Nociones de Lógica Proposicional

Fco. M. García Olmedo
Universidad de Granada
España

21 de octubre de 2017

Resumen

Contiene un resumen de los conceptos y resultados fundamentales del enfoque semántico de la lógica proposicional. Se añade una explicación del Algoritmo de Davis y Putnam.

Índice

Índice de figuras

1. Lenguaje Proposicional

Definición 1.1. El *lenguaje proposicional* consta de los siguientes símbolos:

- las *proposiciones atómicas*, también llamados *enunciados atómicos* o simplemente *símbolos de variable proposicional*, y que representamos con las primeras letras minúsculas del alfabeto latino, subindicándolas si fuese preciso: a, b, c, a_1, a_2, a_3, etc. Supondremos que dado cualquier conjunto finito de variables proposicionales, existirá al menos una variable que no pertenece a él.
- símbolos lógicos: $\to$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$ y $\leftrightarrow$
- símbolos auxiliares:) y (

y llamamos *expresión* del lenguaje proposicional a cada sucesión finita no vacía de sus símbolos.

Observación 1.1. Un ejemplo de expresión es la siguiente sucesión $a \to b)ca\vee$ y otro es $(a \to b) \vee c$. El lector reconocerá que el segundo ejemplo posee "una coherencia" o "equilibrio" que no parece tener el primero. En lo que sigue distinguiremos entre expresiones para definir las llamadas "formulas proposicionales" o "sentencias proposicionales".

Definición 1.2. Son *fórmulas proposicionales* o simplemente *fórmulas* del lenguaje proposicional:

- cada una de las proposiciones atómicas,
- las expresiones: $(\alpha \to \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ y $(\neg\alpha)$, siempre que α y β sean fórmulas proposionales.

y convenimos en que no hay otras fórmulas proposicionales distintas a las antes mencionadas.

Observación 1.2. Es fácil demostrar que sea cual sea la fórmula que consideremos no existe más que una única forma de escribirla; se trata del *principio de lectura única*.

2. Implicación semántica

Definición 2.1. Si a cada proposición atómica a le hacemos corresponder un valor (de verdad) 0 ó 1, hemos construido lo que se denomina una *valoración* o también *asignación* y que representaremos por la letra v. Por el *principio de lectura única*, cada valoración v puede ser extendida de forma única a la totalidad de las fórmulas cumpliéndose, si dicha extensión la representamos con la misma letra v, que:

- $v(\neg\alpha) = v(\alpha) + 1$
- $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1$
- $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta)$
- $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha)v(\beta)$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = v(\alpha) + v(\beta) + 1$

donde las sumas y multiplicaciones entre los elementos 0 y 1 que hemos considerado en la enumeración anterior son las que se consignan en la siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Ejemplo 2.1. A modo de ejemplo de valoraciones ofrecemos los siguientes:

1. v_1 cumpliendo que para toda proposición atómica x, $v_1(x) = 1$.
2. v_2 cumpliendo que para toda proposición atómica x, $v_2(x) = 0$.
3. Dado cualquier número natural n y $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ cualquier conjunto de proposiciones atómicas con $n+1$ elementos, $v_A = \chi_A$.

Observación 2.1. Obervar que de la Definición 2.1 se desprenden las siguiente consecuencias sencillas:

- $v(\neg\alpha) = 1$ sii $v(\alpha) = 0$
- $v(\alpha \to \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = 0$ ó $v(\beta) = 1)$
- $v(\alpha \vee \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1)$
- $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 1)$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = v(\beta))$

y esta consideración, tan útil en la práctica, queda recogida en las tablas de la Figura 1.

Definición 2.2. Sea φ una fórmula del lenguaje proposicional. Entonces:

1. φ es una *fórmula satisfacible* sii, por def., existe (al menos) una valoración v tal que $v(\varphi) = 1$.

2. φ es una *fórmula refutable* sii, por def., $(\neg\varphi)$ es una fórmula satisfacible.

3. φ es una *fórmula tautológica*, *tautología* o *válida* sii, por def., para toda asignación v se cumple $v(\varphi)$.

4. φ es una *contradicción* sii, por def., $(\neg\varphi)$ es una *tautología*.

Observación 2.2. Sea observado que:

- φ es una *fórmula refutable* sii existe (al menos) una valoración v tal que $v(\varphi) = 0$.

- En palabras sencillas, una tautología es una fórmula que se evalúa como verdadera, se evalúen como se evalúen las fórmulas atómicas que intervienen en su única escritura; "la verdad" viene exigida por su única estructura sintáctica, significa "la verdad" por su forma y no por el valor mutable de sus partes atómicas.

- Si una fórmula φ es satisfacible pero no tautología, entonces es también refutable.

- φ es una *contradicción* sii para toda valoración v se cumple la igualdad $v(\varphi) = 0$.

- Si una fórmula φ es refutable pero no contradicción, entonces es también satisfacible.

Ejemplo 2.2.

1. $\alpha \to \alpha$ (*ley de identidad*)

2. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$ (ley de silogismo fuerte)

3. $\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big(\beta \to (\alpha \to \gamma)\big)$ (*ley de conmutación de premisas* o *cambio del antecedente*)

4. $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ (ley de silogismo débil)

5. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (*ley de "a fortiori"* (con mayor razón) o *"verum sequitur ad quodlibet"* (la verdad se sigue de cualquiera))

6. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ (*ley de Frege o autodistributiva*)

7. $\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$ (ley de *modus ponens*)

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

(a) negación

$\to$		
$\alpha \backslash \beta$	0	1
0	1	1
1	0	1

(b) implicación

$\vee$		
$\alpha \backslash \beta$	0	1
0	0	1
1	1	1

(c) disyunción

$\wedge$		
$\alpha \backslash \beta$	0	1
0	0	0
1	0	1

(d) conjunción

$\leftrightarrow$		
$\alpha \backslash \beta$	0	1
0	1	0
1	0	1

(e) equivalencia

Figura 1: Tablas para la interpretación semántica de los símbolos lógicos

8. $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$ (*ley de reducción de premisas*)
9. $((\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)) \to (\beta \to \alpha)$
10. $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\delta \to ((\beta \to (\gamma \to \varepsilon)) \to (\beta \to \varepsilon)))$
11. $\varepsilon \to ((\alpha \to \beta) \to ((\delta \to \alpha) \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$
12. $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (((\beta \to \alpha) \to \gamma) \to \gamma)$ (ley de *Dummet*)
13. $((\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)$ (ley de *Tanaka*)
14. $\big((\alpha \to \beta) \to \alpha\big) \to \alpha$ (ley de *Peirce*)
15. $((((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha) \to \gamma) \to ((\gamma \to \varphi) \to (\beta \to \varphi))$ (ley de *Meredith*)
16. $((\alpha \to \gamma) \to \beta) \to (((\beta \to \alpha) \to \beta) \to \beta)$ (ley para la trivalencia del sistema BCK)

Ejemplo 2.3.

1. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ (*ley de doble negación clásica o fuerte*)
2. $\alpha \to \neg\neg\alpha$ (*ley de doble negación intuicionista o minimal*)
3. $\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$ (ley de *Brouwer*)
4. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ (*ley de Duns Scoto*)
5. $\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$ (*ley débil de Duns Scoto*)
6. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$ (*ley de "reductio ad absurdum" clásica o fuerte*)
7. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ (*ley de contraposición "tollendo tollens"*)
8. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$ (*ley de contraposición "ponendo ponens"*);
9. $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$ (*ley de contraposición "ponendo tollens"*);
10. $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$ (*ley de contraposición "tollendo ponens"*);
11. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ (*ley "reductio ad absurdum" intuicionista o minimal*)
12. $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ (*ley de Clavius*)
13. $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ (*ley débil de Clavius*)
14. $\neg(\alpha \to \alpha) \to \beta$ (*ley "ex falso sequitur quodlibet"* (de lo falso se sigue cualquier cosa))
15. $\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$
16. $(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$ (*ley del dilema*)
17. $(\alpha \to \beta) \to \big((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha\big)$
18. $(\alpha \to \gamma) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma))$ (ley de *modus ponens* generalizada)

Ejemplo 2.4.

1. $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
2. $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
3. $(\gamma \to \alpha) \to ((\gamma \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \wedge \beta)))$
4. $\alpha \to \big(\beta \to (\alpha \wedge \beta)\big)$

5. $(\beta \wedge \alpha) \to (\alpha \wedge \beta)$

6. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$ (*ley de importación*)

7. $((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ (*ley de exportación*)

8. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \gamma))$

9. $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$ (*ley "ex toto"* o *transitividad de* $\to$)

10. $(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$ (*ley de "modus ponens"*)

Ejemplo 2.5.

1. $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

2. $\beta \to (\alpha \vee \beta)$

3. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$

4. $(\alpha \to (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \vee (\alpha \to \gamma))$

5. $(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$

6. $(\beta \vee \alpha) \to (\alpha \vee \beta)$

7. $(\alpha \to \varphi) \to ((\beta \to \psi) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\varphi \vee \psi)))$

8. $(\alpha \vee \varphi) \to ((\neg\alpha \vee \psi) \to (\varphi \vee \psi))$ (ley de resolución)

Ejemplo 2.6.

1. $\alpha \vee \neg\alpha$ (*ley "tertium non datur"* o *principio del tercio excluso*)

2. $\neg(\alpha \to \neg\alpha)$ (*principio de no contradicción*)

3. $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$ (*principio de inconsistencia*)

4. $(\neg\beta \wedge (\alpha \to \beta)) \to \neg\alpha$ (*principio del "modus tollendo tollens"*)

5. $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta) \to \alpha$

6. $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$

7. $((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)) \to \gamma$

8. $((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\gamma \to \alpha) \wedge (\gamma \to \beta)) \to \neg\gamma$

9. $((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \varphi) \wedge (\beta \to \psi)) \to (\varphi \vee \psi)$

10. $((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\varphi \to \alpha) \wedge (\psi \to \beta)) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

11. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

Definición 2.3. Dado un conjunto de fórmulas Γ —posiblemente vacío— y una fórmula φ decimos que Γ *implica semánticamente* a φ, abreviadamente $\Gamma \vDash \varphi$, si para toda valoración v se tiene $v(\varphi) = 1$ siempre que para toda fórmula γ de Γ valga la igualdad $v(\gamma) = 1$. Si Γ consta solamente de las fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, en lugar de $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vDash \varphi$ escribimos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vDash \varphi$ y cuando $\Gamma = \varnothing$ escribimos simplemente $\vDash \varphi$ en lugar de $\varnothing \vDash \varphi$.

Ejemplo 2.7.

1. $\alpha, \alpha \to \beta \vDash \beta$

2. $\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \to \beta, \alpha \vDash \gamma$

3. $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vDash \alpha \to \gamma$
4. $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma) \vDash \gamma$
5. $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\gamma \to \alpha) \wedge (\gamma \to \beta) \vDash \neg\gamma$
6. $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \varphi) \wedge (\beta \to \psi) \vDash \varphi \vee \psi$
7. $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\varphi \to \alpha) \wedge (\psi \to \beta) \vDash \neg\varphi \vee \neg\psi$
8. $a \vee b \nvDash a$
9. $a \nvDash a \wedge b$

Lema 2.1. *Para toda fórmula α, α es tautología sii $\vDash \alpha$.*

Definición 2.4. Dos fórmula α y β son *lógicamente equivalentes* o símplemente *equivalentes* si, y sólo si, por definición, $\vDash \alpha \leftrightarrow \beta$, es decir si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología. La frase "α y β son *lógicamente equivalentes*" será abreviada ocasionalmente como $\alpha \equiv \beta$.

Ejemplo 2.8. Sean α, α', β, β' y γ fórmulas. Si α es logicamente equivalente a α' y β es lógicamente equivalente a β', entonces cada *item* subsiguiente enumera fórmulas lógicamente equivalentes:

1. α, α
2. α y β, tautologías cualesquiera.
3. $\alpha \vee \beta$, $\alpha' \vee \beta'$
4. $\alpha \wedge \beta$, $\alpha' \wedge \beta'$
5. $\alpha \to \beta$, $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
6. $\neg\alpha \to \beta$, $\alpha \vee \beta$
7. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$, $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
8. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$, $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Teorema 2.2. *Sean α y β fórmulas de un lenguaje proposicional. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *α y β son lógicamente equivalentes*
2. *$\vDash \alpha \to \beta$ y $\vDash \beta \to \alpha$*
3. *$\alpha \vDash \beta$ y $\beta \vDash \alpha$*
4. *Para toda valoración v, $v(\alpha) = v(\beta)$*

Observación 2.3. Es claro que si α es una tautología y $\alpha \vDash \beta$, entonces β debe ser también una tautología; por lo que *a fortiori* si una fórmula es lógicamente equivalente a una tautología cualquiera, ella será una tautología; y más aún, cualesquiera dos tautologías son lógicamente equivalentes. Por demás existen fórmulas lógicamente equivalentes que no son tautologías, como se ha mostrado antes, y existen parejas de fómulas que no son lógicamente equivalentes. Sin ir más lejos, ninguna proposición atómica es lógicamente a otra salvo ella misma (si convenimos en admitir que la verdad y la falsedad son entes distintos).

Definición 2.5. Un conjunto Γ de fórmulas del lenguaje proposicional es *insatisfacible* sii, por def., para toda valoración v existe $\varphi_v \in \Gamma$ tal que $v(\varphi_v) = 0$. Un conjunto Γ de fórmulas del lenguaje es *satisfacible* cuando, y sólo cuando, no es insatisfacible.

Ejemplo 2.9.

1. El conjunto $\varnothing$ es satisfacible. En efecto, considérese cualquier asignación (cfr. Ejemplo 2.1) v. v satisface al conjunto $\varnothing$, pues si no lo satisfaciese sería porque existiera al menos un elemento α de $\varnothing$ tal que $v(\alpha) = 0$ y con ello el conjunto vacío habría de tener elementos, lo cual es absurdo.
2. Para todo símbolo de variable proposicional a, $\{a, \neg a\}$ es insatisfacible.
3. Cualquier conjunto que contenga a $\{a, \neg a\}$, siendo a un símbolo de variable proposicional cualquiera, es insatisfacible.

Observación 2.4. Sea observado que:

- Un conjunto Γ de fórmulas del lenguaje proposicional es satisfacible sii existe una asignación v (al menos) tal que todo $\gamma \in \Gamma$, $v(\gamma) = 1$.
- φ es satisfacible sii $\{\varphi\}$ es satisfacible.
- Según un *razonamiento por vacuidad*, el conjunto $\varnothing$ es satisfacible.
- Si Γ es un conjunto de fórmulas proposicionales, $\varphi \in \Gamma$ y φ es una tautología, entonces Γ es satisfacible sii $\Gamma \setminus \{\varphi\}$ es satisfacible.
- Si Γ es un conjunto de fórmula, $\varphi \in \Gamma$ y φ es una contradicción, entonces Γ es insatisfacible.

3. Propiedades Básicas de $\vDash$

Definición 3.1. Dado un conjunto de fórmulas Γ del lenguaje, sea $\mathrm{Con}(\Gamma)$ el conjunto de fórmulas γ tales que $\Gamma \vDash \gamma$.

Teorema 3.1. *Sean Γ y Δ conjuntos de fórmulas. Entonces:*

1. $\Gamma \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$
2. *Si* $\Gamma \subseteq \Delta$, *entonces* $\mathrm{Con}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Con}(\Delta)$
3. $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma)) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$
4. $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma)) = \mathrm{Con}(\Gamma)$

Teorema 3.2. *Para cualesquier conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ se cumple:*

1. *Si* $\Gamma \vDash \alpha$ *y* $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$ *entonces* $\Gamma \vDash \beta$
2. *Si* $\Gamma \vDash \alpha \vee \beta$ *y* $\Gamma \vDash \neg\alpha \vee \gamma$ *entonces* $\Gamma \vDash \beta \vee \gamma$

Teorema 3.3. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ un conjunto de fórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma, \psi \vDash \varphi$
2. $\Gamma \vDash \psi \to \varphi$

Corolario 3.4. *Para cualesquiera fórmulas $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \varphi$ ($2 \leq n$) son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vDash \varphi$
2. $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \vDash \varphi$
3. $\vDash \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \to \varphi$

Teorema 3.5. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma \vDash \varphi$

2. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es insatisfacible*

Corolario 3.6. *Para cualesquiera fórmulas* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varphi$ *(*$2 \leq n$*) son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vDash \varphi$
2. $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \neg\varphi\}$ *es insatisfacible*
3. $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \neg\varphi$ *es insatisfacible*

Teorema 3.7. *Sea* $\Gamma \cup \{\psi, \varphi\}$ *un conjunto de fórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma \vDash \psi$ *y* $\Gamma \vDash \varphi$
2. $\Gamma \vDash \psi \wedge \varphi$

Teorema 3.8. *Sea* $\Gamma \cup \{\psi, \varphi, \xi\}$ *un conjunto de fórmulas.*

1. *Si* $\Gamma, \psi \vDash \xi$ *y* $\Gamma, \varphi \vDash \xi$*, entonces* $\Gamma, \psi \vee \varphi \vDash \xi$*.*
2. *Si* $\Gamma \vDash \varphi$*, entonces* $\Gamma \vDash \psi \vee \varphi$

4. Forma Normal Conjuntiva

Dada una fórmula φ el conjunto de sus subfórmulas, representado por $\mathrm{sub}(\varphi)$, es definido recursivamente como sigue:

1. $\mathrm{sub}(a) = \{a\}$, para toda fórmula atómica a del lenguaje
2. $\mathrm{sub}(\neg\alpha) = \{\neg\alpha\} \cup \mathrm{sub}(\alpha)$
3. $\mathrm{sub}(\alpha \to \beta) = \{\alpha \to \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$
4. $\mathrm{sub}(\alpha \vee \beta) = \{\alpha \vee \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$
5. $\mathrm{sub}(\alpha \wedge \beta) = \{\alpha \wedge \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$
6. $\mathrm{sub}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \{\alpha \leftrightarrow \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$

Lema 4.1. *Sean* α*,* β *y* γ *fórmulas. Entonces:*

1. $\alpha \equiv \alpha$
2. $\alpha \equiv \alpha \vee \alpha$
3. $\alpha \equiv \alpha \wedge \alpha$
4. $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
5. $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
6. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
7. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
8. $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
9. $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
10. $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
11. $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$

12. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

13. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

14. $\alpha \equiv \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta)$

15. $\alpha \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)$

16. $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

17. $(\neg\alpha \vee \alpha) \wedge \beta \equiv \beta$

18. $(\neg\alpha \vee \alpha) \vee \beta \equiv \neg\alpha \vee \alpha$

19. $(\neg\alpha \wedge \alpha) \vee \beta \equiv \beta$

20. $(\neg\alpha \wedge \alpha) \wedge \beta \equiv \neg\alpha \wedge \alpha$

Observación 4.1. En virtud del Lema 4.1, podemos escribir $\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ sin que haya lugar a confusión, pues las fórmulas $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ y $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ se ha visto que son equivalentes. Podemos hacer una consideración análoga para la conectiva $\vee$.

Lema 4.2. *Sean α y β fórmulas del lenguaje. Si $\models \alpha' \leftrightarrow \alpha$ y $\models \beta \leftrightarrow \beta'$, entonces:*

1. $\models (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\alpha' \to \beta')$
2. $\models (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\alpha' \vee \beta')$
3. $\models (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\alpha' \wedge \beta')$
4. $\models (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha' \leftrightarrow \beta')$

Teorema 4.3. *Sean φ, α y β fórmulas del lenguaje. Si $\alpha \in \mathrm{sub}(\varphi)$, α es lógicamente a β y $\tilde{\varphi}$ es cualquier fórmula obtenida de φ sustituyendo por β alguna (o ninguna) de sus ocurrencia de α, entonces φ y $\tilde{\varphi}$ son lógicamente equivalentes.*

Definición 4.1. Una fórmula λ es un *literal proposicional* si existe una proposición atómica a tal que λ es la fórmula a o es la fórmula $\neg a$. Una fórmula φ está en *forma normal conjuntiva*, abreviadamente f.n.c., si es una conjunción de disyunciones de literales proposicionales del lenguaje, es decir, φ se escribe como:

$$\bigwedge_{i=0}^{n} (\lambda_{i,0} \vee \cdots \vee \lambda_{i,m_i})$$

donde cada $\lambda_{i,j}$ es un literal del lenguaje proposional. En tal caso llamamos *conjunto* a cada fórmula $\lambda_{i,0} \vee \cdots \vee \lambda_{i,m_i}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Una fórmula φ está en *forma normal disyuntiva*, abreviadamente f.n.d., si es una disyunción de conjunciones de literales proposicionales del lenguaje, es decir, φ se escribe como:

$$\bigvee_{i=0}^{n} (\lambda_{i,0} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i,m_i})$$

donde cada $\lambda_{i,j}$ es un literal del lenguaje proposional. En tal caso llamamos *disyunto* a cada fórmula $\lambda_{i,0} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i,m_i}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Dado un literal λ, definimos su *literal complementario* λ^c como sigue:

$$\lambda^c = \begin{cases} \neg a & , \textit{si } \lambda = a \\ a & , \textit{si } \lambda = \neg a \end{cases}$$

Lema 4.4. *Toda fórmula φ es lógicamente equivalente a una fórmula ξ que se escribe sin el signo $\to$ ni el signo $\leftrightarrow$.*

Lema 4.5. *Toda fórmula φ es lógicamente equivalente a una fórmula ψ que se escribe sin el signo $\to$ ni el signo $\leftrightarrow$ y que tiene todos los símbolos de negación adjuntos a subfórmulas atómicas.*

Teorema 4.6. *Para toda fórmula φ del lenguaje existe una fórmula φ_{fnc} cumpliendo:*

1. *φ_{fnc} está en forma normal conjuntiva*
2. *$\models \varphi \leftrightarrow \varphi_{fnc}$*

Corolario 4.7. *Para toda fórmula φ del lenguaje existe una fórmula φ_{fnd} cumpliendo:*

1. *φ_{fnd} está en forma normal disyuntiva*
2. *$\models \varphi \leftrightarrow \varphi_{fnd}$*

Método para encontrar una forma normal conjuntiva

Dada una fórmula del lenguaje, para encontrar una fórmula equivalente a ella en forma normal conjuntiva procedemos como se sugiere a continuación:

- Tener en cuenta el Teorema 4.3.
- Usar que

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \tag{1}$$
$$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \tag{2}$$

  y en ese orden.

- Usar repetidamente que:

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi \tag{3}$$

  las *leyes de De Morgan* que establecen que:

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi \tag{4}$$
$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \tag{5}$$

- Usar que

$$\varphi \vee (\phi \wedge \psi) \equiv (\varphi \vee \phi) \wedge (\varphi \vee \psi)$$

Ejercicio 4.1. Dada una fórmula proposicional, ¿existe una única fórmula en forma normal conjuntiva lógicamente equivalente a ella? ¿Qué se puede decir de dos fórmulas para las que se encuentra una fórmula en forma normal conjuntiva lógicamente equivalente a ambas? Encontrar una fórmula en forma normal conjuntiva para las siguientes fórmulas:

1. $\neg(a \leftrightarrow \neg(b \vee c))$
2. $(a \to \neg(b \to (c \vee d))) \to \neg(a \to b)$

5. El Método de Davis y Putnam

Definición 5.1. Llamamos *cláusula* a toda fórmula de la forma $\lambda_0 \vee \cdots \vee \lambda_m$ donde m es un número natural y para todo $0 \leq i \leq m$, λ_i es un literal del lenguaje. Admitimos además entre las cláusulas a una especial que es la *cláusula vacía*, representanda por el símbolo $\Box$, y que consideramos como la disyunción de los literales del conjunto vacío, es decir, en la enumeración de sus literales no hay ninguno. No hay otras cláusulas. En ocasiones veremos a la cláusula como el conjunto de sus literales, pues en ella no importa el orden. Toda cláusula con un literal recibe el nombre de *cláusula unit*. Una cláusula es *ampliación* de otra si todos los literales de ésta están presentes en aquella.

Observación 5.1. Formalmente entenderemos que toda cláusula es la disyunción de la vacía y otra, vacía o no. Así, por ejemplo, si de una cláusula unit restamos su único literal, queda la cláusula vacía. Convendremos en que la cláusula vacía es insatisfacible.[1]

Lema 5.1 (Regla de las Tautologías)**.** *Sea Σ un conjunto de cláusulas. Si Σ' se obtiene de Σ sustrayendo de éste alguna cláusula tautológica, entonces Σ es satisfacible si, y sólo si, lo es Σ'.*

Teorema 5.2 (Regla de la Cláusula Unit)**.** *Sea Σ un conjunto de cláusulas que cuenta entre sus elementos con una cláusula unit λ y sea Σ' el conjunto de cláusulas obtenido sustrayendo de Σ todas las ampliaciones de λ.*

1. *Si $\Sigma' = \varnothing$, entonces Σ es satisfacible*
2. *Si $\Sigma' \neq \varnothing$, sea Σ'' el conjunto que resulta de Σ' tras suprimir todas las ocurrencias de λ^c en las cláusulas de Σ'. Σ'' es insatisfacible si, y sólo si, lo es Σ.*

Definición 5.2. Un literal λ es *puro* en un conjunto de cláusas Σ si aparece él en al menos una cláusula y no aparece λ^c en ninguna de las cláusulas de Σ.

Lema 5.3 (Regla del Literal Puro)**.** *Sea Σ un conjunto de cláusulas. Si λ es un literal puro de Σ y Σ' es el conjunto que resulta de Σ sustrayendo de éste todas las cláusulas que son ampliación de λ, entonces Σ' es insatisfacible si, y sólo si, lo es Σ.*

Teorema 5.4 (Regla de Descomposición)**.** *Sea Σ un conjunto de cláusulas que puede ser expresado como*

$$\{\alpha_0 \vee \lambda, \ldots, \alpha_m \vee \lambda, \beta_0 \vee \lambda^c, \ldots, \beta_n \vee \lambda^c\} \cup \Omega$$

donde $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\} \cup \{\beta_0, \ldots, \beta_n\} \cup \Omega$ es un conjunto de cláusulas en las que no aparece ni λ ni λ^c y sea $\Sigma_1 = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\} \cup \Omega$ y $\Sigma_2 = \{\beta_0, \ldots, \beta_n\} \cup \Omega$. Σ es insatisfacible si, y sólo si, Σ_1 y Σ_2 son insatisfacibles.

Observación 5.2. Observar que en el teorema 5.4 podíamos haber concluido de forma equivalente "Σ es satisfacible si, y sólo si, Σ_1 es satisfacible o Σ_2 satisfacible".

Observación 5.3. Para saber si un conjunto de cláusulas es satisfacible o no, aplicamos las anteriores reglas en el orden que han sido dadas.

Ejercicio 5.1. Considerar el conunto de cláusulas

$$\Gamma = \{a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee c, a \vee b \vee \neg c \vee d, \neg d\}$$

y decidir mediante el método de Davis y Putnam si Γ es satisfacible o no.

Ejercicio 5.2. Considerar el conjunto de cláusulas

$$\Gamma = \{b \vee \neg b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee c, \neg b \vee a, b, \neg c\}$$

y decidir mediante el método de Davis y Putnam si Γ es satisfacible o no. Concluir razonadamente que

$$\vDash ((b \to a) \to (b \to (b \to c))) \to ((b \to a) \to (b \to c))$$

Ejercicio 5.3. Considerar el conjunto de cláusulas

$$\Gamma = \{a \vee c, \neg b \vee c, d, \neg b \vee \neg c \vee e, b, \neg e\}$$

y decidir mediante el método de Davis y Putnam si Γ es satisfacible o no. Concluir razonadamente que

$$\vDash ((a \to b) \to c) \to (d \to ((b \to (c \to e)) \to (b \to e)))$$

[1] Este convenio no es arbitrario, una forma de justificarlo consiste en decir: dado que una cláusula es tanto más fácil de satisfacer cuanto más literales tiene, es "lógico" que la cláusula que no tiene ningún literal sea imposible de satisfacer.

Ejercicio 5.4. Decidir con el algoritmo de Davis y Putnam si son satisfacibles o no los siguientes conjuntos de cláusulas:

1. $\Sigma_1 = \{\neg a \vee a \vee c, b \vee c, \neg a \vee c \vee d \vee e, \neg e, a \vee \neg c \vee \neg d\}$
2. $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\neg a \vee \neg d, c \vee \neg d\}$
3. $\Sigma_3 = \Sigma_2 \cup \{a \vee d, \neg c \vee d\}$
4. Justificar razonadamente que:

$$\vDash \Big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\Big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$$

5. Decidir si el siguiente conjunto de fórmulas es o no satisfacible:

$$\{(b \wedge \neg a \wedge \neg b) \to c, \neg c \to \neg(\neg a \wedge \neg b), c \to a, b \to a, (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (d \vee e), a \to (b \to c), d \to \neg e\}$$

   y caso de respuesta afirmativa, encontrar una valoración que lo satisfaga.

6. Ejercicios de Lógica Proposicional

1. Sean α, β, γ y δ fórmulas del lenguaje proposicional estándard. Demuestre que:

$$(((\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)) \to \gamma) \to \beta \vDash (\beta \to \alpha) \to (\delta \to \alpha)$$

2. Consideremos las fórmulas del lenguaje proposicional estándar:
   - $\alpha = a \to (b \wedge \neg c)$
   - $\beta = (a \leftrightarrow \neg b) \vee c$

   Encuentre una fórmula γ de dicho lenguaje tal que para cualquier asignación de variables v se cumpla $v(\gamma) = v(\alpha) + v(\alpha)v(\beta)$.

3. En el lenguaje proposicional estándar, sea α la fórmula:

$$(a \to (b \to (c \to d))) \to ((a \to b) \to (a \to (c \to d)))$$

   Demuestre que α es una fórmula tautológica.

4. Clasifique la siguiente fórmula del lenguaje proposicional estándar:

$$((((a \vee b) \wedge \neg c) \to d) \wedge (\neg d \wedge (b \vee a))) \to (c \vee e)$$

5. Estudie si cada una de las siguientes implicaciones semánticas es cierta o no. Cuando no lo sea, encuentre una asignación de variables que lo revele:
   a) $(a \wedge \neg b) \to (a \vee c) \vDash ((\neg a \vee b) \to (a \vee c)) \to (a \vee c)$
   b) $(a \vee d) \to (b \to c) \vDash ((a \vee d) \to \neg b) \to \neg c$

6. Sea Γ es siguiente conjunto de fórmulas del lenguaje proposicional estándard:

$$\{\neg a \vee a \vee c, b \vee c, \neg a \vee c \vee d \vee e, \neg e, a \vee \neg c \vee \neg d, \neg a \vee \neg d, c \vee \neg d, a \vee d, \neg c \vee d\}$$

   Decida si Γ es o no satisfacible.

7. Decida si:

$$(\neg a \to b) \wedge (c \to d), a \to c, (\neg b \wedge \neg c) \to d, b \to a, (d \wedge \neg c) \to a, a \to d \vDash a \wedge c \wedge d$$

8. Pruebe que:

$$\vDash ((((a \to b) \to (\neg c \to \neg d)) \to c) \to e) \to ((e \to \neg b) \to ((e \to a) \to (d \to (a \wedge \neg b))))$$

9. Sean las siguientes fórmulas del lenguaje proposicional estándar:

   a) $\gamma_1 = (a \vee b) \to (c \vee d)$
   b) $\gamma_2 = (\neg a \wedge \neg d) \to (\neg c \wedge (c \vee e))$
   c) $\gamma_3 = a \to (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b))$
   d) $\varphi = (d \to (b \vee a)) \to (d \wedge \neg(a \vee \neg b))$

   Estudie si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \vDash \varphi$ y caso de **no** serlo, dé una asignación de variables que lo evidencie.

10. Sean las siguientes fórmulas del lenguaje proposicional estándar:

    a) $\gamma_1 = (r \vee t) \to (p \vee s)$
    b) $\gamma_2 = (\neg r \wedge \neg s) \to (\neg p \wedge (\neg p \to q))$
    c) $\gamma_3 = r \to (\neg(p \vee t) \to (\neg s \vee t))$
    d) $\varphi = \neg(s \to (t \vee r)) \vee (s \wedge \neg(t \to r))$

    Estudie si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \vDash \varphi$ y caso de **no** serlo, dé una asignación de variables que lo evidencie.

11. Sean las siguientes fórmulas del lenguaje proposicional estándar:

    a) $\gamma_1 = (a \wedge b) \to (c \vee d)$
    b) $\gamma_2 = \neg((a \vee c \vee d) \wedge e)$
    c) $\varphi = (a \to b) \to (e \to \neg a)$

    Estudie si $\gamma_1, \gamma_2 \vDash \varphi$ y caso de **no** serlo, dé una asignación de variables que lo evidencie.

12. Sean α una fórmula del lenguaje proposicional estándard. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    a) α es una tautología.
    b) $\vDash \alpha$

13. ¿Es cierto que cualesquiera dos tautologías son lógicamente equivalentes? En caso de respuesta negativa, de un ejemplo que lo justifique.

14. Dado un conjunto de fórmulas Γ del lenguaje, sea $\mathrm{Con}(\Gamma)$ el conjunto de fórmulas γ tales que $\Gamma \vDash \gamma$. Si Γ y Δ son conjuntos de fórmulas, demuestre que:

    a) $\Gamma \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$
    b) Si $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\mathrm{Con}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Con}(\Delta)$
    c) $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma)) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$
    d) $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma)) = \mathrm{Con}(\Gamma)$

15. Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    a) $\Gamma \vDash \varphi$
    b) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible

16. Sea $\Gamma \cup \{\psi, \varphi\}$ un conjunto de fórmulas. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    a) $\Gamma, \psi \wedge \varphi \vDash \xi$
    b) $\Gamma, \psi, \varphi \vDash \xi$

17. Demuestre que para cualesquiera fórmulas $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \varphi$ $(2 \leq n)$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    a) $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vDash \varphi$

    b) $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \neg\varphi\}$ es insatisfacible

    c) $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \neg\varphi$ es insatisfacible

18. Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \xi\}$ un conjunto de fórmulas del lenguaje de proposicional estándar. Demuestre las siguientes reglas:

    a) Si $\Gamma \vDash \alpha$ y $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$ entonces $\Gamma \vDash \beta$ (*regla de modus ponens*)

    b) Si $\Gamma \vDash \alpha \to \varphi$ y $\Gamma \vDash \neg\alpha \to \psi$ entonces $\Gamma \vDash \neg\psi \to \varphi$ (*regla de modus ponens generalizada*)

    c) Si $\Gamma \vDash \alpha \to \varphi$ y $\Gamma \vDash \neg\alpha \to \psi$ entonces $\Gamma \vDash \neg\varphi \to \psi$

    d) Si $\Gamma, \alpha \vDash \beta$ y $\Gamma, \beta \vDash \gamma$ entonces $\Gamma, \alpha \vDash \gamma$.

    e) Si $\Gamma, \alpha \vDash \beta \to \gamma$ y $\Gamma, \alpha \vDash \beta$ entonces $\Gamma, \alpha \vDash \gamma$.

    f) Si ξ es una tautología, $\Gamma, \xi \vDash \varphi$ sii $\Gamma \vDash \varphi$.

    g) Si $\Gamma, \alpha \vDash \varphi$ y $\Gamma, \neg\alpha \vDash \varphi$, entonces $\Gamma \vDash \varphi$.

    h) Si $\Gamma, \alpha \to \beta \vDash \varphi$ y $\Gamma, \beta \to \alpha \vDash \varphi$, entonces $\Gamma \vDash \varphi$

    i) Si $\Gamma, \alpha \to \beta \vDash \alpha$ entonces $\Gamma \vDash \alpha$

    j) Si $\Gamma, \psi \vDash \varphi$ entonces Si $\Gamma, \neg\varphi \vDash \neg\psi$.

    k) Si $\Gamma \vDash \varphi$ y $\Gamma \vDash \psi$, entonces $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$.

    l) Si $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ entonces $\Gamma \vDash \varphi$.

    m) $\Gamma, \alpha, \beta \vDash \varphi$ sii $\Gamma, \alpha \wedge \beta \vDash \varphi$

    n) Si $\Gamma \vDash \alpha \vee \beta$ y $\Gamma \vDash \neg\alpha \vee \gamma$ entonces $\Gamma \vDash \beta \vee \gamma$ (*regla de resolución en log. proposicional*)

    ñ) Si $\Gamma, \alpha \vDash \varphi$ y $\Gamma, \beta \vDash \varphi$, entonces $\Gamma, \alpha \vee \beta \vDash \varphi$.

    o) Si $\Gamma \vDash \varphi$ entonces $\Gamma \vDash \varphi \vee \psi$

19. Considerar el conunto de cláusulas

    $$\Gamma = \{a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee c, a \vee b \vee \neg c \vee d, \neg d\}$$

    y decidir mediante el método de Davis y Putnam si Γ es satisfacible o no.

20. Considere el conjunto de cláusulas

    $$\Gamma = \{b \vee \neg b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee c, \neg b \vee a, b, \neg c\}$$

    y decida mediante el método de Davis y Putnam si Γ es satisfacible o no. Concluya razonadamente que

    $$\vDash ((b \to a) \to (b \to (b \to c))) \to ((b \to a) \to (b \to c))$$

21. Considerar el conjunto de cláusulas

    $$\Gamma = \{a \vee c, \neg b \vee c, d, \neg b \vee \neg c \vee e, b, \neg e\}$$

    y decidir mediante el método de Davis y Putnam si Γ es satisfacible o no. Concluir razonadamente que

    $$\vDash ((a \to b) \to c) \to (d \to ((b \to (c \to e)) \to (b \to e)))$$

22. Haciendo uso del algoritmo de Davis y Putnam decida si son satisfacibles o no los siguientes conjuntos de cláusulas:

a) $\Sigma_1 = \{\neg a \vee a \vee c, b \vee c, \neg a \vee c \vee d \vee e, \neg e, a \vee \neg c \vee \neg d\}$

b) $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\neg a \vee \neg d, c \vee \neg d\}$

c) $\Sigma_3 = \Sigma_2 \cup \{a \vee d, \neg c \vee d\}$

d) Justificar razonadamente que:

$$\vDash \Big(\big(((\varphi \to \psi) \to (\neg \chi \to \neg \theta)) \to \chi \big) \to \tau \Big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi) \big)$$

e) Decidir si el siguiente conjunto de fórmulas es o no satisfacible:

$$\{(b \wedge \neg a \wedge \neg b) \to c, \neg c \to \neg(\neg a \wedge \neg b), c \to a, b \to a, (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (d \vee e), a \to (b \to c), d \to \neg e\}$$

y caso de respuesta afirmativa, encuentre al menos una valoración que lo satisfaga.