geo3.pdf

Apuntes profesor

TEMA 1: ESPACIOS AFINES

Definición: un $\boxed{\text{espacio afín}}$ es un par (A,V) formado por un conjunto de puntos $A\neq\emptyset$ y un espacio vectorial V tal que existe una aplicación

$A\times A \to V$
$(p,q)\mapsto \vec{pq}$ que verifica:

1. $\boxed{\vec{pq}+\vec{qr}=\vec{pr}}$ $\forall p,q,r\in A$.
2. $\boxed{\text{Si } \vec{pq}=\vec{pr} \Rightarrow q=r}$ $\forall p,q,r\in A$.
3. Si $\boxed{p\in A}$ y $\boxed{v\in V}$, existe $\boxed{q\in A}$ tal que $\boxed{\vec{pq}=v}$.

Para recordar las propiedades 2 y 3. Fijamos $p\in A$ y definimos $F_p: A\to V$ $F_p(q)=\vec{pq}$

- A2. es equivalente a que F_p sea inyectiva

  $F_p(q)=F_p(r)\Rightarrow q=r$
  $\vec{pq}=\vec{pr}\Rightarrow q=r$

- A3 es equivalente a que F_p sea sobreyectiva

  $\forall v\in V\ \exists q\in A:\ F_p(q)=v$ $\quad \vec{pq}=v$

$\boxed{\text{2 y 3 son equivalentes a que } F_p \text{ sea biyectiva } \forall p\in A.}$

$\boxed{V\equiv\text{espacio de direcciones}}$ de A, se denota por $\boxed{\vec{A}}$

Dados $p,q\in A$, $\vec{pq}$ el vector determinado por p y $q \Rightarrow$ $\boxed{p\equiv\text{origen de } \vec{pq}}$ $\boxed{q\equiv\text{extremo de } \vec{pq}}$

Supondremos que $\dim V<+\infty \Rightarrow$ definimos $\dim(A)=\dim(V)=\dim_K(V)$.

Propiedades:

1. $\boxed{\vec{pp}=0}$ $\forall p\in A$
2. $\boxed{\vec{qp}=-\vec{pq}}$ $\forall p,q\in A$
3. $\boxed{\vec{pq}=\vec{p_1q_1}\Rightarrow \vec{pp_1}=\vec{qq_1}}$ $\forall p,q,p_1,q_1\in A$
4. $\boxed{\vec{pq}=0\Rightarrow p=q}$ $\forall p,q\in A$
5. Si $p\in A$, la aplicación $\boxed{F_p}: A\to\vec{A}$ definida por $F_p(q)=\vec{pq}$ $\boxed{\text{es biyectiva.}}$

*Los elementos de A no se pueden sumar!!!

Definición: Si A es un espacio afín, $p \in A$ $v \in \vec{A}$ se define la suma de p y v y se denota por $p+v$ como el único punto $q \in A$ tal que $\vec{pq} = v$.

Sabemos que ese q existe y es único porque F_p es biyectiva $\Rightarrow$ dado $v \in V$ $\exists! q \in A$: $F_p(q) = v = \vec{pq}$

$\boxed{q = p+v \iff v = \vec{pq}}$

$\boxed{q = p + \vec{pq}}$

$\boxed{\overrightarrow{p(p+v)} = v}$

Propiedades.

1. $\boxed{p+0 = p}$ $\quad \forall p \in A$
2. $\boxed{p+(u+v) = (p+u)+v}$ $\quad \forall p \in A$ $\forall u,v \in V$
3. Fijado $\boxed{p \in A}$, la aplicación $g_p: \vec{A} \to A$ definida por $\boxed{g_p(v) = p+v}$ es biyectiva.
4. $p \in A$ $u,v \in \vec{A}$ $\quad \boxed{q = p+u}$ $\boxed{r = p+v}$ $\Rightarrow$ $\boxed{u + \vec{qr} = v}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{qr} = v-u}$

Definición: Sea A un espacio afín, $v \in \vec{A}$ se define la traslación de vector v como la aplicación $t_v: A \to A$ $\quad t_v(p) = p+v$.

Propiedades.

1. $\boxed{t_0 = Id_A}$
2. $\boxed{t_v \circ t_w = t_{v+w} = t_{w+v} = t_w \circ t_v}$ $\quad \forall v,w \in \vec{A}$
3. $\boxed{(t_v)^{-1} = t_{-v}}$ $\quad \forall v \in \vec{A}$
4. $\boxed{\{t_v : v \in \vec{A}\}}$ es un subgrupo conmutativo con respecto a la composición de aplicaciones.

Subespacios afines.

Definición: $S \subset A (\neq \emptyset)$ es un subespacio afín de A si $\exists p \in A$, $F \subset \vec{A}$ subespacio vectorial tal que $S = \{p+v : v \in F\}$ $\boxed{(S = p+F)}$

El subespacio vectorial asociado al subespacio afín es único.

Propiedades: Sea $S = p + F \subset A$ un subespacio afín

1. $\boxed{F = \{\vec{pq} : q \in S\}}$
2. $\boxed{F = \{\vec{rq} : r, q \in S\}}$
3. $\boxed{S = q + F \quad \forall q \in S}$

- Si $\boxed{S = p + F = q + F_1 \Rightarrow F = F_1}$
- Si $S = p + F$, F es único, p no lo es

$\boxed{p \in S}$ $(p = p + 0)$

$S = p + F$ subespacio afín de $A \Rightarrow F$ es el subespacio de direcciones de S y se denota por $\vec{S}$ $\quad S = p + \vec{S} \quad$ $\boxed{\vec{S} = \{\vec{qr} : q, r \in S\}}$

$\boxed{\dim(S) = \dim(\vec{S})}$.

1. Cuando $\dim(S) = 1$ diremos que S es una recta afín.
2. Cuando $\dim(S) = 2$ diremos que S es un plano afín.
3. Cuando $\dim(S) = \dim(A) - 1$ diremos que S es un hiperplano afín.

* $\vec{S} = \{0\} \Rightarrow p + \vec{S} = \{p + 0\} = \{p\} \Rightarrow$ los puntos en un espacio afín, son subespacios afines de dimensión 0.

* S_1, S_2 subespacios afines, $S_1 \cap S_2$ puede ser ϕ.

Definición: Sea A un plano afín real, una colección $T = \{a, b, c\}$ de tres puntos es un triángulo si a, b, c no están alineados (no existe ninguna recta afín que los contenga).

a, b, c son los vértices del triángulo

Si $T = \{a, b, c\}$ es triángulo $\Rightarrow \{\vec{ab}, \vec{ac}\}$ son linealmente independientes $\Rightarrow$ son base de $\vec{A}$.

Propiedad: sean $p, q \in A$ $p \neq q$ entonces existe una única recta afín que contiene a p, q. dicha recta es $p + L(\vec{pq})$

Proposición: $\boxed{\{S_i\}_{i\in I}}$ familia de subespacios afines, entonces o bien $\boxed{\bigcap_{i\in I} S_i = \emptyset}$ o $\bigcap_{i\in I} S_i$ es un subespacio afín de dirección $\boxed{\overrightarrow{\bigcap_{i\in I} S_i} = \bigcap_{i\in I} \vec{S_i}}$

- Si $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \emptyset \Rightarrow \boxed{\bigcap_{i\in I} S_i}$ es el mayor subespacio afín contenido en S_i $\forall i\in I$.

Definición: $S, T \subset A$ subespacios afines, se define su suma afín $S \vee T$ por:

$S\vee T = \bigcap \{P : P \subset A$ subespacio afín con $S, T \subset P\} \ni A$

* $S_1 \subset S_2 \Rightarrow \vec{S_1} \subset \vec{S_2}$

$\boxed{S\vee T}$ es el menor subespacio afín que contiene a S y a T.

Propiedades: $\boxed{S\vee T = T \vee S}$

Teorema: Sean $S, T \subset A$ subespacios afines, $p\in S$ $q \in T$. Entonces $\boxed{S\vee T = p + (\vec{S} + \vec{T} + L(\vec{pq}))}$

* $p \in S\cap T \Rightarrow q = p$ $\quad S\vee T = p + (\vec{S}+\vec{T})$

Corolario: Sean $S, T \subset A$ subespacios afines

1. Si $\boxed{S\cap T \neq \emptyset}$ entonces $\dim(S\vee T) + \dim(S\cap T) = \dim(S) + \dim(T)$
2. Si $\boxed{S\cap T = \emptyset}$ entonces $\dim(S\vee T) + \dim(\vec{S}\cap\vec{T}) = \dim(S) + \dim(T) + 1$.

Definición: $S, T \subset A$ subespacios afines. Diremos que S es paralelo a T si $\vec{S}\subset\vec{T}$ ($\dim S = \dim \vec{S} \leq \dim \vec{T} = \dim T$). Diremos que S y T son paralelos si $\vec{S} = \vec{T}$ $(S \parallel T)$

Propiedades:

1. $S \parallel T$ ($S \triangleleft T$) $\Rightarrow$ o bien $\boxed{S\subset T}$ o bien $\boxed{S\cap T = \emptyset}$
2. $S \parallel T \Rightarrow$ o bien $\boxed{S = T}$ o bien $\boxed{S\cap T = \emptyset}$
3. Dados $p \in A$, $S\subset A$ subespacio afín, entonces existe un único subespacio afín $T\subset A$ tal que $p\in T$, $T\parallel S$.

Sistemas de referencia

Definición: Sea A un espacio afín. Los puntos $\{P_0, P_1, \ldots, P_k\}$ son afínmente independientes si y solo si los vectores $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\}$ son linealmente independientes.

Definición: Sea A un espacio afín de dimensión n. Una familia $\{P_0 - P_n\}$ de $n+1$ puntos afínmente independientes es un $\boxed{\text{sistema de referencia afín}}$.

Los vectores $\boxed{\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\} \text{ son base}}$ de $\vec{A}$ ($\dim \vec{A} = n$) (base asociada al sistema de referencia).

$P_0 \equiv \boxed{\text{origen}}$ del sistema de referencia

* $P_0 \in A$ $\{v_1 - v_n\}$ base de $\vec{A}$ $\Rightarrow$ $\{P_0, P_0 + v_1, \ldots, P_0 + v_n\}$ sistema de referencia afín.

* $\sigma: \{0, 1, \ldots, k\} \to \{0, 1, \ldots, k\}$ permutación. $\{P_0 \ldots P_k\}$ son l.i. $\Rightarrow$ $\{P_{\sigma(0)} \ldots P_{\sigma(k)}\}$ son l.i.

Sea $R = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ un sistema de referencia afín de origen P_0 y base asociada $\{v_1, \ldots, v_n\} = B$ ($v_i = \overrightarrow{P_0P_i}$ $\forall i = 1 \ldots n$)

Definición: Las $\boxed{\text{coordenadas}}$ de $p \in A$ en el sistema de referencia R son las coordenadas de $\overrightarrow{P_0p}$ en la base B.

$\boxed{P_R}$ = coordenadas de p en R.

1. $\boxed{(p+v)_R = P_R + v_B}$ $\forall p \in A$ $\forall v \in \vec{A}$
2. $\boxed{(\overrightarrow{pq})_B = q_R - P_R}$ $\forall p, q \in A$.

Definición: $\boxed{\text{punto medio}}$ de $a, b \in A$ $\equiv a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab} = b + \frac{1}{2}\overrightarrow{ba}$

$O \in A \Rightarrow O + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob}) \equiv$ punto medio a, b.

Sean $P_1 - P_k \in A$ $O \in A \Rightarrow O + \frac{1}{k}(\overrightarrow{OP_1} + \ldots + \overrightarrow{OP_k})$ es el $\boxed{\text{baricentro}}$ o centro de gravedad de los puntos $P_1 - P_k$.

Propiedad: Sea A un espacio afín de dimensión n, R sistema de referencia afín en A. Entonces la aplicación $f_R: \mathbb{R}^n \to A$ $\boxed{f_R(x_1 \ldots x_n) = P_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0P_i}}$ donde $R = \{P_0 - P_n\}$ es $\boxed{\text{biyectiva}}$.

La aplicación inversa de f_R es $g_R: A \to \mathbb{R}^n$ definida por $g_R(p) = P_R$ $\forall p \in A$

Ecuaciones paramétricas e implícitas de subespacios afines.

$S \subset A$ $\dim(S)=k$ $\dim(A)=n$ subespacio afín.

Definición: dado $p \in S$ y $\{v_1 \_ v_k\}$ base de $\vec{S}$, las $\boxed{\text{ecuaciones paramétricas}}$ de S (determinadas por p y $\{v_1 - v_k\}$) son $q = p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$

$$\boxed{q \in S \Leftrightarrow \exists \lambda_1 \_ \lambda_k \in \mathbb{R} : q = p + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i}$$

* $q_R = (x_1 \dots x_n)$ $p_R = (a_1 \dots a_n)$ $(v_i)_B = (b_{i1}, \dots, b_{in})$

$$q_R = p_R + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (v_i)_B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix}$$

$x_j = a_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ij}$ ecuación paramétrica.

* Las ecuaciones paramétricas de S son la suma de un punto y las de $\vec{S}$.

$S \subset A$ subespacios afín de dimensión k. $R = \{p_0 \_ p_k\}$ sistema de referencia afín,

si $p + \vec{S} = S$ y $q \in S \Leftrightarrow \vec{pq} \in \vec{S}$

Supongamos que las $\boxed{\text{ecuaciones implícitas}}$ de $\vec{S}$ en la base B son:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} z_1 + \dots + a_{1n} z_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} + \dots + a_{mn} z_n = 0 \end{array}\right| m = n-k$$

$v_B = (z_1 \_ z_n)$ $v \in \vec{S} \Leftrightarrow (z_1 \_ z_n)$ verifica ↑

$p_R = (a_1 \_ a_n)$

$q_R = (x_1 \_ x_n)$ $(\vec{pq})_B = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

$\vec{pq} \in \vec{S} \Leftrightarrow (x_1 - a_1 \_ x_n - a_n)$ verifica ↑

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n}(x_n - a_n) = b_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} a_j$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn}(x_n - a_n) = b_m = \sum_{j=1}^{n} a_{mj} a_j$$

Definición: Sea $f: A \to A'$ una $\boxed{\text{aplicación}}$ entre dos espacios afines. Diremos que f es $\boxed{\text{afín}}$ si $\exists a \in A$: $\vec{f}_a: \vec{A} \to \vec{A}'$ definida por $\vec{f}_a(v) = \overrightarrow{f(a)f(a+v)}$ es lineal.

Proposición: Si $\vec{f}_a$ es lineal para un punto $a \in A \Rightarrow \vec{f}_b = \vec{f}_a$ $\forall b \in A$. En particular, $\boxed{\vec{f}_b \text{ es lineal } \forall b \in A.}$

Definición: Si $f: A \to A'$ es una aplicación afín entre espacios afines, se define $\vec{f}$ como la aplicación $\vec{f}_a$ donde a es arbitrario. Diremos que $\boxed{\vec{f}}$ es la $\boxed{\text{aplicación lineal asociada a } f.}$

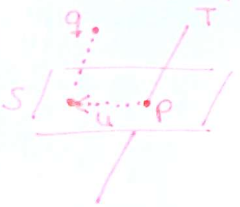
La aplicación lineal asociada verifica $\boxed{\vec{f}(\vec{ab}) = \overrightarrow{f(a)f(b)}}$ $\forall a,b \in A$ y $\boxed{f(a+v) = f(a) + \vec{f}(v)}$ $v \in \vec{A}$

Proposición: Sean $f: A \to A'$ y $g: A' \to A''$ dos aplicaciones afines. Entonces la composición $g \circ f$ es otra aplicación afín.

Corolario: Sea $f: A \to A$ aplicación afín. Entonces $\boxed{f \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow \vec{f} \text{ es biyectiva}}$ y, en tal caso, $\boxed{\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}}$

* $f: A \to A$ afín

$P_S(q)$ = proyección de q en S paralela a T



$P_S(q) = p + u$ $\begin{cases} q \in S & P_S(q) = q \\ q \in T & P_S(q) = p \end{cases}$

* $f: A \to A$ afín

$\vec{f} = r\, Id_{\vec{A}}$ $\quad$ f es homotecia si $r \neq 0, 1$

Teorema: Sean A, A' espacios afines. Sean $R = \{p_0, \ldots, p_n\}$ un sistema de referencia afín en A y $\{p'_0 \ldots p'_n\} = R'$ en A'. Entonces existe una única aplicación afín $f: A \to A'$ / $f(p_i) = p'_i$ $i = 0 \ldots n$. Además:

1. Si $\{p'_0 \ldots p'_n\}$ son afínmente independientes $\Rightarrow f$ es inyectiva $\dim A' \geq n$
2. Si $\{p'_0 \ldots p'_n\}$ contiene un sistema de referencia afín $\rightarrow f$ sobreyectiva $\dim A' \leq n$
3. Si $\{p'_0 \ldots p'_n\}$ es sistema de referencia afín $\Rightarrow f$ biyectiva $\dim A' = n$

Propiedad: Sea $S \subset A$ un subespacio afín, $f: A \to A'$ una aplicación afín. Si $a \in S$ entonces $f(S) = f(a) + \vec{f}(\vec{S})$ es un subespacio afín de A'.

Expresión matricial de una aplicación afín.

$f: A \to A'$ aplicación afín

$\dim(A) = n$ $\quad R = \{P_0 \ldots P_n\}$ sistema de referencia afín en A y $B = \{e_1 \ldots e_n\}$ es base asociada

$\dim(A') = m$ $\quad R' = \{P_0' \ldots P_m'\}$ sistema de referencia afín en A' y $B = \{e_1' \ldots e_m'\}$ base asociada.

$$M = M(\vec{f}, B, B') = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \vec{f}(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e_j'$$

$P_R = (x_1 \ldots x_n)^T \qquad f(p)_{R'} = (y_1 \ldots y_m)^T$

$f(p) = f(P_0 + \overrightarrow{P_0 P}) = f(P_0) + \vec{f}(\overrightarrow{P_0 P}) \qquad f(P_0) = (b_1 \ldots b_m)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ | \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ | & \ddots & | \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$$

* Expresión matricial de la identidad $\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & | \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$

Definición: $\boxed{\text{homotecia}}$ de centro $x_0 \in A$ y razón $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$h_{x_0, \lambda}(p) = x_0 + \lambda \overrightarrow{x_0 p} \qquad 0 < \lambda < 1$ contracción

$\lambda > 1$ dilatación

- $h_{x_0, \lambda} \circ h_{x_0, \mu} = h_{x_0, \lambda\mu}$
- $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda = (-1)|\lambda| \Rightarrow h_{x_0, \lambda} = h_{x_0, (-1)|\lambda|} = \underbrace{h_{x_0, -1}}_{\text{simetría central de centro } x_0} \circ h_{x_0, |\lambda|}$

Si $f: A \to A$ es afín y $\boxed{\vec{f} = \lambda Id_{\vec{A}}}$ con $\lambda \neq 0, 1$ entonces f es una homotecia.

TEMA 2: ESPACIOS AFINES EUCLÍDEOS

Definición: E espacio vectorial es euclídeo si admite un producto escalar

$< > : E \times E \to \mathbb{R}$ $u, w \in E$ $<u,w>$, que cumple:

1. bilineal (lineal en cada variable).
2. simétrico $<u,w> = <w,u>$ $\forall u,w \in E$
3. Definido positivo: $<v,v> \geq 0$, además $<v,v> = 0 \iff v = 0$.

Definición: $\boxed{\text{norma de un vector}}$. $\|v\| = <v,v>^{1/2}$

1. $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $v \in E$
3. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ $\forall u,v \in E$ (desigualdad triangular).

Definición: un espacio afín A es euclídeo si $\vec{A}$ es un espacio vectorial euclídeo. Al producto escalar lo denotaremos por $<,>$ y a la norma asociada por $\| \|$.

Definición: dados $p,q \in A$, A espacio afín euclídeo, se define la $\boxed{\text{distancia}}$ de p a q por $d(p,q) = \|\vec{pq}\| = <\vec{pq}, \vec{pq}>^{1/2}$. La distancia verifica las siguientes propiedades:

1. $d(p,q) \geq 0$. Además $d(p,q) = 0 \iff p = q$ $\forall p,q \in A$ — (A,d): espacio métrico.
2. $d(p,q) = d(q,p)$ $\forall p,q \in A$
3. $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ $\forall p,q,r \in A$.

* $C \subset A$: $d(p,C) = \inf\{d(a,C) : c \in C\}$

$D \subset A$ $d(C,D) = \inf\{d(p,q) : p \in C, q \in D\}$

Definición: sean S,T subespacios afines de un espacio afín euclídeo A. Diremos que S,T son perpendiculares si $\vec{S}, \vec{T}$ son $\boxed{\text{perpendiculares}}$, $<u,w> = 0$ $\forall u \in \vec{S}$ $\forall w \in \vec{T}$

* $S = \{p\}$ $\vec{S} = \{0\} \Rightarrow S = \{p\}$ es perpendicular a cualquier otro subespacio afín.

* $\vec{S}^{\perp} = \{v \in \vec{A} : <v,w> = 0 \quad \forall w \in \vec{S}\}$

$\vec{S} \oplus \vec{S}^{\perp} = \vec{A}$

S,T ortogonales $\iff$ $\vec{S} \subset (\vec{T})^{\perp}$, $\vec{T} \subset (\vec{S})^{\perp}$

Propiedad: Sea $S \subset A$ un subespacio afín y $p \in A$. Existe un único subespacio afín $T \subset A$ tal que:

1. $p \in T$
2. S, T ortogonales
3. $\dim S + \dim T = \dim A$.

Definición: $(A, (\vec{A}, < >))$ espacio euclídeo afín. Un sistema de referencia afín R en A diremos que es euclídeo si la base asociada es ortonormal.

* $R = \{P_0 \ldots P_n\}$ sistema de referencia afín $\rightsquigarrow B = \{\vec{P_0P_1}, \ldots, \vec{P_0P_n}\}$ base asociada $\xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$ $B' = \{v_1 \ldots v_n\}$ ortonormal $\rightsquigarrow R' = \{P_0, P_0 + v_1, \ldots, P_0 + v_n\}$ sistema de referencia euclídeo.

Isometrías y semejanzas.

Definición: Sean A, A' dos espacios afines euclídeos. Una aplicación afín $A \to \vec{A}'$ es una isometría si $\vec{f}: \vec{A} \to \vec{A}'$ es una isometría lineal.

- $<\vec{f}(v), \vec{f}(w)> = <v, w>$
- $\|\vec{f}(v)\| = \|v\|$
- $\vec{f}$ inyectiva $\Rightarrow f$ es inyectiva

* Si $\dim A > \dim A'$ no puede existir ninguna isometría $f: A \to A'$.

* Si $\dim A = \dim A'$, entonces f es biyectiva.

Propiedades: Sea $f: A \to A'$ una isometría. Entonces:

1. $d'(f(p), f(q)) = d(p,q) \quad \forall p,q \in A$.
2. $\cos(\widehat{\vec{f}(v), \vec{f}(w)}) = \cos(\widehat{v,w}) \quad \forall v,w \in \vec{A} \setminus \{0\}$

Proposición: Si $S, T \subset A$ son ortogonales y $f: A \to A'$ es isometría, entonces $f(S), f(T) \subset A'$ son subespacios afines ortogonales.

Nota: Cualquier isometría lineal $h: E \to E$ de un espacio vectorial euclídeo E de dimensión 3 tiene un valor propio, ± 1 ($p(\lambda) = \lambda^3 + \ldots$ ← tiene raíz).

Definición: una $\boxed{\text{semejanza}}$ de razón $\lambda \neq 0, 1$ es la composición de una isometría de un espacio afín A en A seguida de una homotecia de razón λ.

- Si f es una semejanza de razón $\lambda \neq 0, \pm 1$, entonces $\boxed{d(f(p), f(q)) = |\lambda| d(p,q)}$ y $\boxed{\cos(\widehat{\vec{f}(v), \vec{f}(w)}) = \cos(\widehat{v,w})}$

- $\boxed{f \text{ es isometría}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{f} \text{ es isometría}}$ lineal $\Leftrightarrow A = M(\vec{f}, B)$ es ortogonal, B ortonormal.

* B base ortonormal $A = M(\vec{f}, B) = \lambda M(\vec{g}, B) \Rightarrow A \cdot A^t = \lambda^2 Id$.

Propiedad: Sea $f\ A \to A$ una aplicación afín f isometría $\Leftrightarrow d(f(p), f(q)) = d(p,q)\ \forall p,q \in A$

Propiedad: Sea $f: A \to A$ una aplicación afín f semejanza $\Leftrightarrow \vec{f} = \lambda u$ con u isometría lineal.

Corolario: Sea f una aplicación afín, sea B base ortonormal, $A = M(\vec{f}, B)$

Entonces f es semejanza $\Leftrightarrow A \cdot A^t = \lambda^2 Id$ $(\lambda \neq \pm 1)$ (Mirar ejemplos).

Definición: una aplicación afín $f. A \to A$, A plano afín euclídeo, es un $\boxed{\text{giro}}$ si $\vec{f}$ es un giro vectorial (det $\vec{f} = 1$, $\vec{f} \neq \pm Id_{\vec{A}}$).

Un giro en un plano afín euclídeo tiene un único punto fijo $O = \boxed{\text{centro}}$ del giro.

Las $\boxed{\text{simetrías centrales}}$ en un plano afín se pueden considerar giros de $180°$. $\vec{f} = -Id_{\vec{A}}$

Definición: $S \subset A$ subespacio afín $\vec{A} = \vec{S} \oplus \vec{S}^{\perp}$ $S = p + \vec{S}$, definimos la $\boxed{\text{simetría ortogonal}}$ con respecto al subespacio afín S como la única aplicación afín $f_p : A \to A$ tal que:

1. $f_p(p) = p$
2. $\vec{f}_p(v) = v \quad \forall v \in \vec{S}$
3. $\vec{f}_p(w) = -w \quad \forall w \in (\vec{S})^{\perp}$

* $S = \{p\} \Rightarrow f_p$ simetría central de centro p

$S = A \Rightarrow f_p = Id_A$

El conjunto de $\boxed{\text{puntos fijos}}$ de una simetría ortogonal con respecto a S es el subespacio $\boxed{S}$.

Definición: una simetría deslizante es la composición de una simetría ortogonal con respecto a un subespacio afín S, seguida de una traslación de vector $e \in \vec{S} \setminus \{0\}$.

$t_e(v) = e + v$

σ simetría ortogonal respecto a S

1. $t_e \circ \sigma$ es isometría.
2. $t_e \circ \sigma$ no tiene puntos fijos.

Teorema: Clasificación de isometrías en dimensión 2.

Sea A un plano afín euclídeo, $f: A \to A$ isometría. Entonces f es una de las siguientes:

1. La identidad
2. Traslación de vector $v \neq 0$
3. Giro distinto de la identidad
4. Simetría ortogonal con respecto a una recta afín.
5. Simetría deslizante con respecto a una recta afín.

$P_f = \{p \in A : f(p) = p\}$ $\quad \vec{P}_f = \ker(\vec{f} - Id_{\vec{A}})$

$\det \vec{f}$ \ P_f	$\emptyset$	punto	recta	total
1	t_v $v \neq 0$	giro	X	Id_A
-1	simetría deslizante	X	simetría ortogonal	X

Definición: Un giro con respecto a una recta afín en un espacio afín distinto de la identidad es una isometría $f: A \to A$ con $\det(\vec{f}) = 1$ y $\dim P_f = 1$.

La recta de puntos fijos es el eje de giro.

Definición: Un movimiento helicoidal es la composición de un giro g de eje R con una traslación t_v con $v \in \vec{R} \setminus \{0\}$.

Teorema: Clasificación de isometrías afines en dimensión 3.

Sea A un espacio afín euclídeo y $f: A \to A$ una isometría afín. Entonces f es una de las siguientes:

1. La identidad
2. Una traslación t_v de vector $v \neq 0$.
3. Un giro con respecto a una recta afín distinto de la identidad.
4. Un movimiento helicoidal.
5. Una simetría ortogonal con respecto a un plano afín.
6. Una simetría deslizante con respecto a un plano afín.
7. La composición de un giro con respecto a una recta afín R y una simetría con respecto a un plano P ortogonal a R (conmutan).

$$\dim P_f = \dim \operatorname{Ker}(\vec{f} - Id_{\vec{A}}) = 3 - \operatorname{rango}(\vec{f} - Id_{\vec{A}})$$

$\det \vec{f}$ \ P_f	A	Plano	Recta	Punto	$\emptyset$
$+1$	Id_A	X	giro	X	traslación / mov. helicoidal
-1	X	simetría ortogonal	X	simetría compuesta con giro	simetría deslizante

Definición: La circunferencia en un plano afín euclídeo de centro $a \in A$ y radio $r > 0$ es el conjunto: $C(a,r) = \{p \in A : d(p,a) = r\}$

Teorema de la recta de Euler y teorema de Tales.

Lema: Si f es isometría $\Rightarrow f(C(a,r)) = C(f(a), r)$

Lema: Sean $a, b \in A$ $a \neq b$. El conjunto $\{p \in A : d(p,a) = d(p,b)\}$ es la recta que pasa por el punto medio de a y b y que tiene como dirección la recta perpendicular a $\vec{ab}$.

Teorema de Pitágoras: Si $\{a,b,c\}$ es un triángulo y $\vec{ab} \perp \vec{ac}$, entonces
$$d(b,c)^2 = d(a,b)^2 + d(a,c)^2 \Rightarrow \|\vec{bc}\|^2 = \|\vec{ba} + \vec{ac}\|^2$$

Definición: dado un triángulo, las mediatrices del triángulo son las rectas que pasan por los puntos medios de cada lado y son perpendiculares a dicho lado.

Teorema: dado un triángulo $T=\{a,b,c\}$ existe un único punto $\tilde{c}$. circuncentro del triángulo, tal que $d(\tilde{c},a)=d(\tilde{c},b)=d(\tilde{c},c)$.

* $\tilde{c}$ es el único punto de corte de las mediatrices.
* $\exists$ una única circunferencia que contiene a los vértices cuyo centro es $\tilde{c}$.

Definición: Sea $T=\{a,b,c\}$ triángulo. Las alturas de un triángulo son las rectas perpendiculares a un lado que pasan por el vértice opuesto al lado.

Teorema: las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro.

Teorema de la recta de Euler: Dado un triángulo $T=\{a,b,c\}$, el baricentro, el circuncentro y el ortocentro están alineados.

Definición: Cuando al menos dos de estos puntos son distintos, la recta que los contiene es la recta de Euler.

Definición: Un triángulo $T=\{a,b,c\}$ es equilátero si $d(a,b)=d(b,c)=d(c,a)$.

* equilátero $\Rightarrow Bar(T)=\tilde{c}=0$.

Teorema de Tales: Sea A un espacio afín euclídeo. Sean H_1,H_2,H_3 hiperplanos afines paralelos y distintos. Sean R,S rectas afines tales que $\vec{R}\oplus\vec{H_1}=\vec{A}$ y $\vec{S}\oplus\vec{H_1}=\vec{A}$. Sean $r_i=R\cap H_i$ $s_i=S\cap H_i$, entonces:

$$\frac{d(r_1,r_2)}{d(r_1,r_3)}=\frac{d(s_1,s_2)}{d(s_1,s_3)}$$

TEMA 3: HIPERCUÁDRICAS REALES.

3.1. Hipercuádricas.

Definición: Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es una hipercuádrica si existe una matriz simétrica $(m_{ij})_{i,j=1\dots n}$ no nula y escalares $a_1 \dots a_n, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0\}$$

$n=2$: cónicas.
$n=3$ cuádricas.

*Expresión matricial de una hipercuádrica:

$M = (m_{ij})$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$\sum m_{ij} x_i x_j = x^t M x = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\sum a_i x_i = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a^t x = x^t a$$

$x^t M x + a^t x + x^t a + b = 0$: Expresión matricial.

$C = \{x \in \mathbb{R} : x M x^t + 2 x a^t + b = 0\}$

$C = \{x \in \mathbb{R}^n : (1\ x)\, \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix} = 0\}$ $\quad (1\ x) = (1\ x_1 \dots x_n)$ $\quad \tilde{M} = \left(\begin{array}{c|ccc} b & a_1 & \dots & a_n \\ \hline a_1 & m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n & m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{array}\right)$

Proposición: Sea $p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una biyección afín (afinidad) y C una hipercuádrica. Entonces $p(C)$ es otra hipercuádrica.

3.2. Clasificación afín de hipercuádricas.

Recordamos:

Teorema de Sylvester: Sea M una matriz simétrica de orden n. Entonces existe una matriz regular P de orden n tal que:

$$P^t M P = \begin{pmatrix} -I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & 0_c \end{pmatrix}$$

a = índice de M
c = nulidad

$a + b + c = n$.

Regla de Descartes: El número de raíces positivas de un polinomio con coeficientes reales es, como máximo, el número de cambios de signo entre sus coeficientes.

Definición: dos hipercuádricas $\mathcal{C}_1\, \mathcal{C}_2$ de $\mathbb{R}^n$ se dicen equivalentes si existe una biyección afín $p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $p(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$.

Lema: Sea $p: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación afín. Entonces, existen $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p(x)^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline v^t & P \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x^t \end{pmatrix}$$

Lema: Toda hipercuádrica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ es equivalente a otra hipercuádrica cuya matriz asociada es de la forma

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} b & 0 & \overset{r}{\cdots} & 0 & d_{r+1} & \cdots & d_n \\ \hline 0 & a & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & & c_r & & & \\ \hline d_{r+1} & & & & 0 & & \\ \vdots & & 0 & & & \ddots & \\ d_n & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

donde $d_{r+1}, \dots, d_n, b \in \mathbb{R}$ $c_i = \pm 1$ $i = 1, \dots, r$.

Teorema: Toda hipercuádrica es equivalente a otra hipercuádrica cuya matriz es una de las siguientes:

I. $\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & c_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right)$ II. $\left(\begin{array}{c|ccc|c} \mu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & c_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0_{n-r} \end{array}\right)$ $\mu \neq 0$. III $\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 & -1 \\ \hline 0 & a & & & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & & & c_r & & 0 & \\ \hline -1 & 0 & \cdots & 0 & & 0_{n-r} & \end{array}\right)$

Además el número de -1 es menor o igual que el número de $+1$ entre las constantes c_i.

* C hipercuádrica de matriz asociada $\left(\begin{array}{c|c} b & a^t \\ \hline a & M \end{array}\right)$ y sea $p(x) = C + Ax$ una aplicación afín y biyectiva. Si $p(C)$ tiene como matriz asociada $\left(\begin{array}{c|c} b' & (a')^t \\ \hline a' & M' \end{array}\right)$, tenemos que $M' = B^t M B$ $(B = A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{c|c} b' & a'^t \\ \hline a' & M' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & d^t \\ \hline 0 & B^t \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} b & a^t \\ \hline a & M \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline d & B \end{array}\right) \quad d = -A^{-1}C$$

Si $C' = p(C) \Rightarrow M$ y M' son matrices congruentes $\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} b' & (a')^t \\ \hline a' & M' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} b & a^t \\ \hline a & M \end{array}\right)$ congruentes

Llamamos: $r = \text{rango}(M)$ $R = \text{rango}(\tilde{M})$

$s = p - q$ $p = \#$ valores propios positivos (n^o de $+1$) de M

$q = \#$ valores propios negativos (n^o de -1) de M

$S = \tilde{p} - \tilde{q}$ $\tilde{p} = \#$ valores propios positivos (n^o de $+1$) de $\tilde{M}$

$\tilde{q} = \#$ valores propios negativos (n^o de -1) de $\tilde{M}$

Vamos a ver que los números r, R, s, S permiten clasificar la hipercuádrica.

Caso I
$$\left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} r = p+q = R \\ p = \tilde{p} \\ q = \tilde{q} \\ s = S \end{array} \Rightarrow \boxed{r = R} \quad \boxed{s = S}$$

Caso II
$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots \, -1 & & \\ & & & -1 \; 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} r = p+q \\ \tilde{p} = p+1 \\ \tilde{q} = q \\ R = r+1 \\ S = s+1 \end{array} \quad \boxed{R = r+1} \quad \boxed{S = s+1}$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots \, -1 & & \\ & & & -1 \; 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R = r+1 \\ \tilde{p} = p \\ \tilde{q} = q+1 \\ S = s-1 \end{array} \quad \boxed{R = r+1} \quad \boxed{S = s-1}$$

Caso III
$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots \, -1 & & \\ 0 & & & -1 \; 0 & \\ 1 & & & & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R = p+q+2 \\ r = p+q \\ \tilde{p} = p+1 \\ \tilde{q} = q+1 \\ S = \tilde{p}-\tilde{q} = p-q = s \end{array} \quad \boxed{R = r+2} \quad \boxed{S = s} \to \boxed{R \leq n+1 \Rightarrow r \leq n-1}$$

3.3. Clasificación de cónicas.

Teorema: Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ una cónica. Entonces $\mathcal{C}$ es equivalente a uno de los siguientes:

$s = p-q \qquad |s| \leq r$

$r = p+q$

	Nombre	(r,R)	$(\lvert s\rvert,\lvert S\rvert)$	Matriz	Ecuación
Tipo I	Recta doble	$(1,1)$	$(1,1)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$x^2 = 0$
Tipo II	Vacío	$(1,2)$	$(1,2)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$x^2 + 1 = 0$
Tipo II	Dos rectas paralelas	$(1,2)$	$(1,0)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$x^2 - 1 = 0$
Tipo III	Parábola	$(1,3)$	$(1,1)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & 1\,(-1?) \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1\,(-1?) & 0 & 0 \end{array}\right)$	$x^2 + 2y = 0$ ¿$x^2 - 2y = 0$? ✓ (criterio)
	Punto	$(2,2)$	$(2,2)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$x^2 + y^2 = 0$

Nombre	(r,R)	$(\lvert s\rvert,\lvert S\rvert)$	Matriz	Ecuación
Dos rectas secantes	$(2,2)$	$(0,0)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$	$x^2-y^2=0$
Vacío	$(2,3)$	$(2,3)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$x^2+y^2+1=0$
Elipse	$(2,3)$	$(2,1)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$x^2+y^2-1=0$
Hipérbola	$(2,3)$	$(0,1)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$	$x^2-y^2\pm 1=0$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Downarrow$ Trasformación afín

$x'=\frac{x}{a}$ $y'=\frac{y}{b}$

regla para acordarme de las ecuaciones

Teorema de Descartes para signatura

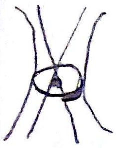
3.4. Clasificación de cuádricas

Teorema: Sea C una cuádrica de $\mathbb{R}^3$. Entonces C es equivalente a una de:

Nombre	(r,R)	$(\lvert s\rvert,\lvert S\rvert)$	Matriz	Ecuación
Plano doble	$(1,1)$	$(1,1)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$x^2=0$
Vacío.	$(1,2)$	$(1,2)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2+1=0$
Dos planos paralelos	$(1,2)$	$(1,0)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} -1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2-1=0$
Cilindro parabólico	$(1,3)$	$(1,1)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 0 & & 0 & \\ -1 & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2-2z=0$
Recta	$(2,2)$	$(2,2)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2+y^2=0$

Nombre	(r,R)	$(\lvert s\rvert,\lvert S\rvert)$	Matriz	Ecuación
Dos planos secantes.	$(2,2)$	$(0,0)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 0 & & -1 & \\ 0 & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2-y^2=0$
Vacío.	$(2,3)$	$(2,3)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2+y^2+1=0$
Cilindro elíptico	$(2,3)$	$(2,1)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} -1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2+y^2-1=0$
Cilindro hiperbólico	$(2,3)$	$(0,1)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} \pm 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2-y^2\pm 1=0$
Paraboloide elíptico	$(2,4)$	$(2,2)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 1 & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2+y^2+2z=0$
Paraboloide hiperbólico	$(2,4)$	$(0,0)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 0 & & -1 & \\ 1 & & & 0 \end{array}\right)$	$x^2-y^2+2z=0$ silla de montar.
Punto	$(3,3)$	$(3,3)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{array}\right)$	$x^2+y^2+z^2=0$
Cono	$(3,3)$	$(1,1)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{array}\right)$	$x^2+y^2-z^2=0$
Vacío	$(3,4)$	$(3,4)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$	$x^2+y^2+z^2+1=0$
Hiperboloide de dos hojas.	$(3,4)$	$(1,2)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{array}\right)$	$x^2+y^2-z^2+1=0$

Nombre	(r,R)	$(\|S\|,\|S\|)$	Matriz	Ecuación
Elipsoide	$(3,4)$	$(3,2)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{array}\right)$	$x^2+y^2+z^2-1=0$
Hiperboloide de una hoja	$(3,4)$		$\left(\begin{array}{c\|ccc} -1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{array}\right)$	$x^2+y^2-z^2-1=($



Contiene un par de rectas por cada punto.

TEMA 4: EL ESPACIO PROYECTIVO.

4.1. Definición de espacio proyectivo.

E = espacio vectorial real de dimensión $n \geq 2$

$E^* = E \setminus \{0\}$

Definición: El espacio proyectivo asociado a E es el conjunto cociente $P(E) = E^*/\sim$, donde la relación de equivalencia $\sim$ está definida por: $u \sim v \iff \exists \lambda \neq 0 : u = \lambda v$

El espacio proyectivo es el conjunto

La aplicación proyección $\pi : E \longrightarrow P(E)$ es la que asocia cada vector $v \in E^*$ con su clase de equivalencia. $\pi(u) = \pi(v) \Rightarrow u \sim v \iff \exists \lambda \neq 0 : u = \lambda v$

$\dim P(E) = \dim(E) - 1$.

Definición: Un subconjunto $X \subset P(E)$ es una variedad proyectiva si $\hat{X} = \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ es un subespacio vectorial de E.

$p \in P(E)$

$\pi^{-1}(\{p\}) = \{u \in E^* : \pi(u) = p\}$

$u \in \pi^{-1}(\{p\}) \Rightarrow \pi^{-1}(\{p\}) = L(u) \setminus \{0\} \Rightarrow \pi^{-1}(\{p\}) \cup \{0\} = L(u)$

Un punto de $P(E)$ es una variedad proyectiva.

Si X es variedad proyectiva, su dimensión es $\dim(X) = \dim(\hat{X}) - 1$.

$\dim(X) = 1 \Rightarrow X$ recta proyectiva

$\dim(X) = 2 \Rightarrow X$ plano proyectivo

$\dim(X) = \dim(P(E)) - 1 \Rightarrow X$ hiperplano proyectivo.

Propiedad: Sea $P(E)$ un plano proyectivo ($\dim E = 3$). Si X, Y son dos rectas proyectivas entonces $X \cap Y \neq \emptyset$

$\hat{X} = \pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ plano vectorial de E
$\hat{Y} = \pi^{-1}(Y) \cup \{0\}$ plano vectorial de E

$\dim(\hat{X} \cap \hat{Y}) \geq 1 \quad \exists u \in \hat{X} \cap \hat{Y} \quad u \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} \pi(u) \in X \\ \pi(u) \in Y \end{array}\right\} \pi(u) \in X \cap Y \neq \emptyset$

$\dim P(E) \geq 3 \Rightarrow$ dos rectas pueden tener intersección vacía.

p.ej. $E = \mathbb{R}^4 \quad P_1 = \{x_1 = x_2 = 0\} \quad P_2 = \{x_3 = x_4 = 0\} \quad P_1 \cap P_2 = \{0\}$
$X = \pi(P_1 \setminus \{0\}) \quad Y = \pi(P_2 \setminus \{0\}) \quad X \cap Y = \emptyset$

Propiedad: Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de variedades proyectivas de $P(E)$. Entonces, o bien $\bigcap_{i\in I} X_i = \emptyset$ o bien $\bigcap_{i\in I} X_i$ es una variedad proyectiva y $\widehat{\bigcap_{i\in I} X_i} = \bigcap_{i\in I} \hat{X}_i$

Definición: Si $S \subset P(E)$ es un subconjunto no vacío, la variedad proyectiva generada por S, $V(S)$, es la intersección de todas las variedades proyectivas que contienen a S.

$V(S) = \bigcap \{X \subset P(E) : X$ variedad proyectiva, $S \subset X\} \Rightarrow V(S)$ es variedad proyectiva.

Proposición. $X, Y \subset P(E)$ variedades proyectivas, entonces: $\widehat{V(X\cup Y)} = \hat{X} + \hat{Y}$

* $X, Y \in P(E)$ variedades proyectivas

$X \cap Y = \emptyset \Rightarrow \hat{X} \cap \hat{Y} = \{0\}$ podríamos definir $\dim(X\cap Y) = -1$

Teorema: Fórmula de las dimensiones Sean $X, Y \subset P(E)$ variedades proyectivas. Entonces $\dim V(X\cup Y) + \dim(X\cap Y) = \dim(X) + \dim(Y)$

* $P(E)$ espacio proyectivo dimensión 2. X, Y dos rectas proyectivas

$2 + \dim(X\cap Y) \geq \dim \{V(X\cup Y)\} + \dim(X\cap Y) = \dim(X) + \dim(Y) = 1 + 1 = 2$

$\dim(X\cap Y) \geq 0 \Rightarrow X\cap Y \neq \emptyset$

EN UN PLANO PROYECTIVO DOS RECTAS SIEMPRE SE CORTAN.

* Dados $p, q \in P(E)$ $p \neq q$ siempre existe una recta proyectiva que contiene a p y a q. $(V\{p,q\})$

Es única: $X \subset P(E)$ $p, q \in X$ $X \neq V(p,q) \Rightarrow \{p\}\cup\{q\} \subset X \Rightarrow \underbrace{V(\{p,q\})}_{\dim =} \subset X \Rightarrow X = V(\{p,q\})$

POR DOS PUNTOS DISTINTOS PASA UNA ÚNICA RECTA

4.2. Coordenadas homogéneas.

Definición: Sea $P(E)$ un espacio proyectivo sobre un espacio vectorial E, sea B base de E, $p \in P(E)$. Las coordenadas homogéneas de p en la base B son $(\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n)$ si $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ son las coordenadas de $e \in \pi^{-1}(\{p\})$ en la base B. (Las coordenadas homogéneas están definidas salvo un factor constante no nulo).

Alguna coordenada homogénea es siempre distinta de 0.

En $P(\mathbb{R}^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ se toman con respecto a la base usual.

Las ecuaciones implícitas de X son las de $\hat{X}$ en la base B.

$p \in X \Leftrightarrow$ las coordenadas homogéneas $(= \pi^{-1}(p))$ verifican las ecuaciones implícitas de $\hat{X}$.

4.3. Proyectividades.

Definición: Una aplicación $f: P(E) \rightarrow P(E')$ es una proyectividad si existe $\hat{f}: E \rightarrow E'$ lineal e inyectiva tal que $\pi' \circ \hat{f} = f \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} E^* \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & (E')^* \arrow[d, "\pi'"] \\ P(E) \arrow[r, "f"'] & P(E') \end{tikzcd}$$

$\hat{f}$ no es única: $\lambda \cdot \hat{f}$ verifica $\pi' \circ (\lambda \hat{f}) = f \circ \pi$.
$\lambda \neq 0$

Definición: Una homografía es una proyectividad biyectiva.

Propiedades:

1. Toda proyectividad es inyectiva
2. $Id_{P(E)}$ es una homografía.
3. La composición de proyectividades es una proyectividad.
4. Si $\hat{f}$ es biyectiva, f también lo es.
5. La imagen de una variedad proyectiva por una proyectividad es una variedad proyectiva $(\widehat{f(X)} = \hat{f}(\hat{X}))$.
   En particular $\dim(X) = \dim f(X)$

4.4. Relación entre geometría afín y proyectiva.

Fijamos $n \in \mathbb{N}$, sea $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$

Definimos $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ como la composición de la aplicación afín $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots x_n, 1)$ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{n+1}$ con la proyección $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$.

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow P^n$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_n : 1)$$

Al complemento de la imagen de la aplicación p lo denotaremos por $H_\infty := P^n \setminus p(\mathbb{R}^n)$.

Proposición:

1. p inyectiva.
2. $H_\infty = \mathbb{P}^n \setminus p(\mathbb{R}^n)$ es un hiperplano proyectivo de $\mathbb{R}^n$.
3. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio afín $p(S) = X \setminus (X \cap H_\infty)$ y $X \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva.

$$\dim S = \dim X \qquad \dim X \cap H_\infty = \dim X - 1.$$

* Esta aplicación es el embebimiento canónico del espacio afín $\mathbb{R}^n$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$.

A H_∞ se le llama el hiperplano del infinito. Si $n=2$ H_∞ es la recta del infinito.