Capítulo 8

Unificación

8.1. Unificación

8.1.1. Sustituciones

El objetivo de esta sección es, dados dos o más literales (fórmulas atómicas), estudiar si es posible transformarlas de forma que sean iguales. Las transformaciones que van a estar permitidas son aquellas en las que una variable se sustituye por un término. Llamaremos a este tipo de transformaciones "sustituciones".

Recordemos que un literal es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.

Definición 60. *Sea α un literal, x una variable con alguna ocurrencia en la fórmula α y t un término cualquiera. La* sustitución elemental *de x por t es la transformación de la fórmula α en otra fórmula en la que cada ocurrencia de la variable x es sustituida por el término t.*

Dicha sustitución la representaremos como $\sigma = (x|t)$, y la fórmula resultante de aplicar la sustitución σ, como $\sigma(\alpha)$

Ejemplo 8.1.1.

En la fórmula $R(f(x), a, g(h(x), y))$ realizamos la sustitución $(x|g(a, y))$. Nos queda entonces la fórmula $R(f(g(a, y)), a, g(h(g(a, y)), y))$.

Al sustituir una variable x por un término, dicha variable puede aparecer en el término por el que sustituimos, así, podemos hacer la sustitución $\sigma = (x|f(x))$, y así, si α es la fórmula del ejemplo anterior, entonces

$$\sigma(\alpha) = R(f(f(x)), a, g(h(f(x)x), y)).$$

Obviamente, a la fórmula que resulta de aplicarle una sustitución elemental podemos aplicarle otra sustitución elemental. Si σ_0 es la primera sustitución que hacemos, y σ_1 la segunda, escribiremos la sustitución total como $\sigma_1\sigma_0$. Dicha sustitución la denominaremos *composición de σ_0 y σ_1*

Ejemplo 8.1.2.

Según el ejemplo anterior, el resultado de aplicar la sustitución $\sigma_0 = (x|g(a, y))$ a la fórmula $R(f(x), a, g(h(x), y))$ es $R(f(g(a, y)), a, g(h(g(a, y)), y))$.

Si ahora sustituimos la variable y por $g(a, h(a))$ (es decir, aplicamos la sustitución $(y|g(a, h(a)))$), obtenemos la fórmula

$$R(f(g(a, g(a, h(a)))), a, g(h(g(a, g(a, h(a)))), g(a, h(a))))$$

La sustitución realizada es entonces $\sigma = (y|g(a, h(a)))\ (x|g(a, y))$

Notemos que el orden en que tomamos las sustituciones elementales es importante. Puede comprobarse que no es lo mismo $\sigma = (y|g(a, h(a)))\ (x|g(a, y))$ que $\tau = (x, g(a, y))\ (y|g(a, h(a)))$.

En este segundo caso, el resultado de aplicarle a $R(f(x), a, g(h(x), y))$ la sustitución τ es

$$R(f(g(a, y)), a, g(h(g(a, y)), g(a, h(a))))$$

Comprueba que efectivamente éste es el resultado, y constata que es diferente al de aplicar la sustitución σ.

Si observamos el ejemplo anterior, vemos que el efecto de la sustitución σ es el de cambiar cada aparición de x por el término $g(a, g(a, h(a)))$, y cada aparición de y por $g(a, h(a))$. Dicha sustitución podemos representarla como

$$\sigma = (x|g(a, g(a, h(a)));\ y|g(a, h(a)))$$

Nótese que en este caso el orden en que lo escribamos no influye, es decir,

$$(x|g(a, g(a, h(a)));\ y|g(a, h(a))) = (y|g(a, h(a));\ x|g(a, g(a, h(a))))$$

La composición en orden inverso, es decir, la sustitución τ podríamos representarla ahora como

$$(x|g(a, y);\ y|g(a, h(a)))$$

que claramente no coincide con la sustitución σ.

En general, podemos dar la siguiente definición.

Definición 61. *Sea α un literal en un lenguaje de primer orden.*

Una sustitución en α es la transformación que consiste en sustituir algunas (o todas) de las variables que aparecen en α por términos del lenguaje.

Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son las variables que vamos a sustituir, y $t_1, t_2, \cdots, t_n$ los términos por los que las sustituimos, entonces representaremos la sustitución como

$$(x_1|t_1;\ x_2|t_2;\ \cdots\ x_n|t_n)$$

Ejercicio 8.1.1. *Comprueba que las sustituciones $(x|y)$ $(y|x)$, $(y|x)$ $(x|y)$ y $(x|y;\ y|x)$ son todas distintas, y expresa la última como composición de sustituciones elementales.*

8.1.2. Unificadores

A continuación pasamos a dar el concepto de *unificador*. Más adelante veremos como calcular un unificador para dos o más literales.

Definición 62. *Dado un conjunto de literales $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, un unificador para tales fórmulas es una sustitución σ de forma que $\sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2) = \cdots = \sigma(\alpha_n)$.*

Ejemplo 8.1.3.

1. *Dadas las fórmulas $P(x)$ y $P(a)$, un unificador de ambas es, por ejemplo, $(x|a)$.*
2. *Las fórmulas $P(x)$ y $P(f(x))$ no tienen unificador, pues para cualquier sustitución $\sigma = (x|t)$ nos va a quedar que $\sigma(P(x)) = P(t)$ mientras que $\sigma(P(f(x))) = P(f(t))$, y estas fórmulas van a ser siempre distintas.*
3. *Las fórmulas $Q(x, a)$ y $Q(y, b)$ no tienen unificador, pues no podemos sustituir las constantes por ningún término, por tanto, para cualquier sustitución σ que hagamos nos quedará $\sigma(Q(x, a)) = Q(t_1, a)$ y $\sigma(Q(y, b)) = Q(t_2, b)$.*
4. *Para las fórmulas $P(a, x, f(g(y)))$, $P(z, f(z), f(u))$ sí existen unificadores. Por ejemplo, es un unificador $(x|f(a);\ y|f(x);\ z|a;\ u|g(f(x)))$.*

   También $(x|f(a);\ y|a;\ z|a;\ u|g(a))$ es un unificador para estas dos fórmulas.

Un conjunto de literales se dice unificable si existe un unificador para ellas. Caso contrario, dicho conjunto se dice que no es unificable.

Nótese que si σ es un unificador para un conjunto de fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ y τ es una sustitución cualquiera, entonces $\tau\sigma$ es también un unificador para $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

Ejemplo 8.1.4.

Dadas las fórmulas $P(a, x, f(g(y)))$, $P(z, f(z), f(u))$, sabemos que

$$\sigma = (x|f(a);\ y|f(x);\ z|a;\ u|g(f(x)))$$

es un unificador para ambas. Sea ahora $\tau = (x|g(a))$*. En tal caso, se tiene que*

$$\tau\sigma = (x|f(a);\; y|f(g(a));\; z|a;\; u|g(f(g(a))))$$

que es también un unificador para $P(a, x, f(g(y)))$ *y* $P(z, f(z), f(u))$*.*

Nótese que $\sigma\tau$ *no es unificador para las dos fórmulas, pues*

$$\sigma\tau = (x|g(a);\; y|f(x);\; z|a;\; u|g(f(x)))$$

y se tiene que

$$\sigma\tau(P(a, x, f(g(y)))) = P(a, g(a), f(g(f(x))))$$
$$\sigma\tau(P(z, f(z), f(u)) = P(a, f(a), f(g(f(x))))$$

Si analizamos el ejemplo precedente, vemos que para lograr que las fórmulas $P(a, x, f(g(y)))$ y $P(z, f(z), f(u))$ sean iguales después de realizar sustituciones, entonces z debe sustituirse por a (para igualar la primera componente), x debe sustituirse por $f(z) = f(a)$, mientras que u debe sustituirse por lo que le demos a $g(y)$, independientemente del valor de y. Los unificadores que hemos dado para ambas fórmulas satisfacían estas condiciones, y sobre lo que teníamos libertad, que era el término que sustituye a y, ha tomado un valor en cada uno de los casos.

En el primer caso, sustituíamos y por $f(x)$ (y por tanto, u por $g(y) = f(g(x))$)

En el segundo caso, sustituíamos y por a

Y en el tercero, sustituíamos y por $f(g(a))$.

Vemos entonces que hay una condición, que podemos representar en la sustitución $(z|a;\; x|f(a);\; u|g(y))$ que debe satisfacer cualquier unificador.

Esta idea, vamos a formalizarla en la siguiente definición.

Definición 63. *Sean* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *literales en un lenguaje de primer orden, y sea* σ *una sustitución.*

Se dice que σ *es un* **unificador principal** *para* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *(también se llama* **unificador más general***) si:*

- σ *es un unificador para* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$*.*

- Si τ *es otro unificador para* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$*, entonces existe una sustitución* τ_1 *de forma que* $\tau = \tau_1\sigma$

Es decir, σ es un unificador principal si todos los unificadores pueden obtenerse a partir de σ.

Ejemplo 8.1.5.

1. *Consideramos nuevamente las fórmulas* $P(a, x, f(g(y)))$ *y* $P(z, f(z), f(u))$*. Entonces un unificador principal es*

   $$(z|a;\; x|f(a);\; u|g(y)) \;=\; (x|f(a);\; z|a;\; u|g(y))$$

   La sustitución $(x|f(a);\; y|f(x);\; z|a;\; u|g(f(x)))$*, que es un unificador para ambas fórmulas, se puede expresar como* $(y|f(x))\; (x|f(a);\; z|a;\; u|g(y))$

   La sustitución $(x|f(a);\; y|a;\; z|a;\; u|g(a))$*, que también es un unificador para ambas fórmulas, se puede expresar como* $(y|a)\; (x|f(a);\; z|a;\; u|g(y))$

   Por último, la sustitución $(x|f(a);\; y|f(g(a));\; z|a;\; u|g(f(g(a))))$ *puede expresarse como la composición* $(y|f(g(a)))\; (x|f(a);\; z|a;\; u|g(y))$

2. *Un conjunto de literables unificable puede tener más de un unificador principal. Así, las sustituciones* $\sigma_1 = (x|y)$*, y* $\sigma_2 = (y|x)$ *son unificadores principales de las fórmulas* $P(x, y)$ *y* $P(y, x)$

Vamos a dar a continuación dos métodos para decidir si dado un conjunto de literales, éstos son unificables, y caso de serlo, encontrar un unificador principal.

Algoritmo de Unificación

Este algoritmo nos permite un cálculo automático de un unificador más general para un conjunto de literales.

Datos de entrada: literales a unificar (conjunto W)

Salida: un unificador principal o la respuesta "no son unificables"

Conjunto de discordancia para un par de literales: son los (**primeros**) términos en los que difieren. Para obtenerlo se recorren los literales de izquierda a derecha y se marcan los términos que siendo diferentes ocupan idénticas posiciones en los literales.

Ejemplo 8.1.6.

1. $\{P(x), P(y)\}$ *los literales difieren en los términos que ocupan la posición en negrita* $P(\mathbf{x})$*,* $P(\mathbf{y})$ *Luego el conjunto de discordancia es* $\{x, y\}$
2. $\{Q(x, f(x, y)); Q(x, f(y, y))\}$ *los literales difieren en los términos que ocupan la posición en negrita* $Q(x, f(\mathbf{x}, y)); Q(x, f(\mathbf{y}, y))$ *Luego el conjunto de discordancia es* $\{x, y\}$
3. $\{R(g(x)), R(f(y))\}$ *los literales difieren en los términos que ocupan la posición en negrita* $R(\mathbf{g}(\mathbf{x})), R(\mathbf{f}(\mathbf{y}))$ *Luego el conjunto de discordancia es* $\{g(x), f(y)\}$

Descripción del algoritmo:

Inicialización $W_0 = W$, $\sigma_0 =$Identidad

Bucle: Si el número de elementos del conjunto W_k es 1, entonces el proceso acaba. **Salida:** σ_k es un unificador principal.

En otro caso calcular el conjunto de discordancia de W_k , D.

Si en D no aparece ninguna variable o aparece alguna variable, pero los demás términos en D dependen de ella, entonces el proceso termina porque los literales no son unificables. **Salida:** No son unificables.

Si existe una variable v_k y un término t_k en el que no aparece la variable v_k, **entonces** hacemos $\sigma_{k+1} = (v_k|t_k) \circ \sigma_k$; aplicamos la sustitución $(v_k|t_k)$ en W_k para obtener W_{k+1} y volver a ejecutar el bucle.

Ejemplo 8.1.7.

$$W = \{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u))\}$$

Inicialización:

$$W_0 = \{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u))\}$$

$$\sigma_0 = identidad$$

Primera pasada por el bucle: *El conjunto tiene más de un elemento. Calculamos el conjunto de discordancia* $D = \{a, z\}$*. Tiene una variable y un término que no depende de ella, se añade a la sustitución inicial* $(z|a)$ *(entonces* $\sigma_1 = (z|a)$ *) y se calcula* W_1 *aplicando esta sustitución a* W_0*:*

$$W_1 = \{P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\}$$

Segunda pasada por el bucle: *El conjunto tiene más de un elemento. Calculamos el conjunto de discordancia* $D = \{x, f(a)\}$ *Tiene una variable y un término que no depende de ella, se añade a la sustitución inicial* $(x|f(a))$ *(entonces* $\sigma_2 = (z|a; x|f(a))$ *y se calcula* W_2*:*

$$W_2 = \{P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\}$$

Tercera pasada por el bucle: *El conjunto tiene más de un elemento. Calculamos el conjunto de discordancia* $D = \{g(y), u\}$. *Tiene una variable y un término que no depende de ella, se añade a la sustitución inicial* $(u|g(y))$ *(entonces* $\sigma_3 = (z|a; x|f(a); u|g(y))$*), y se calcula* W_3

$$W_3 = \{P(a, f(a), f(g(y)))\}$$

Cuarta pasada por el bucle: W_3 *tiene un solo elemento* **FIN**

Salida:

$$\sigma = \sigma_3 = (z|a; x|f(a); u|g(y))$$

es un unificador principal para el conjunto de literales dado.

Sistemas de ecuaciones en términos

A continuación vamos a dar otro método para decidir cuando un conjunto de fórmulas atómicas es o no unificable.

Supongamos que tenemos dos fórmulas atómicas α y β, que queremos ver si son o no unificables. Supongamos que $\alpha = R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ y $\beta = R(t'_1, t'_2, \cdots, t'_n)$. Obviamente, si las fórmulas empiezan por diferentes símbolos de predicado, entonces no son unificables.

Lo que tratamos es de encontrar una sustitución σ de forma que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$. En definitiva, lo que buscamos es una sustitución que transforme el término t_1 en lo mismo que el término t'_1; el término t_2 en lo mismo que el término t'_2, y así hasta el término t_n que debe ser transformado en lo mismo que el término t'_n.

Lo que tenemos podemos representarlo como n ecuaciones en términos como sigue:

$$\begin{array}{ccc} t_1 & = & t'_1 \\ t_2 & = & t'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_n & = & t'_n \end{array}$$

Cada una de las expresiones $t_i = t'_i$ es una ecuación del sistema e_i. Un sistema de ecuaciones es por tanto un conjunto de ecuaciones $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$

Una solución del sistema es una sustitución σ que transforme cada término t_i en lo mismo que el término t'_i.

Si un sistema tiene solución, entonces existe una sustitución σ de forma que cualquier solución del sistema τ se puede expresar como $\tau = \tau_1\sigma$ para alguna sustitución τ_1. Dicha solución se llamará *solución principal*

Dos sistemas de ecuaciones en términos son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Vamos a dar un método que permita, dado un sistema de ecuaciones en términos, decidir si tiene o no solución, y caso de tenerla, encontrarlas todas. Este método se basa en varios resultados que enunciamos a continuación. Por ser todos ellos muy intuitivos, los dejamos sin demostración.

Comenzamos con una definición.

Definición 64. *Dado un sistema de ecuaciones en términos* $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$*, se dice que está en forma resuelta si:*

- *Cada ecuación del sistema es de la forma* $x_i = t_i$*, con* x_i *una variable.*
- *Las variables* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *son todas distintas.*
- *En los términos* $t_1, t_2, \cdots, t_n$ *no hay ninguna ocurrencia de las variables del conjunto* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

En tal caso, $\sigma_E = (x_1|t_1;\ x_2|t_2;\ \cdots;x_n|t_n)$ *es una solución principal del sistema.*

Vamos entonces a ver como transformar (si es posible) un sistema en otro sistema equivalente y que esté en forma resuelta. Para esto, vamos a ver algunos resultados que, bien permiten transformar un sistema en otro equivalente, bien concluir que el sistema no tiene solución.

1. Los sistemas $E \cup \{t = t\}$ y E son equivalentes. Es decir, podemos eliminar las ecuaciones en las que el término de la derecha y el de la izquierda coinciden.

2. Los sistemas $E \cup \{t_1 = t_2\}$ y $E \cup \{t_2 = t_1\}$ son equivalentes.

3. Los sistemas

$$E \cup \{f(t_1, \cdots, t_m) = f(t'_1, \cdots, t'_m)\} \text{ y } E \cup \{t_1 = t'_1, \cdots, t_m = t'_m\}$$

son equivalentes.

4. Los sistemas $E \cup \{x = t\}$, donde x es una variable que no aparecen en el término t, y $\sigma(E) \cup \{x = t\}$ son equivalentes, donde σ es la sustitución $\sigma = (x|t)$.

En este caso, $\sigma(E)$ es el sistema formado por las ecuaciones que resultan de realizar la sustitución σ en cada uno de los términos que intervienen en el sistema E.

5. Un sistema de la forma $E \cup \{x = t\}$ donde t es un término en el que interviene la variable x, y $t \neq x$ no tiene solución.

6. Un sistema de la forma $E \cup \{f(t_1, \cdots, t_n) = g(t'_1, \cdots, t'_m)\}$, con f y g símbolos de función distintos, no tiene solución.

7. Un sistema de la forma $E \cup \{f(t_1, \cdots, t_n) = a\}$, o de la forma $E \cup \{a = b\}$, donde a y b son constantes distintas, no tiene solución.

Utilizando los resultados que acabamos de enunciar, podemos, dado un sistema de ecuaciones en términos, bien transformarlo en un sistema en forma resuelta, bien concluir que no tiene solución. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 8.1.8.

1. *Vamos a resolver el sistema:*

$$\left.\begin{array}{lcl} a & = & z \\ x & = & f(z) \\ f(g(y)) & = & f(u) \end{array}\right\}$$

El resultado 2 *permite transformarlo en*

$$\left.\begin{array}{lcl} z & = & a \\ x & = & f(z) \\ f(g(y)) & = & f(u) \end{array}\right\}$$

Ahora, por el resultado cuatro, y con la sustitución $(z|a)$ *transformamos el sistema en*

$$\left.\begin{array}{lcl} z & = & a \\ x & = & f(a) \\ f(g(y)) & = & f(u) \end{array}\right\}$$

Por el apartado 3 *llegamos a*

$$\left.\begin{array}{lcl} z & = & a \\ x & = & f(a) \\ g(y) & = & u \end{array}\right\}$$

Y por último, con el apartado segundo transformamos el sistema en

$$\left.\begin{array}{lcl} z & = & a \\ x & = & f(a) \\ u & = & g(y) \end{array}\right\}$$

que es un sistema en forma resuelta.

2. *Vamos a estudiar si el conjunto de fórmulas*

$$\{P(x,y),\ P(f(z),x),\ P(u,f(x))\}$$

es unificable o no.

Para esto, planteamos el sistema de ecuaciones en términos y tratamos de resolverlo. En negrita representamos la ecuación que vamos a utilizar en el paso siguiente.

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathbf{x} & = & \mathbf{f(z)} \\ y & = & x \\ x & = & u \\ y & = & f(x) \end{array}\right\} \overset{(4)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{lcl} x & = & f(z) \\ y & = & f(z) \\ \mathbf{f(z)} & = & \mathbf{u} \\ y & = & f(f(z)) \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{lcl} x & = & f(z) \\ \mathbf{y} & = & \mathbf{f(z)} \\ u & = & f(z) \\ y & = & f(f(z)) \end{array}\right\} \overset{(4)}{\Longrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} x & = & f(z) \\ y & = & f(z) \\ u & = & f(z) \\ \mathbf{f(z)} & = & \mathbf{f(f(z))} \end{array}\right\} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{lcl} x & = & f(z) \\ y & = & f(z) \\ u & = & f(z) \\ z & = & f(z) \end{array}\right\}$$

y al quedarmos al final la ecuación $z = f(z)$ *concluimos que el conjunto no es unificable (resultado 5).*

3. *Vamos por último a comprobar si el conjunto de dos fórmulas*

$$\{P(x,g(x),y,h(x,y),z,k(x,y,z));\ P(u,v,e(v),w,f(v,w),t)\}$$

es unificable o no. Para ello, vamos a plantear el sistema de ecuaciones en términos y vamos a tratar de llevarlo a forma resuelta.

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & u & \overset{(4)}{\longleftarrow} \\ g(x) & = & v & \\ y & = & e(v) & \\ h(x,y) & = & w & \\ z & = & f(v,w) & \\ k(x,y,z) & = & t & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcll} x & = & u & \\ g(u) & = & v & \overset{(2)}{\longleftarrow} \\ y & = & e(v) & \\ h(u,y) & = & w & \overset{(2)}{\longleftarrow} \\ z & = & f(v,w) & \\ k(u,y,z) & = & t & \overset{(2)}{\longleftarrow} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & u & \\ v & = & g(u) & \overset{(4)}{\longleftarrow} \\ y & = & e(v) & \\ w & = & h(u,y) & \\ z & = & f(v,w) & \\ t & = & k(u,y,z) & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcll} x & = & u & \\ v & = & g(u) & \\ y & = & e(g(u)) & \overset{(4)}{\longleftarrow} \\ w & = & h(u,y) & \\ z & = & f(g(u),w) & \\ t & = & k(u,y,z) & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & u & \\ v & = & g(u) & \\ y & = & e(g(u)) & \\ w & = & h(u,e(g(u))) & \overset{(4)}{\longleftarrow} \\ z & = & f(g(u),w) & \\ t & = & k(u,e(g(u)),z) & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcll} x & = & u & \\ v & = & g(u) & \\ y & = & e(g(u)) & \\ w & = & h(u,e(g(u))) & \\ z & = & f(g(u),h(u,e(g(u)))) & \overset{(4)}{\longleftarrow} \\ t & = & k(u,e(g(u)),z) & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & u \\ v & = & g(u) \\ y & = & e(g(u)) \\ w & = & h(u,e(g(u))) \\ z & = & f(g(u),h(u,e(g(u)))) \\ t & = & k(u,e(g(u)),f(g(u),h(u,e(g(u))))) \end{array}\right.$$

Y hemos llegado a un sistema de ecuaciones, equivalente al de partida, y que está en forma resuelta.