie de Bertrand** de exponentes α y β.

3.19 Proposición (Series de Bertrand). *La serie* $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ *converge si* $\alpha > 1$ *cualquiera sea* β*, y también si* $\alpha = 1$ *y* $\beta > 1$*. En cualquier otro caso es divergente.*

Demostración. Sabemos que cualesquiera sean $\rho > 0$ y $\mu\in\mathbb{R}$ se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\log n)^\mu}{n^\rho} = 0.$$

Supongamos que $\alpha > 1$ y sea λ un número verificando que $1 < \lambda < \alpha$. Podemos escribir:

$$n^\lambda \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta} = \frac{(\log n)^\mu}{n^\rho}$$

donde $\rho = \alpha - \lambda$ y $\mu = -\beta$. Deducimos así que

$$\lim_{n\to\infty} n^\lambda \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta} = 0.$$

Puesto que la serie $\sum \dfrac{1}{n^\lambda}$ es convergente, el criterio límite de comparación implica que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ es convergente.

Si $\alpha < 1$ un razonamiento parecido muestra que la serie diverge cualquiera sea β.

Sea ahora $\alpha = 1$. Entonces, si $\beta \leqslant 0$, tenemos que $\dfrac{1}{n(\log n)^\beta} \geqslant \dfrac{1}{n}$ para todo $n \geqslant 3$, y el criterio de comparación implica que la serie es divergente. Sea, pues, $\beta > 0$. Podemos aplicar el criterio de condensación con $a_n = \dfrac{1}{n(\log n)^\beta}$. Tenemos que:

$$\sum_{n\geqslant 2} 2^n a_{2^n} = \sum_{n\geqslant 2} 2^n \frac{1}{2^n(\log(2^n))^\beta} = \frac{1}{(\log 2)^\beta}\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^\beta}$$

es una serie que converge si, y sólo si, $\beta > 1$; y el criterio de condensación nos dice que lo mismo le ocurre a la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\log n)^\beta}$. □

3.20 Ejemplo. Se trata de estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\log n!}{n^r}$ donde $r\in\mathbb{R}$. Aplicando el criterio de Stolz, es fácil probar que $\log n!$ es asintóticamente equivalente a $n\log n$. Por tanto, a efectos de convergencia, la serie dada se comporta igual que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\log n}{n^{r-1}}$ la cual es una serie de Bertrand con $\beta = -1$ y $\alpha = r - 1$. Dicha serie converge si, y sólo si, $r - 1 > 1$, o sea, $r > 2$. ♦

Vamos a estudiar a continuación dos criterios de convergencia que se aplican a series que pueden compararse con una serie geométrica. El primero de estos criterios parte de que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = x < 1$ esto lleva, en el caso general de una serie términos positivos, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$, a considerar el comportamiento de la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$.

3.21 Proposición (Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)). *Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.*

a) Si $\displaystyle\limsup\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = L < 1$ *la serie* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

b) Si $\displaystyle\liminf\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \ell > 1$ *o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, *entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *no es convergente.*

Cuando se verifica que

$$\liminf\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \leqslant 1 \leqslant \limsup\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$$

la serie puede ser convergente o divergente.

En particular, si se verifica que $\lim\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ *entonces:*

a) Si $L < 1$ *la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *converge.*

b) Si $L > 1$ *o si* $L = +\infty$*, la sucesión* $\{a_n\}$ *no converge a cero y por tanto la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *no es convergente.*

Cuando $L = 1$ *la serie puede ser convergente o divergente.*

Demostración. a) Sea λ un número tal que $L < \lambda < 1$. La definición de límite superior de una sucesión:

$$L = \lim\{\beta_n\} = \inf\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{donde} \qquad \beta_n = \sup\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k} : k \geqslant n\right\}$$

implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $L \leqslant \beta_n < \lambda$. Como en particular, $L \leqslant \beta_{n_0} < \lambda$, para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que:

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}a_{n_0} \leqslant \lambda^{n-n_0}a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}}\lambda^n.$$

Como $0 < \lambda < 1$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\lambda^n$ es convergente. Deducimos, en virtud del criterio de comparación, que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

b) Supongamos que $\ell < +\infty$. Sea λ un número tal que $1 < \lambda < \ell$. La definición de límite inferior de una sucesión:

$$\ell = \lim\{\alpha_n\} = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{donde} \qquad \alpha_n = \inf\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k} : k \geqslant n\right\}$$

implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $\lambda < \alpha_n \leqslant \ell$. Obtenemos, al igual que antes, que que para todo $n \geqslant n_0$ es $a_n \geqslant \dfrac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}}\lambda^n$. Como $\lambda > 1$ se sigue que la sucesión $\{a_n\}$ diverge positivamente y, con mayor razón, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ diverge positivamente.

Si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es creciente a partir del lugar k y no puede ser convergente a cero por lo que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Finalmente, si $\ell = +\infty$ entonces $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \to +\infty$ y, por tanto, la sucesión $\{a_n\}$ es eventualmente creciente y no puede ser convergente a cero por lo que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente. .

□

3.22 Ejemplo. Sea la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$, donde x es un número real. Es una serie de términos positivos por lo que podemos aplicar el criterio del cociente para estudiar su convergencia. Pongamos $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}x^{2n+2}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{-2n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}x^2 \to \frac{x^2}{4}$$

El criterio del cociente nos dice que si $\dfrac{x^2}{4} < 1$, es decir, $|x| < 2$, la serie es convergente; si $\dfrac{x^2}{4} > 1$, es decir, $|x| > 2$, la serie no es convergente porque $\{a_n\}$ no converge a cero. El caso en que $x^2 = 4$, o sea $x = \pm 2$, se tiene que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2n+2}{2n+1} \geqslant 1.$$

Y concluimos que la serie no converge para $x = \pm 2$. ♦

El segundo criterio parte de que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\sqrt[n]{a_n} = x < 1$, esto lleva, en el caso general de una serie de términos positivos, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$, a considerar el comportamiento de la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$.

3.23 Proposición (Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)). *Sea* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *una serie de términos positivos y sea*

$$\limsup\{\sqrt[n]{a_n}\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

a) Si $L < 1$ *la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

b) Si $L > 1$ *o si* $L = +\infty$ *o si hay un número* $k \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geqslant k$ *es* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, *entonces* $\{a_n\}$ *no converge a cero y por tanto la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es divergente.*

En el caso de que $\limsup\{\sqrt[n]{a_n}\} = 1$ *la serie puede ser convergente o divergente.*

En particular, si se verifica que $\lim\{\sqrt[n]{a_n}\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ *entonces:*

a) Si $L < 1$ *la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *converge.*

b) Si $L>1$ o si $L=+\infty$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

En el caso de que $\lim\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}=1$ *la serie puede ser convergente o divergente.*

Demostración. a) Sea λ un número tal que $L<\lambda<1$. La definición de límite superior:

$$L=\overline{\lim}\{\beta_n\}=\inf\{\beta_n : n\in\mathbb{N}\} \quad \text{donde} \quad \beta_n=\sup\{\sqrt[k]{a_k} : k\geqslant n\}$$

implica que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant n_0$ es $L\leqslant\beta_n<\lambda$. En particular $\beta_{n_0}<\lambda$. Lo que implica que $\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lambda$, es decir $a_n\leqslant\lambda^n$, para todo $n\geqslant n_0$. Puesto que $0<\lambda<1$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\lambda^n$ es convergente y, en virtud del criterio de comparación, se sigue que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

b) Sea $L\in\mathbb{R}^+$ con $L>1$. Entonces para todo $n\in\mathbb{N}$ tenemos que $1<L\leqslant\beta_n$, lo que implica que 1 no es mayorante del conjunto $\left\{\sqrt[k]{a_k} : k\geqslant n\right\}$, es decir, hay algún $k\geqslant n$ tal que $1<\sqrt[k]{a_k}$ y, por tanto, $1\leqslant a_k$. Resulta así que para todo $n\in\mathbb{N}$ hay algún $k\geqslant n$ tal que $a_k>1$. Por tanto, la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero y, en consecuencia, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Finalmente, si $L=+\infty$, la sucesión $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ no está mayorada y, con mayor razón, tampoco lo está $\{a_n\}$, por tanto, la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero y, en consecuencia, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente. $\square$

3.24 Ejemplo. Sea la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^3-2n}$. Como es una serie de términos positivos podemos estudiar su convergencia usando el criterio de la raíz. Pongamos $a_n=\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^3-2n}$. Tenemos que:

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-2}=\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^2\to \mathrm{e}^{-2}<1.$$

Concluimos que la serie es convergente. ♦

Comparación de los criterios del cociente y de la raíz. En la proposición 2.62 vimos que:

$$\underline{\lim}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}\leqslant\underline{\lim}\{\sqrt[n]{a_n}\}\leqslant\overline{\lim}\{\sqrt[n]{a_n}\}\leqslant\overline{\lim}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$$

Estas desigualdades implican que siempre que el criterio del cociente proporciona información sobre la convergencia de una serie, el criterio de la raíz también proporciona dicha información. Pero puede ocurrir que el criterio del cociente no proporcione información y el de la raíz sí. Un ejemplo de ello lo proporciona la siguiente serie. Sean $0 < a < b < 1$ y definamos $x_{2n} = a^{2n}$, $x_{2n-1} = b^{2n-1}$. La serie $\sum x_n$ es una serie de términos positivos claramente convergente porque $x_n \leqslant b^n$ y la serie $\sum b^n$ es convergente porque es una serie geométrica de razón $0 < b < 1$. Como, evidentemente, $\limsup \sqrt[n]{x_n} = b < 1$, el criterio de la raíz nos dice que la serie $\sum x_n$ es convergente. Por otra parte, como:

$$\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}} = \frac{b^{2n+1}}{a^{2n}} = b\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} \to +\infty, \qquad \frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} = \frac{a^{2n}}{b^{2n-1}} = b\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \to 0$$

deducimos que $\underline{\lim}\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\} = 0$ y $\overline{\lim}\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\} = +\infty$, por lo que el criterio del cociente no informa sobre la convergencia de la serie $\sum x_n$.

Cuando $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ y $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, también es $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$. En esta situación los criterios del cociente y de la raíz no proporcionan información suficiente sobre el comportamiento de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$. Por ejemplo, para las series de Riemann, $a_n = 1/n^\alpha$, se tiene que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ cualquiera sea α. Observa que *estos criterios solamente pueden proporcionar información sobre la convergencia de series que pueden compararse con una serie geométrica*.

El siguiente criterio suele aplicarse cuando fallan los anteriores.

3.25 Proposición (Criterio de Raabe (1832)). *Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y pongamos $R_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Supongamos que $\lim\{R_n\} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

i) Si $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

ii) Si $L < 1$ o $L = -\infty$ o si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Demostración. i) Las hipótesis hechas implican que existen $\alpha > 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $k \geqslant n_0$ es $R_k \geqslant \alpha$. Sea $\delta = \alpha - 1 > 0$. Tenemos que:

$$R_k - 1 = (k-1) - k\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant \delta \qquad (k \geqslant n_0),$$

por lo que

$$a_k \leqslant \frac{1}{\delta}\big((k-1)a_k - ka_{k+1}\big) \qquad (k \geqslant n_0).$$

Sumando estas desigualdades desde $k = n_0$ hasta $k = n > n_0$, obtenemos que:

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k \leqslant \frac{1}{\delta}\big((n_0-1)a_{n_0} - na_{n+1}\big) < \frac{1}{\delta}(n_0-1)a_{n_0}.$$

Por el criterio básico de convergencia para series de términos positivos, deducimos que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

ii) Si $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces $(n-1)a_n - na_{n+1} \leqslant 0$ y resulta que la sucesión $\{na_{n+1}\}$ es creciente para $n \geqslant k$, luego $na_{n+1} \geqslant ka_{k+1}$, es decir, para todo $n \geqslant k$ es $a_{n+1} \geqslant ka_{k+1}\dfrac{1}{n}$ y, por el criterio de comparación, deducimos que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente. □

El criterio de Raabe suele aplicarse cuando el criterio del cociente no proporciona información, es decir, cuando $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$. En tal caso la sucesión:

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$$

es de la forma $v_n(u_n - 1)$ donde $v_n = -n$ y $u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$. Aplicando el criterio de equivalencia logarítmica tenemos que:

$$\text{lím}\,\{R_n\} = L \iff \text{lím}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{-n} = \text{lím}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n} = \mathrm{e}^L$$

con los convenios usuales para los casos en que $L = \pm\infty$.

3.26 Proposición (Forma alternativa del criterio de Raabe). *Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que* $\text{lím}\,\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. *Pongamos* $S_n = \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n$.

i) Si $S_n \to \mathrm{e}^L$ con $L > 1$ o si $S_n \to +\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

ii) Si $S_n \to \mathrm{e}^L$ con $L < 1$ o si $S_n \to 0$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Los criterios de convergencia que acabamos de estudiar hacen siempre hipótesis sobre la sucesión $\{a_n\}$ para obtener información sobre el comportamiento de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$. Ya dijimos antes que esto es típico del estudio de las series. Pero no lo olvides: no estamos estudiando la sucesión $\{a_n\}$ sino la sucesión $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$.

Ejercicios propuestos

93. Sea $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Prueba que las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_n}{1+a_n}$, ambas convergen o ninguna converge.

b) Supuesto que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge, ¿qué puede decirse de las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^2$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sqrt{a_n\, a_{n+1}}$?

94. Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos. Se supone que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Prueba que $\{na_n\} \to 0$.

Sugerencia: si $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, entonces $\{S_{2n} - S_n\} \to 0$.

95. Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente de números positivos. Dar condiciones que garanticen que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$ es convergente.

96. Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos. ¿Cuándo puede asegurarse que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$ es convergente? Da ejemplos de sucesiones $\{a_n\}$ decrecientes y con límite 1 tales que la serie anterior sea en un caso convergente y en otro caso divergente.

97. (**Criterio logarítmico**) Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y pongamos $L_n = \dfrac{-\log(a_n)}{\log n}$.

i) Si $\{L_n\} \to L$, donde $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

ii) Si $\{L_n\} \to L$, donde $L < 1$ o $L = -\infty$, o bien si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $L_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

98. Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2^{(-1)^n}}{2^n}$ usando el criterio del cociente y el de la raíz. Comenta el resultado.

99. Estudia la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$; b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)^n}{3^n n!}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^n}{n!}a^n \quad (a>0)$; d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)a^{\log n} \quad (a>0)$; f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}a^{\log(\log n)} \quad (a>0)$

g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; h) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}-\left(1+1/n^2\right)^{n^2}\right)$

i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\big((2n)!\big)^3}{2^{6n}(n!)^6}$; j) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^{\alpha}\left(\sqrt[n]{n+1/n}-\sqrt[n]{n}\right)$

k) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(n^{1/n^2}-1)$; l) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

m) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{(2n)^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; n) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{((n+2)!)^3}{(n+1)^{3n}}9^n$

100. Estudia la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}\right)a^{\log n} \quad (a>0)$; b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}{5\cdot 7\ldots(2n+3)}\right)^{\alpha} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}\log\left(1+\frac{1}{n^{\beta}}\right) \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+)$; d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n n!}{\sqrt[3]{n}\,5\cdot 8\cdot 11\ldots(5+3n)}$

e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2\cdot 3\ldots(n+2)}{5\cdot 6\ldots(n+5)}\right)^{\alpha} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$; f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(2-\sqrt{2})(2-\sqrt[3]{2})\cdots(2-\sqrt[n]{2})$

g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)n^{\alpha}} \quad (a>0,\alpha\in\mathbb{R})$; h) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{((3n!))^2}{4^{6n}(n!)^6}$

3.3. Series conmutativamente convergentes. Convergencia absoluta.

Hemos visto en el ejemplo 3.5 que permutando los términos de la serie armónica alternada podemos obtener una serie convergente pero con distinta suma. Esto nos dice que la serie armónica alternada no es “conmutativamente” convergente. Precisemos este concepto.

Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ la serie definida por la sucesión $\{a_n\}$. Dada una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definamos una sucesión $\{b_n\}$ por $b_n = a_{\pi(n)}$. En estas condiciones se dice que la serie $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ se ha obtenido *permutando términos* en la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

Puedes comprobar que en el citado ejemplo 3.5, la permutación de términos realizada en la serie armónica alternada viene dada por la biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$\pi(3n-2) = 2n-1, \ \pi(3n-1) = 4n-2, \ \pi(3n) = 4n.$$

Se dice que una serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es **conmutativamente convergente**[1] si para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se verifica que la serie definida por la sucesión $\{a_{\pi(n)}\}$, es decir la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)} = \{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$, es convergente.

Observa que, tomando como biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$ la identidad, si la serie $\sum a_n$ es conmutativamente convergente entonces ella misma *es convergente*. En otras palabras, una serie es conmutativamente convergente, cuando es convergente y también son convergentes todas las series que se obtienen de ella por reordenación de sus términos.

Recuerda que la suma de una serie de términos positivos convergente es igual al extremo superior del conjunto de todas las sumas parciales; es intuitivo que aunque permutemos los términos de la serie dicho extremo superior va a seguir siendo el mismo, esto quiere decir que las series de términos positivos convergentes van a ser conmutativamente convergentes. Veremos enseguida que, en efecto, esto es así. Pero antes conviene introducir un tipo particular de convergencia que está muy relacionada con la convergencia conmutativa.

Se dice que una serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ es convergente.

Recuerda que si una sucesión $\{x_n\}$ converge a x, entonces $\{|x_n|\}$ converge a $|x|$. Por tanto, si una serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ converge, también converge la sucesión que se obtiene tomando valores absolutos $\{|a_1 + a_2 + \cdots + a_n|\}$; pero esta sucesión ***no es igual*** a $\sum_{n\geqslant 1} |a_n| = \{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$. Por eso *puede ocurrir que una serie sea convergente pero no sea absolutamente convergente*. La serie armónica alternada es un ejemplo de serie convergente que no es absolutamente convergente.

Observa que si una sucesión $\{a_n\}$ es tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\}$ es finito, es decir,

[1]En la mayoría de los textos a las series *conmutativamente* convergentes se les llama *incondicionalmente* convergentes.

existe $q \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant q$ es $a_n = |a_n| \geqslant 0$, entonces, si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente también es absolutamente convergente, pues se tiene:

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant q} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant q} |a_n| \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} |a_n| \text{ converge}.$$

Un razonamiento análogo prueba que si el conjunto $\{n\in\mathbb{N} : a_n > 0\}$ es finito, entonces la convergencia de la serie equivale a su convergencia absoluta. Por tanto, para que una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a$ pueda ser convergente pero no ser absolutamente convergente los conjuntos $\{n\in\mathbb{N} : a_n > 0\}$ y $\{n\in\mathbb{N} : a_n < 0\}$ han de ser ambos infinitos.

3.27 Teorema. *Toda serie absolutamente convergente es conmutativamente convergente. Además, si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es absolutamente convergente, entonces para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se verifica que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

Demostración. Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. Por hipótesis $\sum |a_n| = \{B_n\}$ es convergente. Probaremos en primer lugar que la serie $\sum a_n = \{A_n\}$ también es convergente. Dado $\varepsilon > 0$, la condición de Cauchy para $\{B_n\}$ nos dice que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|B_q - B_p\right| = \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todos } p, q\in\mathbb{N} \text{ tales que } q > p \geqslant n_0. \tag{3.8}$$

Deducimos que para todos $p, q\in\mathbb{N}$ tales que $q > p \geqslant n_0$ se verifica que

$$\left|A_q - A_p\right| = \left|a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Lo que prueba que la serie $\sum a_n$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente.

Pongamos $A = \lim\{A_n\}$, y sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se verifica (3.8) y además $\left|A_{n_0} - A\right| < \varepsilon/2$. Definamos

$$m_0 = \max\{j\in\mathbb{N} : \pi(j) \leqslant n_0\}, \quad F_m = \{\pi(k) : 1 \leqslant k \leqslant m\}.$$

Para $m > m_0$, se verifica que $F_m \supsetneqq \{1, 2, \ldots, n_0\}$. Por tanto, el conjunto $H_m = F_m \setminus \{1, 2, \ldots, n_0\}$ no es vacío. Sea $p = \min(H_m)$, $q = \max(H_m)$. Tenemos entonces que $q > p - 1 \geqslant n_0$, y por tanto:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{m} a_{\pi(j)} - A\right| &= \left|\sum_{k\in F_m} a_k - A\right| = \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k\in H_m} a_k - A\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - A\right| + \sum_{k\in H_m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=p}^{q} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hemos probado así que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A$. □

El resultado recíproco es también cierto, es decir, se verifica que toda serie conmutativamente convergente es absolutamente convergente. Este resultado se puede precisar mejor. El siguiente teorema se debe a Riemann.

3.28 Teorema. *Sea* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *una serie convergente pero no absolutamente convergente y sea* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Entonces existe una biyección* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)}$ *es convergente y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha.$$

En consecuencia, la convergencia absoluta es equivalente a la convergencia conmutativa. Por supuesto, para estudiar la convergencia absoluta de una serie, $\sum a_n$, se aplican los criterios de convergencia para series de términos positivos a la serie $\sum |a_n|$.

Nos queda por solucionar un problema; a saber: si una serie no converge absolutamente puede ocurrir que dicha serie sea convergente como, por ejemplo, le ocurre a la serie armónica alternada. ¿Cómo podemos estudiar la convergencia de una serie que no converge absolutamente? Pues usando criterios de convergencia no absoluta. Hay varios de tales criterios pero aquí solamente vamos a ver uno que se refiere a *series alternadas* que son aquellas en que los términos van alternando signos, como en la serie armónica alternada, es decir, son series de la forma $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} a_n$ o $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n a_n$ donde $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.29 Proposición (Criterio de Leibniz para series alternadas). *Supongamos que la sucesión* $\{a_n\}$ *es decreciente y convergente a cero. Entonces la serie alternada* $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} a_n$ *es convergente. Además, si* $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ *y* $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, *entonces para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se verifica que* $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$.

Demostración. Probaremos que la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ es convergente. Teniendo en cuenta que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$, deducimos las siguientes desigualdades:

$$S_{2n} \leqslant S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} = S_{2n+2} = S_{2n+1} - a_{2n-2} \leqslant S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leqslant S_{2n-1}$$

Hemos obtenido que para todo $n \in \mathbb{N}$ es: $S_{2n} \leqslant S_{2n+2} \leqslant S_{2n+1} \leqslant S_{2n-1}$. Por tanto, la sucesión $\{S_{2n}\}$ es creciente y $\{S_{2n-1}\}$ es decreciente. Además, ambas están acotadas porque $S_2 \leqslant S_{2n} \leqslant$

$S_{2n-1} \leqslant S_1$. Deducimos que dichas sucesiones convergen, y como $S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \to 0$, concluimos que $\{S_n\}$ converge.

Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \text{lím}\{S_n\}$. Puesto que

$$S = \text{lím}\{S_{2n-1}\} = \text{ínf}\{S_{2n-1} : n\in\mathbb{N}\} = \text{lím}\{S_{2n}\} = \sup\{S_{2n} : n\in\mathbb{N}\},$$

se verifica que $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}$, de donde:

$$0 \leqslant S - S_{2n} \leqslant a_{2n+1}, \quad \text{y} \quad -a_{2n} \leqslant S - S_{2n-1} \leqslant 0. \tag{3.9}$$

En consecuencia $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. □

Teniendo en cuenta la proposición 3.6, el criterio de Leibniz prueba que las series de la forma $\sum(-1)^{n+1}a_n$ donde $\{a_n\} \to 0$ y la sucesión $\{a_n\}$ *es monótona a partir de un cierto término en adelante*, son convergentes (aunque la acotación del error antes obtenida ya no tiene por qué ser válida).

Ejercicios propuestos

101. Estudia la convergencia absoluta y la convergencia no absoluta de las siguientes series.

$a)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{2+(-1)^n}{n}$

$c)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^{\alpha}$ $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}$

$e)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$ $\qquad$ $f)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n!}}{n^{n+1}}$

$g)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\log(n+2)}{n+2}$ $\qquad$ $h)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

Capítulo 4

Funciones reales continuas

En matemáticas, la evidencia es enemiga de la corrección.
Bertrand Russell

4.1. Funciones reales

Las funciones son las herramientas principales para la descripción matemática de una situación real. Todas las *fórmulas* de la Física no son más que funciones: expresan cómo ciertas magnitudes (por ejemplo el volumen de un gas) dependen de otras (la temperatura y la presión). El concepto de función es tan importante que muchas ramas de la matemática moderna se caracterizan por el tipo de funciones que estudian. No es de extrañar, por ello, que el concepto de función sea de una gran generalidad. Además, se trata de uno de esos conceptos cuyo contenido esencial es fácil de comprender pero difícil de formalizar.

4.1 Definición. Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un único elemento de B*.

En esta definición la dificultad radica en precisar matemáticamente lo que se entiende por *regla*. Como solamente vamos a trabajar con funciones elementales considero que no es necesario dar más precisiones.

Observa que una función son *tres* cosas: el conjunto A donde está definida, el conjunto B

donde toma valores y la regla que la define. En este curso estamos interesados principalmente en funciones entre conjuntos de números reales, es decir, A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$; con frecuencia $B = \mathbb{R}$. Estas funciones se llaman *funciones reales de una variable real*.

Convenio. En lo que sigue solamente consideraremos funciones reales y, si no se especifica otra cosa, se entiende que $B = \mathbb{R}$.

Por tanto, para darnos una función nos deben decir, en principio, el subconjunto A de $\mathbb{R}$ donde suponemos que la función está definida y la regla que asigna a cada número de A un único número real. El conjunto A recibe el nombre de *dominio* de la función.

Las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena. Si f es una función y x es un número que está en su dominio, se representa por $f(x)$ (léase "f evaluada en x" o "el valor de f en x") el número que f asigna a x, que se llama *imagen de x por f* .

Es muy importante distinguir entre f (una función) y $f(x)$ (un número real).

El símbolo $f : A \to \mathbb{R}$ se utiliza para indicar que f es una función *cuyo dominio es A* (se supone, como hemos dicho antes, que A es un subconjunto de $\mathbb{R}$). También es frecuente usar el simbolismo $x \mapsto f(x)$, $(x \in A)$.

Es importante advertir que las propiedades de una función dependen de la regla que la define *y también de su dominio*, por ello *dos funciones que tienen distintos dominios se consideran distintas funciones aunque la regla que las defina sea la misma.*

4.2 Definición (Igualdad de funciones). Dos funciones f y g son iguales cuando tienen igual dominio y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Notemos también que aunque estamos acostumbrados a representar a las funciones mediante *fórmulas*, no siempre es posible hacerlo.

4.3 Ejemplo. Consideremos las funciones siguientes.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$.

b) $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^2$.

c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

d) Sea $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 6}{x^2 - 1}$

Según lo antes dicho, las funciones en a) y b) son distintas. De hecho tienen propiedades distintas. Observa que la función definida en b) es creciente y la definida en a) no lo es.

La función definida en c) es llamada *función de Dirichlet*. Nótese que no es fácil calcular los valores de dicha función porque no siempre se sabe si un número real dado es racional o irracional. ¿Es $\mathrm{e}+\pi$ racional? Pese a ello la función está correctamente definida.

En d) no nos dan explícitamente el dominio de f por lo que se entiende que f está definida siempre que $f(x)$ tenga sentido, es decir, siempre que, $x^2-1\neq 0$, esto es, para $x\neq\pm 1$. ♦

El convenio del dominio. Cuando una función se define por una fórmula "$f(x)$ = fórmula" y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de x para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real. Éste es el llamado *dominio natural* de la función.

Dada una función $f:A\to\mathbb{R}$, y un conjunto no vacío $C\subset A$, el conjunto de las imágenes por f de todos los elementos de C:

$$f(C)=\{f(x):x\in C\}$$

se llama *imagen de C por f*. Cuando $C=A$, el conjunto $f(A)$ se llama *conjunto imagen* de f y también *rango* o *recorrido* de f.

Operaciones con funciones

La mayoría de las funciones que vamos a usar en este curso pertenecen a la clase de las *funciones elementales*. Se llaman así porque pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones bien conocidas realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Suma, producto y cociente de funciones. Dadas dos funciones $f,g:A\to\mathbb{R}$, se define su *función suma* (resp. *producto*) como la función que a cada número $x\in A$ asigna el número real $f(x)+g(x)$ (resp. $f(x)g(x)$). Dicha función se representa con el símbolo $f+g$ (resp. fg). Se define la función cociente de f por g como la función que a cada número $x\in A$ con $g(x)\neq 0$ asigna el número real $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dicha función se representa por $\dfrac{f}{g}$. También podemos multiplicar una función f por un número α para obtener la función αf que asigna a cada $x\in A$ el número $\alpha f(x)$. De todas formas, el producto de un número por una función puede considerarse como un caso particular del producto de funciones, pues se identifica el número α con la *función constante* que toma como único valor α.

Las propiedades de la suma y el producto de funciones son las que cabe esperar y su demostración es inmediata pues se reducen a las correspondientes propiedades de los números.

4.4 Proposición. *Cualesquiera sean las funciones* $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ *se verifican las siguientes propiedades:*

Asociativas. $(f+g)+h = f+(g+h);\quad (fg)h = f(gh)$

Conmutativas. $f+g = g+f;\quad fg = gf$

Distributiva. $(f+g)h = fh + gh$

4.5 Definición (Composición de funciones). Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones con $f(A) \subset B$. En tal caso, la función $h : A \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ se llama *composición de* g *con* f y se representa por $h = g \circ f$. Observa que la función $g \circ f$, solamente está definida cuando la imagen de f está contenida en el dominio de g. La composición de funciones es asociativa.

4.6 Definición (Funciones inyectivas). Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es inyectiva en un conjunto $C \subset A$, si en puntos distintos de C toma valores distintos; es decir, $x, y \in C$ y $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$. Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en A.

4.7 Definición (La función inversa de una función inyectiva). Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, puede definirse una nueva función en el conjunto $B = f(A)$, $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$, que llamaremos *función inversa de* f, que a cada número $y \in B$ asigna el único número $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Equivalentemente $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in A$, y también $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in B$.

4.8 Definición (Funciones monótonas). Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es creciente (resp. decreciente) en un conjunto $C \subseteq A$, si f conserva (resp. invierte) el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Se dice que f es creciente (resp. decreciente) cuando lo es en todo su dominio de definición. Se dice que una función es *monótona* para indicar que es creciente o decreciente. Una función monótona e inyectiva se dice que es *estrictamente monótona*, pudiendo ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

4.9 Definición (Gráfica de una función). La gráfica de una función $f : A \to \mathbb{R}$ es el conjunto de pares de números $\{(x, f(x)) : x \in A\}$.

La gráfica de una función pone de manifiesto, a simple vista, muchas de sus propiedades. Para dibujar gráficas de funciones se precisan herramientas de cálculo que estudiaremos más adelante.

Un error frecuente, que debes evitar, consiste en confundir una función con su gráfica. Este error procede de una manera inapropiada de representar las funciones que consiste en escribir

$y = f(x)$. De esta forma se introduce una nueva letra “y” para representar el valor que la función f toma en x. Ahora la cosa empieza a estar confusa ¿la función es y?, ¿la función es f?, ¿la función es $f(x)$? Esto procede de la Física en donde se interpreta que x es la magnitud o variable “independiente” e y es la magnitud o variable “dependiente”. Peor todavía, ¿es y una variable o una función? Si has usado con frecuencia esta forma de representar las funciones no me extraña que puedas tener dudas sobre su significado. Aclaremos esto. La única forma razonable de interpretar una igualdad como $y = f(x)$, es entender que dicha igualdad representa al conjunto de puntos del plano que la satisfacen, es decir, representa la gráfica de f.

Observaciones sobre el concepto general de función y el formalismo que usamos para definir funciones.

Hemos definido una función como tres cosas: un conjunto A, un conjunto B y una regla que a cada elemento x de A hace corresponder un elemento de B. Lo único que interesa de esa regla es que esté correctamente definida. Por ejemplo, la regla que a cada número $x \in [0, 1]$ hace corresponder el dígito de su desarrollo decimal que ocupa el lugar cien mil millones, está correctamente definida aunque no sea muy útil, pues no es posible calcular el dígito que le corresponde a ningún número irracional. Te pongo este ejemplo para que aprecies lo general que es el concepto de función que hemos definido. En particular, debes notar que una función no tiene por qué estar dada por una “fórmula”. Pero, seguidamente, te digo que no debes preocuparte por esta generalidad porque en este curso solamente vamos a trabajar con funciones definidas mediante “fórmulas”; además, “fórmulas” que, salvo excepciones, definirán “funciones elementales”, esto es, funciones obtenidas al realizar sumas, productos, cocientes y composiciones de logaritmos, exponenciales, potencias y funciones trigonométrica.

Ya hemos usado antes el formalismo que se emplea en matemáticas para definir una función, pero quiero detenerme en él porque debes entenderlo perfectamente. Para definir una función solemos empezar diciendo “sea $f: A \to \mathbb{R}$ la función dada por…”. Con esto estamos diciendo tres cosas: que la función está definida en A, que toma valores en $\mathbb{R}$, y que representamos con la letra f la regla. El error más frecuente que se produce aquí se debe al hecho de que, con frecuencia, el conjunto A no es el dominio natural de definición de la función sino un subconjunto del mismo, y esto puede tener muy importantes consecuencias que hay que tener muy presentes en todo momento. Seguidamente, para acabar de definir la función, se especifica la regla que a cada elemento de A asocia un número real, lo que suele expresarse por “la función dada por “$f(x)$ =fórmula o función elemental” para todo $x \in A$”. Se suele volver a insistir en que la variable x toma solamente valores en A para indicar que no nos interesa lo que pueda pasar fuera de A.

Ten en cuenta que la letra con la que representamos una función, suele usarse f, podemos elegirla a gusto y no tiene mayor importancia siempre que no se preste a confusiones. Lo importante son los datos que definen la función: los conjuntos A, B (nosotros suponemos que $B = \mathbb{R}$) y la regla. Veamos un ejemplo más de esta forma de proceder para que no te queden dudas.

a) Sea

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ la función dada por } f(x)=x^3-4x^2+x+6 \text{ para todo } x\in\mathbb{R} \tag{4.1}$$

En la figura 4.1 se representa parte de la gráfica de esta función.

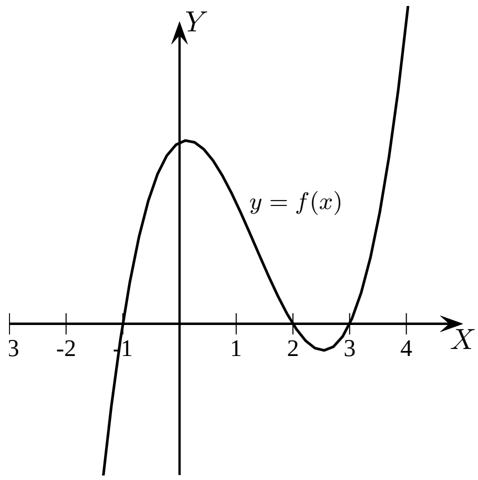


Figura 4.1. La función $f(x)=x^3-4x^2+x+6$

La imagen de esta función es $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Esta función no tiene máximo ni mínimo, no es creciente y tampoco es decreciente. No es inyectiva y su función inversa no está definida.

b) Sea

$$f:[0,2]\to\mathbb{R} \text{ la función dada por } f(x)=x^3-4x^2+x+6 \text{ para todo } x\in[0,2] \tag{4.2}$$

Observa que, aunque de forma deliberada uso la misma letra, f, para representar la regla, la función definida en (4.2) es muy diferente que la definida en (4.1). Aunque la regla es la misma, en (4.2) solamente nos interesa lo que pasa en el intervalo $[0,2]$. La imagen de esta función es $f([0,2])=[0,6]$. Claramente, la función (4.2) es estrictamente decreciente, tiene máximo y mínimo y es inyectiva. Su función inversa está definida (aunque no sea fácil de calcular).

4.2. Continuidad

En este capítulo vamos a estudiar con algún detalle un concepto teórico importante que es el de continuidad. Para motivar la definición que vamos a dar de continuidad, consideremos una ley física de la forma $P=f(V)$, que relaciona los valores de una “variable independiente V”

(podemos pensar que es el volumen de un gas) con otra “variable dependiente P” (podemos pensar que es la presión). Si queremos usar dicha ley, hemos de medir un valor V_0 de la variable V, y es inevitable que al hacerlo cometamos algún error el cual, naturalmente, influye en el correspondiente valor de P, que ya no será exactamente igual a $P_0 = f(V_0)$. Surge así la pregunta natural: ¿de qué forma el error en la medida de V afecta al valor resultante de P? Es claro que si para valores de V “muy próximos” a V_0 obtengo valores de P muy diferentes entre sí, la ley “f” que relaciona V con P no tendrá ninguna utilidad práctica.

Puesto que los errores de medida son inevitables, no es razonable tratar de obtener “el verdadero valor P_0”. Lo que sí puede hacerse es fijar una cota de error admisible para P (la cual dependerá de cada situación concreta), llamemos “ε” a dicha cota ($\varepsilon > 0$), y tratar de obtener otra cota de error “δ” ($\delta > 0$), de tal forma que siempre que midamos V_0 con un error menor que δ tengamos la seguridad de que el valor resultante para P se diferencia de P_0 en menos que ε. Esto es, $|f(V) - f(V_0)| < \varepsilon$ siempre que $|V - V_0| < \delta$. Cuando esto efectivamente pueda hacerse para cualquier cota de error $\varepsilon > 0$ decimos que la ley “f” es continua en V_0.

Observa que cabe esperar que la cota de error δ dependa del ε fijado en cada caso. Intuitivamente, cuanto más pequeño sea el error permitido en los datos finales, tanto mejor tendremos que medir la variable independiente. En general, la precisión δ con la que debemos medir V_0 para obtener un error final menor que ε, depende no solamente del valor fijado de ε sino también del valor de V_0. Esto es fácil de entender, no es lo mismo medir un volumen de varios metros cúbicos que otro de unos pocos milímetros cúbicos, la precisión de nuestra medida debe ser mejor en este último caso.

Las ideas anteriores conducen, de forma natural, a la definición matemática de continuidad. En todo lo que sigue, la letra A representará un conjunto no vacío de números reales. En la práctica A será siempre un intervalo o una unión de intervalos. Recuerda que la notación $f\colon A \to \mathbb{R}$ quiere decir que f es una función real cuyo dominio es A. Es muy importante advertir que A no tiene por qué coincidir con el dominio natural de la función. Esto es así porque con frecuencia estamos interesados en estudiar propiedades de una función en una parte de su dominio natural. Además, la continuidad de f depende tanto de la “regla que la define” como del conjunto en donde estamos trabajando. Enseguida pondremos ejemplos para aclarar esto.

4.10 Definición (Continuidad en un punto). Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La definición anterior suele escribirse, con abuso del formalismo lógico, de la siguiente forma:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left. \begin{array}{c} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{4.3}$$

Comentarios a la definición. Observa que en esta definición el conjunto A tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de f en A, lo que le pueda pasar a f fuera de A no nos interesa. El siguiente ejemplo es ilustrativo.

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la *función de Dirichlet* dada por $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = -1$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es la función que vale 1 en los puntos racionales y -1 en los irracionales. Esta función no es continua en ningún punto. La razón es que en todo intervalo abierto, por pequeño que sea, siempre hay números racionales e irracionales. Por eso, la función f oscila constantemente entre 1 y -1.

b) Las funciones $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 1$ y $h : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = -1$ son continuas (¡son funciones constantes!) en todo punto de sus respectivos dominios de definición.

4.11 Definición. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua por la izquierda (resp. por la derecha) en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $a - \delta < x \leqslant a$ (resp. $a \leqslant x < a + \delta$) se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Debes tener claro que para poder hablar de la continuidad o de la no continuidad de una función en un punto, la función debe estar definida en dicho punto. La condición (4.3) exige que el número $f(a)$ esté definido. Si no se conoce el valor de f en a no puede comprobarse si dicha condición se verifica o no y, por ello, no tiene sentido considerar la continuidad de esa función en dicho punto. Insisto en esta evidencia porque en muchos textos te vas a encontrar ejercicios del siguiente estilo:

a) Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$.

b) Estudiar la continuidad de la función $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en $x = 0$.

c) Estudiar la continuidad de la función $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ en $x = 1$.

Respuesta: Las funciones f, g no están definidas en 0 y h no está definida en 1, por tanto no tiene sentido estudiar su continuidad en esos puntos. Para poder estudiar la continuidad de estas funciones en los puntos indicados, primero hay que definirlas en dichos puntos. Por ejemplo, podemos definir $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $h(1) = 2$. Ahora la respuesta es: f no es continua en 0, g no es continua en 0 pero es continua por la derecha en 0, y h es continua en 1.

4.12 Definición (Continuidad en un conjunto). Se dice que $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en un conjunto $C \subset A$, si f es continua en todo punto de C.

El siguiente resultado nos va a permitir usar la teoría de sucesiones de números reales para estudiar la continuidad de funciones reales.

4.13 Proposición. *Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

a) f es continua en a.

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$, *se verifica que* $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$.

Demostración. *a)* $\Longrightarrow$ *b)* Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$. Tenemos que probar que $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f en a, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[\cap A$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Puesto que $\lim\{x_n\} = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que parta todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $x_n \in]a-\delta, a+\delta[$, como también $x_n \in A$, se sigue que $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Hemos probado así que $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$.

Para probar el recíproco probaremos que *no a)* $\Longrightarrow$ *no b)* Es decir, probaremos que si f no es continua en a entonces hay una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$ tal que $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(a)$. Que f no es continua en a quiere decir que existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ se verifica que hay algún punto $x_\delta \in]a-\delta, a+\delta[\cap A$ tal que $|f(x_\delta) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\delta_n = 1/n$ y sea $x_n \in]a-1/n, a+1/n[\cap A$ tal que $|f(x_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0$. Claramente $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$ y la sucesión $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(a)$. □

No suele ser tarea fácil demostrar que una función dada es continua. Generalmente, lo que se hace es descomponer la función que queremos estudiar en otras más sencillas cuya continuidad ya es conocida previamente. Es por ello interesante saber qué tipo de operaciones realizadas con funciones continuas conducen a nuevas funciones continuas.

4.2.1. Propiedades básicas de las funciones continuas

4.14 Teorema. *Sean f, g funciones reales definidas en A. Se verifica que:*

a) Las funciones $f + g$ y fg son continuas en todo punto de A en el que las dos funciones f y g sean continuas. En particular, las funciones suma y producto de funciones continuas son funciones continuas.

b) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, la función $\dfrac{1}{g}$ es continua en todo punto de A en el que g sea continua. En consecuencia, la función cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula nunca es una función continua.

Demostración. [1] Supongamos que f y g son continuas en un punto $a \in A$. Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$ se verificará que $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$ y $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$. Entonces, en virtud del teorema 2.25, tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{lím}\{(f+g)(x_n)\} &= \text{lím}\{f(x_n)+g(x_n)\} = \text{lím}\{f(x_n)\} + \text{lím}\{g(x_n)\} = f(a)+g(a) = (f+g)(a)\\
\text{lím}\{(fg)(x_n)\} &= \text{lím}\{f(x_n)g(x_n)\} = \text{lím}\{f(x_n)\}\,\text{lím}\{g(x_n)\} = f(a)g(a) = (fg)(a)
\end{aligned}$$

Lo que prueba, por la proposición 4.13, que las funciones $f+g$ y fg son continuas en a.

Si, además, suponemos que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, tenemos que:

$$\text{lím}\left\{\frac{f}{g}(x_n)\right\} = \text{lím}\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\} = \frac{\text{lím}\{f(x_n)\}}{\text{lím}\{g(x_n)\}} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a)$$

Lo que prueba, por la proposición 4.13, que la función f/g es continua en a. □

El teorema anterior es muy útil pero con frecuencia no se entiende bien lo que dice o se interpreta mal. Lo que dice es que la suma, producto y cociente de funciones continuas (siempre que no dividamos por 0) también es continua. De aquí puedes deducir fácilmente algunas consecuencias.

4.15 Corolario. *a) Si la suma de dos funciones es continua y una de ellas es continua, la otra función también es continua.*

b) Si el producto de dos funciones es continuo y una de ellas es continua y no se anula, la otra función es continua.

Hasta aquí todo bien. El problema es cuando tenemos que estudiar la continuidad de la suma o el producto de dos funciones discontinuas. En esta situación el teorema anterior no nos dice nada. Peor aún; no puede haber ningún teorema que diga lo que pasa en este caso. La razón es que puede pasar cualquier cosa. La suma o el producto de dos funciones discontinuas puede ser unas veces continua y otras veces discontinua. Se trata de un problema que hay que estudiar en cada caso concreto y que depende de cómo sean las funciones que sumamos o multiplicamos.

Por ejemplo, sea f la función de Dirichlet que, como sabemos, es discontinua en todo punto. Sea g una función continua cualquiera; por ejemplo, la identidad $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Las funciones $g+f$ y $g-f$ son discontinuas en todo punto pero su suma es la función $2g$ que es continua. Por otra parte, el cuadrado de f, esto es la función $h(x) = f(x)f(x) = (f(x))^2 = 1$, es la función constante igual a 1 y, por tanto, es continua.

Además de sumar y multiplicar funciones, también sabemos componerlas. Veamos cómo se comporta la continuidad respecto de la composición de funciones.

[1] Puedes ver una demostración usando la definición 4.3 en mi libro *Cálculo diferencial e integral para funciones de una variable*.

4.16 Teorema (Continuidad de una función compuesta). *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Supongamos que f es continua en un punto $a \in A$ y que g es continua en el punto $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto a. En particular, si g es continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es continua en todo punto de A en el que f sea continua. Más en particular, la composición de funciones continuas es una función continua.*

Demostración. Como f es continua en $a \in A$, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$ se verificará que $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$. Ahora, como g es continua en $f(a)$, se verificará que $\lim\{g(f(x_n))\} = g(f(a))$, es decir, $\lim\{(g \circ f)(x_n))\} = (g \circ f)(a)$. Por la proposición 4.13 concluimos que $g \circ f$ es continua en a. □

Funciones racionales

Las *funciones polinómicas o polinomios* son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ es un número natural que, si $c_n \neq 0$, se llama grado del polinomio. Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de $\mathbb{R}$ aunque con frecuencia nos interesará estudiar una función polinómica en un intervalo.

Una *función racional* es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios y Q no es el polinomio constante igual a 0. La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Observa que las funciones polinómicas son también funciones racionales (con denominador constante 1).

Como consecuencia de los resultados anteriores y de las proposiciones 2.34 y 4.13, obtenemos el siguiente resultado.

4.17 Corolario. *a) Toda función racional es continua en su dominio natural de definición.*

b) Las funciones exponenciales, logaritmos y potencias de exponente real son continuas en sus dominios naturales de definición.

4.2.2. Propiedades locales

Intuitivamente, la continuidad de una función en un punto depende únicamente del comportamiento de la función en la "proximidad" de dicho punto. Esto se expresa diciendo que *la continuidad es una propiedad local*. Vamos a precisar este concepto.

4.18 Definición. Dados una función $f: A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $C \subset A$, podemos definir *una nueva función*, llamada *restricción de f a C* que se representa por $f_{|C}$, que es la función *definida en el conjunto C* que viene dada por $f_{|C}(x) = f(x)$ para todo $x \in C$.

Dada una función $f: A \to \mathbb{R}$, se dice que una función $g: B \to \mathbb{R}$ es una *extensión* de f, si $B \supset A$ y f es la restricción de g al conjunto A, es decir $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Los conceptos de extensión y de restricción de una función son esencialmente el mismo: todo depende de que se mire "para arriba" o "para abajo".

Es importante distinguir entre una función y su restricción a un conjunto. Veamos un ejemplo que nos permitirá introducir una función muy útil.

4.19 Ejemplo (Función parte entera). La función que a cada número $x \in \mathbb{R}$ asigna *el mayor entero que es menor o igual que x* se llama función *parte entera*. Dicha función se representa con la letra E y está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por las condiciones siguientes:

$$E(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$

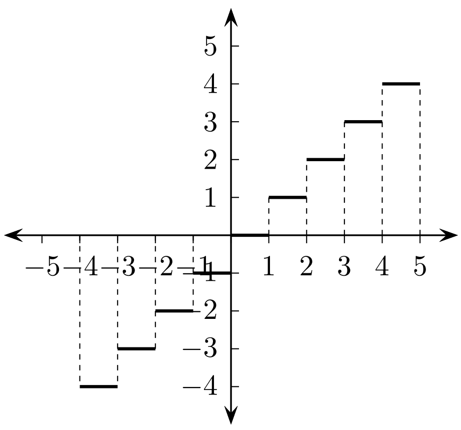


Figura 4.2. Función parte entera

No es difícil probar que esta función es discontinua en todos los enteros. Ahora, si consideramos a dicha función trabajando solamente en el intervalo $[1, 2[$, es decir, la función f restricción de E a $[1, 2[$ cuyo dominio es el intervalo $[1, 2[$ y que a cada punto de dicho intervalo asigna su "parte entera", $f(x) = E(x)$, para $1 \leqslant x < 2$; entonces la función f es constante pues, claramente $f(x) = 1$ para todo $x \in [1, 2[$, luego f es continua en todos los puntos de su dominio, en particular f es continua en 1 aunque la función "parte entera" es discontinua en dicho punto.

♦

El ejemplo anterior, y también el ejemplo de la función de Dirichlet antes visto, prueban que una restricción de una función discontinua puede ser continua o, lo que es igual, una extensión de una función continua puede ser discontinua. Son importantes y útiles a este respecto los siguientes resultados.

4.20 Proposición (Localización de la continuidad). *Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ e I un intervalo abierto tal que $a \in I$. Supongamos que la restricción de f a $I \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en a.*

Demostración. Pongamos $g = f_{|I\cap A}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in]a-\delta, a+\delta[\cap(I \cap A)$ se verifica que $|f(x) - f(a)| = |g(x) - g(a)| < \varepsilon$. Como I es un intervalo abierto y $a \in I$, existe un $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$. Pongamos $\delta_1 = \min\{r, \delta\}$. Tenemos que $\delta_1 > 0$ y $]a-\delta_1, a+\delta_1[=]a-\delta, a+\delta[\cap]a-r, a+r[\subset]a-\delta, a+\delta[\cap I$, por lo que $]a-\delta_1, a+\delta_1[\cap A \subset]a-\delta, a+\delta[\cap(I \cap A)$, en consecuencia, para todo $x \in]a-\delta_1, a+\delta_1[\cap A$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. $\square$

Observa la importancia que tiene en la hipótesis de este resultado el hecho de que el intervalo sea *abierto*. El ejemplo de la función "parte entera", antes visto, pone de manifiesto que una restricción a un intervalo no abierto de una función discontinua puede ser continua.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A$, se dice que a es un *punto aislado* de A si existe un intervalo abierto I tal que $I \cap A = \{a\}$.

Consecuencia del teorema de localización es que *cualquier función es continua en los puntos aislados de su conjunto de definición.*

Es inmediato que cualquier restricción de una función continua es continua. Este resultado, junto con dos consecuencias sencillas de la localización de la continuidad, se incluye en la siguiente proposición cuya demostración queda como ejercicio.

4.21 Proposición. *a) Cualquier restricción de una función continua es también continua.*

b) Cualquier extensión de una función continua en un intervalo abierto *es también* continua en dicho intervalo abierto.

c) Una función f es continua en un intervalo abierto I si, y sólo si, la restricción $f_{|I}$ es continua en I.

Este resultado es bastante útil para evitarnos hacer trabajo innecesario. Por ejemplo, si queremos estudiar la continuidad de la función parte entera, como dicha función es constante en los intervalos de la forma $]n, n+1[$ $(n \in \mathbb{Z})$, el resultado anterior nos dice que dicha función es continua en estos intervalos. Sólo queda así estudiar lo que pasa en los enteros.

La continuidad de una función en un punto permite obtener información sobre el comportamiento de la función en los puntos próximos al mismo. Estos resultados se llaman *locales*.

4.22 Teorema (Conservación local del signo). *Sea* $f: A \to \mathbb{R}$ *continua en un punto* $a \in A$ *con* $f(a) \neq 0$. *Entonces hay un número* $r > 0$ *tal que para todo* $x \in A$ *con* $|x - a| < r$ *se verifica que* $f(x)f(a) > 0$. *Es decir,* $f(x) > 0$ *si* $f(a) > 0$, *o* $f(x) < 0$ *si* $f(a) < 0$, *en todo punto* $x \in]a - r, a + r[\cap A$.

Demostración. Supondremos que $f(a) > 0$. Podemos entonces tomar $\varepsilon = f(a)/2$ en (4.3) para obtener, en virtud de la continuidad de f en a, un $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < f(a)/2$, lo que implica que $f(x) > f(a)/2 > 0$. El caso en que $f(a) < 0$ se reduce al anterior sin más que sustituir f por $-f$. $\square$

4.23 Proposición (Acotación local). *Sea* $f: A \to \mathbb{R}$ *continua en un punto* $a \in A$. *Entonces hay números,* $M_a > 0$, $r_a > 0$ *tales que para todo* $x \in A$ *con* $|x - a| < r_a$ *se verifica que* $|f(x)| \leqslant M_a$.

Demostración. Hagamos $\varepsilon = 1$ en (4.3) para obtener, en virtud de la continuidad de f en a, un $r_a > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r_a$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < 1$. Pongamos $M_a = 1 + |f(a)|$. Entonces, para todo $x \in]a - r_a, a + r_a[\cap A$ tenemos que:

$$|f(x)| = |f(a) + (f(x) - f(a))| \leqslant |f(a)| + |f(x) - f(a)| < 1 + |f(a)| = M_a$$

$\square$

Ejercicios propuestos

102. Prueba que si $f: A \to \mathbb{R}$ es continua en a entonces también lo es $|f|$. Da un ejemplo de función discontinua cuyo valor absoluto es continua.

103. Sean $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ y $J = [a, a + r[$ donde $r > 0$. Supongamos que la restricción de f a $J \cap A$ es continua en a. Prueba que f es continua por la derecha en a.

Enuncia y prueba un resultado análogo para la continuidad por la izquierda.

104. Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Prueba que f es continua por la izquierda en a si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $x_n \leqslant a$ y $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Enuncia y prueba un resultado análogo para la continuidad por la derecha.

105. Prueba la proposición 4.21.

106. Representamos por $E(x)$ la parte entera de x (4.19). Haz un esquema de las gráficas de las siguientes funciones y estudia su continuidad.

a) $f(x) = x - E(x)$

b) $f(x) = E(1/x)$

107. Estudia la continuidad de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = E(x^2)$.

108. Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

109. Estudia la continuidad de la función $f: [0,4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(1) = 1/4$ y:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{(x^2-1)E(1+x)} & \text{si } x \in [0,1[\cup]1,2] \\ E(x) - 7/4 & \text{si } x \in]2,4] \end{cases}$$

110. Estudia la continuidad de la función $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x \text{ es irracional} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$$

111. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mayorada y tal que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se verifica que $\sup f(]a,b[) = \sup f(\mathbb{R})$. Prueba que f es constante.

112. Sean $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Definamos una función $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ g(x), & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Estudia la continuidad de h.

4.3. Teorema de Bolzano

Si ahora mides 175cm y hace 10 años medías 135cm, es seguro que en algún momento intermedio medías con exactitud 161cm. Si una entrada de cine cuesta 5€ y hace 3 años costaba 4€, es seguro que en algún momento ir al cine costaba exactamente 4.99€. ¿Seguro? No, a ningún empresario de cine le parecería bien cobrar 4.99€ por la entrada.

La diferencia está en que la talla de una persona es una función continua del tiempo y para pasar de 135cm a 175cm tiene que pasar por todos los valores intermedios, pero el precio de las entradas de cine no varía de forma continua con el tiempo y puede pasar "de golpe" de 4.5€ a 5€.

La gráfica de una función continua en un intervalo, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, la imaginamos como una curva continua, por ello, si $f(a)<0<f(b)$, la gráfica de f tiene que atravesar el eje de abscisas para pasar de un punto situado por debajo de él a otro que se encuentra por encima y, por tanto, f *tiene que* anularse en algún punto entre a y b. Esto es precisamente lo que afirma el conocido *teorema* que sigue.

4.24 Teorema (**Teorema de los ceros de Bolzano**). *Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.*

Demostración. Es suficiente probar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua y $f(a)<0<f(b)$, entonces f se anula en algún punto del intervalo $]a,b[$. Una buena estrategia para demostrar un teorema es "darlo por demostrado" y *trabajar hacia atrás*. Tenemos que buscar un punto $c\in]a,b[$ tal que $f(c)=0$. Por supuesto, puede haber muchos puntos donde f se anule (el teorema dice que *al menos hay uno*), pero de todos ellos el más fácil de caracterizar es el "primero", porque a la izquierda de él la función es siempre negativa. Esto lleva a considerar el conjunto E de los puntos $x\in[a,b]$ tales que f toma valores negativos en $[a,x]$:

$$E=\{x\in[a,b]:f(t)<0 \ \text{ para todo } \ t\in[a,x]\}$$

Por su definición, tenemos que $E\subset[a,b]$ y $a\in E$. La propiedad del supremo nos dice que hay un número real, c, que es el supremo de E. Es evidente que $a\leqslant c\leqslant b$. La propiedad de conservación local del signo implica que existe algún $\delta>0$ tal que $a+\delta<b-\delta$ y f es negativa en todos los puntos del intervalo $[a,a+\delta]$ y positiva en todos los puntos del intervalo $[b-\delta,b]$. Esto implica que $a<c<b$.

Veamos que $[a,c[\subset E$. Sea $a<x_0<c$. Como $x_0<c$ y c es el mínimo mayorante de E, tiene que existir algún punto $z_0\in E$ tal que $x_0<z_0\leqslant c$. Por tanto, si $t\in[a,x_0]$ también $t\in[a,z_0]$ y, como, $z_0\in E$, será $f(t)<0$, luego $x_0\in E$. Nótese que hemos probado también que $f(x)<0$ para todo $x\in[a,c[$.

Finalmente, probaremos que $f(c)=0$. Como a la izquierda de c la función f toma valores negativos y f es continua, deducimos, por la conservación local del signo, que *no puede ser* $f(c)>0$ y, por tanto, $f(c)\leqslant 0$. Pero tampoco puede ser $f(c)<0$, pues entonces, por la conservación local del signo, habría un intervalo de la forma $]c-\rho,c+\rho[\subset[a,b]$ tal que $f(t)<0$ para todo $t\in]c-\rho,c+\rho[$ lo que implica que en E hay puntos mayores que c lo que es contradictorio. Concluimos así que $f(c)=0$. □

Observa que la demostración que hemos dado no nos dice cómo calcular un punto en el que la función se anule. Es una demostración de "existencia".

Un enunciado *equivalente* del teorema de Bolzano es el siguiente.

4.25 Teorema (**Teorema del valor intermedio**). *La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo.*

Demostración. Supongamos que I es un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ es una función continua en I. Queremos probar que la imagen de f, esto es, el conjunto $J = f(I)$ es un intervalo. Teniendo en cuenta la definición de intervalo, deberemos probar que si dos números están en J, todos los números comprendidos entre ellos también se quedan dentro de J. Sean pues, u, v elementos de J con $u < v$. Debe haber elementos α, β en I tales que $f(\alpha) = u$, $f(\beta) = v$. Como f es una función, debe ser $\alpha \neq \beta$; podemos suponer que $\alpha < \beta$. Sea $z \in]u, v[$, esto es, $u < z < v$. Definamos la función $h: I \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = z - f(x)$ para todo $x \in I$. Como f es continua, h es continua en I. Tenemos que $h(\alpha) = z - f(\alpha) = z - u > 0$ y $h(\beta) = z - f(\beta) = z - v < 0$. Como I es un intervalo, tenemos que $[\alpha, \beta] \subset I$. Podemos, pues, aplicar el teorema antes demostrado a la función h en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y obtenemos que tiene que haber algún punto $\lambda \in]\alpha, \beta[$ tal que $h(\lambda) = z - f(\lambda) = 0$. Hemos probado así que $f(\lambda) = z$. Como $\lambda \in [\alpha, \beta] \subset I$, concluimos que $z \in J = f(I)$. Como esto es cierto cualquiera sea el punto $z \in]u, v[$, concluimos que $[u, v] \subset J$ y, en consecuencia, J es un intervalo.

Recíprocamente, si suponemos que la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo, y $f: I \to \mathbb{R}$ es una función continua en un intervalo I que toma valores positivos y negativos, entonces $J = f(I)$ es un intervalo en el que hay números negativos y positivos, luego debe contener al 0, es decir f tiene que anularse en algún punto de I. $\square$

Observa que el teorema del valor intermedio dice que una función continua en un intervalo toma *todos los valores comprendidos entre dos cualesquiera de sus valores*. Bueno, eso es lo que nos dice la intuición ¿verdad?

4.26 Estrategia. El teorema de Bolzano proporciona una herramienta útil para probar que ciertas ecuaciones tienen solución. Consideremos el siguiente problema. Se trata de probar que hay un número real c tal que $f(c) = g(c)$ o, dicho de otra forma, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene soluciones. La forma de proceder para aplicar el teorema de Bolzano es la siguiente.

- Se pasan todos los términos de la ecuación a un lado y se define $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Se comprueba que la función h es continua y está definida en un intervalo I. Unas veces el intervalo donde h está definida debemos elegirlo nosotros de forma adecuada, y otras veces viene impuesto por el enunciado del ejercicio.
- Se comprueba que hay puntos en I donde la función h es negativa y otros en los que h es positiva. Se concluye, por el teorema de Bolzano, que h debe anularse en algún punto de I, que es lo que queríamos probar.

Hay consecuencias del teorema de los ceros de Bolzano que están lejos de ser evidentes. Algunas de ellas están expuestas en el excelente libro de R. Courant y H. Robbins *¿Qué es la Matemática?*. Por ejemplo, en dicho libro se demuestra, usando como herramienta básica dicho teorema, que, dadas dos regiones acotadas del plano, siempre existe una recta que divide simultáneamente a cada una de ellas en dos partes con igual área. Este resultado se puede generalizar. Puede probarse, con la ayuda del teorema de Bolzano, que si tenemos tres sólidos en el espacio (imagina que son tres bocadillos de muy distintos tamaños), es siempre posible encontrar un plano que los divida simultáneamente en dos partes de igual volumen (puedes cortar a los tres bocadillos exactamente "por la mitad" de un sólo tajo). Nosotros aquí nos conformaremos con obtener algunas consecuencias menos vistosas pero muy útiles. La primera de ellas ya es conocida y la obtuvimos en el capítulo 1 usando el principio del supremo.

4.27 Corolario (Existencia de raíces). *Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$.*

Demostración. La función $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^k - a$, es continua, $f(0) = -a < 0$ y $f(1 + a) = (1 + a)^k - a > 0$. Deducimos que hay algún número $c > 0$ tal que $f(c) = 0$. Dicho número es único porque la función f es estrictamente creciente. □

4.28 Corolario (Ceros de polinomios de grado impar). *Toda función polinómica de grado impar se anula en algún punto.*

Demostración. Sea

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n$$

una función polinómica de grado impar $n \geqslant 3$. Nuestro objetivo es probar que $P(x)$ toma valores positivos y negativos. Podemos suponer que $c_n > 0$. Supongamos en lo que sigue que $|x| \geqslant 1$. Dividiendo por x^n tenemos que

$$\frac{P(x)}{x^n} = \frac{c_0}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_2}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x} + c_n \tag{4.4}$$

Para $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, tenemos, por ser $|x| \geqslant 1$ y $n - k \geqslant 1$, que:

$$\frac{|c_k|}{|x|^{n-k}} \leqslant \frac{|c_k|}{|x|}$$

Por otra parte

$$\frac{|c_k|}{|x|} \leqslant \frac{c_n}{2n} \Longleftrightarrow |x| \geqslant \frac{|c_k|}{c_n} 2n$$

Definamos

$$M = \text{máx}\left\{\frac{|c_k|}{c_n} 2n : k = 0, 1, 2 \ldots, n - 1\right\}, \quad K = \text{máx}\{M, 1\}$$

Para $|x| \geqslant K$ y para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, tenemos que:

$$\frac{c_k}{x^{n-k}} \geqslant -\frac{|c_k|}{|x|^{n-k}} \geqslant -\frac{|c_k|}{|x|} \geqslant -\frac{c_n}{2n}$$

Deducimos que para $|x| \geqslant K$ es:

$$\frac{P(x)}{x^n} \geqslant -n\frac{c_n}{2n} + c_n = \frac{c_n}{2} > 0 \tag{4.5}$$

Ahora si $x < -K$, se tiene por ser n impar que $x^n < 0$, y la desigualdad anterior implica que $P(x) < 0$. Análogamente, si $x > K$ debe ser $P(x) > 0$.

Hemos probado que $P(x)$ toma valores positivos y negativos, como es una función continua y está definida en un intervalo, $\mathbb{R}$, concluimos que debe anularse en algún punto. □

4.4. Continuidad y monotonía

Hemos visto que la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo. Podemos preguntarnos si esta propiedad caracteriza la continuidad. En general, la respuesta es que no. Es fácil dar ejemplos de funciones discontinuas en un intervalo cuya imagen es un intervalo pero estas funciones no pueden ser monótonas. Es fácil entender que si una función monótona es discontinua es porque su gráfica “da saltos”, es decir, su imagen *no* es un intervalo. El siguiente resultado deja claro este punto.

4.29 Teorema. *Una función monótona cuya imagen es un intervalo es continua.*

Demostración. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente en un conjunto A cuya imagen $J = f(A)$ es un intervalo. Queremos probar que f es continua. Sea $a \in A$ y supongamos que los conjuntos

$$A_a^- = \{x \in A : x < a\}, \quad A_a^+ = \{x \in A : x > a\}$$

no son vacíos. Para demostrar que f es continua en a, probaremos que

$$\sup f(A_a^-) = \sup\{f(x) : x \in A, x < a\} = f(a) = \operatorname{ínf}\{f(x) : x \in A, x > a\} = \operatorname{ínf} f(A_a^+)$$

Probemos que $f(a) = \sup f(A_a^-)$. Pongamos $\alpha = \sup f(A_a^-)$. Para todo $x \in A_a^-$ tenemos que $x < a$ y, como f es creciente, $f(x) \leqslant f(a)$. Luego $f(a)$ es un mayorante del conjunto $f(A_a^-)$ y, en consecuencia, debe ser $\alpha \leqslant f(a)$. Veamos que no puede ocurrir que $\alpha < f(a)$. Para ello supondremos que $\alpha < f(a)$ y llegaremos a una contradicción. Tomemos un elemento cualquiera $z \in]\alpha, f(a)[$. Sea $u \in A_a^-$. Entonces $f(u) \leqslant \alpha < z < f(a)$. Como $f(u)$ y $f(a)$ están en $J = f(A)$ y J es, por hipótesis, un intervalo, deducimos que $z \in J$, esto es, $z = f(s)$ para algún

$s \in A$. No puede ser $s = a$ y, como f es creciente y $z < f(a)$, debe verificarse que $s < a$, esto es, $s \in A_a^-$ en cuyo caso debe ser $f(s) \leqslant \alpha$, es decir, $z \leqslant \alpha$ lo cual es claramente contradictorio pues $\alpha < z$.

Análogamente se prueba que $f(a) = \beta = \operatorname{ínf} f(A_a^+)$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Tiene que haber elementos $u \in A_a^-$ y $v \in A_a^+$ tales que $\alpha - \varepsilon < f(u)$ y $f(v) < \beta + \varepsilon$, es decir

$$f(a) - \varepsilon < f(u) \leqslant f(v) < f(a) + \varepsilon.$$

Definamos $\delta = \operatorname{mín}\{a - u, v - a\} > 0$. Entonces para todo $x \in A$ verificando que $|x - a| < \delta$ se tiene que $u < x < v$ y, por tanto, $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$ lo que implica que $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, esto es, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Los casos en que alguno de los conjuntos A_a^- o A_a^+ sea vacío se deducen de lo anterior. □

4.30 Corolario. *Una función monótona definida en un intervalo es continua si, y sólo si, su imagen es un intervalo.*

4.31 Corolario. *La función inversa de una función estrictamente monótona definida en un intervalo es continua.*

Demostración. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona definida en un intervalo I. Como f es inyectiva en I su inversa, f^{-1}, está definida en el conjunto imagen $J = f(I)$ y, claramente, $f^{-1}(J) = I$. Como la inversa de una función estrictamente monótona f es también estrictamente monótona (y del mismo tipo que f) e I es, por hipótesis, un intervalo, el teorema anterior, aplicado a f^{-1}, nos dice que f^{-1} es continua en J. □

Considera una función inyectiva y continua en un intervalo e intenta dibujar su gráfica; comprobarás que la función no puede “subir y bajar” porque en tal caso se pierde la inyectividad, por tanto, o bien “siempre sube” y es estrictamente creciente, o bien “siempre baja” y es estrictamente decreciente. Eso es lo que afirma el siguiente resultado.

4.32 Teorema. *Toda función inyectiva y continua en un intervalo es estrictamente monótona.*

Demostración. [2] Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva en el intervalo I. Sean $a_0 < b_0$ dos puntos de I. Como f es inyectiva debe ser $f(a_0) \neq f(b_0)$. Por tanto, o bien $f(b_0) - f(a_0) > 0$, o bien $f(b_0) - f(a_0) < 0$. Supongamos que es $f(b_0) - f(a_0) > 0$ y demostremos que f es estrictamente creciente en I. Para ello sean $a_1 < b_1$ puntos de I. Pongamos

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= (1-t)a_0 + ta_1 \\ y(t) &= (1-t)b_0 + tb_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{para } 0 \leqslant t \leqslant 1$$

[2] Esta elegante demostración está tomada del libro de M. Spivak *Cálculo Infinitesimal*.

Tenemos que $x(0)=a_0$, $x(1)=a_1$, $y(0)=b_0$, $y(1)=b_1$. Además, poniendo $\alpha=\min\{a_0,a_1\}$ y $\beta=\max\{a_0,a_1\}$, se tiene que:

$$\alpha=(1-t)\alpha+t\alpha\leqslant x(t)\leqslant(1-t)\beta+t\beta=\beta$$

Como I es un intervalo y $\alpha,\beta\in I$, se verifica que $[\alpha,\beta]\subset I$, por lo que $x(t)\in I$. Análogamente, se tiene que $y(t)\in I$. Además, como $a_0<b_0$ y $a_1<b_1$, se verifica que $x(t)<y(t)$ para $0\leqslant t\leqslant 1$. Consideremos la función:

$$g(t)=f(y(t))-f(x(t)) \qquad 0\leqslant t\leqslant 1$$

La función g es continua en $[0,1]$ por ser composición y diferencia de funciones continuas. Como f es inyectiva y $x(t)<y(t)$, se tiene que $g(t)\neq 0$ para todo $t\in[0,1]$. El teorema de Bolzano implica que g debe tener signo constante en $[0,1]$ y, como $g(0)>0$, concluimos que $g(t)>0$ para todo $t\in[0,1]$. Por tanto $g(1)=f(b_1)-f(a_1)>0$. Hemos probado así que f es estrictamente creciente.

Análogamente, si se supone que es $f(b_0)-f(a_0)<0$ se demuestra que f es estrictamente decreciente en I. □

4.33 Corolario. *La función inversa de una función inyectiva y continua en un intervalo es continua.*

Ejercicios propuestos

113. a) Da un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.

b) Da un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.

c) Da un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.

d) Da un ejemplo de una función continua en $[0,1[$ tal que $f([0,1[)$ no sea acotado.

e) Da un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

114. Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Supongamos que $a\leqslant f(x)\leqslant b$ para todo x en $[a,b]$. Prueba que hay algún punto $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=c$.

115. Suponiendo que la temperatura varía de forma continua, prueba que siempre hay dos puntos antípodas en el ecuador terrestre que están a la misma temperatura.

116. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Demuestra que en algún momento de su carrera recorre 1 kilómetro en exactamente 5 minutos.

117. Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8:00 de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, prueba que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.

118. Sean f, g funciones continuas que no se anulan en un intervalo I, verificando que $(f(x))^2 = (g(x))^2$ para todo $x \in I$. Prueba que o bien $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, o bien $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in I$. ¿Cuántas funciones hay $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y verificando que $(\varphi(x))^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$?.

119. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y decreciente. Prueba que hay un único $a \in \mathbb{R}$ verificando que $f(a) = a$.

120. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x)\big((f \circ f)(x)\big) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabiendo que $f(1000) = 999$, calcula $f(500)$.

121. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a,b[$. Prueba que hay dos números u, v verificando que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u,v[$.

122. Prueba que la función $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ es inyectiva. Calcula f^{-1} y comprueba que es una función continua.

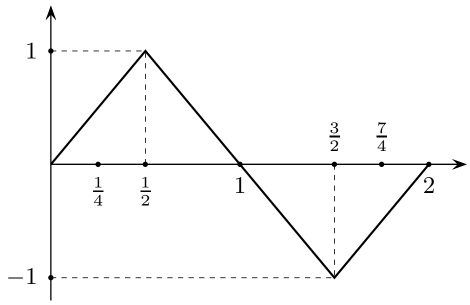
4.5. Continuidad en intervalos cerrados y acotados

Sabemos que la imagen, $f(I)$, de un intervalo I por una función continua f es un intervalo. En general, el intervalo $f(I)$ no es del *mismo tipo* que I. Aquí tiene algunos ejemplos.

1. $f(x) = x^2$; $f([-1,1[) = f(]-1,1]) = [0,1]$;
2. $f(x) = 1/x$; $f(]0,1]) = [1,+\infty[$; $f([1,+\infty[) =]0,1]$.
3. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leqslant 1/2; \\ 2-2x, & 1/2 < x \leqslant 3/2; \\ 2x-4, & 3/2 \leqslant x. \end{cases}$$

parte de cuya gráfica puedes ver aquí



es continua y verifica que $f(]1/4, 7/4[) = [-1, 1]$.

Vemos así que la imagen por una función continua de un intervalo abierto, o semiabierto, o de una semirrecta, puede ser un intervalo de distinto tipo. Queda por considerar qué ocurre con los intervalos cerrados y acotados, es decir, los de la forma $[a, b]$. Vamos a probar que este tipo de intervalos se conservan por funciones continuas. Nótese que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, como ya sabemos que $f([a, b])$ es un intervalo, para probar que $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado basta probar que el intervalo $f([a, b])$ tiene máximo y mínimo, es decir, que hay números $u, v \in [a, b]$ tales que para todo $x \in [a, b]$ es $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$, pues entonces será $f([a, b]) = [f(u), f(v)]$.

En la siguiente definición introducimos la terminología que se usa.

4.34 Definición. Sea $f : B \to \mathbb{R}$. Se dice que f está mayorada (resp. minorada) en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado (resp. minorado). Se dice que f *está acotada en* B si el conjunto $f(B)$ está acotado. Se dice que f alcanza en B un **máximo** (resp. un **mínimo**) **absoluto** si el conjunto $f(B)$ tiene máximo (resp. mínimo), es decir, existe algún punto $v \in B$ (resp. $u \in B$) tal que $f(x) \leqslant f(v)$ (resp. $f(u) \leqslant f(x)$) para todo $x \in B$.

4.35 Teorema (Teorema de Weierstrass). *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.*

Demostración. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Veamos que f tiene que estar acotada en $[a, b]$. En efecto, si f no estuviera acotada en $[a, b]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiría un $x_n \in [a, b]$ tal que $|f(x_n)| \geqslant n$. Como la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, por el teorema de Bolzano - Weierstrass tiene alguna sucesión parcial convergente $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a \leqslant x_{\sigma(n)} \leqslant b$, deducimos que $a \leqslant x \leqslant b$. Como f es continua y $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$, la sucesión $\left\{f(x_{\sigma(n)})\right\}$ debe ser convergente a $f(x)$, pero dicha sucesión no converge porque para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\left|f(x_{\sigma(n)})\right| \geqslant \sigma(n) \geqslant n$ y, por tanto, dicha sucesión no está acotada. Esta contradicción prueba que si f es continua en $[a, b]$ entonces está acotada en $[a, b]$.

Pongamos $J = f([a,b])$. Sabemos que J es un intervalo y acabamos de probar que está acotado. Sea $\beta = \sup(J)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $y_n \in J$ tal que $\beta - 1/n < y_n \leqslant \beta$. Claramente $\{y_n\} \to \beta$. Sea $v_n \in [a,b]$ tal que $f(v_n) = y_n$. Como $\{v_n\}$ es una sucesión acotada tiene alguna parcial convergente $\{v_{\varphi(n)}\} \to v$. Tenemos, al igual que antes, que $v \in [a,b]$. Por la continuidad de f deberá ser $\left\{f(v_{\varphi(n)})\right\} \to f(v)$. Puesto que $\left\{f(v_{\varphi(n)})\right\} = \left\{y_{\varphi(n)}\right\}$, deducimos que $\left\{f(v_{\varphi(n)})\right\} \to \beta$. Por la unicidad del límite, debe ser $f(v) = \beta$. Hemos probado así que $\beta \in J$, es decir, J tiene máximo. Claro está, para todo $x \in [a,b]$ se verifica que $f(x) \leqslant f(v) = \beta$.

Análogamente se prueba que $\alpha = \inf(J)$ pertenece a J, es decir que hay algún $u \in [a,b]$ tal que $f(u) = \alpha$. Claro está, para todo $x \in [a,b]$ se verifica que $\alpha = f(u) \leqslant f(x)$. □

Con frecuencia, lo que interesa del teorema de Weierstrass es una consecuencia inmediata del mismo que se recoge en el siguiente corolario.

4.36 Corolario. *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada en dicho intervalo.*

Veamos una aplicación del teorema de Weierstrass. Se llama *coeficiente líder* de una función polinómica al coeficiente de la mayor potencia de la variable. Seguramente sabes que una parábola cuyo coeficiente líder es positivo (lo que suele llamarse “una parábola con los cuernos para arriba”) tiene un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$, y si el coeficiente líder es negativo (lo que suele llamarse “una parábola con los cuernos para abajo”) tiene un máximo absoluto en $\mathbb{R}$. Este comportamiento no es exclusivo de las parábolas y se puede generalizar a toda función polinómica de grado par. La idea de la demostración es sencilla. Un polinomio de grado par es muy grande cuando el valor absoluto de x es grande, por tanto para encontrar el mínimo podemos buscarlo en un intervalo cerrado y acotado.

4.37 Proposición. *Una función polinómica de grado par cuyo coeficiente líder es positivo alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$ y si el coeficiente líder es negativo alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n$$

una función polinómica de grado par $n \geqslant 2$. Podemos suponer que $c_n > 0$ y probaremos que P alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$. Razonando exactamente igual que en el corolario (4.28), probamos (4.5) que hay un número $K \geqslant 1$ tal que para $|x| \geqslant K$ es:

$$\frac{P(x)}{x^n} \geqslant \frac{c_n}{2} > 0 \tag{4.6}$$

Pongamos en lo que sigue $\alpha = \dfrac{c_n}{2}$. Como n es par, se tiene que $x^n > 0$ para todo $x \neq 0$. Además, como $K \geqslant 1$, para $|x| \geqslant K$ es $|x|^n \geqslant |x|$ por tanto:

$$P(x) \geqslant \alpha x^n = \alpha\,|x|^n \geqslant \alpha\,|x| \qquad (|x| \geqslant K)$$

Haciendo ahora $M = \text{máx}\,\{K, |P(0)|\,/\alpha\}$, tenemos que para $|x| \geqslant M$ es

$$P(x) \geqslant \alpha\,|x| \geqslant \alpha M$$

La razón de elegir M en la forma que lo hemos hecho, es porque ahora podemos asegurar que $\alpha M \geqslant |P(0)|$. En el intervalo $[-M, M]$ la función $P(x)$ alcanza, en virtud del teorema de Weierstrass, un mínimo absoluto en algún punto $c \in [-M, M]$. Si ahora x es un número real podemos considerar dos posibilidades:

- $x \in [-M, M]$ en cuyo caso será $P(x) \geqslant P(c)$.
- $x \notin [-M, M]$, esto es $|x| > M$, en cuyo caso $P(x) \geqslant \alpha M \geqslant |P(0)| \geqslant P(0) \geqslant P(c)$.

En cualquier caso resulta que $P(x) \geqslant P(c)$, lo que prueba que P alcanza en c un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$. $\square$

Ejercicios propuestos

123. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que para cada $x \in [a,b]$ hay algún $y \in [a,b]$ tal que $|f(y)| \leqslant \frac{2}{10}|f(x)|$. Prueba que f se anula en algún punto de $[a,b]$.

124. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que la función $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in [a,b]$ por $g(x) = \text{máx}\, f([a,x])$, es continua.

125. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, pongamos $M = \text{máx}\, f([a,b])$, $m = \text{mín}\, f([a,b])$ y supongamos que $f(a) = f(b)$ y que $m < f(a) < M$. Prueba que f toma todo valor de $[f(a), M[\cup]m, f(a)]$ en al menos dos puntos de $[a,b]$.

4.6. Límite funcional

Sea I un intervalo, a un punto de I, y f una función definida en $I \setminus \{a\}$. Naturalmente, como f no está definida en a no tiene sentido hablar de la continuidad de f en a. Sin embargo, podemos preguntarnos ¿es posible encontrar un número $L \in \mathbb{R}$ tal que *definiendo* $f(a) = L$, la *nueva* *función* así obtenida sea continua en a? Para ello el número L tendría que cumplir la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \left. \begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

donde la condición "$0 < |x-a|$" es obligada porque la función f no está definida en a.

Podemos modificar un poco la situación anterior, suponiendo ahora que f está definida en todo el intervalo I pero no es continua en a. En este caso queremos cambiar el valor de f en a, es decir, encontrar, si es posible, un número $L \in \mathbb{R}$ tal que *definiendo* el valor de f en a igual a L, la *nueva función* así obtenida sea continua en a. La condición que tiene que cumplir dicho número L es exactamente la misma de antes.

Nótese que ahora la condición "$0 < |x-a|$" es obligada porque nuestra función f no está definida en a de "forma apropiada".

En los dos casos considerados la condición obtenida es la misma con independencia del hecho de que f esté o no definida en a y, en caso de estarlo, del posible valor que f pueda tener en a. Por ello, en lo que sigue consideraremos la siguiente situación.

> Representaremos por I un intervalo; a será un punto de I, y f será una función que supondremos definida en $I \setminus \{a\}$ sin excluir la posibilidad de que dicha función pueda estar definida en todo el intervalo I lo cual, para nuestros propósitos actuales, carece de importancia.

Límite de una función en un punto. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \left. \begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** a y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Observa que la existencia del límite es independiente de que f esté o no definida en a y, en caso de estarlo, del valor que f pueda tener en a. También debe advertirse que en la definición de la *igualdad* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, sólo intervienen *desigualdades*.

Es fácil probar que el límite de una función en un punto, si existe, es único. Una consecuencia inmediata de la definición dada es el siguiente resultado.

Proposición. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones siguientes:

i) f es continua en a.

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

En la recta real es posible distinguir si nos acercamos "por la derecha" o "por la izquierda" a un punto. Ello conduce de forma natural a la consideración de los *límites laterales* que pasamos a definir.

Límites laterales de una función en un punto. Supongamos que:

A) El conjunto $\{x \in I : a < x\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la derecha* en a, si existe un número $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\,\delta\in\mathbb{R}^+ \ : \quad \left.\begin{array}{c} a < x < a+\delta \\ x\in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la derecha de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \alpha$.

B) El conjunto $\{x \in I : x < a\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la izquierda* en a, si existe un número $\beta\in\mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\,\delta\in\mathbb{R}^+ \ : \quad \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a \\ x\in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - \beta| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la izquierda de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \beta$.

Teniendo en cuenta las definiciones dadas, es inmediato que:

i) Si $a = \sup I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

ii) Si $a = \inf I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = L$.

Funciones divergentes en un punto.

A) Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

B) Se dice que f **es positivamente divergente por la izquierda** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$.

De forma análoga se definen los conceptos:

- "f **es positivamente divergente** por la derecha en a". Simbólicamente $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$
- "f **es negativamente divergente** en a". Simbólicamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- "f **es negativamente divergente por la izquierda o por la derecha** en a". Simbólicamente $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$

Límites en infinito. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists\, K \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** $+\infty$, y escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Análogamente se define el límite en $-\infty$.

Funciones divergentes en infinito. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists\, K \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

En cuyo caso escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Llegados aquí, el lector no tendrá dificultad en precisar el significado de:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

El siguiente resultado establece una importante relación entre el límite funcional y el límite de sucesiones. Su demostración, muy parecida a la de la proposición 4.13, queda como ejercicio.

4.38 Proposición. *Sea f una función y sean $a, L \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Equivalen las afirmaciones:*

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos en el dominio de definición de f, tal que $x_n \neq a$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\{x_n\}\to L$, se verifica que $\{f(x_n)\}\to L$.

Como consecuencia de esta proposición, del teorema 2.35 y de la proposición 2.53, tenemos el siguiente resultado.

4.39 Proposición. *i)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|\log(x)\right|^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0$ *cualesquiera sean $\alpha > 0$ y $\mu\in\mathbb{R}$.*

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\left|\log(x)\right|^{\mu} = 0$ *cualesquiera sean $\alpha > 0$ y $\mu\in\mathbb{R}$.*

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\mu x}} = 0$ *cualesquiera sean $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\mu > 0$.*

4.7. Discontinuidades. Álgebra de límites. Límites de funciones monótonas

Clasificación de las discontinuidades. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a\in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:
  $$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$
  se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.
- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad esencial**.

Es evidente que el concepto de límite es, al igual que el de continuidad en un punto, un concepto local; la existencia del límite de una función en un punto a depende solamente del comportamiento de la función en los puntos próximos al punto a.

Es importante advertir que el concepto de límite lateral es un caso particular del concepto general de límite de una función en un punto. Por ello, cualquier resultado referente a límites de funciones en un punto puede ser convenientemente enunciado para límites laterales sin más que considerar la restricción de la función a la derecha o a la izquierda del punto en cuestión.

El siguiente resultado pone de manifiesto la compatibilidad de la "operación de paso al límite" con la estructura algebraica y de orden de $\mathbb{R}$.

Teorema [Álgebra de límites] Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x), \qquad \lim_{x\to a}(fg)(x)=\lim_{x\to a}f(x)\,\lim_{x\to a}g(x)$$

ii) Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

iii) Si $f(x)\leqslant g(x)$ para todo $x\in I$, $x\neq a$, entonces $\lim\limits_{x\to a}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to a}g(x)$

iv) Supongamos que $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ para todo $x\in I$, $x\neq a$ y $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$. Entonces se verifica que h tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a}h(x)=L$.

En el siguiente resultado se considera que una de las funciones es divergente.

Condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto. Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.

i) Supongamos que hay un número $M\in\mathbb{R}$ tal que $g(x)\geqslant M$ para todo $x\in I$, $x\neq a$. Entonces $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=+\infty$.

ii) Supongamos que hay un número $M>0$ tal que $g(x)\geqslant M$ para todo $x\in I$, $x\neq a$. Entonces $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=+\infty$.

En el siguiente resultado se establece que *el producto de una función con límite* 0 *por una función acotada tiene límite cero.*

4.40 Teorema. *Supongamos que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, *y que hay un número* $M > 0$ *tal que* $|g(x)| \leqslant M$ *para todo* $x\in I$, $x \neq a$. *Entonces* $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = 0$.

Con frecuencia este resultado se aplica cuando la función g es alguna de las funciones seno, coseno, arcoseno, arcocoseno o arcotangente. Todas ellas son, como ya sabes, funciones acotadas.

El siguiente resultado establece que la continuidad permuta con el paso al límite. Es un resultado que se usará bastante cuando estudiemos técnicas de cálculo de límites.

4.41 Teorema. *Supongamos que* f *tiene límite en el punto* a *y sea* $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. *Sea* g *una función continua en* L. *Entonces se verifica que la función compuesta* $g\circ f$ *tiene límite en* a *igual a* $g(L)$, *esto es,* $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = g(L)$. *Simbólicamente:*

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = g(\lim_{x\to a} f(x)) \tag{4.7}$$

Demostración. Apoyándonos en la proposición 4.6, podemos demostrar este resultado reduciéndolo a un resultado ya conocido de funciones continuas. Para ello basta con definir $f(a) = L$ con lo que, usando 4.6, resulta que f (seguimos llamando f a la función así modificada) es continua en a. Ahora aplicamos el teorema (4.16) de continuidad de una composición de funciones para obtener que $g\circ f$ es continua en a y de nuevo volvemos a usar (4.6), para obtener que

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = (g\circ f)(a) = g(f(a)) = g(L) = g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big)$$

□

4.42 Definición. Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, y escribimos $f(x)\sim g(x)(x\to a)$, cuando $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

El siguiente resultado, consecuencia inmediata de la definición dada y de las propiedades de los límites funcionales ya vistas, es muy útil para calcular límites funcionales. Nos dice que para calcular el límite de un producto o de un cociente de funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente.

4.43 Proposición. *Sean* f *y* g *funciones asintóticamente equivalentes en un punto* $a\in\mathbb{R}$ *o bien* $a = +\infty$ *o* $a = -\infty$, *y* $h\colon I\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ *una función cualquiera. Se verifica que:*

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)h(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)h(x) = L$.

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)h(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)h(x) = +\infty$.

Límites y discontinuidades de funciones monótonas

El hecho de que una función sea discontinua en un punto puede deberse a causas diferentes que se consideran en la siguiente definición.

4.44 Definición (Clasificación de las discontinuidades). Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$

  se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.
- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad esencial**.

4.45 Teorema (Límites de una función monótona). *Sea f una función creciente definida en un intervalo I.*

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\, x < a\}, \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\, x > a\}$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de I, entonces:

a) Si f está minorada en I es $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está minorada en I es $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

iii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el extremo derecho de I, entonces:

a) Si f está mayorada en I es $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está mayorada en I es $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Demostración. Supongamos que $a \in I$ no es el extremo izquierdo de I, es decir que el conjunto $\{x \in I : x < a\}$ no es vacío. Entonces, el conjunto $B = \{f(x) : x \in I,\, x < a\}$ tampoco es vacío y, por ser f creciente, el número $f(a)$ es un mayorante de B. Sea $\alpha = \sup\{f(x) : x \in I,\, x < a\}$. Dado $\varepsilon > 0$, el número $\alpha - \varepsilon$ no puede ser mayorante de B, es decir, tiene que haber algún punto $x_0 \in I$, $x_0 < a$ tal que $\alpha - \varepsilon < f(x_0)$. Sea $\delta = a - x_0 > 0$. Entonces para $a - \delta <$

$x < a$, esto es, para $x_0 < x < a$, se verifica que $\alpha - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \alpha$, lo que claramente implica que $\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$, es decir, $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Hemos probado así que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\, x < a\}$.

Los demás casos se prueban de forma muy parecida y quedan como ejercicios. Igualmente, queda como ejercicio considerar el caso en que la función es decreciente. □

Como consecuencia inmediata de este resultado obtenemos el siguiente teorema.

4.46 Teorema (Discontinuidades de las funciones monótonas). *Sea f una función monótona en un intervalo. Entonces:*

i) *En los puntos del intervalo que no son extremos del mismo, f solamente puede tener discontinuidades de salto.*

ii) *Si el intervalo tiene máximo o mínimo, f puede tener en dichos puntos discontinuidades evitables.*

iii) *El conjunto de las discontinuidades de f es numerable.*

4.7.1. Comportamientos asintóticos de las funciones elementales

Límites de exponenciales y logaritmos

Los resultados que siguen son de gran utilidad para calcular límites. Todos ellos son consecuencia de la continuidad y crecimiento de las funciones exponencial y logaritmo naturales.

4.47 Proposición. *Sea a un número real o $a = +\infty$ o $a = -\infty$. En los apartados b1), b2) y b3) se supone que $f(x) > 0$.*

a1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{L}$.

a2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = +\infty$.

a3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = 0$.

b1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \log f(x) = \log L$.

b2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \log f(x) = +\infty$.

b3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \log f(x) = -\infty$.

4.8. Indeterminaciones en el cálculo de límites

Frecuentemente hay que estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las reglas que hemos visto anteriormente no pueden aplicarse. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las funciones $f+g$, fg, no está determinado por el de f y g. Por ejemplo, si sabemos que $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ y que $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$, ¿qué podemos decir en general del comportamiento en el punto a de la función $f+g$? Respuesta: absolutamente nada. En consecuencia, para calcular un límite del tipo $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ donde $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$ *se requiere un estudio particular en cada caso*. Suele decirse que estos límites son **una indeterminación del tipo** "$\infty-\infty$".

Análogamente, si sabemos que $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y que la función g es divergente (positivamente o negativamente) en el punto a, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la función fg en dicho punto. Cuando esto ocurre se dice que el límite $\lim_{x\to a}(fg)(x)$ **es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$"**. Las indeterminaciones que aparecen al estudiar el cociente de dos funciones divergentes o de dos funciones con límite cero, es decir, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$", pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

Todavía hemos de considerar nuevas indeterminaciones que van a surgir al considerar funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera. Puesto que:

$$f(x)^{g(x)}=\exp(g(x)\log f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados anteriores, el límite $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim_{x\to a} g(x)\log f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto a de las funciones f y g, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

- $\lim_{x\to a} f(x)=1,\ \lim_{x\to a}|g(x)|=+\infty$ (indeterminación "1^∞")
- $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a} g(x)=0$ (indeterminación "∞^0")
- $\lim_{x\to a} f(x)=0,\ \lim_{x\to a} g(x)=0$ (indeterminación "0^0")

Ni que decir tiene que no hay técnicas generales que permitan "resolver las indeterminaciones", ¡no serían tales si las hubiera! Es por ello que, los límites indeterminados, requieren un estudio particular en cada caso. Es un hecho que la mayoría de los límites que tienen algún interés matemático son límites indeterminados.

El siguiente resultado permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^∞" y "0∞".

4.48 Teorema (Criterio de equivalencia logarítmica). *Sea $a\in I$, f y g funciones definidas en $I\setminus\{a\}$. Supongamos que $f(x)>0$ para $x\in I\setminus\{a\}$, y que $\lim_{x\to a} f(x)=1$. Entonces se tiene que:*

i) $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^L$ *si, y sólo si,* $\lim_{x \to a} g(x)(f(x)-1) = L$.

ii) $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = +\infty$ *si, y sólo si,* $\lim_{x \to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty$.

iii) $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 0$ *si, y sólo si,* $\lim_{x \to a} g(x)(f(x)-1) = -\infty$.

Demostración. Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$\varphi(x) = \frac{\log x}{x-1}, \ (x \neq 1), \ \varphi(1) = 1.$$

Nótese que φ es una función continua. Pongamos:

$$f(x)^{g(x)} = \exp\big(g(x)\log(f(x))\big) = \exp\big(g(x)(f(x)-1)\varphi(f(x))\big)$$

Puesto que $\lim_{x \to a} \varphi(f(x)) = 1$ se sigue que:

$$\lim_{x \to a} g(x)(f(x)-1)\varphi(f(x)) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

si, y sólo si

$$\lim_{x \to a} g(x)(f(x)-1)) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

lo que prueba las afirmaciones hechas. $\square$

Ejercicios propuestos

126. Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Prueba que

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty \iff \lim_{x \to a} \frac{1}{|f(x)|} = 0 \tag{4.8}$$

Particulariza este resultado para los casos en que f solamente toma valores positivos o negativos.

127. Sea $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Prueba que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = L \iff \lim_{x \to +\infty} f(1/x) = L \tag{4.9}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = L \iff \lim_{x \to -\infty} f(1/x) = L \tag{4.10}$$

128. Sea $f\ :]0,1[\to \mathbb{R}$ la función dada para $x \in]0,1[$ por:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)}.$$

Prueba que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ y que $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$. Deduce que la imagen de f es todo $\mathbb{R}$.

129. Calcula la imagen de la función $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = x\,(1-x^2)^{-1/2}, \forall x \in]-1,1[.$$

130. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},\ \forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(0)=0$. Justifica que f es continua en $\mathbb{R}$, estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Calcula la imagen de f.

131. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}} & \text{, si } x\neq 0 \\ 0 & \text{, si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{x} & \text{, si } x<0 \\ x & \text{, si } 0\leqslant x<1 \\ \sqrt[5]{x} & \text{, si } x\geqslant 1 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de f y g en todo punto de $\mathbb{R}$ y la existencia de límites de f y g en $+\infty$ y en $-\infty$.

132. Sea $f:[0,1[\to\mathbb{R}$ una función continua. Definamos $g(x) = f(x-E(x))$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Prueba que la función g, así definida, es continua si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(0)$. Supuesto que esta condición se cumple, y que f no es constante, definamos $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $h(x) = g(1/x)$ si $x\neq 0$, y $h(0)=f(0)$. Justifica que h es continua y acotada en $\mathbb{R}^*$. Calcula la imagen por h de un intervalo de la forma $]0,r[$ donde $0<r<1$. Deduce que h no tiene límite por la izquierda ni por la derecha en 0 y que la imagen por h de todo intervalo es también un intervalo.

133. Estudia los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de:

a) Una función polinómica.

b) Una función racional.

134. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua no nula tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Prueba que si f toma algún valor positivo entonces f alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

135. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

1. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^{1/(x^2-1)}$, y $f(1) = \sqrt{\mathrm{e}}$.
2. $f:]-1/2,+\infty[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x+\mathrm{e}^x)^{1/x}$ y $f(0) = \mathrm{e}^2$.
3. $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1+x\,\log x)^{1/x}$, y $f(0)=0$.