Inducción

Fco. M. García Olmedo
Universidad de Granada
España

16 de octubre de 2017

Resumen

Contiene una introducción general a los contenidos sucintos para poder usar la inducción como herramienta de demostración en matemáticas y aspectos teóricos de las ciencias de la computación.

Índice

Índice de figuras

1. Los Postulados de Peano y la inducción finita

Puede que la función más conocida de las matemáticas sea la llamada *función sucesor de Peano*. Giuseppe Peano fue un matemático italiano nacido en 1858 y fallecido en 1932. Dicha función, representada por s, asigna su siguiente a cada número natural. Puede ser considerada como "la función que cuenta".

Definición 1.1. La *función sucesor de Peano* es la función:

$$s : \omega \longrightarrow \omega$$

definida[1] como $s(n) = n^+$, donde $n^+ = n \cup \{n\}$.

En términos de la función s existe una colección de "propiedades básicas" que caracterizan al "conjunto" de los números naturales ω. Estas propiedades se conocen con el nombre de *Postulados de Peano*.

Teorema 1.1. *Las siguientes afirmaciones, conocidas como postulados de Peano, son ciertas:*

P.1) $0 \in \omega$

P.2) Si $n \in \omega$*, entonces* $s(n) \in \omega$.

P.3) No existe $n \in \omega$ *tal que* $0 = s(n)$.

[1] Siguiendo el desarrollo de la teoría de conjuntos, a la postre se comprueba que $s(n) = n + 1$.

P.4) Si $s(n) = s(m)$, entonces $n = m$.

P.5) Si $P \subseteq \omega$ y cumple las siguientes condiciones:

a) $0 \in P$

b) $s(n) \in P$ *siempre que* $n \in P$

entonces $P = \omega$.

El postulado P.5 se conoce como el *principio de inducción finita.*

Teorema 1.2 (*Principio del Buen Orden*). *Todo conjunto de números naturales no vacío tiene un elemento mínimo.*

Teorema 1.3 (*Segundo Principio de Inducción Finita*). *Si para todo número natural*[2] n *se cumple:*

$$n \in P \text{ siempre que } n \subseteq P \tag{1}$$

Entonces $P = \omega$.

Observación 1.1. Obsérvese que si un subconjunto de números naturales P cumple la condición (1) necesariamente debe contar con 0 entre sus elementos. En efecto, sea cual sea P siempre se cumplirá $\varnothing \subseteq P$, por lo que en virtud de la condición (1) se debe cumplir $\varnothing \in P$, esto es, $0 \in P$.

Observación 1.2. Obsérvese que la demostración dada del Teorema 1.3 es una consecuencia del Principio del Buen Orden.-

2. Equivalencia entre Principios

Hagamos una síntesis de los principios nombrados hasta ahora:

1. **Principio de Inducción Finita**; Si $P \subseteq \omega$ y cumple las siguientes condiciones:

   a) $0 \in P$

   b) $s(n) \in P$ siempre que $n \in P$

   entonces $P = \omega$.

2. **Principio del Buen Orden**; Todo conjunto de números naturales no vacío tiene un elemento mínimo.

3. **Segundo Principio de Inducción Finita**; Si $P \subseteq \omega$ y cumple que:

$$\text{Para todo número natural } n,\ n \in P \text{ siempre que } n \subseteq P \tag{2}$$

   Entonces $P = \omega$.

Teorema 2.1. *Si es válido el principio del buen orden entonces es válido el principio de inducción finita.*

Teorema 2.2. *Si es válido el segundo principio de inducción finita entonces es válido el principio del buen orden.*

Corolario 2.3. *Son equivalentes los siguientes principios:*

1. *El principio de inducción finita.*
2. *El principio del buen orden.*

[2]Según el modelo que tenemos de ω, también representado como ω, $0 = \varnothing$ y si $n \neq 0$ entonces $n = \{0, \dots, n-1\}$.

3. *El segundo principio de inducción finita.*

El principio de inducción ha sido difundido enunciándolo sobre enunciados proposicionales y no referidos necesariamente a 0 como primer natural de validez. En lo que sigue derivaremos dichas presentaciones.

En lo que sigue nos referiremos a los enunciado $P(i)$ dependientes de números naturales i que pueden ser evaluados como verdaderos o falsos como *enunciados proposicionales* o *fórmulas proposicionales.*

Teorema 2.4. *Sea $P(i)$ un enunciado proposicional e $i_0 \in \omega$. Supongamos que:*

1. *$P(i_0)$ es cierto (paso base).*
2. *Para todo todo $k \in \omega$ tal que $i_0 \leq k$, $P(k+1)$ es cierto siempre que $P(k)$ sea cierto (hipótesis de inducción).*

entonces $P(i)$ es cierto para todo $i \in \omega$ tal que $i_0 \leq i$.

Ejemplo 2.1. Para todo $n \in \omega$ tal que $0 \leq n$ es cierta la igualdad (la igualdad es representada por $P(n)$):

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

Solución. En efecto, (paso base) para $i = 1$ el miembro de la izquierda de la ecuación 3) es 1 y el de la derecha es $\frac{1(1+1)}{2} = 2/2 = 1$; por tanto $P(1)$ es cierta. (Paso de inducción) Supongamos que $1 \leq k$ y que $P(k)$ es cierta (hipótesis de inducción) y demostremos que de ello se deduce que $P(k+1)$ es cierta. Un razonamiento que sirve de demostración es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= (\sum_{i=1}^{k} i) + (k+1), \text{ por definición} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1), \text{ por hip. de inducción} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+2)(k+1)}{2}
\end{aligned}$$

Por el *primer principio de inducción finita*, $P(n)$ es cierta para todo $1 \leq n$. □

Ejemplo 2.2. Probar que el producto de tres números naturales consecutivos cualesquiera es divisible por 6.

Solución. Sean los siguientes polinomios:

- $q(x) = 3(x+1)(x+2)$
- $p(x) = x(x+1)(x+2)$

Veamos por inducción que para todo $n \in \omega$, $6 \mid q(n)$. Como $q(0) = 6$ está claro que lo que se quiere demostrar vale para $n = 0$ (**caso base**). Supongamos que $0 \leq n$ y que $6 \mid q(n)$ (**hip. inducción**); veamos ahora que $6 \mid q(n+1)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
q(n+1) - q(n) &= 3(n+2)(n+3) - 3(n+1)(n+2) \\
&= 3(n+2)(n+3-(n+1)) \\
&= 3(n+2)2 \\
&= 6(n+2)
\end{aligned}$$

por lo que evidentemente $6 \mid q(n+1)-q(n)$; pero si $6 \mid q(n)$ y $6 \mid q(n+1)-q(n)$, se deduce que $6 \mid q(n+1)$, como queríamos demostrar.

Veamos ahora, también por inducción, que para todo $n \in \omega$ se cumple $6 \mid p(n)$. Se tiene que $6 \mid p(0)$ pues $p(0) = 0$ (**caso base**). Supongamos que $0 \leq n$ y que $6 \mid p(n)$ (**hip. inducción**); veamos ahora que $6 \mid p(n+1)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} p(n+1) - p(n) &= (n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2) \\ &= (n+3-n)(n+2)(n+3) \\ &= 3(n+1)(n+2) \\ &= q(n) \end{aligned}$$

Por lo antes demostrado se tiene que $6 \mid p(n+1) - p(n)$, y de ello y la hipótesis de inducción se deduce que $6 \mid p(n+1)$, como queríamos demostrar. □

Teorema 2.5. *Sea $P(i)$ un enunciado proposicional e $i_0 \in \omega$. Si para todo número natural n, $P(n)$ es cierto siempre que $P(i)$ sea cierto para todo $i \in \omega$ tal que $i_0 \leq i < n$, entonces $P(i)$ es cierto para todo $i \in \omega$ tal que $i_0 \leq i$.*

Ejemplo 2.3. Todo número natural mayor que 1 puede ser expresado como producto de números primos.

Solución. Supongamos que n es un número natural superior a 1 y supongamos que para todo $1 < k < n$, k puede ser expresado como un producto de números primos (**hip. de induc.**). Demostraremos que n puede ser expresado como un producto de números primos. Como n es natural, será primo o no lo será. Si n es primo, es producto de un número primo, a saber, él mismo; así pues la propiedad del enunciado resulta cierta en este caso. Si n no es primo es porque es producto de dos números naturales a y b, que cumplirán $1 < a \leq b < n$. Por la hipótesis de inducción tanto a como b pueden ser expresados como producto de números primos. El producto de los primos que descomponen a a por el de los que descomponen a b es un producto de primos que expresa a $n = ab$ y queda demostrado que la propiedad del enunciado es cierta para n. De esto se deduce que el enunciado es cierto vía el segundo principio de inducción finita. □

3. Teorema de Recursión

La inducción se usa para demostrar resultados y también para definir, *definir por recursión*. A tal fin damos una versión particular del conocido como *teorema de recursión*.

Teorema 3.1 (de recursión). *Sea X un conjunto, $a \in X$ y $f\colon X \longrightarrow X$ una función. Existe una única función $u\colon \omega \longrightarrow X$ tal que $u(0) = a$ y que para todo $n \in \omega$, $u(n^+) = f\big(u(n)\big)$.*

Observación 3.1. Cada vez que se usa se usa el teorema 3.1, decimos que se ha hecho una definición por inducción.

En general es fácil de usar este teorema, aunque a veces las definiciones se pueden complicar. Es el caso de la función factorial y de la *sucesión de Fibonacci*.

Ejemplo 3.1. Sea $x = \omega \times \omega$, $a = \langle 1, 1\rangle$ y $f : x \longrightarrow x$ definida como $f(n,m) = \langle nm, n^+\rangle$. El teorema afirma que existe una única función

$$u\colon \omega \longrightarrow \omega \times \omega$$

que cumple $u(0) = \langle 1, 1\rangle$ y $u\big(s(n)\big) = f\big(u(n)\big)$, para todo $n \in \omega$. Representemos por fac a la función $\pi_1 \circ f$, donde π_1 es la proyección de $\omega \times \omega$ en su primera coordenada. A fac se le denomina *función factorial*. Es fácil demostrar que $\mathrm{fac}(0) = 1$ y (por inducción) que $\mathrm{fac}(n^+) = n^+ \,\mathrm{fac}(n)$.

Ejemplo 3.2. Sea $x = \omega \times \omega \times \omega$, $a = \langle 0,1,0 \rangle$ y $f : x \longrightarrow x$ definida como $f(n,m,s) = \langle n+m, n, m \rangle$. El *teorema de recursión* afirma que existe una única función

$$u \colon \omega \longrightarrow \omega \times \omega \times \omega$$

que cumple $u(0) = \langle 0,1,0 \rangle$ y $u\big(s(n)\big) = f\big(u(n)\big)$, para todo $n \in \omega$. Llamemos v a la composición $\pi_1 \circ f$, donde π_1 es la proyección de $\omega \times \omega \times \omega$ sobre su primera coordenada. A v se le denomina *sucesión de Fibonacci*. Es fácil demostrar que $v(0) = 0$, $v(1) = 1$ y (por inducción) que $v(n+2) = v(n+1) + v(n)$, para todo $i \in \omega$.

4. Ejercicios de Inducción

1. Demuestre que para todo número natural no nulo n se cumple:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{n+2}{2n+2}$$

2. Demuestre que para cualquier número natural n el número $n^2 - n$ es par. Utilice lo anterior para demostrar que para todo número natural n, $n^3 - 3n^2 - 4n$ es un múltiplo de 6.

3. Usar el teorema de inducción para demostrar que:

$$2^{n-1} \leq n!$$

   para todo $n > 0$.

4. Utilizar el teorema de inducción para demostrar que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

   para todo $n \geq 2$.

5. Utilizar el teorema de inducción para demostrar que:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

   para todo $n > 1$.

6. Todo número natural mayor que 1 es divisible por al menos un número primo.

7. Usar el teorema de inducción para demostrar que $3^n + 7^n - 2$ es divisible por 8, para $n \geq 1$.

8. Usar el teorema de inducción para demostrar que $n^3 + 2n$ es divisible por 3, para $n \geq 1$.

9. Es cierto que de un número n en adelante se tiene que $n! > 100^n$. Encontrarlo y demostrar por inducción lo dicho a partir de ese número hallado.

10. Se ha dado una demostración falaz del enunciado falso siguiente: "Todos los niños tienen el mismo color de ojos". La demostración es como sigue. Si el grupo de niños es de 1 está claro que todos los del grupo tienen el mismo color de ojos. Supongamos el resultado cierto para todo grupo de tamaño n (con $n \geq 1$) y veamos que es cierto para $n+1$. Si nos dan un grupo de $n+1$ niños y los ordenamos por edad (digamos de menor a mayor), los n primeros tienen el mismo color de ojos al igual que los n últimos. Por tanto, todos los niños del grupo tienen el mismo color de ojos. Ahora bien, los niños forman un conjunto como los mencionados —de mayor o menor tamaño— por lo que el resultado está demostrado. Indique en el argumento dónde está el fallo.

11. Cualesquiera dos números naturales a y b tienen un mínimo común múltiplo, esto es, un número m que es múltiplo común a a y b y es menor o igual que cualquier otro múltiplo común a ambos.

12. Sea n un número natural y sea S un conjunto de números naturales menores que n. Demuestre que S es vacío o S tiene máximo.

13. Demuestre que para todo número natural n, $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5.

14. Demuestre que para todo número natural n, $3^{4n} - 1$ es múltiplo de 5.

15. Demuestre que para todo número impar n, 9 divide a $4^n + 5^n$.

16. Sea p la función dada por:

$$\begin{aligned} p(a,0) &= 0, \\ p(a,b) &= \begin{cases} p\left(2a, \frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ p\left(2a, \frac{b-1}{2}\right) + a & \text{si } b \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b, $p(a,b) = a \cdot b$.

17. Sea e la función dada por:

$$\begin{aligned} e(a,0) &= 1, \\ e(a,b) &= \begin{cases} e\left(a^2, \frac{b}{2}\right) & \text{si } b \text{ es par,} \\ e\left(a^2, \frac{b-1}{2}\right) a & \text{si } b \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Demuestre por inducción que para cualesquiera números naturales a y b, $e(a,b) = a^b$.

18. Demuestre que para todo número natural n:

$$\sum_{i=0}^{n} i!i = (n+1)! - 1$$

19. Demuestre que para para todo número natural n se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$$

20. Supongamos que disponemos en cantidad suficiente de sellos de 3 y 8 céntimos sólo. Demuestre que con esos sellos, una carta podría ser franqueada con una cántidad de céntimos superior a 13.

21. Definamos los *números de Fibonacci* como cualquier número de la sucesión:

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0; \\ 1, & \text{si } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{si } 1 < n; \end{cases}$$

Demuestre que para todo número natural n se cumple:

$$F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

22. Definamos los *números de Lucas* como cualquier número de la sucesión:

$$L_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n = 0; \\ 1, & \text{si } n = 1; \\ L_{n-1} + L_{n-2}, & \text{si } 1 < n; \end{cases}$$

Demuestre que para todo número natural n se cumple:

$$L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

23. Sean $n_0, \ldots, n_d$ puntos distintos de un dominio de integridad $\mathbf{A}$ en cantidad igual a $d+1$ y sea el polinomio $g(x)$ en una variable definido por la siguiente igualdad:

$$g(x) = \prod_{i=0}^{d}(x - n_i)$$

Entonces:

$$g'(x) = \sum_{i=0}^{d}\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{d}(x - n_j)$$