Apuntes de Geometría III
Grado en Matemáticas
Universidad de Granada
Curso 2016-2017

Miguel Ortega Titos

Manuel Mª Ritoré Cortés

Índice general

Capítulo 1. Espacios afines - v3 5
- 1.1. Espacio afín 5
- 1.2. Subespacios afines 7
- 1.3. Sistemas de referencia afines. Ecuaciones paramétricas e implícitas de subespacios afines 10
- 1.4. Transformaciones afines 13
- 1.5. Ejercicios 17

Capítulo 2. Espacios afines Euclídeos 21
- 2.1. Introducción 21
- 2.2. Espacio afín Euclídeo: Distancias, ángulos y perpendicularidad 21
- 2.3. Movimientos rígidos y semejanzas 23
- 2.4. Clasificación de movimientos rígidos en dimensión dos y tres 24
- 2.5. Triángulos. Recta de Euler. Teorema de Tales 28
- 2.6. Ejercicios 32

Capítulo 3. Hipercuádricas reales 35
- 3.1. Introducción 35
- 3.2. Hipercuádricas 35
- 3.3. Clasificación afín de hipercuádricas 36
- 3.4. Determinación de cónicas 38
- 3.5. Determinación de cuádricas 39
- 3.6. Ejercicios 42

Capítulo 4. El espacio proyectivo 45
- 4.1. Definición de espacio proyectivo 45
- 4.2. Coordenadas homogéneas 47
- 4.3. Proyectividades 48
- 4.4. Geometría afín y geometría proyectiva 48
- 4.5. Ejercicios 50

Tema 1

Espacios afines - v3

1.1. Espacio afín

En matemáticas, un espacio afín es una estructura geométrica que permite definir rectas paralelas y nociones de incidencia y que, por tanto, proporciona un buen modelo para enunciar y demostrar resultados de geometría euclídea. ~~En un espacio afín, a diferencia de lo que ocurre en espacios vectoriales, no hay un punto distinguido como el origen~~. Existen nociones de puntos y de direcciones determinadas por vectores, de manera que podremos sumar dos vectores y definir una noción de suma de punto y vector, pero no tendrá sentido sumar dos puntos. Es frecuente leer: “un espacio afín es lo que queda de un espacio vectorial cuando nos olvidamos del origen”.

Desde un punto de vista más formal, un espacio afín es un par formado por un conjunto de *puntos* y un espacio vectorial de *direcciones*, relacionados de modo que cada par de puntos p, q determina un único vector $\overrightarrow{pq}$. Esta asignación no es arbitraria y debe verificar una serie de propiedades sencillas, como la igualdad triangular o relación de Chasles: $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$, así como ciertas condiciones de existencia y unicidad de vectores. La definición de espacio afín es la siguiente:

Definición 1.1. Un conjunto no vacío A es un *espacio afín* sobre un espacio vectorial V si existe una aplicación $A \times A \to V$, $(p, q) \mapsto \overrightarrow{pq}$, que verifica las siguientes propiedades:

- A1. $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$, $\forall p, q, r \in A$.
- A2. Si $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr}$, entonces $q = r$.
- A3. Si $p \in A$ y $v \in V$, existe $q \in A$ tal que $\overrightarrow{pq} = v$.

Al espacio vectorial V se le denomina el *espacio de direcciones* de A y se le suele denotar por $\overrightarrow{A}$. Cuando la dimensión de $\overrightarrow{A}$ es finita, se define como dimensión de A como la dimensión de $\overrightarrow{A}$ y se denotará por $\dim(A)$. Al vector $\overrightarrow{pq}$ lo denominaremos el *vector determinado por p y q*. El punto p es el *origen* del vector $\overrightarrow{pq}$. El punto q es el *extremo* del vector $\overrightarrow{pq}$.

Salvo que se diga otra cosa, el cuerpo sobre el que se construye V será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Propiedades 1.2.

1. $\overrightarrow{pp} = 0$, $\forall p \in A$.

2. $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq} \quad \forall p, q \in A$.
3. *Si* $p_1, \ldots, p_k \in A$, *con* $k \geqslant 3$, *entonces* $\sum_{i=1}^{k-1} \overrightarrow{p_i p_{i+1}} = \overrightarrow{p_1 p_k}$.
4. $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p_1 q_1}$ *implica que* $\overrightarrow{pp_1} = \overrightarrow{qq_1} \quad \forall p, p_1, q, q_1 \in A$.
5. $\overrightarrow{pq} = 0$ *implica que* $p = q$.
6. *Si* $p \in A$, *la aplicación* $F_p : A \to \overrightarrow{A}$ *definida por* $F_p(q) = \overrightarrow{pq}$ *es biyectiva.*

Demostración: 1. Por la propiedad A1, $\overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp} + \overrightarrow{pp}$, lo que implica $\overrightarrow{pp} = 0$.

2. De nuevo por la propiedad A1 y por la anterior: $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{pp} = 0$.

3. Si $k = 3$, la igualdad se sigue de A1. Supongamos que la igualdad se verifica para $k-1$ puntos por inducción: $\sum_{i=1}^{k-2} \overrightarrow{p_i p_{i+1}} = \overrightarrow{p_1 p_{k-1}}$. Sumando el vector $\overrightarrow{p_{k-1} p_k}$ a ambos lados de la igualdad, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \overrightarrow{p_i p_{i+1}} = \sum_{i=1}^{k-2} \overrightarrow{p_i p_{i+1}} + \overrightarrow{p_{k-1} p_k} = \overrightarrow{p_1 p_{k-1}} + \overrightarrow{p_{k-1} p_k} = \overrightarrow{p_i p_k},$$

de nuevo por la propiedad A1.

4. Por la propiedad 3 aplicada a los puntos p, p_1, q_1, q.

$$\overrightarrow{pp_1} + \overrightarrow{p_1 q_1} + \overrightarrow{q_1 q} + \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{pp} = 0.$$

Por hipótesis $\overrightarrow{qp} + \overrightarrow{p_1 q_1} = 0$, de modo que $\overrightarrow{pp_1} + \overrightarrow{q_1 q} = 0$.

4. Se sigue de A2 y 1: si $\overrightarrow{pq} = 0 = \overrightarrow{pp}$, entonces $p = q$.

5. La propiedad A2 es equivalente a que F_p es inyectiva, y la A3 que F_p sea sobreyectiva.
□

Ejemplo 1.3 (Estructura afín de un espacio vectorial)**.** Dado un espacio vectorial V, podemos definir sobre V una estructura de espacio afín (sobre el espacio vectorial V) mediante la aplicación $V \times V \to V$ definida por $(u, v) \mapsto \overrightarrow{uv} := v - u$. Es trivial comprobar que las propiedades A1, A2, A3 se verifican. Habitualmente nos referiremos a esta estructura afín de un espacio vectorial como su *estructura canónica.*

Es posible definir otras estructuras diferentes, por ejemplo considerando las aplicaciones $V \times V \to V$ definidas por $(u, v) \mapsto \lambda(v - u)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

~~En un espacio afín no existe una estructura que permita sumar dos puntos.~~ Sin embargo, ~~sí podemos definir la suma de un punto y un vector~~. El resultado es otro punto del espacio afín.

Definición 1.4 (Suma de un punto y un vector)**.** Si $p \in A$ y $v \in \overrightarrow{A}$, se define la suma de p y v como el único punto $q \in A$ tal que $\overrightarrow{pq} = v$. Al punto q se le denotará por $p + v$.

De la definición obtenemos las dos siguientes propiedades:

$$\boxed{q = p + \overrightarrow{pq}} \quad \text{y} \quad \boxed{\overrightarrow{p(p+v)} = v}.$$

Propiedades 1.5. 1. $p + 0 = p \quad \forall p \in A$.
2. $p + (u + v) = (p + u) + v \quad \forall p \in A, \forall u, v \in \overrightarrow{A}$.
3. *Fijado* $p \in A$, *la aplicación* $g : \overrightarrow{A} \to A$ *definida por* $g(v) := p + v$ *es biyectiva.*
4. *Dados* $p \in A$, $u, v \in \overrightarrow{A}$, *se definen* $q = p + u$, $r = p + v$. *Entonces se tiene* $\overrightarrow{qr} = v - u$.

Demostración: 1. p es el único punto tal que $\overrightarrow{pp} = 0$.

2. Sea $q = p + u$, $r = q + v$. Por la propiedad A1, $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$. Como $\overrightarrow{pq} = u$, $\overrightarrow{qr} = v$, se tiene $u + v = \overrightarrow{pr}$. Por definición de suma de punto y vector $r = p + (u + v)$. Por tanto: $p + (u + v) = r = q + v = (p + u) + v$.

3. Si $p+u = p+v$, entonces $u = \overrightarrow{p(p+u)} = \overrightarrow{p(p+v)} = v$. Esto demuestra que g es inyectiva. Si $q \in A$, fijado $p \in A$, se tiene que $u = \overrightarrow{pq}$ satisface la igualdad $q = p + u$. Esto demuestra que g es sobreyectiva.

4. Tenemos que $u = \overrightarrow{pq}$, $v = \overrightarrow{pr}$. Por la propiedad A1, $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$. Por tanto, $u + \overrightarrow{qr} = v$. □

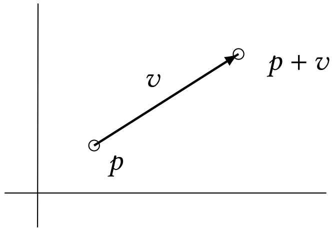


FIGURA 1. Representación gráfica de la suma de punto y vector: el punto $p + v$ se corresponde con el extremo del vector libre v trasladado de modo que su origen es p.

Definición 1.6 (Traslación de vector v)**.** Dado $v \in \overrightarrow{A}$, la traslación de vector v es la aplicación $t_v : A \to A$ definida por $t_v(p) := p + v$.

Propiedades 1.7.

1. $t_0 = \mathrm{Id}_A$.
2. $t_u \circ t_v = t_{u+v} = t_v \circ t_u$, $\forall u, v \in \overrightarrow{A}$.
3. *t_v es una biyección del espacio afín, y $(t_v)^{-1} = t_{-v}$.*
4. *El conjunto de traslaciones es un grupo conmutativo con respecto a la composición.*

Demostración: 1. Dado $p \in A$, $t_0(p) = p + 0 = p = \mathrm{Id}_A(p)$.

2. Dados $u, v \in \overrightarrow{A}$ y $p \in A$, $t_u \circ t_v(p) = t_u(p + v) = (p + v) + u = p + (v + u) = t_{v+u}(p)$. La igualdad restante se obtiene por simetría.

3. Dado $v \in \overrightarrow{A}$, $t_v \circ t_{-v} = t_{v-v} = t_0 = \mathrm{Id}_A$. Análogamente, $t_{-v} \circ t_v = \mathrm{Id}_A$. Por tanto, t_v es una biyección de A de inversa t_{-v}.

4. Las propiedades anteriores nos dicen que el conjunto $G = \{t_v : v \in \overrightarrow{A}\}$ es cerrado para la composición de aplicaciones. Además, admite elemento neutro ($t_0 = \mathrm{Id}_A$), admite elemento opuesto y la composición es conmutativa. □

1.2. Subespacios afines

Definición 1.8. Un subconjunto $\underline{S \subset A}$ es un subespacio afín si existen un punto $p \in A$ y un subespacio vectorial $\underline{F \subset \overrightarrow{A}}$ tales que $S = p + F = \{p + v : v \in F\}$. Al subespacio vectorial F se le llama *subespacio de direcciones* de S, y lo denotaremos por $F = \overrightarrow{S}$.

Propiedades 1.9. *Sean A un espacio afín y $S = p + F$ un subespacio afín de A.*

1. *$F = \{\overrightarrow{pq} : q \in S\}$.*
2. *$F = \{\overrightarrow{qr} : q, r \in S\}$.*
3. *$S = q + F$, para cualquier $q \in S$.*

Demostración: 1. Por doble inclusión. Si $v \in F$, $q := p + v \in S$. Entonces $v = \overrightarrow{pq} \in \{\overrightarrow{pq} : q \in S\}$. Dado $q \in S$, $\overrightarrow{pq}$ cumple $q = p + \overrightarrow{pq}$, por tanto $\overrightarrow{pq} \in F$.

2. Se hace prácticamente igual que el apartado 1.

3. Teniendo en cuenta que $z = p + \overrightarrow{pz} = p + \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qz} = q + \overrightarrow{qz}$, por doble inclusión se tiene inmediatamente que $p + F = q + F$. □

La propiedad 2. demuestra que el subespacio de direcciones de S es único porque es exactamente el conjunto de vectores que unen pares de puntos de S.

Definición 1.10. La *dimensión* de un subespacio afín es la dimensión vectorial de su subespacio de direcciones. Sea $S \subset A$ un subespacio afín. Diremos que:

1. S es una *recta afín* si $\dim(S) = 1$.
2. S es un *plano afín* si $\dim(S) = 2$.
3. Si A tiene dimensión finita, S es un *hiperplano afín* si $\dim(S) = \dim(A) - 1$.

Obsérvese que un punto $\{p\} \subset A$ es un subespacio afín de dimensión cero, puesto que $F = \{0\}$ es subespacio vectorial y $\{p\} = p + F$.

Proposición 1.11. *Dados dos puntos $p, q \in A$ tales que $p \neq q$, existe una única recta afín $R \subset A$ tal que $p, q \in R$.*

Demostración: Consideramos el subespacio afín $R := p + L(\overrightarrow{pq}) = \{p + \lambda\overrightarrow{pq} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Como $p \neq q$, el subespacio vectorial $L(\overrightarrow{pq})$ tiene dimensión 1. Por tanto, R es una recta afín. Es obvio que contiene a p y a q.

Por otra parte, si S es una recta afín que contiene a p y a q, se tiene que $\overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{S}$ y, por tanto, $L(\overrightarrow{pq}) \subset \overrightarrow{S}$. Como $L(\overrightarrow{pq})$ y $\overrightarrow{S}$ son subespacios vectoriales de dimensión 1, se tiene que $L(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{S}$. Entonces $S = p + \overrightarrow{S} = p + L(\overrightarrow{pq}) = R$. Esto demuestra la unicidad. □

Proposición 1.12. *Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios afines de un espacio afín A. Entonces $\bigcap_{i\in I} S_i$ es, o bien vacío, o un subespacio afín de A. En el segundo caso su espacio de direcciones es $\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{S_i}$.*

Demostración: Supongamos que la intersección no es vacía. Tomamos $p \in \bigcap S_i$. Veamos que $\bigcap_{i\in I} S_i = p + \left(\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{S_i}\right)$.

Sea $q \in \bigcap_{i\in I} S_i$. Entonces $q \in S_i = p + \overrightarrow{S}_i$ $\forall i$. Por tanto, $\overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{S}_i$ $\forall i$. Esto implica que $q = p + \overrightarrow{pq} \in p + \left(\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{S_i}\right)$.

Sea ahora $q \in p + \left(\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{S_i}\right)$. Entonces $q = p + u$, con $u \in \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{S}_i$. Por tanto $q = p + u \in p + \overrightarrow{S}_i = S_i$ $\forall i$, y $q \in \bigcap_{i\in I} S_i$. □

Cuando la intersección es no vacía, $\bigcap_{i\in I} S_i$ es el mayor subespacio afín contenido en todos los subespacios S_i.

Definición 1.13 (Suma afín de subespacios afines)**.** Sean S, T dos subespacios afines. Se define su *suma afín* como la intersección de todos los subespacios afines que contienen a $S \cup T$. Se denota por $S \vee T$.

$S \vee T$ es un subespacio afín por ser una intersección no vacía de subespacios afines.

Proposición 1.14. *Sean S y T dos subespacios afines de un espacio afín A.*

1. *$S, T \subset S \vee T$.*
2. *$S \vee T = T \vee S$.*
3. *$S \vee T$ es el menor subespacio afín de A que contiene simultáneamente a S y a T.*

Demostración: Los apartados 1. y 2. son evidentes.

3. Sea $\mathcal{F}$ la familia de subespacios afines de A que contienen a $S \cup T$. Con esta notación, se tiene que $S \vee T = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$. Si $V \in \mathcal{F}$, entonces $S \vee T \subset V$. □

Teorema 1.15. *Se consideran S y T dos subespacios afines de A. Dados $p \in S$ y $q \in T$, se tiene que $S \vee T = p + (\vec{S} + \vec{T} + L(\vec{pq}))$.*

Demostración: Definamos $X := p + (\vec{S} + \vec{T} + L(\vec{pq}))$. Por un lado, $\vec{X} = \vec{S} + \vec{T} + L(\vec{pq})$. Por otro, como $\vec{S} \subset \vec{X}$, se tiene $S = p + \vec{S} \subset p + \vec{X} = X$. Igualmente se demuestra $T \subset X$. Sea ahora V otro subespacio afín tal que $S \vee T \subset V$. En particular, $\vec{S}$ y $\vec{T} \subset \vec{V}$. Como $p \in S$ y $q \in T$, tenemos que $\vec{pq} \in \vec{V}$, luego $L(\vec{pq}) \subset \vec{V}$. Juntando todo, tenemos $\vec{S} + \vec{T} + L(\vec{pq}) \subset \vec{V}$. Entonces, $X = p + (\vec{S} + \vec{T} + L(\vec{pq})) \subset p + \vec{V} = V$. En definitiva, X está contenido en todo subespacio afín que contenga también a S y a T, luego solo puede ser $X = S \vee T$. □

Corolario 1.16. *Sean S y T dos subespacios afines de A. Supongamos que existe $p \in S \cap T$. Entonces, $S \vee T = p + (\vec{S} + \vec{T})$.*

Corolario 1.17. *Sean S y T dos subespacios afines de A.*

1. *Si $S \cap T \neq \emptyset$, entonces* $\dim(S \vee T) + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T$.
2. *Si $S \cap T = \emptyset$, entonces* $\dim(S \vee T) + \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) = \dim S + \dim T + 1$.

Demostración: 1. Sea $p \in S \cap T$. Sabemos que $S \vee T = p + (\vec{S} + \vec{T})$. Por la fórmula de las dimensiones en un espacio vectorial:

$$\dim(S \vee T) = \dim(\vec{S} + \vec{T}) = \dim(\vec{S}) + \dim(\vec{T}) - \dim(\vec{S} \cap \vec{T}).$$

Como $\dim(S) = \dim(\vec{S})$, $\dim(T) = \dim(\vec{T})$ y $\dim(S \cap T) = \dim(\vec{S} \cap \vec{T})$, ya que el subespacio de direcciones de $S \cap T$ es $\vec{S} \cap \vec{T}$, obtenemos la primera fórmula.

2. Observamos en primer lugar que $\vec{pq} \neq 0$. En caso contrario $p = q$ y la intersección de S y T sería no vacía. Veamos además que $(\vec{S} + \vec{T}) \cap L(\vec{pq}) = \{0\}$. En caso contrario, como $L(\vec{pq})$ es un subespacio vectorial de dimensión 1, tenemos que $L(\vec{pq}) \subset \vec{S} + \vec{T}$. Existen entonces $v \in \vec{S}$, $w \in \vec{T}$ tales que $\vec{pq} = v + w$. Por tanto:

$$q - w = p + \vec{pq} - w = p + (v + w) - w = p + v.$$

Como $q - w \in q + \overrightarrow{T} = T$ y $p + v \in p + \overrightarrow{S} = S$, deducimos que la intersección de S y T es no vacío, lo que es imposible. En consecuencia:

$$\begin{aligned}\dim(S \vee T) &= \dim((\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}) + L(\overrightarrow{pq})) \\ &= \dim(\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}) + \dim(L(\overrightarrow{pq})) - \dim((\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}) \cap L(\overrightarrow{pq})) \\ &= \dim(\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}) + 1 - 0 \\ &= \dim(\overrightarrow{S}) + \dim(\overrightarrow{T}) - \dim(\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T}) + 1 \\ &= \dim(S) + \dim(T) - \dim(\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T}) + 1.\end{aligned}$$

□

Definición 1.18. Sea A un espacio afín. Sean S y T dos subespacios afines de A. Se dice que S es paralelo a T si $\overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{T}$. Si se da la igualdad, se dice que S y T son paralelos y se escribe $S \| T$. En caso de que ni sean paralelos ni sean secantes, se dice que *se cruzan*.

Proposición 1.19. *Sea A un espacio afín. Sean S y T dos subespacios afines de A.*

1. *Si S es paralelo a T, entonces o bien $S \subset T$ o bien $S \cap T = \emptyset$.*
2. *Si $S \| T$, entonces o bien $S = T$ o bien $S \cap T = \emptyset$.*
3. *Dado $p \in A$, existe un único subespacio afín T tal que $p \in T$ y que $S \| T$.*

Demostración: Los apartados 1. y 2. son evidentes.

3. Para la existencia, se define $T = p + \overrightarrow{S}$. Como $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{S}$, entonces $S \| T$. Para la unicidad, dado otro subespacio afín T' tal que $p \in T'$ y $\overrightarrow{T'} = \overrightarrow{S} = \overrightarrow{T}$, luego $T' = p + \overrightarrow{T'} = p + \overrightarrow{T} = T$. □

1.3. Sistemas de referencia afines. Ecuaciones paramétricas e implícitas de subespacios afines

Definición 1.20. Sean $p_0, \ldots, p_k \in A$ puntos de un espacio afín. Diremos que son *afínmente independientes* si los vectores $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ son linealmente independientes.

El orden de los puntos no es importante en la definición de independencia afín: Sea σ una permutación del conjunto $\{0, 1, \ldots, k\}$. Si $\{p_0, \ldots, p_k\}$ son afínmente independientes, entonces los puntos $p_{\sigma(0)}, \ldots, p_{\sigma(k)}$ también lo son. Para comprobar esto, llamamos $B_\sigma = \left\{\overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(j)}} : j = 1, \ldots, k\right\}$. En primer lugar, si $\sigma(0) = 0$, entonces B_σ es una reordenación de los vectores anteriores, que ya sabemos que son linealmente independientes. Por tanto, no hay nada que demostrar. En segundo lugar, supongamos que $\sigma(0) > 0$. Consideramos una combinación lineal

$$0 = \sum_{j=1}^{k} a_j \overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(j)}}.$$

Veamos que todos los coeficientes a_j son iguales a cero. Como $\overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(j)}} = \overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_0} + \overrightarrow{p_0p_{\sigma(j)}}$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{k} a_j \overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_{\sigma(j)}} = \sum_{j=1}^{k} a_j \left(\overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_0} + \overrightarrow{p_0p_{\sigma(j)}}\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)\overrightarrow{p_{\sigma(0)}p_0} + \sum_{j\neq\sigma(0)} a_j\overrightarrow{p_0p_{\sigma(j)}} = \sum_{j\neq\sigma(0)} a_j\overrightarrow{p_0p_{\sigma(j)}} - \left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)\overrightarrow{p_0p_{\sigma(0)}}. \end{aligned}$$

Recordando que los vectores $\{\overrightarrow{p_0p_j} : j = 1, \ldots, k\}$ son linealmente independientes, entonces de la expresión anterior obtenemos $a_j = 0$, $j \neq \sigma(0)$, $\sum_{j=1}^{k} a_j = 0$. Por tanto, $a_j = 0$ para todo j.

Definición 1.21. Sea A un espacio afín de dimensión n. Un *sistema de referencia afín* R en A es un conjunto $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ de $(n + 1)$ puntos afínmente independientes. Al punto p_0 se le denomina el *origen* del sistema de referencia. La familia de vectores $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$ es la *base asociada* al sistema de referencia R.

Dar un sistema de referencia afín es equivalente dar un punto $p_0 \in A$ y una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ del espacio vectorial $\overrightarrow{A}$. Es inmediato comprobar que $\{p_0, p_0 + v_1, \ldots, p_0 + v_n\}$ es un sistema de referencia afín en A.

Teorema 1.22. *Sea A un espacio afín. Consideremos un sistema de referencia afín $R = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$. Entonces, la aplicación $f_R : \mathbb{R}^n \longrightarrow A$ definida por*

$$f_R(x_1, \ldots, x_n) = p_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k\, \overrightarrow{p_0p_k},$$

es una biyección.

Demostración: Del punto 6 de la lista de propiedades 1.2, sabemos que la aplicación $g : A \to \vec{A}$ dada por $g(p) = \overrightarrow{p_0p}$ es biyectiva. Definimos f_R como en el enunciado y consideramos la composición $g \circ f_R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \vec{A}$. Veamos que esta aplicación es un isomorfismo de espacios vectoriales. En primer lugar, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$,

$$\begin{aligned} g(f_R(av + bw)) &= g\left(p_0 + \sum_{k=1}^{n}(av_k + bw_k)\overrightarrow{p_0p_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(av_k + bw_k)\overrightarrow{p_0p_k} \\ &= a\sum_{k=1}^{n} v_k\overrightarrow{p_0p_k} + b\sum_{k=1}^{n} w_k\overrightarrow{p_0p_k} = ag\left(p_0 + \sum_{k=1}^{n} v_k\overrightarrow{p_0p_k}\right) + bg\left(p_0 + \sum_{k=1}^{n} w_k\overrightarrow{p_0p_k}\right) \\ &= a(g \circ f_R)(v) + b(g \circ f_R)(w). \end{aligned}$$

Por tanto, es una aplicación lineal. A continuación, si $B_o = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base usual de $\mathbb{R}^n$, dado $k \in \{1, \ldots, n\}$, $g(f_R(e_k)) = \overrightarrow{p_0p_k}$. Es decir, $g \circ f_R$ transforma la base usual en la base asociada al sistema de referencia. Esto demuestra que $g \circ f_R$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, luego es biyectiva. Como g es biyectiva, también lo es f_R. □

Definición 1.23. Dado un sistema de referencia afín $R = \{p_0, \ldots, p_n\}$ en un espacio afín A, las *coordenadas* de un punto $p \in A$ en dicho sistema de referencia son las coordenadas del vector $\overrightarrow{p_0p}$ en la base $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$. Si $p \in A$, escribiremos:

$$p_R = (x_1, \ldots, x_n)$$

para expresar que $x_1, \ldots, x_n$ son las coordenadas del punto p en el sistema de referencia R.

Por tanto, tenemos

$$p_R = (x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow p = p_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{p_0p_j}. \tag{1.1}$$

En realidad, estamos usando la inversa de la aplicación definida en el teorema anterior, ya que $p_R = f_R^{-1}(p)$ es la aplicación que lleva cada punto de A en sus coordenadas respecto de R.

Propiedades 1.24. *Supongamos que B es la base $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$ asociada al sistema de referencia $R = \{p_0, \ldots, p_n\}$. Si $v \in V$, y $\mu_1, \ldots, \mu_n$ son las coordenadas de v en la base B, escribiremos $v_B = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Con esta notación, se tiene:*

1. $(p + v)_R = p_R + v_B$.
2. $(\overrightarrow{pq})_B = q_R - p_R$.

La segunda propiedad es consecuencia inmediata de la primera y de que $q = p + \overrightarrow{pq}$. Para comprobar la primera, usamos (1.1), es decir, las coordenadas de v respecto de B:

$$p + v = p_0 + \sum_{j=1}^{n} (x_j + \mu_j) \overrightarrow{p_0p_j} \Longleftrightarrow (p + v)_R = (x_1 + \mu_1, \ldots, x_n + \mu_n) = p_R + v_B.$$

Sea $S = p + \overrightarrow{S}$ un subespacio afín y una base $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ de $\overrightarrow{S}$. Dado $q \in S$, existe un único $v \in \overrightarrow{S}$ tal que $q = p + v$. Escribiendo este v respecto de B, existen únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$q = p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Esta es la *ecuación paramétrica* de S. Es decir, los distintos puntos de S se obtienen haciendo variar los valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Si elegimos un sistema de referencia afín $R = \{p_0, \ldots, p_n\}$ con base asociada $B = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$, y $q_R = (x_1, \ldots, x_n)$, $p_R = (a_1, \ldots, a_n)$, $(v_i)_B = (b_{i1}, \ldots, b_{in})$, entonces

$$q = p + v = p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \overrightarrow{p_0p_j} = p + \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_{ij} \Big) \overrightarrow{p_0p_j}.$$

Tomando ahora coordenadas, se obtiene

$$\begin{cases} x_1 & = a_1 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_{i1} \\ \vdots & \qquad \vdots \\ x_n & = a_n + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_{in}. \end{cases}$$

También se suelen escribir así:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_k \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix}.$$

Todas estas expresiones se conocen como *ecuaciones paramétricas* del subespacio afín S.

Eliminando los parámetros en las ecuaciones anteriores, obtenemos las *ecuaciones implícitas* de S, que en general serán de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & \dots & +a_{1n}x_n = c_1, \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & \dots & +a_{mn}x_n = c_m. \end{cases}$$

Usando que el punto $p \in S$, otra forma de escribir las ecuaciones implícitas de S es:

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) & \dots & +a_{1n}(x_n - p_n) = 0, \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(x_1 - p_1) + a_{m2}(x_2 - p_2) & \dots & +a_{mn}(x_n - p_n) = 0. \end{cases}$$

Razonando de igual forma, las ecuaciones paramétricas e implícitas de $\overrightarrow{S}$ tienen casi la misma expresión formal que las de S, con la única diferencia de que los números $a_1 = \ldots = a_n = c_1 = \ldots = c_m = 0$.

Recíprocamente, si $\dim A = n$, dada M una matriz de orden $k \times n$ y un vector $b \in \mathbb{R}^n$, en A definimos el subconjunto $S = \{p \in A : Mp_R = b\}$. Dados $p, q \in S$, sabemos $Mp_R = b$ y $Mq_R = b$, y restando obtenemos $M(q_R - p_R) = 0$, es decir, $M(\overrightarrow{pq})_B = 0$, luego $\overrightarrow{pq} \in \{v \in \overrightarrow{A} : Mv_B = 0\} =: F$. Análogamente, si $p \in S$ y $v \in F$, entonces $M(p + v)_R = M(p_R + v_B) = Mp_R = b$. Esto demuestra que $S = p + F$, por lo que S es un subespacio afín con subespacio director $\overrightarrow{S} = F$.

1.4. Transformaciones afines

Definición 1.25. Sea $f : A \to A'$ una aplicación entre dos espacios afines. Diremos que f es una *aplicación afín* si existe un punto $a \in A$ tal que la aplicación $\overrightarrow{f}_a : \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A}'$ definida por $\overrightarrow{f}_a(v) = \overrightarrow{f(a) f(a+v)}$ es una aplicación lineal.

Proposición 1.26. *Si $\overrightarrow{f}_a$ es lineal para un punto $a \in A$, entonces $\overrightarrow{f}_b = \overrightarrow{f}_a \; \forall b \in A$. En particular, $\overrightarrow{f}_b$ es lineal $\forall b \in A$.*

Demostración: Fijamos $b \in A$ y tomamos $v \in \overrightarrow{A}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}_b(v) &= \overrightarrow{f(b) f(b+v)} = \overrightarrow{f(b) f(a)} + \overrightarrow{f(a) f(b+v)} \\ &= -\overrightarrow{f(a) f(b)} + \overrightarrow{f(a) f(a + \overrightarrow{ab} + v)} = -\overrightarrow{f}_a(\overrightarrow{ab}) + \overrightarrow{f}_a(\overrightarrow{ab} + v) = \overrightarrow{f}_a(v). \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que $\overrightarrow{f}_a$ es lineal. □

Definición 1.27. Si $f : A \to A'$ es una aplicación afín entre espacios afines, se define $\overrightarrow{f}$ como la aplicación $\overrightarrow{f}_a$, donde $a \in A$ es arbitrario. Diremos que $\overrightarrow{f}$ es la *aplicación lineal asociada* a f.

La aplicación lineal asociada verifica las propiedades:

$$\begin{aligned} \vec{f}(\overrightarrow{ab}) &= \overrightarrow{f(a)f(b)}, \quad \forall a,b \in A \\ f(a+v) &= f(a) + \vec{f}(v), \quad \forall a \in A, \forall v \in \vec{A}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Sólo hay que tener en cuenta que $\overrightarrow{a(a+v)} = v$.

Proposición 1.28. *Sean $f : A \to A'$ y $g : A' \to A''$ dos aplicaciones afines. Entonces la composición $g \circ f$ es otra aplicación afín, y además se verifica $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.*

Demostración: Dado un punto p de A, se construye la aplicación $\overrightarrow{(g \circ f)} : \vec{A} \to \vec{A''}$ dada por $\overrightarrow{(g \circ f)}(v) = \overrightarrow{(g \circ f)(p)(g \circ f)(p+v)}$. Veamos que es una aplicación lineal.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(g \circ f)}_p(v) &= \overrightarrow{(g \circ f)(p)\,(g \circ f)(p+v)} = \overrightarrow{g(f(p))\,g(f(p+v))} \\ &= \vec{g}\left(\overrightarrow{f(p)f(p+v)}\right) = \vec{g}\left(\vec{f}(v)\right) = (\vec{g} \circ \vec{f})(v). \end{aligned}$$

En consecuencia, es una aplicación lineal por ser composición de aplicacines lineales, y se obtiene además la fórmula deseada. □

Nótese que la aplicación identidad $\mathrm{Id}_A : A \to A$ es afín, con $\overrightarrow{\mathrm{Id}}_A = \mathrm{Id}_{\vec{A}}$.

Corolario 1.29. *Sea $f : A \to A'$ una aplicación afín. Entonces, f es biyectiva si, y sólo si, $\vec{f} : \vec{A} \to \vec{A}'$ es biyectiva, y en caso afirmativo, $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$.*

Proposición 1.30. *Sean $f, g : A \to A'$ dos aplicaciones afines tales que $\vec{f} = \vec{g}$. Entonces, existe un único $v \in \vec{A}$ tal que $g = t_v \circ f$.*

Demostración: Para ver la existencia, se escoge $a \in A$ y se define $v = \overrightarrow{f(a)g(a)}$. Entonces, dado $p \in A$, $g(p) = g(a) + \vec{g}(\overrightarrow{ap}) = f(a) + \overrightarrow{f(a)g(a)} + \vec{f}(\overrightarrow{ap}) = f(p) + v = (t_v \circ f)(p)$. Para demostrar la unicidad, supongamos $v, u \in \vec{A}$ tal es que $g = t_v \circ f = t_u \circ f$. Por tanto, $f = t_{v-u} \circ f$. Dado $p \in A$, se tiene $f(p) = f(p) + v - u$, luego $0 = v - u$. □

Si unimos las ecuaciones (1.2) con esta proposición, obtenemos que una apliación afín está totalmente determinada por la imagen de un punto y por su aplicación lineal asociada.

Ejemplo 1.31 (Ejemplos de aplicaciones afines).

1. Si $f : E \to E'$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales, entonces $\vec{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{f(a)f(b)} = f(b) - f(a) = f(b-a) = f(\overrightarrow{ab})$. Es decir, $\vec{f} = f$ y, por tanto, f es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es ella misma.

2. Si $v \in \vec{A}$, entonces la traslación de vector v es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es la identidad. Si $a, b \in A$, entonces $\vec{t_v}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{(a+v)(b+v)} = \overrightarrow{ab}$.

3. Si $f : A \to A$ y $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{A}}$, entonces f es una traslación. Sean $a, b \in A$, y sea $v = \overrightarrow{af(a)}$. Entonces $\overrightarrow{bf(b)} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{af(a)} = v$, puesto que $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \vec{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ab}$. Entonces $f(b) = b + \overrightarrow{bf(b)} = b + v = t_v(b)$ para todo $b \in A$, y f es la traslación de vector v.

4. Dados $a \in A$ y $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la homotecia de centro a y razón r es la aplicación $h_{a,r} : A \to A$ definida por $h_{a,r}(p) = a + r\,\overrightarrow{ap}$. Para comprobar que $h_{a,r}$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es $r\,\mathrm{Id}_{\vec{A}}$ calculamos $(\overrightarrow{h_{a,r}})_a$. Si $b \in A$, entonces $(\overrightarrow{h_{a,r}})_a(\overrightarrow{ab})$ es el vector que une $h_{a,r}(a) = a$ y $h_{a,r}(b) = a + r\overrightarrow{ab}$, que es igual a $r\,\overrightarrow{ab}$.

5. Sea $f : A \to A$ una aplicación afín tal que $\vec{f} = r\,\mathrm{Id}_A$, con $r \neq 0, 1$. Entonces f tiene un único punto fijo $p \in A$ y f es la homotecia de centro p y razón r. Veamos primero que f

tiene un único punto fijo: si todos los puntos de A son fijos para f, entonces f es la identidad en A. Elegimos $p \in A$ tal que $f(p) \neq p$. Si $q \in A$ es fijo para f, entonces:

$$p\backslash label\{unicidad - flineal\} + \overrightarrow{pq} = q = f(q) = f(p + \overrightarrow{pq}) = f(p) + r\,\overrightarrow{pq},$$

de donde se obtiene:

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pf(p)} + r\,\overrightarrow{pq} \Rightarrow \overrightarrow{pq} = \frac{\overrightarrow{pf(p)}}{1-r}.$$

Es fácil ver que $q_0 = p + (1-r)^{-1}\overrightarrow{pf(p)}$ es un punto fijo de f. Si f tuviera otro punto fijo q', entonces $\vec{f}(\overrightarrow{q_0q'}) = \overrightarrow{f(q_0)f(q')} = \overrightarrow{q_0q'}$, pero como $\vec{f} = r\mathrm{Id}_{\vec{A}}$ con $r \neq 1$, entonces $\overrightarrow{q_0q'} = 0$, es decir, $q_0 = q'$. Concluimos entonces que f es la homotecia de centro q_0 y radio r.
Forma alternativa: Por la Proposición 1.30, existen $v \in \vec{A}$, $a \in A$ y $r \neq 0, 1$ tales que $f = t_v \circ h_{a,r}$, donde $h_{a,r}$ es a homotecia de centro a y razón r. Veamos que f admite un punto fijo. Para ello, resolvamos la ecuación $f(a') = a'$. Si escribiemos $a' = a + w$, donde $w \in \vec{A}$ es el vector a calcular, resulta $a' = a + w = f(a') = f(a + w) = t_v\left(a + r\overrightarrow{a(a+w)}\right) = a + rw + v$. De aquí, $w = v/(1-r)$. Finalmente, dado $p \in A$, $f(p) = f\left(a' + \overrightarrow{a'p}\right) = f(a') + \vec{f}\left(\overrightarrow{a'p}\right) = a' + r\overrightarrow{a'p} = h_{a',r}(p)$.

6. Sean S, T dos subespacios afines tales que $\{q\} = S \cap T$ y $\dim S + \dim T = \dim A$. Se tiene entonces que $\vec{A} = \vec{S} \oplus \vec{T}$. Así, dado $u \in \vec{A}$, existen únicos $v \in \vec{S}$ y $w \in \vec{T}$ tales que $u = v + w$. Podemos definir entonces una aplicación lineal $h : \vec{A} \to \vec{A}$ dada por $h(u) = v$. En realidad, la imagen de h es $\vec{S}$. Construimos ahora una aplicación $f : A \to A$ dada por $f(p) = q + h(\overrightarrow{qp})$. Claramente, $f(q) = q$. Veamos que f es afín: $\vec{f}(v) = \overrightarrow{f(q)f(q+v)} = \overrightarrow{q(q+h(v))} = h(v)$. Por tanto, $f = h$ es lineal. Esta aplicación f se llama *la proyección sobre S paralela a T.*

Teorema 1.32. *Sean A y A' dos espacios afines. En A, se considera un sistema de referencia afín $R = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$. En A' se escogen $(n+1)$-puntos $\{q_0, \ldots, q_n\}$. Entonces, existe una única aplicación afín $f : A \to A'$ tal que $f(p_i) = q_i$ para todo $i = 0, \ldots, n$. Además:*

1. *Si $\{q_0, \ldots, q_n\}$ son afínmente independientes, entonces f es inyectiva.*
2. *Si $\{q_0, \ldots, q_n\}$ contiene un sistema de referencia afín, entonces f es sobreyectiva.*
3. *Si $\{q_0, \ldots, q_n\}$ es un sistema de referencia afín, entonces f es biyectiva.*

Demostración: Veamos la existencia. Como R es un sistema de referencia afín, $B = \{\overrightarrow{p_0p_i} : i = 1, \ldots, n\}$ es una base de $\vec{A}$. Existe entonces una única aplicación lineal $h : \vec{A} \to \vec{A'}$ tal que $h(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{q_0q_i}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Definamos la aplicación $f : A \to A'$ dada por $f(p) = q_0 + h(\overrightarrow{p_0p})$.

Por un lado, dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(p_i) = q_0 + h(\overrightarrow{p_0p_i}) = q_0 + \overrightarrow{q_0q_i} = q_i$. Por otro, $f(p_0) = q_0$, trivialmente.

Veamos que f es una aplicación afín. En efecto, dado $v \in \vec{A}$, $f(p_0 + v) = q_0 + h(\overrightarrow{p_0(p_0+v)}) = q_0 + h(v)$, luego $\vec{f}(v) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_0+v)} = \overrightarrow{q_0(q_0+h(v))} = h(v)$. Es decir, $\vec{f}$ es igual a la aplicación lineal antes construida.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que existe otra aplicación afín $g : A \to A'$ que cumpla la tesis del teorema. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\vec{g}(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{g(p_0)g(p_i)} = \overrightarrow{q_0q_i}$. Por la unicidad de h, tenemos $h = \vec{g}$. Además, dado $p \in A$, $g(p) = g(p_0 + \overrightarrow{p_0p}) = g(p_0) + \vec{g}(\overrightarrow{p_0p}) = q_0 + h(\overrightarrow{p_0p}) = f(p)$.

Supongamos ahora que $\{q_0, \ldots, q_n\}$ son afínmente independientes. Entonces, los vectores $\{\overrightarrow{q_0q_1}, \ldots, \overrightarrow{q_0q_n}\}$ son linealmente independientes. Por tanto, la aplicación $h = \vec{f}$ construida anteriormente transforma una base en un conjunto linealmente independiente, por lo que $\vec{f}$ es inyectiva. Dados $p, q \in A$ tales que $f(p) = f(q)$, entonces

$$q_0 + \vec{f}(\overrightarrow{p_0 p}) = f(p) = f(q) = q_0 + \vec{f}(\overrightarrow{p_0 q}),$$

de donde se obtiene $h(\overrightarrow{p_0 p}) = h(\overrightarrow{p_0 q})$, y como h es inyectiva, se obtiene $\overrightarrow{p_0 p} = \overrightarrow{p_0 q}$, es decir, $p = q$. Esto demuestra que f es inyectiva.

Pasemos a estudiar el caso de la sobreyectividad de f. Como $\{q_0, \dots, q_n\}$ contiene un sistema de referencia afín, los vectores $\{\overrightarrow{q_0 q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0 q_n}\}$ forman un sistema de generadores de $\vec{A}'$. En particular, $\vec{f}$ transforma una base en un sistema de generadores, luego es sobreyectiva. Dado $q \in A'$, existe $v \in \vec{A}$ tal que $q = q_0 + v$. Como $\vec{f}$ es sobreyectiva, existe $w \in \vec{A}$ tal que $v = \vec{f}(w)$. Así, $q = q_0 + \vec{f}(w) = f(p_0 + w)$. Por tanto, f es sobreyectiva. □

Sean $f : A \to A'$ una aplicación afín. Consideramos R y R', sistemas de referencia afín en A y A' respectivamente. Sean B y B' las bases asociadas a dichos sistemas de referencia. Entonces:

1. $M(\vec{f}, B, B')$ es la matriz de la aplicación lineal asociada $\vec{f}$ respecto de las bases B y B'.

2. Si $p \in A$, $p_R \in \mathbb{R}^n$ son las coordenadas de p respecto de R. Igualmente, si $q \in A'$, $q_{R'} \in \mathbb{R}^m$ son las coordenadas de q respecto de R'.

Teorema 1.33. *Sean $f : A \to A'$ una aplicación afín. Consideramos R y R', sistemas de referencia afín en A y A' respectivamente. Sean B y B' las bases asociadas a dichos sistemas de referencia. Entonces, existe un punto $b \in \mathbb{R}^m$, $m = \dim A'$ tal que, para cada $p \in A$, se cumple*

$$(f(p))_{R'} = b + M(\vec{f}, B, B')\, p_R.$$

Demostración: Si $R' = \{p'_0, p'_1, \dots, p'_m\}$ es el sistema de referencia escogido en A', tenemos en primer lugar que dado $p \in A$,

$$f(p) = f(p_0) + \overrightarrow{f(p_0)f(p)} = f(p_0) + \vec{f}(\overrightarrow{p_0 p}) = p'_0 + \overrightarrow{p'_0 f(p_0)} + \vec{f}(\overrightarrow{p_0 p}).$$

De aquí,

$$\begin{aligned}
(f(p))_{R'} &= \left(p'_0 + \overrightarrow{p'_0 f(p_0)} + \vec{f}(\overrightarrow{p_0 p})\right)_{R'} = \left(\overrightarrow{p'_0 f(p_0)} + \vec{f}(\overrightarrow{p_0 p})\right)_{B'} \\
&= \left(\overrightarrow{p'_0 f(p_0)}\right)_{B'} + \left(\vec{f}(\overrightarrow{p_0 p})\right)_{B'} = \left(\overrightarrow{p'_0 f(p_0)}\right)_{B'} + M(\vec{f}, B, B')\left(\overrightarrow{p_0 p}\right)_B \\
&= \left(\overrightarrow{p'_0 f(p_0)}\right)_{B'} + M(\vec{f}, B, B')\, p_R.
\end{aligned}$$

Llamando $b = \left(\overrightarrow{p'_0 f(p_0)}\right)_{B'}$, tenemos el resultado. □

1.5. Ejercicios

1.1.– Sea V un espacio vectorial real. Se considera la aplicación $\Phi : V \times V \to V$ dada por $\Phi(u,v) = 2u - v$, que denotaremos por $\Phi(u,v) = \overrightarrow{uv}$. Estudiar si Φ induce o no una estructura de espacio afín en V.

1.2.– En un espacio afín A se consideran $(n+1)$-puntos $\{p_0, \ldots, p_n\} \subset A$. Se define el *baricentro* de estos puntos como

$$\mathbf{b} = p_0 + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_0 p_i}.$$

Demuestra que el baricentro no depende del punto p_0 inicial escogido.

1.3.– Un triángulo en un espacio afín es una colección de tres puntos $\{a, b, c\}$ no alineados. Si $T = \{a, b, c\}$ es un triángulo, probar que las medianas (las rectas que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos) se cortan en el baricentro del triángulo.

1.4.– Probar que los puntos medios de los lados de un triángulo T forman un triángulo cuyos lados son paralelos a los de T y cuyo baricentro es el mismo que el de T.

1.5.– Sea T un triángulo. Probar que la recta que pasa por el punto medio de un lado y es paralela a un segundo lado corta al tercer lado en su punto medio.

1.6.– Sea T un triángulo. Probar que las paralelas a dos de los lados que pasan por el baricentro dividen al tercer lado en tres segmentos de la misma longitud (Si los puntos a, b, c están alineados, diremos que los segmentos ab, bc tienen la misma longitud si $\overrightarrow{ab} = \pm\overrightarrow{bc}$).

1.7.– Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos (paralelogramo), probar que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$ y que $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ad}$.

1.8.– Probar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Calcular el centro de gravedad de un paralelogramo.

1.9.– Si los lados de un cuadrilátero C se trisecan, las rectas que unen los puntos de trisección adyacentes en lados distintos de C forman un paralelogramo.

1.10.– En $\mathbb{R}^3$ se consideran los puntos:

$$p_0 = (1,2,1),\ p_1 = (2,1,0),\ p_2 = (0,1,0),\ p_3 = (1,-1,2).$$

Probar que forman un sistema de referencia afín en $\mathbb{R}^3$. Calcular las coordenadas de los puntos $p = (0,0,0)$, $q = (1,1,1)$ en dicho sistema de referencia.

1.11.– En $\mathbb{R}^2$ se consideran los sistemas de referencia $R = \{o, o + v_1, o + v_2\}$, $R' = \{o', o' + (v_1 + v_2), o' + (v_1 - v_2)\}$, donde $\{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $\overrightarrow{oo'} = v_1 + v_2$.

1. Escribir las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de R a R'.
2. Calcular las coordenadas del punto $p_R = (1,0)$ en el sistema de referencia R'.

1.12.– En un plano afín A se considera el sistema de referencia afín $R = \{a, b, c\}$ y los puntos:

$$a' = a + 2\,\overrightarrow{ab},$$
$$b' = a + \overrightarrow{ab} - \overrightarrow{ac},$$
$$c' = a - \overrightarrow{ab} - \overrightarrow{ac}.$$

Probar que $R' = \{a', b', c'\}$ es un sistema de referencia afín en A. Calcular las coordenadas de un punto en R' en función de las coordenadas en R.

1.13.– Sea S un subespacio afín de A, y $p \in A$. Probar que $S = p + \overrightarrow{S}$ si y sólo si $p \in S$. Además, si $p \notin S$, probar que $S \cap (p + \overrightarrow{S}) = \emptyset$.

1.14.– Demostrar que toda recta afín de $\mathbb{R}^3$ es la intersección de dos planos afines. ¿Es cierta esta afirmación en $\mathbb{R}^n$?

1.15.– Calcular ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios afines de $\mathbb{R}^4$ generados por los puntos:

1. $p_0 = (1, 1, 0, 1), p_1 = (1, -1, 1, 0)$.
2. $p_0 = (1, 1, 0, 1), p_1 = (1, 0, 1, 0)\ p_2 = (0, 1, 0, 1)$.

1.16.– En cada uno de los siguientes casos, calcular la intersección $S \cap T$ y la suma afín $S \vee T$ de los subespacios afines S y T de $\mathbb{R}^3$:

1. $S = (1, 2, -1) + L((1, 0, -2)), T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + z = 1, 4x + y + 2z = 4\}$.
2. $S = (-1, 0, 1) + L((1, 1, 1)), T = (1, 1, 1) + L((-1, -1, -1))$.
3. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}, T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2, y - z = 1\}$.

1.17.– Sean L una recta afín y S un hiperplano afín de A. Supongamos que $\overrightarrow{L} + \overrightarrow{S} = \overrightarrow{A}$. Probar que $L \cap S$ es un único punto.

1.18.– Sea $f : A \to A'$ una aplicación afín, y sea $m \in A$ el baricentro de los puntos $p_1, \ldots, p_k$. Probar que $f(m)$ es el baricentro de los puntos $f(p_1), \ldots, f(p_k)$.

1.19.– Sean $p_0, \ldots, p_k$ puntos en un espacio afín A. Probar que el subespacio afín:

$$A(p_0, \ldots, p_k) = p_0 + L(\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k})$$

es el menor subespacio afín que que contiene a los puntos $p_0, \ldots, p_k$. ¿Cuándo es la dimensión de $A(p_0, \ldots, p_k)$ igual a k?

1.20.– Se considera S el plano afín de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y verifica $\overrightarrow{S} = L((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3))$. Probar que una ecuación implícita de S es:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

1.21.– Sean S y T dos subespacios afines de un espacio afín A tales que $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}$. Probar que $S \cap T \neq \emptyset$. Si, además, $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{S} \oplus \overrightarrow{T}$, entonces $S \cap T$ es un único punto. Probar que una recta afín S y un hiperplano T tales que $\overrightarrow{S} \not\subset \overrightarrow{T}$ se cortan en un único punto.

1.22.– Se consideran los subespacios afines S_1, S_2 de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$S_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$S_2 = (1, 0, \lambda, 0) + L(\{(0, 1, -1, 1), (1, 0, -1, 1)\})$$

Calcular la suma afín $S_1 \vee S_2$ y la intersección $S_1 \cap S_2$ en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.23.– Probar que en un plano afín dos rectas son, o bien iguales, o paralelas y distintas, o se cortan en un único punto.

1.24.– Sea S una recta afín y T un subespacio afín de dimensión mayor o igual que dos. Probar que se da sólo una de las tres siguientes posibilidades:

1. $S \cap T = \emptyset$,
2. $S \cap T$ es un único punto,
3. $S \subset T$.

Además, si T es un hiperplano afín, entonces $S \cap T = \emptyset$ implica que S es paralela a T.

1.25.– Sean S y T dos hiperplanos afines de un espacio afín A de dimensión $n = \dim A \geq 2$. Probar que se da sólo una de las siguientes posibilidades:

1. $S \cap T = \emptyset$ y los hiperplanos son paralelos,
2. $\dim(S \cap T) = n - 2$,
3. $S = T$.

1.26.– Probar que la aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (1 - 2x, 3 - 2y)$ es una homotecia. Calcular su centro y su razón.

1.27.– Sea $\{a, b, c\}$ un triángulo, y $\{a', b', c'\} = \{m_{bc}, m_{ac}, m_{ab}\}$ el triángulo formado por los puntos medios. Describir las siguientes aplicaciones afines:

1. $h_{b',2} \circ h_{a,3/4} \circ h_{c,2/3}$,
2. $\sigma_{a'} \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_{c'}$,
3. $\sigma_{a'} \circ \sigma_{b'}$,

donde $h_{p,\lambda}$ es la homotecia de centro p y razón λ, y σ_p es la simetría central de centro p.

1.28.– Sea h una homotecia que lleva cada vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto. Demostrar que el centro de la homotecia es el baricentro del triángulo y que su razón es $-1/2$.

1.29.– Calcular explícitamente una homotecia en $\mathbb{R}^3$ de centro (a, b, c) y razón $r \neq 0$.

1.30.– Sea $f : A \to A$ una aplicación afín. Probar que el conjunto de puntos fijos de f es una subespacio afín cuyo subespacio de direcciones es $\ker(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{A}})$.

1.31.– Determinar el conjunto de puntos fijos de la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + 3y + 3/2, -2y - 3/2, -4x - 4y - z - 2)$.

1.32.– Determinar la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tiene como puntos fijos los del plano $x + y + z = 1$ y tal que $f(0, 0, 0) = (1, 0, 0)$. ¿Es f un isomorfismo afín?

1.33.– Demostrar las siguientes afirmaciones:

1. Una traslación de un espacio afín queda determinada por la imagen de un único punto.
2. Una homotecia de un espacio afín queda determinada por la imagen de dos puntos distintos.
3. Una aplicación afín de una recta afín en si misma es, o constante, o una traslación, o una homotecia.
4. Las traslaciones y las homotecias son las únicas aplicaciones afines $f : A \to A$ tales que $f(S)$ es paralelo a S para todo subespacio afín $S \subset A$.

Tema 2

Espacios afines Euclídeos

2.1. Introducción

Los *Elementos* es uno de los escritos más influyentes de la Historia Occidental, atribuido a Euclides de Alejandría alrededor del año 300 A.C. La obra consiste en 13 tomos en los que se describe de forma razonablemente rigurosa la geometría de su época. Euclides compiló con bastante acierto conceptos, definiciones, postulados, teoremas y corolarios, acerca de rectas, ángulos, triángulos, circunferencias, figuras planas y en el espacio. Durante muchos siglos se creyó que la Geometría Euclídea era la única posible, por lo que se fracasó múltiples veces en el intento de demostrar el *V Postulado de Euclides* (por un punto exterior a una recta pasa una única paralela) a partir de los otros cuatro. De hecho, la Geometría Euclídea llegó a influir en los tratados de grandes pensadores como Descartes o Kant. Finalmente, a principios del s. XIX, de forma independiente Karl Gauss, Nicolai Lobachevsky y Janos Bolyai, crearon una Geometría Hiperbólica, donde el V Postulado de Euclides es falso.

En este tema se va a estudiar la Geometría Euclídea desde un punto de vista actual, revisando algunas de las aportaciones más importantes en estos 23 siglos. Por ejemplo, Euclides desconocía el concepto de aplicación y, por tanto, su idea de «igualdad de figuras» lo interpretamos modernamente a través de los movimientos rígidos.

2.2. Espacio afín Euclídeo: Distancias, ángulos y perpendicularidad

Definición 2.1. Diremos que un espacio afín A es *Euclídeo* si existe un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en el espacio de direcciones $\overrightarrow{A}$. Es decir, $(\overrightarrow{A}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio vectorial Euclídeo.

Denotaremos la norma asociada al producto escalar por $\|\cdot\|$.

Definición 2.2. En un espacio afín Euclídeo se puede definir una *distancia* entre dos puntos por la igualdad:

$$d(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\| = \langle\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}\rangle^{1/2}, \qquad p, q \in A.$$

Las propiedades de la norma implican que d verifica las tres propiedades usuales de distancia:

1. $d(p,q) \geqslant 0$, y $d(p,q) = 0$ si y sólo si $p = q$.

2. $d(p,q) = d(q,p)$,
3. $d(p,q) \leqslant d(p,r) + d(r,q)$,

para puntos arbitrarios $p, q, r \in A$.

En un espacio vectorial V, consideramos una orientación, es decir, fijamos una base ordenada $B = (w_1, \ldots, w_n)$. Diremos que otra base $\bar{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ determina la misma orientación si $\det M(\mathrm{Id}_V, B, \bar{B}) > 0$, o también que $\bar{B}$ está positivamente orientada, o que es una base positiva. En caso contrario, se dice que tienen orientaciones opuestas.

Definición 2.3. En un plano euclídeo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\dim V = 2$, consideramos una orientación. Dados dos vectores $u_1, u_2 \in V$ distintos de cero, existe única base ortonormal $\{w_1, w_2\}$ orientada positivamente tal que $w_1 = u_1/||u_1||$. En tal caso, un ángulo orientado de u_1 a u_2 es un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$u_2 = \|u_2\| \Big(\cos(\alpha) w_1 + \sin(\alpha) w_2 \Big). \tag{2.1}$$

Denotaremos el ángulo orientado de u_1 a u_2 por $\widehat{(u_1, u_2)}$ o por $\angle(u_1, u_2)$.

Propiedades 2.4.

1. *El ángulo α en (2.1) no es único, puesto que $\alpha + 2k\pi$ también satisface (2.1) $\forall k \in \mathbb{Z}$.*
2. *Dados $u_i \in V$, $u_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, se cumple $\widehat{(u_1, u_2)} + \widehat{(u_2, u_3)} = \widehat{(u_1, u_3)} + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.*
3. $\cos \widehat{(u_1, u_2)} = \dfrac{g(u_1, u_2)}{\|u_1\|\,\|u_2\|}$.
4. *Si conocemos una base ortonormal positiva B, dados $u_1, u_2 \in V$ distintos de cero, sean $(u_1)_B = (u_{11}, u_{12})$ y $(u_2)_B = (u_{21}, u_{22})$ sus coordenadas respecto de B. Entonces,*

$$\det_B(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \|u_1\|\,\|u_2\|\,\sin(\alpha).$$

Demostración: Las propiedades 1 y 2 son triviales.

3. Partimos de la fórmula (2.1). Tomando producto escalar con u_1, como $u_2 \perp w_2$ y $w_1 = u_1/\|u_1\|$, se obtiene rápidamente el resultado.

4. De nuevo, usamos la fórmula (2.1). También hay que tener en cuenta que la nueva base $\bar{B} = (w_1, w_2)$ es ortonormal y positiva, luego $\det_B(w_1, w_2) = 1$. Así,

$$\begin{aligned} \det_B(u_1, u_2) &= \det_B\Big(\|u_1\| w_1, \|u_2\|(\cos(\alpha) w_1 + \sin(\alpha) w_2)\Big) \\ &= \|u_1\|\,\|u_2\|\,\sin(\alpha)\det_B(w_1, w_2) = \|u_1\|\,\|u_2\|\,\sin(\alpha). \end{aligned}$$

□

También se habla de *ángulo no orientado, o ángulo (a secas)*. En ese caso, se calcula a partir de la fórmula anterior del coseno, siendo un número en el intervalo $[0, \pi]$.

Dos vectores $v, w \in \overrightarrow{A}$ son *perpendiculares* u *ortogonales* si $\langle v, w\rangle = 0$. Esta propiedad se indica por la expresión $v \perp w$. Así, se dice que dos rectas L y S son perpendiculares u ortogonales si sus vectores directores lo son. También se indica $L \perp S$. Nótese que la dimensión de A puede ser cualquiera.

Definición 2.5. Se consideran dos rectas afines secantes en un espacio afín Euclídeo orientado. El *ángulo (no orientado)* que forman es el menor de los dos ángulos (no orientados) formado por los vectores directores. Se suele denotar $\angle(rt)$.

Proposición 2.6. *En un plano afín euclídeo A orientado, sean r y s dos rectas distintas paralelas. Sea t otra recta secante con las anteriores. Entonces, los ángulos* $\angle(rt)$ *y* $\angle(st)$ *son iguales.*

Definición 2.7. Un subespacio afín S es ortogonal a otro subespacio afín T si, para todo par de vectores $v \in \overrightarrow{S}$, $w \in \overrightarrow{T}$ se tiene que $\langle v, w \rangle = 0$. Esta propiedad se indica por $S \perp T$.

Proposición 2.8. *Sean S y T dos subespacios afines de un espacio afín Euclídeo. Si* $S \perp T$, *entonces* $\overrightarrow{S} \subset \overrightarrow{T}^{\perp}$ *y* $\overrightarrow{T} \subset \overrightarrow{S}^{\perp}$.

Proposición 2.9. *Sean S un subespacio afín de un espacio afín Euclídeo, con* $\dim S < \dim A$, *y* $p \in A$. *Entonces, existe un único subespacio afín T tal que* $p \in T$, $S \perp T$ *y* $\dim S + \dim T = \dim A$. *Además, si* $p \in S$, $S \cap T = \{p\}$.

Demostración: Para la existencia, basta elegir $T = p + \overrightarrow{S}^{\perp}$. Para la unicidad de T, recordemos que $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{S} \oplus \overrightarrow{S}^{\perp}$ y que $\overrightarrow{S}^{\perp}$ es único. Además, si $p \in S$, entonces dado $q \in S \cap T$, $q = p + \overrightarrow{pq} \in S \cap T$, luego $\overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T} = \overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{S}^{\perp} = \{0\}$. Por tanto, $p = q$. □

Definición 2.10. Un sistema de referencia $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ en un espacio afín es *Euclídeo* si los vectores $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$ forman una base ortonormal de $\overrightarrow{A}$. En tal caso, las coordenadas de un punto respecto del sistema de referencia se les llama coordenadas *cartesianas.*

2.3. Movimientos rígidos y semejanzas

Definición 2.11. Se dice que una aplicación afín $f : A \to A'$ entre espacios afines euclídeos es *una isometría afín* o *un movimiento rígido* si la aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A}'$ es una isometría lineal, es decir, un isomorfismo lineal que preserva los productos escalares: $\langle \overrightarrow{f}(v), \overrightarrow{f}(w) \rangle = \langle v, w \rangle$, $\forall\, v, w \in \overrightarrow{A}$.

Proposición 2.12. *Sea* $f : A \to A'$ *una isometría.*

1. *f conserva las distancias; si* $p, q \in A$, *entonces* $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$.
2. *f conserva el ángulo (no orientado) entre rectas sectantes:* $\cos\left(\widehat{f(r), f(s)}\right) = \cos\widehat{(r, s)}$.

Demostración: 1. Claramente, $d(f(p), f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = \|\overrightarrow{pq}\| = d(p, q)$.

2. Como $\overrightarrow{f}$ es una isometría lineal, conserva el ángulo entre vectores. Por tanto, f conserva el ángulo que formen dos vectores directores de rectas sectantes. □

Corolario 2.13. *Sean R y R′ son sistemas de referencia euclídeos con respectivas bases ortonormales asociadas B y B′. Entonces, f es isometría si, y sólo si,* $M(\overrightarrow{f}, B, B')$ *es una matriz ortogonal.*

Demostración: Por definición, f es isometría si, y sólo si, $\overrightarrow{f}$ es una isometría lineal. Como las bases escogidas son ortonormales, $\overrightarrow{f}$ es una isometría lineal si, y sólo si, $M(\overrightarrow{f}, B, B')$ es una matriz ortogonal. □

Ejemplo 2.14. 1. Una traslación t_v es una isometría afín puesto que la aplicación lineal asociada es la identidad en $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{t_v} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{A}}$, que es una isometría lineal.

2. Se dice que una aplicación afín $f : A \to A$ es una *semejanza* si es la composición de una isometría con una homotecia afín. La *razón de semejanza* es la razón de la homotecia. Las homotecias afines son semejanzas, debido a que una isometría subyacente es la identidad. Una semejanza preserva ángulos puesto que una homotecia lineal tiene esta propiedad. En efecto, si $h_{o,\lambda}(p) = o + \lambda\,\overrightarrow{op}$, entonces:

$$d(h_{o,\lambda}(p), h_{o,\lambda}(q)) = |\lambda|\,\|\overrightarrow{oq} - \overrightarrow{op}\| = |\lambda|\,\|pq\| = |\lambda|\,d(p,q).$$

En particular, esto demuestra que si f es una semejanza afín de razón λ, entonces:

$$d(f(p), f(q)) = |\lambda|\,d(p,q),$$

para todo par de puntos $p, q \in A$.

3. Un *giro* en un plano afín A es una isometría tal que respecto de un sistema de referencia euclídeo, la matriz de la aplicación lineal asociada es de la forma

$$M(\overrightarrow{f}, B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ es un parámetro denominado *ángulo de giro*. Normalmente, se escoge $\theta \in [0, 2\pi[$. Usando el Teorema 1.33, es muy fácil comprobar que un giro admite un único punto fijo, llamado *centro de giro*.

4. Consideremos una recta afín r de un plano afín A. Dado un punto $p \in A$, sea s la única recta que pasa por p y tal que $s \perp r$. Si $p \in r$, definimos $f(p) = p$. Si $p \notin r$, sea q el punto de intersección de ambas rectas. Definimos $f(p)$ como el único punto de r tal que $d(p,q) = d(q, f(p))$ y que $p \neq f(p)$. Hemos construido así una aplicación afín $f : A \to A$ que llamaremos *simetría respecto de la recta afín* r. Respecto de una base ortonormal adecuada B (uno de los vectores es director de la recta r), se tiene

$$M(\overrightarrow{f}, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como esta matriz es ortogonal, f es una isometría afín. Nótese que los puntos fijos de f son justo los puntos de la recta r.

5. Sea r una recta de un plano afín y v un vector director de r. Llamaremos *simetría deslizante* respecto de la recta r a la composición de la simetría respecto de r y de la traslación t_v. Esta nueva isometría no admite puntos fijos.

2.4. Clasificación de movimientos rígidos en dimensión dos y tres

Teorema 2.15. *Sea A un plano afín Euclídeo, y $f : A \to A$ una isometría afín. Entonces f es una de las siguientes:*

1. *La identidad Id_A.*
2. *Una traslación t_v de vector $v \neq 0$.*
3. *Un giro de ángulo distinto de cero.*
4. *Una simetría ortogonal con respecto a una recta afín.*
5. *Una simetría deslizante.*

Demostración: Sea $B = \{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de $\overrightarrow{A}$. Sabemos que $\overrightarrow{f}$ es una isometría lineal. Por tanto, si $\overrightarrow{f}(e_1) = a\,e_1 + b\,e_2$, entonces $\|\overrightarrow{f}(e_1)\| = (a^2+b^2)^{1/2} = 1$, y $\overrightarrow{f}(e_1) \perp \overrightarrow{f}(e_2)$, lo que implica que $\vec{f}(e_2) = \pm(-b\, e_1 + a\, e_2)$. En consecuencia, la matriz de $\vec{f}$ en la base B es una de las dos siguientes:

$$M(\vec{f}, B) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

dependiendo del valor de $\det(\vec{f})$.

Si $\det(\vec{f}) = 1$, la matriz de $\vec{f}$ es del primer tipo.

Si $a = 1$, entonces $b = 0$ y $\vec{f}$ es la aplicación identidad en $\vec{A}$. En ese caso sabemos que f es una traslación de vector v. Si $v = 0$, f es la identidad.

Si $a \neq 1$, entonces $b \neq 0$. Eligiendo un punto $p \in A$, la expresión matricial de f en el sistema de referencia Euclídeo $\{p, p + e_1, p + e_2\}$ es:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz de la aplicación $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{a}}$ es:

$$\det \begin{pmatrix} a - 1 & -b \\ b & a - 1 \end{pmatrix} = a^2 - 2a + 1 + b^2 = 2\,(-a + 1) \neq 0.$$

Por tanto, f tiene un único punto fijo y f es un giro. Como $a^2 + b^2 = 1$ y $a \neq 1$, existe $\theta \in (0, 2\pi)$ tal que $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$.

Si $\det(\vec{f}) = -1$, entonces la matriz de $\vec{f}$ es del segundo tipo. El polinomio característico de $\vec{f}$ es:

$$\det(\vec{f} - \lambda\, \mathrm{Id}_{\vec{A}}) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & -a - \lambda \end{pmatrix} = -a^2 + \lambda^2 - b^2 = \lambda^2 - 1,$$

que tiene dos raíces reales distintas. Existe entonces una base ortonormal $B' = \{v_1, v_2\}$ tal que:

$$M(\vec{f}, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si f tiene algún punto fijo p, entonces la expresión matricial de f en el sistema de referencia Euclídeo $\{p, p + v_1, p + v_2\}$ es:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que es la simetría ortogonal con respecto a la recta $p + L(v_1)$.

Si f no tiene ningún punto fijo, elegimos $p \in A$ arbitrario, y sean (c, d) las coordenadas de $f(p)$ en el sistema de referencia $\{p, p + v_1, p + v_2\}$. La expresión matricial de f es entonces:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que se puede expresar como la composición de la simetría ortogonal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con respecto a la recta afín $y = d/2$ seguida de la traslación de vector de coordenadas $(c, 0)$ en la base $\{v_1, v_2\}$. El hecho de que f no tenga puntos fijos es equivalente a que $c \neq 0$. □

Listas de movimentos rígidos del plano, atendiendo a sus puntos fijos. En general, llamamos $P_f = \{p \in A : f(p) = p\}$ al conjunto de puntos fijos de f.

$\det \overrightarrow{f}$ \ P_f	A	recta	1 punto	$\emptyset$
$+1$	Id_A	–	giro	traslación
-1	–	simetría	–	simetría deslizante

Teorema 2.16. *Sea A un espacio afín Euclídeo de dimensión tres y $f : A \to A$ una isometría afín. Entonces f es una de las siguientes:*

1. *La identidad Id_A.*
2. *Una traslación t_v de vector $v \neq 0$.*
3. *Un giro de ángulo distinto de cero con respecto a una recta afín.*
4. *Un movimiento helicoidal.*
5. *Una simetría ortogonal con respecto a un plano afín.*
6. *Una simetría deslizante.*
7. *La composición de un giro con respecto a una recta afín R y una simetría con respecto a un plano afín P perpendicular a R.*

Demostración: Observamos en primer lugar que el polinomio característico de $\overrightarrow{f}$ es de grado tres, que siempre tiene una raíz. Por tanto, siempre existe un vector propio unitario e_1 de $\overrightarrow{f}$ cuyo valor propio es $+1$ o -1. Consideramos una base ortonormal $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ que contiene al vector propio e_1. Como $\overrightarrow{f}(e_1) = \pm e_1$ y $\overrightarrow{f}$ es una isometría lineal, la matriz de $\overrightarrow{f}$ en la base B es de uno de los siguientes cuatro tipos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{pmatrix},$$

con $a^2 + b^2 = 1$.

En el primer caso, $\det(\overrightarrow{f}) = 1$. Si $a = 1$, entonces $b = 0$ y $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{A}}$. En tal caso, f es o bien la identidad en A o una traslación de vector $v \neq 0$. Si $a \neq 1$, entonces $b \neq 0$ y existe $\theta \in (0, 2\pi)$ tal que $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$. Si f tiene un punto fijo $p \in A$, la expresión matricial de f en el sistema de referencia $\{p, p + e_1, p + e_2, p + e_3\}$ es:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

que es un giro de ángulo $\theta \neq 0$ con respecto a la recta afín $p + L(e_1)$. Si f no tiene ningún punto fijo, tomamos $p \in A$ arbitrario. Supongamos que las coordenadas de $f(p)$ en el sistema de referencia $\{p, p+e_1, p+e_2, p+e_3\}$ son (c, d, e). La expresión matricial de f en dicho sistema de referencia Euclídeo es:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

El hecho de que f no tenga puntos fijos es equivalente a que $c \neq 0$. Podemos escribir entonces f como la composición del giro:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

con respecto a una recta paralela a $p + L(e_1)$ con la traslación de vector de coordenadas $(c, 0, 0)$ en la base B. Dicho vector está contenido en la dirección del eje del giro.

En el segundo caso, $\det(\vec{f}) = -1$ y el polinomio característico de $\vec{f}$ es $P(\lambda) = -(1 - \lambda)^2(1 + \lambda)$. Existe entonces una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ formada por vectores propios de $\vec{f}$ de valores propios $+1$, $+1$ y -1. Si f tiene un punto fijo $p \in A$, la expresión matricial de f en el sistema de referencia Euclídeo $\{p, p + v_1, p + v_2, p + v_3\}$ es:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano afín $p + L(\{v_1, v_2\})$. Si f no tiene puntos fijos, sea $p \in A$, y sean (c, d, e) las coordenadas de punto $f(p)$ en el sistema de referencia dado. La expresión matricial de f es, en este caso:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

con $(c, d) \neq (0, 0)$. La aplicación f puede escribirse como la composición de la simetría ortogonal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

con respecto al plano de ecuación $z = e/2$, seguida de la traslación de vector de coordenadas $(c, d, 0)$ en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Entonces f es una simetría deslizante.

En el tercer caso, si $a = 1$, entonces $b = 0$ y estamos en al caso anterior en el que $+1$ es valor propio de $\vec{f}$ con multiplicidad dos y -1 es valor propio simple. Si $a \neq 1$, entonces:

$$\det(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{A}} = -4\,(-a + 1) \neq 0.$$

Entonces f tiene un único punto fijo p. La aplicación f, en el sistema de referencia Euclídeo $\{p, p + e_1, p + e_2, p + e_3\}$, tiene expresión matricial:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

que es la composición del giro:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

con respecto a la recta $p + L(e_1)$ con la simetría ortogonal:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

con respecto al plano $p + L(\{e_2, e_3\})$. Observamos que la simetría y el giro conmutan.

En el cuarto caso, el polinomio característico es $P(\lambda) = (-1-\lambda)^2(1-\lambda)$. Existe entonces una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ tal que la matriz de $\overrightarrow{f}$ en dicha base es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que corresponde a un giro de ángulo π con respecto a una recta afín de dirección $L(v_3)$ o a un movimiento helicoidal de eje paralelo a $L(v_3)$. □

Lista de movimientos rígidos del espacio, atendiendo a sus puntos fijos. Recordemos que $P_f = \{p \in A : f(p) = p\}$ es el conjunto de puntos fijos de f.

$\det \overrightarrow{f}$ \ P_f	A	plano	recta	1 punto	$\emptyset$
$+1$	Id_A	–	giro	–	traslación / helicoidal
-1	–	simetría	–	simetría compuesta con giro	simetría deslizante

2.5. Triángulos. Recta de Euler. Teorema de Tales

Definición 2.17. Un *triángulo* en un espacio afín es un conjunto de tres puntos afínmente independientes. Diremos que un triángulo $T = \{a, b, c\}$ formado por tres puntos afínmente independientes es *rectángulo* si $\overrightarrow{ab} \perp \overrightarrow{ac}$. Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo vienen dadas por las normas de los vectores $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{ac}$ y $\overrightarrow{bc}$. Los lados ortogonales ab, ac suelen denominarse los *catetos* del triángulo. El lado restante bc es la *hipotenusa.*

Si $T = \{a, b, c\}$ es un triángulo en un plano afín, los *ángulos interiores* del triángulo son los ángulos orientados:

$$\hat{A} = \angle(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}), \ \hat{B} = \angle(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}), \ \hat{C} = \angle(\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}),$$

con respecto a la orientación inducida por la base $\{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\}$.

Es fácil ver que cada ángulo interior se puede tomar en el intervalo $(0, \pi)$. Veamos que $\hat{A} \in (0, \pi)$: consideramos los vectores $w_1 := \overrightarrow{ab}/||\overrightarrow{ab}||$, $w_2 = w_2'/||w_2'||$, donde:

$$w_2' := \overrightarrow{ac} - \frac{\langle \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac} \rangle}{||\overrightarrow{ab}||^2} \overrightarrow{ab}.$$

La base ortonormal $\{w_1, w_2\}$ tiene la misma orientación que $\{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\}$. Para calcular el ángulo $\hat{A}$ escribimos:

$$\overrightarrow{ac} = \frac{\langle \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac} \rangle}{||\overrightarrow{ab}||} w_1 + w_2.$$

Comparando esta fórmula con (2.1) observamos que $\sin \hat{A} > 0$, lo que implica que podemos elegir $\hat{A} \in (0, \pi)$, como queríamos demostrar. Podemos probar del mismo modo que $\hat{B}, \hat{C} \in$

$(0, \pi)$ teniendo en cuenta que las bases $\{\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}\}$ y $\{\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}\}$ inducen la misma orientación que $\{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\}$.

Proposición 2.18. *En un plano afín Euclídeo, los ángulos interiores de un triángulo suman π.*

Demostración: Sea $T = \{a, b, c\}$ un triángulo y $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ sus ángulos interiores. Por la propiedad $\angle(u, v) = \angle(-u, -v)$ y la propiedad 2 de 2.4, tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{C} + \hat{B} &= \angle(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) + \angle(\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb}) + \angle(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}) \\ &= \angle(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) + \angle(\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{bc}) + \angle(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}) = \angle(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ba}) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Como $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in (0, \pi)$, concluimos que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \in (0, 3\pi)$. Por tanto $k = 0$ y se sigue el resultado. □

Proposición 2.19 (Teorema de Pitágoras). *Dado un triángulo rectángulo $T = \{a, b, c\}$, se tiene $d(a, b)^2 + d(a, c)^2 = d(b, c)^2$.*

Demostración: $\|\overrightarrow{bc}\|^2 = \|-\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac}\|^2 = \|\overrightarrow{ab}\|^2 + \|\overrightarrow{ac}\|^2 - 2\langle\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\rangle = \|\overrightarrow{ab}\|^2 + \|\overrightarrow{ac}\|^2$. □

El punto medio de dos puntos a, b es el punto m dado por $m = a + \overrightarrow{ab}/2 = b + \overrightarrow{ba}/2$. Dados dos puntos distintos a y b, el segmento que los une es el subconjunto $\bar{ab} = \{a + \lambda\overrightarrow{ab} : \lambda \in [0, 1]\}$.

Lema 2.20. *Sean a, b dos puntos distintos de un plano afín A y R la única recta que los contiene. Entonces, existe una única recta S perpendicular a R que pasa por el punto medio de a y b, llamada mediatriz de ab. Además, dado un punto $c \in s$, se tiene $d(a, c) = d(b, c)$.*

Demostración: Se construye la recta R a partir del punto medio m de a y b, que sea perpendicular a la recta que pasa por a y b. Sea $f : A \to A$ la simetría respecto de R. Así, dado $c \in R$, $d(a, c) = d(f(a), f(c)) = d(b, c)$. □

En un triángulo $T = \{a, b, c\}$ se pueden definir diversos puntos notables.

Teorema 2.21. *Dado un triángulo, existe un único punto que equidista de los vértices.*

Demostración: Sea a, b, c un triángulo. Sea R la recta perpendicular a ab que pasa por el punto medio. Sea S la recta perpendicular a ac que pasa por el punto medio.

Supongamos que R y S son paralelas. Como las rectas ab y ac son perpendiculares a R y S, respectivamente, entonces $ab \| ac$, y como el punto a es común a las dos, dichas rectas son iguales, lo cual contradice el hecho de que a, b, c es un triángulo.

Por tanto, R y S son secantes. Sea $\{e\} = R \cap S$. Por el lema anterior, $d(e, a) = d(e, b) = d(e, c)$. □

Definición 2.22. El *circuncentro* es el centro de la única circunferencia que pasa por los tres puntos de T. Dicho de otro modo, es el único punto que equidista de los tres vértices del triángulo.

En un triángulo, la altura de un lado es la recta perpendicular a ese lado que pasa por el vértice opuesto.

Teorema 2.23. *Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto, llamado ortocentro.*

Demostración: Consideramos las alturas $a + L(v)$, $b + L(w)$ que pasan por a, b, respectivamente, con $v \perp \overrightarrow{bc}$ y $w \perp \overrightarrow{ac}$. Como los vectores $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{ac}$ son linealmente independientes, los vectores v, w también lo son, y dichas alturas se cortan en un único punto o. Para ver que el punto o pertenece a la tercera altura $c + L(\overrightarrow{ab})^{\perp}$ sólo hay que comprobar que $\overrightarrow{oc} \perp \overrightarrow{ab}$. Puesto que:

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{oc}, \overrightarrow{ab} \rangle &= \langle \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ao} + \overrightarrow{ob} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ao} + \overrightarrow{ob} - \overrightarrow{ac} \rangle + \langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ob} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{cb} \rangle + \langle \overrightarrow{ob}, \overrightarrow{ac} \rangle,\end{aligned}$$

y $\overrightarrow{oa} \perp \overrightarrow{cb}$, $\overrightarrow{ob} \perp \overrightarrow{ac}$, se sigue el resultado. □

Si unimos un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto, obtenemos una recta llamada *mediana*. Dado un conjunto de puntos $\{p_1, \ldots, p_k\}$ en un espacio afín, el *baricentro* (respecto de un punto q) es el punto $B = q + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{qp_i}$. Es muy fácil comprobar que B no depende del punto origen q escogido.

Teorema 2.24. *Las tres medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto, llamado baricentro.*

Demostración: Ya está demostrado. □

Teorema 2.25 (recta de Euler). *En un plano afín euclídeo, el circuncentro, el ortocentro y el baricentro de un mismo triángulo están alineados.*

La recta que los contiene se denomina *recta de Euler* del triángulo.

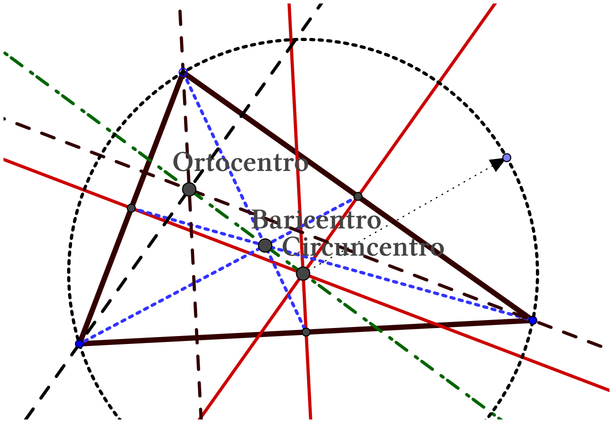


FIGURA 1. La recta de Euler

Demostración: Sabemos que la homotecia $h := h_{g,-1/2}$ de centro el baricentro g y razón $-1/2$ lleva los vértices a, b, c del triángulo a los puntos medios de los lados opuestos a', b', c'. Si $H_a := a + L(v)$, con $v \perp \overrightarrow{bc}$, es la altura que pasa por a, entonces $h(H_a) = a' + L(v)$ es la mediatriz M_{bc} del lado bc. Un razonamiento análogo demuestra que $h(H_b) = M_{ca}$ y que $h(H_c) = M_{ab}$. Tenemos entonces que:

$$h(o) = h(H_a \cap H_b \cap H_c) = M_{bc} \cap M_{ca} \cap M_{ab} = c.$$

Por tanto, g, o, c están alineados. □

Teorema 2.26 (Tales)**.** *Sea A un espacio afín. Se consideran tres hiperplanos P_1, P_2, P_3 paralelos y distintos dos a dos. Sean R y S dos rectas distintas en A (no paralelas a los hiperplanos) que cortan a los hiperplanos en los puntos $\{r_i\} = P_i \cap R$, $\{s_i\} = P_i \cap S$, $i = 1, 2, 3$. Entonces:*

$$\frac{d(s_1, s_2)}{d(s_1, s_3)} = \frac{d(r_1, r_2)}{d(r_1, r_3)}.$$

Demostración: Se construye $f : A \to A$ como la proyección sobre S paralela al hiperplano P_1 (ver los ejemplos de aplicaciones afines: dado $p \in A$, sea P' el único hiperplano $P' = p + \overrightarrow{P}_1$. Como las rectas no son paraleas a los hiperplanos, entonces existe un único punto $\{f(p)\} = P' \cap S$).

Es trivial comprobar que $f(r_i) = s_i$, $i = 1, 2, 3$. Sea λ el único escalar tal que $\overrightarrow{r_1 r_3} = \lambda \overrightarrow{r_1 r_2}$. En particular, $d(r_1, r_3) = |\lambda| d(r_1, r_2)$. Como f es afín, se tiene $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r_1 r_3}) = \overrightarrow{f(r_1) f(r_3)} = \overrightarrow{s_1 s_3}$. Así, $d(s_1, s_3) = d(f(r_1), f(r_3)) = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r_1 r_3})\| = \|\overrightarrow{f}(\lambda \overrightarrow{r_1 r_2})\| = |\lambda| \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{r_1 r_2})\| = |\lambda| \|\overrightarrow{s_1 s_2}\| = |\lambda| d(s_1, s_2)$. Despejando $|\lambda|$ obtenemos la fórmula deseada. □

La versión 2-dimensional de este resultado se atribuye a Tales de Mileto.

2.6. Ejercicios

2.1.– Si $p, q \in A$ son dos puntos de un espacio afín euclídeo, probar que existe una isometría inversa que transforma p en q.

2.2.– Sean $S, S' \subset A$ dos subespacios de la misma dimensión de un espacio afín euclídeo. Probar que existe una isometría $f : A \to A$ tal que $f(S) = S'$.

2.3.–

1. En un espacio afín euclídeo, dados dos puntos distintos p y q, demostrar que existe una única simetría respecto de un hiperplano que lleva uno en el otro.
2. Calcular la única simetría en $\mathbb{R}^3$ que lleva el punto $p = (1, -1, 1)$ al punto $q = (0, -1, 1)$.

2.4.– Decir qué tipo de isometría es:

1. La composición de dos simetrías en $\mathbb{R}^2$.
2. La composición de dos movimentos deslizantes en $\mathbb{R}^2$.
3. La composición de un giro y una simetría en $\mathbb{R}^2$.
4. La composición de un giro y un movimiento deslizante en $\mathbb{R}^2$.

2.5.– Decir qué tipo de isometría es:

1. La composición de dos simetrías en $\mathbb{R}^3$.
2. La composición de dos movimentos deslizantes en $\mathbb{R}^3$.
3. La composición de un giro y una simetría en $\mathbb{R}^3$.
4. La composición de un giro y un movimiento deslizante en $\mathbb{R}^3$.
5. La composición de dos giros.

2.6.– Sea $S \subset A$ un subespacio afín de un espacio afín euclídeo, y sea $p \in A$. Probar que existe un punto $q \in S$ tal que $d(p, q) = d(p, S) = \inf\{d(p, r) : r \in S\}$. (Indicación: tomar $q_0 \in S$ y descomponer el vector $\overrightarrow{q_0 p}$ como suma $v + w$, con $v \in \overrightarrow{S}$ y $w \in (\overrightarrow{S})^\perp$. Probar que $q = q_0 + v$ usando el Teorema de Pitágoras).

2.7.– Probar que la composición de dos simetrías centrales es una traslación.

2.8.– El V Postulado de Euclides: En un plano afín euclídeo A, se consideran tres rectas distintas r, s y t tales que t interseca a r y a s formando dos ángulos α y β cuya suma cumple $\alpha + \beta < \pi$. Demuestra que r y s se cortan en un punto.

2.9.– Demuestra que las siguientes aplicaciones afines son movimientos rígidos del plano y clasifícalas.

1. $f(x, y) = (3 - 3x/5 + 4y/5, 1 - 4x/5 - 3y/5)$.
2. $f(x, y) = (x/2 - \sqrt{3}\,y/2 + 1, \sqrt{3}\,x/2 + y/2 + 2)$.
3. $f(x, y) = (-x/2 + \sqrt{3}\,y/2 + 1, \sqrt{3}\,x/2 + y/2 - 1)$.
4. $f(x, y) = (3x/5 + 4y/5 + 2, 4x/5 - 3y/5 + 5)$.

2.10.– Demuestra que las siguientes aplicaciones son movimientos rígidos del espacio y clasifícalas.

1. $f(x, y, z) = (2 + y, x, 1 + z)$.
2. $f(x, y, z) = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{x - \sqrt{3}y}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}x + y}{2}, z + 1\right)$.

3. $f(x, y, z) = (x/2 + \sqrt{3}\, z/2 + 1, y, -\sqrt{3}\, x/2 + z/2 - 1)$.
4. $f(x, y, z) = (x/2 - \sqrt{3}\, z/2 + 2, y + 2, -\sqrt{3}\, x/2 + z + 2)$.
5. $f(x, y, z) = (-4x/5 + 3z/5 + 3, y, 3x/5 + 4z/5 - 1)$.
6. $f(x, y, z) = (-4x/5 + 3z/5 + 3, y + 4, 3x/5 + 4z/5 - 1)$.
7. $f(x, y, z) = (2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}, \sqrt{5}\, x/3 - 2y/(3\sqrt{5}) + 4z/(3\sqrt{5}), -2x/3 - y/3 + 2z/3)$.
8. $f(x, y, z) = (\sqrt{5}\, x/3 - 2y/(3\sqrt{5}) + 4z/(3\sqrt{5}), 2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}, -2x/3 - y/3 + 2z/3)$
9. $f(x, y, z) = (1 + 2x/3 - 2y/3 + z/3, x/3 + 2y/3 + 2z/3, 1 + 2x/3 + y/3 - 2z/3)$.

2.11.– En un plano afín euclídeo A, se considera un triángulo $T = \{a, b, c\}$. En cada vértice, se define el *ángulo exterior* como el determinado por la recta que define un lado y la semirrecta que define el otro lado (no interior al triángulo). Demuestra que cada ángulo exterior es estrictamente mayor que los dos ángulos internos no adyacentes.

2.12.– Sea $f : A \to A'$ una aplicación afín entre espacios afines euclídeos. Sea $R = \{p_0, \ldots, p_n\}$ un sistema de referencia euclídeo en A. Demostrar que f es una isometría si, y sólo si, $f(R) = \{f(p_0), \ldots, f(p_n)\}$ es un sistema de referencia euclídeo en A'.

Tema 3

Hipercuádricas reales

3.1. Introducción

El matemático griego Apolonio de Perge (Perge, 262 a.C. - Alejandría, 190 a. C.) estudió intensamente las *secciones cónicas*, más conocidas como *cónicas*, en una serie de 8 libros, de los cuales el vol. VIII se ha perdido. El nombre de secciones cónicas proviene de estudiar las curvas que surgen al cortar un cono circular recto con diversos planos. De hecho, se conoce como *Cono de Apolonio* a la figura de un cono con una circunferencia, una elipse, una parábola y una hipérbola.

Posteriormente, una vez que se acepta la tercera dimensión muchos siglos más tarde, aparece el estudio de las *superficies cuádricas*, como las superficies que engloban las soluciones de polinomios de grado dos con tres variables. Joseph-Louis Lagrange (Turín, 25 de enero de 1736 - París 10 de abril de 1813) [bautizado como Giuseppe Lodovico Lagrangia] obtuvo las formas canónicas de las cuádricas en 1793.

Las hipercuádricas aparecen de manera natural si se consideran como el conjunto de los ceros de un polinomio de grado dos de varias variables.

A lo largo de la Historia, las cónicas y las cuádricas han tenido y siguen teniendo muchas aplicaciones artísticas, arquitectónicas, industriales, etc.

3.2. Hipercuádricas

Definición 3.1. En el espacio afín $\mathbb{R}^n$, una hipercuádrica es un subconjunto de la forma

$$C = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0 \right\},$$

donde $M = (m_{ij}) \neq 0_{n\times n}$ es una matriz simétrica, $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Cuando $n = 2$, hablamos de *cónicas*, mientras que si $n = 3$, se les llama simplemente *cuádricas*.

La expresión matricial de una hipercuádrica es

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (1\ x)\bar{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix} = 0 \right\}, \quad \bar{M} = \left(\begin{array}{c|c} b & a_1 \ \dots \ a_n \\ \hline a_1 & \\ \vdots & M \\ a_n & \end{array} \right), \tag{3.1}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : xMx^t + 2xa^t + b = 0 \right\}, \quad a = (a_1, \dots, a_n).$$

Proposición 3.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una biyección afín y C una hipercuádrica. Entonces, $f(C)$ es otra hipercuádrica.*

Demostración: Por el Teorema 1.33, consideremos la expresión matricial de la aplicación inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(y) = x$, $x^t = c^t + Ay^t$, donde $c \in \mathbb{R}^n$ y A es una matriz regular. Así, dado $y \in f(C)$, $f^{-1}(y) = x = c + yA^t \in C$. Sustituyendo en la expresión matricial de C, tenemos

$$\begin{aligned} 0 = xMx^t + 2xa^t + b &= (c + yA^t)M(c^t + Ay^t) + 2(c + yA^t)a^t + b \\ &= yA^tMAy^t + cMc^t + 2cMAy^t + 2ca^t + 2yA^ta^t + b \\ &= yA^tMAy^t + 2y(A^tMc^t + A^ta^t) + 2ca^t + cMc^t + b. \end{aligned}$$

Llamando $\tilde{M} = A^tMA$, $\tilde{a} = A^tMc^t + A^ta^t \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{b} = 2ca^t + cMc^t + b \in \mathbb{R}$, se obtiene el resultado. □

3.3. Clasificación afín de hipercuádricas

Recordemos el Teorema de Sylvester, que sirve para diagonalizar matrices simétricas.

Teorema 3.3 (Sylvester)**.** *Sea M una matriz simétrica de orden n. Entonces, existe una matriz regular P de orden n tal que*

$$P^tMP = \begin{pmatrix} -I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & 0_c \end{pmatrix},$$

donde a es el índice de M, c es la nulidad, y $a + b + c = n$.

Lema 3.4 (Regla de Descartes)**.** *El número de raíces positivas de un polinomio con coeficientes reales es, como máximo, el número de cambios de signo entre sus coeficientes.*

Lema 3.5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación afín. Entonces, existen $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(x)^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline v^t & P \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix}.$$

Demostración: Por el Teorema 1.33, existen $v \in \mathbb{R}^n$ y $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que

$$f(x)^t = v^t + Px^t.$$

De aquí,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(x)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline v^t + Px^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\dots 0 \\ \hline v^t & P \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix}.$$

□

Definición 3.6. Dos hipercuádricas C_1 y C_2 de $\mathbb{R}^n$ se dicen equivalentes si existe una biyección afín $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(C_1) = C_2$.

Lema 3.7. *Toda hipercuádrica C de $\mathbb{R}^n$ es equivalente a otra hipercuádrica cuya matriz asociada es de la forma*

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} b & 0 & \overset{r}{\dots} & 0 & d_{r+1} & \dots & d_n \\ \hline 0 & c_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & & c_r & & & \\ \hline d_{r+1} & & & & 0 & & \\ \vdots & & 0 & & & \ddots & \\ d_n & & & & & & 0 \end{array}\right),$$

donde $d_{r+1}, \dots, d_n, b \in \mathbb{R}$, $c_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, r$.

Demostración: Escribimos la hipercuádrica como en (3.1). Como M es simétrica, por el Teorema 3.3, existe $P \in Gl(n, \mathbb{R})$ tal que $P^t MP = \text{Diagonal}(c_1, \dots, c_r, 0, \dots, 0)$, donde $c_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, r$. Así, por el Lema 3.5, es suficiente calcular

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} b & v \\ \hline v^t & M \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} b & vP \\ \hline P^t v^t & P^t MP \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cccc} b & & vP & & \\ \hline & c_1 & & & 0 \\ P^t v^t & & \ddots & & \\ & & & c_r & \\ & & & & 0_{n-r} \end{array}\right).$$

Si escribimos $vP = (d_1, \dots, d_n)$, se puede escribir la nueva ecuación de la hipercuádrica como

$$0 = b + 2\sum_{i=1}^{n} d_i x_i + \sum_{i=1}^{r} c_i x_i^2.$$

Ahora, dado $i \in \{1, \dots, r\}$, definimos $x_i = y_i - c_i d_i$, y para $i \in \{r+1, \dots, n\}$, $y_i = x_i$. De esta manera,

$$\sum_{i=1}^{r}(2d_i x_i + c_i x_i^2) = \sum_{i=1}^{r}\Big(2d_i(y_i - c_i d_i) + c_i(y_i - c_i d_i)^2\Big) = \sum_{i=1}^{r}\Big(c_i y_i^2 - c_i d_i^2\Big),$$

por lo que la ecuación de la hipercuádrica se reduce a

$$0 = b' + 2\sum_{i=r+1}^{n} d_i y_i + \sum_{i=1}^{r} c_i y_i^2, \tag{3.2}$$

donde $b' = \Big(b - \sum_{i=1}^{r} c_i d_i^2\Big)$.

□

Teorema 3.8. *Toda hipercuádrica es equivalente a otra hipercuádrica cuya matriz es una de las siguientes:*

$$I. \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \hline 0 & c_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & c_r & \\ & & & & 0_{n-r} \end{array}\right) \qquad II. \left(\begin{array}{c|cccc} \mu & 0 & \dots & & 0 \\ \hline 0 & c_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & c_r & \\ & & & & 0_{n-r} \end{array}\right) \mu \neq 0,$$

$$III. \left(\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 0 & \dots & & 0 & -1 \\ \hline 0 & c_1 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & c_r & & 0 \\ & & & & 0_{n-r-1} & \\ \hline -1 & 0 & \dots & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Además, el número de -1 *es menor o igual que el número de* $+1$ *entre las constantes* c_i*.*

Demostración: Por el Lema anterior, la hipercuádrica es equivalente a otra hipercuádrica de ecuación como la de (3.2). De aquí, vamos a ir distinguiendo casos:
Caso I. Si $b' = d_{r+1}, \dots, d_n = 0$, tenemos el primer caso.
Caso II. Si $d_{r+1}, \dots, d_n = 0 \neq b'$, tenemos el segundo caso.
Caso III. Existe un $d_i \neq 0$. Podemos suponer sin perder generalidad que $d_n \neq 0$. En otro caso, realizamos una permuación de las variables.Definimos entonces la aplicación afín $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h(z_1, \dots, z_n) = (y_1, \dots, y_n)$ mediante las ecuaciones

$$y_j = z_j,\ j = 1, \dots, n-1, \quad y_n = -\frac{1}{d_n}\left(\frac{b'}{2} + \sum_{i=r+1}^{n-1} d_i z_i + z_n\right).$$

Es claro que esto define una biyección afín en $\mathbb{R}^n$. Sustituyendo en (3.2), obtenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{r} c_i z_i^2 - 2z_n.$$

Además, si el número de -1 es mayor que el número de $+1$ entre las constantes c_i, cambiamos el signo de la equación y consideramos $-z_n$ en vez de z_n.

□

Llamemos $r = \text{rango}(M)$, $R = \text{rango}(\tilde{M})$, $s =$número de $+1$ menos el número de -1 de M. Sea $S =$número de $+1$ menos el número de -1 de $\tilde{M}$.

El caso I. se da cuando $r = R$; el caso II. aparece cuando $R = r + 1$ y el caso III. cuando $R = r + 2$.

En el caso I. se tiene $|s| = |S|$; en el caso II. se cumple $|S| = |s| + 1$ y en el caso III., se tiene $|S| = |s|$.

3.4. Determinación de cónicas

Teorema 3.9. *Sea C una cónica de $\mathbb{R}^2$, con sus invariantes r, R, s y S. Entonces, C es equivalente a una de las siguientes:*

Tipo	(r,R)	$(\lvert s\rvert,\lvert S\rvert)$	*Matriz*	*Ecuación*	*Nombre*
I	$(1,1)$	$(1,1)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & & \\ \hline & 1 & \\ & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 = 0$	*Recta doble*
II	$(1,2)$	$(1,2)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 + 1 = 0$	*Vacío*
III	$(1,2)$	$(1,0)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} -1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 - 1 = 0$	*Par de rectas paralelas*
IV	$(1,3)$	$(1,1)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & & -1 \\ \hline & 1 & \\ -1 & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 - 2y = 0$	*Parábola*
V	$(2,2)$	$(2,2)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & & \\ \hline & 1 & \\ & & 1 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 = 0$	*Punto*
VI	$(2,2)$	$(0,0)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & & \\ \hline & 1 & \\ & & -1 \end{array}\right)$	$x^2 - y^2 = 0$	*Par de rectas secantes*
VII	$(2,3)$	$(2,3)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & 1 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	*Vacío*
VIII	$(2,3)$	$(2,1)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} -1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & 1 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	*Elipse*
IX	$(2,3)$	$(0,1)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} \pm 1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & -1 \end{array}\right)$	$x^2 - y^2 \pm 1 = 0$	*hipérbola*

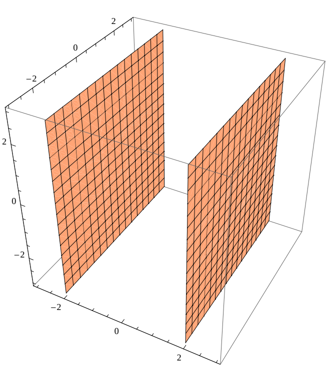
3.5. Determinación de cuádricas

Teorema 3.10. *Sea C una cuádrica de $\mathbb{R}^3$, con sus invariantes r, R, s y S. Entonces, C es equivalente a una de las siguientes:*

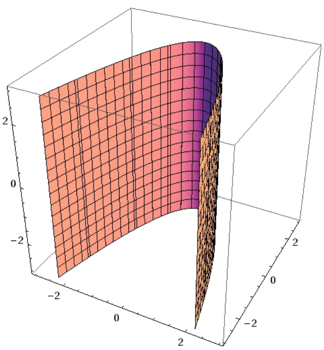
Tipo	(r,R)	$(\lvert s\rvert,\lvert S\rvert)$	*Matriz*	*Ecuación*	*Nombre*
I	$(1,1)$	$(1,1)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 = 0$	*Plano doble*
II	$(1,2)$	$(1,2)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 + 1 = 0$	*Vacío*
III	$(1,2)$	$(1,0)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} -1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 - 1 = 0$	*Par de planos paralelos*

Tipo	(r, R)	$(\lvert s\rvert, \lvert S\rvert)$	*Matriz*	*Ecuación*	*Nombre*
IV	$(1,3)$	$(1,1)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & -1 \\ \hline & 1 & & \\ & & 0 & \\ -1 & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 - 2z = 0$	*Cilindro parabólico*
V	$(2,2)$	$(2,2)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 = 0$	*Recta*
VI	$(2,2)$	$(0,0)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 - y^2 = 0$	*Par de planos secantes*
VII	$(2,3)$	$(2,3)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	*Vacío*
VIII	$(2,3)$	$(2,1)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} -1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	*Cilindro elíptico*
IX	$(2,3)$	$(0,1)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} \pm 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 - y^2 \pm 1 = 0$	*Cilindro hiperbólico*
X	$(2,4)$	$(2,2)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & -1 \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ -1 & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 - 2z = 0$	*Paraboloide elíptico*
XI	$(2,4)$	$(0,0)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & -1 \\ \hline & 1 & & \\ & & -1 & \\ -1 & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2 - y^2 - 2z = 0$	*Paraboloide hiperbólico*
XII	$(3,3)$	$(3,3)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	*Punto*
XIII	$(3,3)$	$(1,1)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	*Cono*
XIV	$(3,4)$	$(3,4)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	*Vacío*

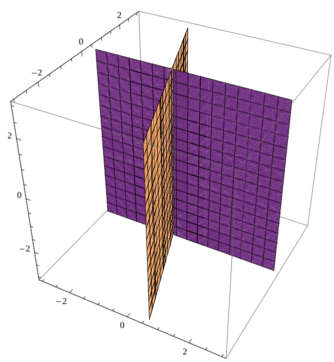
Tipo	(r, R)	$(\lvert s\rvert, \lvert S\rvert)$	*Matriz*	*Ecuación*	*Nombre*
XV	$(3, 4)$	$(3, 2)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} -1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	*Elipsoide*
XVI	$(3, 4)$	$(1, 2)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	*hiperboloide de 2 hojas*
XVII	$(3, 4)$	$(1, 0)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} -1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	*hiperboloide de 1 hoja*



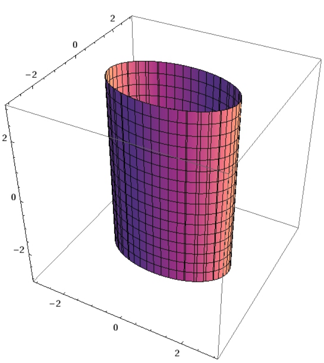
III. Planos paralelos



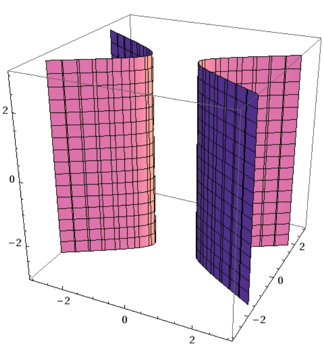
IV. Cilindro parabólico



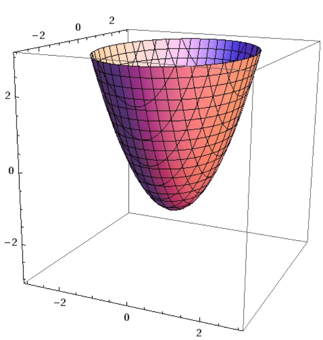
VI. Planos secantes



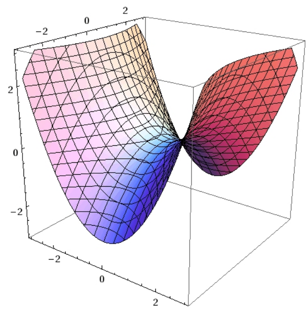
VIII Cilindro elíptico



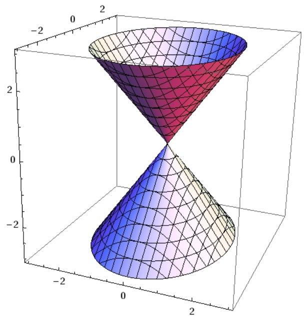
IX Cilindo hiperbólico



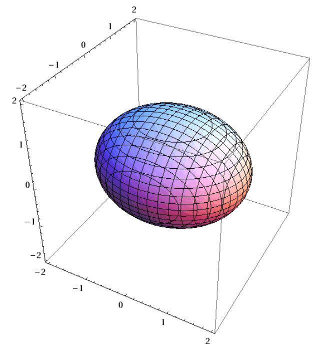
X. Paraboloide elíptico



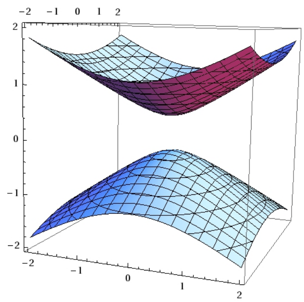
XI. paraboloide hiperbólico



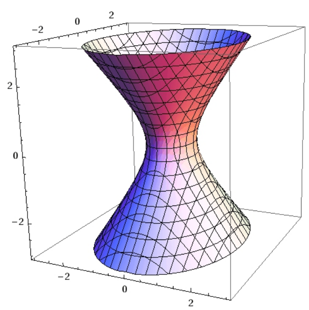
XIII. Cono



XV. Elipsoide



XVI. Hiperboloide de 2 hojas



XVII. Hiperboloide de 1 hoja.

3.6. Ejercicios

3.1.– Sean $\subset \mathbb{R}^n$ una hipercuádrica y $L \subset \mathbb{R}^n$ una recta afín. Demostrar que $L \cap S$ es uno de los siguientes casos: o bien vacío, o bien un punto, o bien consiste en dos puntos, o bien $L \cap S = L$. (Indicación: considerar una aplicación afín que lleva L en la recta $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_2 = \cdots = x_n = 0\}$.

3.2.– Probar que, por cada punto del hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ pasa al menos una recta.

3.3.– Dar un ejemplo de una hipercuádrica que no sea unión de hiperplanos afines y que contenga rectas afines.

3.4.– ¿Contiene alguna recta el paraboloide hiperbólico $x^2 - y^2 - 2z = 0$?

3.5.– Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una hipercuádrica de $\mathbb{R}^n$ y $S \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio afín. Probar que:

1. $S \cap C$ es vacío, o bien
2. $S \subset C$, o bien
3. $S \cap C$ es una hipercuádrica de S (identificando S con $\mathbb{R}^k$, $k = \dim(S)$).

3.6.– Clasificar afínmente la hipercuádrica de $\mathbb{R}^4$ de ecuación

$$2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 1 = 0.$$

3.7.– Clasificar afínmente las siguientes cónicas:

1. $2x^2 - y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$.
2. $x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$.
3. $2x^2 + xy + y^2 - x + y = 0$.
4. $-x^2 - xy - y^2 - x - y - 1 = 0$.
5. $-x^2 - xy - y^2 - x - y + 1 = 0$.

3.8.– Clasificar afínmente las siguientes cuádricas:

1. $2x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 2x - 2y + 1 = 0$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 3x + 4y + z - 1 = 0$.
3. $2x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$.
4. $2x^2 + y^2 - z^2 - 2z = 0$.
5. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 0$.

3.9.– Clasificar afínmente las cónicas que se obtienen al cortar el cono de ecuación $x^2+y^2 = z^2$ con un plano arbitrario $ax + by + cz + d = 0$.

3.10.– Encontrar una transformación afín que lleve la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - x - y + 1 = 0$$

en su forma reducida.

3.11.– ¿Qué hipercuádricas son invariantes por homotecias de centro 0 y razón arbitraria?

3.12.– En $\mathbb{R}^2$, demuestra que el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias a dos puntos F_1 y F_2, llamados *focos*, es constante, es una elipse.

3.13.– En $\mathbb{R}^2$, demuestra que el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de las distancias a dos puntos distintos F_1 y F_2, llamados *focos*, es constante, es una hipérbola.

3.14.– En $\mathbb{R}^2$, demuestra que el lugar geométrico de los puntos tales que la distancia a un punto F, llamado *foco*, y la distancia a una recta afín r con $F \notin r$, llamada *directriz*, son iguales, es una parábola.

3.15.– En $\mathbb{R}^2$, demuestra que toda hipérbola admite dos rectas, llamadas *asíntotas*, tales que la distancia de un punto de la hipérbola a una de las rectas se puede hacer tan pequeña como se quiera.

3.16.– En $\mathbb{R}^3$, se considera una recta r, un semiplano π cuyo borde es la recta r y una figura $\mathcal{F}$ contenida en el semiplano π. La figura de revolución de $\mathcal{F}$ alrededor de r consiste en la figura obtenida al actuar sobre $\mathcal{F}$ todos los giros del mismo eje r y ángulo arbitrario θ.

Consideremos el eje $r = OZ$ como recta de revolución. demuestra:

(a) La figura de revolución de una recta paralela a r es un cilindro.
(b) La figura de revolución de una recta secante a r es un cono.
(c) La figura de revolución de media parábola que corta al eje r perpendicularmente en su vértice es un paraboloide.
(d) La figura de revolución de media elipse que toca perpendicularmente a r es un elipsoide.
(e) La figura de revolución de media rama de hipérbola que toca perpendicularmente a r es una hoja de un hiperboloide elíptico (de dos hojas).
(f) La figura de revolución de una rama de hipérbola con eje perpendicular a r es un hiperboloide de una hoja

Tema 4

El espacio proyectivo

4.1. Definición de espacio proyectivo

A lo largo de este capítulo, E será un espacio vectorial real de dimensión $n \geqslant 2$. Denotaremos por E^* al conjunto $E \setminus \{0\}$.

Definición 4.1. El *espacio proyectivo* asociado a E es el conjunto cociente $P(E) = E^*/\sim$, donde la relación de equivalencia $\sim$ está definida por:

$$u \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } u = \lambda v.$$

La *aplicación proyección* $\pi : E^* \to P(E)$ es la que asocia a cada vector $v \in E^*$ su clase de equivalencia. La *dimensión* de $P(E)$ es $\dim(E) - 1$.

Nota 4.2. El espacio proyectivo asociado a E se identifica con el conjunto de rectas vectoriales de E.

Ejemplo 4.3. Si $E = \mathbb{R}^n$, el espacio proyectivo $P(\mathbb{R}^n)$ se denotará por $\mathbb{P}^{n-1}$. Consideramos la esfera unidad $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$, donde $||x||$ es la norma euclídea de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dada por $||x|| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Si consideramos la relación de equivalencia R en $\mathbb{S}^{n-1}$ que identifica cada punto $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ con su punto antípoda $-p$, es fácil ver que existe una biyección entre los espacios $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\sim$ y $\mathbb{S}^{n-1}/R$. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}$ puede entonces identificarse con el cociente de la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ por la aplicación antípoda. En particular, $\mathbb{P}^1$ se puede identificar con la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Si dotamos a los espacios anteriores de la topología cociente natural, las aplicaciones anteriores son homeomorfismos. En particular, los espacios proyectivos son compactos por ser cocientes de la esfera.

Definición 4.4. Un subconjunto $X \subset P(E)$ es una *variedad proyectiva* si $\hat{X} := \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ es un subespacio vectorial de E. La *dimensión* de X se define por la igualdad:

$$\dim(X) = \dim(\hat{X}) - 1.$$

Si $\dim(X) = 1$, diremos que X es una *recta proyectiva*. Un *plano proyectivo* es una variedad proyectiva de dimensión 2. Si $\dim(X) = \dim(P(E)) - 1$, diremos que X es un *hiperplano proyectivo*.

Puesto que $\pi^{-1}(P(E)) \cup \{0\} = E$, el conjunto $P(E)$ es una variedad proyectiva de dimensión $\dim(E) - 1$. Como la aplicación π es sobreyectiva, se tiene que $\pi(\hat{X} \setminus \{0\}) = X$ para cualquier conjunto $X \subset P(E)$. En consecuencia, cualquier variedad proyectiva es la imagen por π de un subespacio vectorial de E.

Las propiedades básicas de la dimensión de un subespacio vectorial se trasladan a propiedades de la dimensión de una variedad proyectiva. En particular, si $X \subset Y \subset P(E)$ son variedades proyectivas, se tiene que $\hat{X} \subset \hat{Y} \subset E$ y, por tanto, $\dim(X) \leqslant \dim(Y)$. Si además $\dim(X) = \dim(Y)$, entonces $\hat{X} = \hat{Y}$ y se tiene que $X = Y$.

Se suele considerar el conjunto vacío como una variedad proyectiva de dimensión -1.

Proposición 4.5. *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios proyectivos de $P(E)$. Entonces, o bien, $\cap_{i\in I} X_i = \emptyset$, o bien $\cap_{i\in I} X_i$ es una variedad proyectiva y $\widehat{\cap_{i\in I} X_i} = \cap_{i\in I} \hat{X}_i$.*

Demostración: Por definición, $e \in \widehat{\cap_{i\in I} X_i} \setminus \{0\} = \pi^{-1}(\cap_{i\in I} X_i)$ si sólo si $\pi(e) \in \cap_{i\in I} X_i$. Esta condición es equivalente a que $\pi(e) \in X_i$ para todo $i \in I$ y, por tanto, a que $e \in (\cap_{i\in I} \hat{X}_i) \setminus \{0\}$. □

Nota 4.6. Si $X_i \subset P(E)$ son variedades proyectivas, la condición $\cap_i X_i = \emptyset$ es equivalente a que $\cap_i \hat{X}_i = \{0\}$. En particular, $X \cap Y = \emptyset$ si y sólo si $\hat{X} \cap \hat{Y} = \{0\}$.

Existe una fórmula de las dimensiones asociada a la intersección y a la *variedad proyectiva generada por* $X \cup Y$.

Definición 4.7. Si $S \subset P(E)$ es un subconjunto no vacío, la *variedad proyectiva generada por* S, $V(S)$, es la intersección de todas las variedades proyectivas que contienen a S.

Nota 4.8. $V(S)$ es una variedad proyectiva por la Proposición 4.5.

Una propiedad importante es la siguiente:

Proposición 4.9. *Si $X, Y \subset P(E)$ son variedades proyectivas, entonces:*

$$\widehat{V(X \cup Y)} = \hat{X} + \hat{Y}. \tag{4.1}$$

Demostración: Sabemos que:

$$\widehat{V(X \cup Y)} \setminus \{0\} = \pi^{-1}\Big(\bigcap_{Z\in\mathcal{F}} Z\Big) = \bigcap_{Z\in\mathcal{F}} \hat{Z} \setminus \{0\},$$

donde $\mathcal{F}$ es el conjunto de las variedades proyectivas que contienen a $X \cup Y$. Por otra parte:

$$\hat{X} + \hat{Y} = \bigcap_{U\in\mathcal{G}} U,$$

donde $\mathcal{G}$ es el conjunto de subespacios vectoriales que contienen a $\hat{X} \cup \hat{Y}$.

Es fácil ver que $X \cup Y \subset Z$ si y sólo si $\hat{X} \cup \hat{Y} \subset \hat{Z}$. Es decir, $P \in \mathcal{F}$ si y sólo si $\hat{P} \in \mathcal{G}$. Esto es suficiente para probar la igualdad (4.1). □

Un consecuencia immediata de la fórmula (4.1) es la fórmula de las dimensiones:

Teorema 4.10 (Fórmula de las dimensiones)**.** *Sean $X, Y \subset P(E)$ variedades proyectivas. Entonces:*

$$\dim\, V(X \cup Y) + \dim\, X \cap Y = \dim\, X + \dim\, Y. \tag{4.2}$$

En caso de que $X \cap Y = \emptyset$, se considera $\dim\, X \cap Y = -1$.

Demostración: Utilizamos que $\widehat{V(X \cup Y)} = \hat{X} + \hat{Y}$, que $\widehat{X \cap Y} = \hat{X} \cap \hat{Y}$, y que $\dim\, Z = \dim\, \hat{Z} - 1$ para cualquier variedad proyectiva $Z \subset P(E)$. Usando la fórmula de las dimensiones para subespacios vectoriales en E, obtenemos:

$$\dim\,(\hat{X} + \hat{Y}) + \dim\,(\hat{X} \cap \hat{Y}) = \dim\, \hat{X} + \dim\, \hat{Y}.$$

Teniendo en cuenta las primeras observaciones y el hecho de que $X \cap Y = \emptyset$ si y sólo si $\hat{X} \cap \hat{Y} = \{0\}$, obtenemos la fórmula (4.2). □

Nota 4.11. Si $P(E)$ es un espacio proyectivo de dimensión dos, y $X, Y \subset P(E)$ son dos rectas proyectivas, entonces $\dim\, V(X \cup Y) \leqslant 2$ y la ecuación (4.2) implica:

$$2 + \dim\, X \cap Y \geqslant 1 + 1,$$

Por tanto $\dim\, X \cap Y \geqslant 0$ y la intersección $X \cap Y \neq \emptyset$. Es decir, *en un plano proyectivo dos rectas proyectivas siempre se cortan.* Esto proporciona un ejemplo de geometría no-euclídea. Por supuesto, esta propiedad está relacionada con el hecho de que en un espacio vectorial de dimensión tres, dos planos vectoriales siempre se cortan en un subespacio vectorial de dimensión mayor o igual que uno. En espacios proyectivos de dimensión mayor o igual que tres siempre pueden encontrarse pares de rectas proyectivas con intersección vacía.

4.2. Coordenadas homogéneas

Sea $P(E)$ el espacio proyectivo sobre un espacio vectorial real E de dimensión n. Supongamos que $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E. Dado $p \in P(E)$, el conjunto $\pi^{-1}(\{p\}) \cup \{0\}$ es una recta vectorial $L_p \subset E$. Las *coordenadas homogéneas de p* asociadas a la base B son las coordenadas de cualquier vector en $L_p \setminus \{0\}$. Dichas coordenadas están determinadas salvo un escalar no nulo. Si $L_p = L(v)$, y $v_B = (x_1, \ldots, x_n)$, las coordenadas homogéneas de p en la base B se denotan por:

$$(x_0 : \ldots : x_{n-1}).$$

Por definición $(x_0 : \ldots : x_{n-1}) = (\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_{n-1})$ para todo escalar $\lambda \neq 0$.

En el caso $E = \mathbb{R}^n$, las coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^{n-1}$, salvo que se indique expresamente lo contrario, se tomarán con respecto a la base usual de $\mathbb{R}^n$.

Dada una variedad proyectiva $X \subset P(E)$, las *ecuaciones implícitas* de X con respecto a la base B son las ecuaciones implícitas de $\hat{X}$ en la base B.

Ejemplo 4.12. En $\mathbb{P}^2$, calculamos las ecuaciones implícitas en coordenadas homogéneas de la recta que pasa por los puntos de coordenadas $p = (1 : 0 : -1)$, $q = (0 : 1 : 1)$. Los puntos $X = \{p\}$ y $Y = \{q\}$ son variedades proyectivas de dimensión 0, y la recta que pasa por dichos puntos es la variedad proyectiva $V(X \cup Y)$. Los subespacios $\hat{X}$, $\hat{Y}$ son las rectas vectoriales $L((1, 0, -1))$, $L((0, 1, 1))$ respectivamente. Como $\widehat{V(X \cup Y)} = \hat{X} + \hat{Y}$, tenemos que las ecuaciones implícitas de la recta $V(X \cup Y)$ son las ecuaciones implícitas del plano de $\mathbb{R}^3$

que pasa por los puntos $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$. En este caso sólo tenemos una ecuación dada por:

$$0 = \det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = x_0 - x_1 + x_2.$$

4.3. Proyectividades

Sean E, E' dos espacios vectoriales reales, y $P(E)$, $P(E')$ los espacios proyectivos asociados. Supongamos que $\hat{f} : E \to E'$ es una aplicación lineal *inyectiva*. Si $u, v \in E^*$, y $u = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\hat{f}(u), \hat{f}(v) \in (E')^*$ y se tiene $\hat{f}(u) = \lambda \hat{f}(v)$. Esto implica que existe una aplicación inducida $f : P(E) \to P(E')$, que es inyectiva.

Sean $\pi_E : E^* \to P(E)$, $\pi_{E'} : (E')^* \to P(E')$ las proyecciones asociadas.

Definición 4.13. Diremos que una aplicación $f : P(E) \to P(E')$ es una *proyectividad* si existe una aplicación $\hat{f} : E \to E'$ lineal e inyectiva tal que $\pi_{E'} \circ \hat{f}|_{E^*} = f \circ \pi_E$. La aplicación $\hat{f}$ es una aplicación lineal *asociada* a $\hat{f}$.

Proposición 4.14. *La aplicación lineal asociada a una proyectividad es única salvo multiplicación por un escalar no nulo.*

Demostración: Dada una proyectividad $f : P(E) \to P(E')$, supongamos $\hat{f}_1, \hat{f}_2 : E \to E'$ aplicaciones lineales inyectivas tales que $\pi_{E'} \circ (\hat{f}_i)|_{E^*} = f \circ \pi_E$, $i = 1, 2$. Es decir, para cada $e \in E$, $e \neq 0$, se tiene $f[e] = [\hat{f}_i(e)]$, $i = 1, 2$. En particular, para cada $e \in E$, existe $\lambda_e \in \mathbb{R}$, $\lambda_e \neq 0$, tal que $\hat{f}_2(e) = \lambda_e \hat{f}_1(e)$. Si escogemos ahora $v, e \in E$ linealmente independientes, se obtiene

$$\lambda_{e+v}\left(\hat{f}_1(e) + \hat{f}_1(v)\right) = \lambda_{e+v}\hat{f}_1(e+v) = \hat{f}_2(e+v) = \hat{f}_2(e) + \hat{f}_2(v) = \lambda_e \hat{f}_1(e) + \lambda_v \hat{f}_1(v).$$

Pero por ser $\hat{f}_1$ inyectiva, $\hat{f}_1(e)$ y $\hat{f}_1(v)$ también son linealmente independientes. De la igualdad anterior se deduce entonces $\lambda_{e+v} = \lambda_e = \lambda_v$. Repitiendo el argumento para una base de E, se obtiene que existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $\hat{f}_2 = \lambda \hat{f}_1$. □

Proposición 4.15. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Toda proyectividad es inyectiva.*
2. $\mathrm{Id}_{P(E)}$ *es una proyectividad.*
3. *La composición de proyectividades es una proyectividad.*
4. *Si una aplicación lineal asociada es biyectiva, la proyectividad es biyectiva.*
5. *Si X es una variedad proyectiva de $P(E)$ y $f : P(E) \to P(E')$ es una proyectividad, entonces $f(X)$ es una variedad proyectiva de $P(E')$. Además se tiene que $\widehat{f(X)} = \hat{f}(\hat{X})$.*

Definición 4.16. Una *homografía* es una proyectividad biyectiva.

4.4. Geometría afín y geometría proyectiva

Sea $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ la proyección natural sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Consideremos también la aplicación $\mathbf{i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $\mathbf{i}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 1)$.

Componiendo ambas, obtenemos $F := \pi \circ \mathbf{i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n$. La expresión analítica de F es

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 : \ldots : x_n : 1).$$

Al complemento de la imagen de la aplicación F lo denotaremos por $H_\infty := \mathbb{P}^n \setminus F(\mathbb{R}^n)$.

Se tienen entonces las siguientes propiedades:

Proposición 4.17.

1. *F es inyectiva.*
2. *$H_\infty := \mathbb{P}^n \setminus F(\mathbb{R}^n)$ es un hiperplano proyectivo.*
3. *Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio afín de dimensión k, entonces existe una variedad proyectiva X de $\mathbb{P}^n$ de dimensión k tal que $F(S) = X \setminus (X \cap H_\infty)$. Además* $\dim(X \cap H_\infty) = k - 1$.

Demostración: 1. Si $F(x_1, \ldots, x_n) = F(y_1, \ldots, y_n)$, entonces $(x_1 : \ldots : x_n : 1) = (y_1 : \ldots : y_n : 1)$. Esto implica la existencia de $\lambda \neq 0$ tal que $(y_1, \ldots, y_n, 1) = \lambda(x_1, \ldots, x_n, 1)$. En consecuencia, $\lambda = 1$ y $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$.

2. Consideramos un punto en $\mathbb{P}^n$ de coordenadas homogéneas $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$. Es fácil ver que $(x_1 : \ldots : x_{n+1}) \in F(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $x_{n+1} \neq 0$. Por tanto, el conjunto $\mathbb{P}^n \setminus F(\mathbb{R}^n)$ es el hiperplano proyectivo de ecuación $x_{n+1} = 0$.

3. Sea $S = p + \vec{S} \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio afín de dimensión k, y sea $v_1, \ldots, v_k$ una base de $\vec{S}$. El conjunto $F(S)$ es

$$F(S) = \pi \left\{ \left(p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, 1 \right) : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\},$$

de modo que

$$\pi^{-1}(F(S)) = \left\{ \lambda\,(p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, 1) : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \right\}.$$

Este conjunto está contenido en el subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^{n+1}$ generado por los vectores linealmente independientes $(p, 1), (v_1, 0), \ldots, (v_k, 0)$. En consecuencia, $F(S)$ está contenido en la variedad proyectiva $X := \pi(U^*) \subset \mathbb{P}^n$ de dimensión k. Además, es fácil comprobar que

$$X \cap H_\infty = \pi\Big(L((v_1, 0), \ldots, (v_k, 0))^* \Big)$$

es una variedad proyectiva de dimensión $k - 1$. □

Nota 4.18. La aplicación $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n$ es el embebimiento canónico del espacio afín $\mathbb{R}^n$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Al complemento de la imagen $H_\infty = \mathbb{P}^n \setminus F(\mathbb{R}^n)$ se le denomina el *hiperplano del infinito*. Si $n = 2$, H_∞ es la *recta del infinito*.

Nota 4.19. Sean R, S dos rectas afines en $\mathbb{R}^2$, y X, Y las rectas proyectivas que contienen a $F(R), F(S)$, respectivamente. Sabemos que X, Y se cortan al menos en un punto. Es fácil comprobar que $R = \hat{X} \cap \{x_3 = 1\}$, $S = \hat{S} \cap \{x_3 = 1\}$. Si $X = Y$, entonces $\hat{X} = \hat{Y}$ y $R = S$. Si $X \cap Y = \{p\}$ y $p \notin H_\infty$, entonces R, S se cortan en un punto. Si $p \in H_\infty$, entonces R, S no se cortan y son paralelas. Concluimos que las rectas paralelas de $\mathbb{R}^2$ son aquellas cuyas extensiones al espacio proyectivo utilizando el embebimiento canónico son rectas que se cortan en la recta del infinito.

4.5. Ejercicios

4.1.– Dar un ejemplo de dos rectas proyectivas en un espacio proyectivo de dimensión mayor o igual que tres que no se cortan.

4.2.– Calcular la ecuación de la recta proyectiva de $\mathbb{P}^2$ que pasa por los puntos $(0 : 1 : 0)$ y $(1 : 1 : 1)$.

4.3.– Calcular las ecuaciones de la recta proyectiva de $\mathbb{P}^3$ que pasa por los puntos $(0 : 1 : 0 : 1)$ y $(1 : 1 : 1 : 0)$.

4.4.– Consideramos la variedad proyectiva de $\mathbb{P}^3$ de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -x_0 - x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

y la recta que pasa por los puntos $(1 : -1 : 1 : -1)$ y $(0 : 0 : a : 1)$. Calcular, en función de $a \in \mathbb{R}$, la intersección de ambas variedades proyectivas y la variedad suma.

4.5.– Calcular las ecuaciones de todas las proyectividades $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tales que $f((1 : 1 : 0)) = (0 : 1 : 1)$, $f((0 : 1 : 1)) = (1 : 0 : 1)$ y $f((1 : 0 : 1)) = (1 : 1 : 0)$.

4.6.– ¿Cómo definirías el punto medio de dos puntos dados en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$?

4.7.– Dados dos puntos distintos p y q de un espacio proyectivo $P(E)$, demostrar que existe una única recta proyectiva de $P(E)$ que pasa por ambos.

4.8.– En un espacio proyectivo se consideran una recta proyectiva r y un hiperplano proyectivo H. Demostrar que o bien $r \subset H$ o bien $r \cap H$ es un único punto.

4.9.– Se considera un espacio proyectivo $P(E)$ y dos variedades proyectivas H_1 y H_2 tales que $\dim H_1 = \dim H_2 < dimP(E)$. Demostrar que existe una homografía $f : P(E) \to P(E)$ tal que $f(H_1) = H_2$.