11 FUNCIONES CONVEXAS

FALTA Mirar Choudari, Niculescu!!!!!

11.1 DEFINICIÓN

Sea I un intervalo y sean $a, b \in I$ con $a < b$. Si $x \in [a, b]$, x se puede escribir como combinación convexa de a y b, esto es,

$$x = (1-t)a + tb$$

para algún $t \in [0,1]$. Podemos calcular el valor de t:

$$x = (1-t)a + tb \iff t = \frac{x-a}{b-a}$$

con lo que

$$x = \frac{b-x}{b-a} \cdot a + \frac{x-a}{b-a} \cdot b.$$

Definición 11.1.1. Sea I un intervalo. Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es *convexa* si para cualesquiera $a, b \in I$ con $a < b$ y cualquier $t \in [0,1]$ se cumple que

$$f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b).$$

La función f es *cóncava* si $-f$ es convexa.

Geométricamente, la convexidad se traduce el segmento que une las imágenes de dos puntos arbitrarios está por encima de la gráfica de la función.

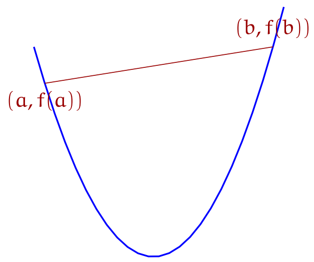

Figura 24: El segmento que une dos puntos arbitrarios de la gráfica de una función está por encima o coincide con la gráfica de la función

Observación 11.1.2. En la definición de función convexa no es necesario suponer que $a < b$. Se puede comprobar que f es convexa si, y sólo si,

$$f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b), \quad \forall\, a, b \in I,\ \forall\, t \in [0,1].$$

Ejemplo 11.1.3.
1) Cualquier función afín, $f(x) = mx + n$, es convexa (más detalles en el ejercicio 11.6).
2) La función valor absoluto es convexa: si $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in [0,1]$, por la desigualdad triangular

$$|(1-t)x + ty| \leqslant (1-t)\,|x| + t\,|y|.$$

3) La función $f(x) = x^2$ es convexa. En efecto, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $t \in [0,1]$,

$$f((1-t)a + tb) = (1-t)^2a^2 + t^2b^2 + 2t(1-t)ab,$$
$$(1-t)f(a) + tf(b) = (1-t)a^2 + tb^2.$$

Para ver cuál es mayor, calculamos la diferencia:

$$\begin{aligned}
&(1-t)f(a) + tf(b) - \big(f((1-t)a + tb)\big) \\
&\quad = (1-t)a^2 + tb^2 - \Big((1-t)^2a^2 + t^2b^2 + 2t(1-t)ab\Big) \\
&\quad = t(1-t)a^2 + t(1-t)b^2 - 2t(1-t)ab \\
&\quad = t(1-t)\,(a-b)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, la función es convexa.

Incluso con ejemplos sencillos, la comprobación de la convexidad puede ser complicada. Las caracterizaciones de la convexidad para funciones derivables o dos veces derivables serán de gran utilidad en la práctica.

Es fácil dar ejemplos de funciones convexas que no son continuas: si aumentamos el valor de una función en los extremos del intervalo la convexidad se mantiene, pero la continuidad no. Por ejemplo, la función $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \neq \pm 1 \\ 2, & \text{si } x = \pm 1 \end{cases}$$

es convexa y no es continua. Más adelante veremos que esta es la única forma de construir funciones convexas discontinuas.

Aunque no sean continuas, sí podemos decir algo sobre la acotación.

Proposición 11.1.4. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces f está acotada.*

Demostración. Sea $M = \max\{f(a), f(b)\}$. Si $x = (1-t)a + tb \in [a,b]$, entonces

$$f(x) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b) \leqslant (1-t)M + tM = M.$$

Veamos la acotación inferior. Podemos escribir cualquier elemento $x \in [a,b]$ de la forma $x = (a+b)/2 + y$, con $|y| \leqslant |b-a|/2$. Como

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + y\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} - y\right)$$

usando que f es convexa, se tiene que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + y\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} - y\right).$$

Despejando en la desigualdad anterior,

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + y\right) &\geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - y\right) \\ &\geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M, \end{aligned}$$

obtenemos una cota inferior como queríamos. □

En realidad, hemos demostrado un poco más: hemos demostrado que f tiene máximo absoluto y este se alcanza en a o en b. ¿Tiene mínimo?

Ejemplo 11.1.5. La función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \\ x^2, & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

es convexa, pero no tiene mínimo absoluto aunque está acotada inferiormente.

11.2 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

La convexidad tiene consecuencias sobre el comportamiento de la función. Veremos que, salvo en los extremos del intervalo, es suficiente para obtener continuidad. De hecho, veremos un poco más, la convexidad conduce a la existencia de derivadas laterales en todos los puntos del interior del intervalo.

Lema 11.2.1 (de las tres secantes (L. Galvani)). *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función convexa. Sean* $x_1, x_2, x_3 \in I$ *tales que* $x_1 < x_2 < x_3$. *Se cumple que*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Demostración. Comenzamos con la primera desigualdad:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} &\iff f(x_2) - f(x_1) \leqslant (x_2 - x_1)\,\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \\
&\iff f(x_2) \leqslant f(x_1) + (x_2 - x_1))\,\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \\
&= \frac{f(x_1)(x_3 - x_1) + (x_2 - x_1)\,(f(x_3) - f(x_1))}{x_3 - x_1} \\
&= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot f(x_3)
\end{aligned}$$

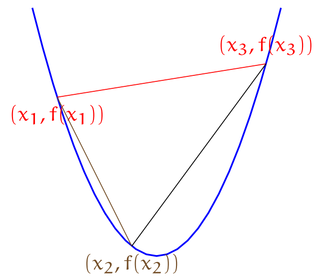

Figura 25: Fijado uno cualquiera de los extremos, la pendiente de las rectas secantes es una función creciente

y está última desigualdad es cierta aplicando la definición de convexidad a la terna x_1, x_2, x_3.

La segunda desigualdad se puede probar de la misma forma. □

Lema 11.2.2. *Sea* I *un intervalo,* $a \in I$ *y* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función convexa. Entonces la función* $f_a\colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \forall x \in I \setminus \{a\},$$

es creciente.

Demostración. Sean $x, y \in I \setminus a$ con $x < y$. Para comprobar que $f_a(x) \leqslant f_a(y)$ sólo hace falta aplicar el lema anterior tomando como x_1, x_2 y x_3, los puntos x, y y a en el orden que corresponda:

- si $x < y < a$, tomamos $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = a$;
- si $x < a < y$, tomamos $x_1 = x$, $x_2 = a$, $x_3 = y$;
- si $a < x < y$, tomamos $x_1 = a$, $x_2 = x$, $x_3 = y$. □

11.2.1 Continuidad, monotonía y convexidad

Lema 11.2.3. *Sea* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función creciente y sea* $c \in]a, b[$ *y* $N > 0$. *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

1) *La función tiene límites laterales en* c.
2) $D_N = \left\{c \in]a, b[\colon \lim\limits_{x\to c^+} f(x) - \lim\limits_{x\to c^-} f(x) > N\right\}$ *es finito.*

Demostración. 1) Basta aplicar el lema 4.3.7 a la restricción de f a los intervalos $]a, c[$ o $]c, b[$. Obsérvese que

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x\to c^+} f(x).$$

2) Si tenemos n puntos del conjunto D_N ordenados $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, entonces

$$\begin{aligned}
f(b) - f(a) &= f(b) - f(x_n) + f(x_n) + \cdots - f(x_1) + f(x_1) - f(a) \\
&\geqslant f(b) - \lim_{x\to x_n^+} f(x) + \lim_{x\to x_n^-} f(x) + \cdots + \lim_{x\to x_1^+} f(x) - f(a) \\
&\geqslant N \cdot n,
\end{aligned}$$

con lo que $n \leqslant (f(b) - f(a))/N$. Por tanto, D_N tiene que ser finito y tener menos de $(f(b) - f(a))/N$ elementos. $\square$

Teorema 11.2.4 (Continuidad y monotonía)**.** *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to$ *una función monótona.*

1) *La función* f *tiene límite laterales en todos los puntos de* $\mathring{I}$*. En particular,* f *sólo puede tener discontinuidades de salto en* $\mathring{I}$*.*

2) *El conjunto de discontinuidades de* f *es numerable.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que f es creciente. Si no basta con considerar $-f$.

1) Sea $c \in \mathring{I}$, entonces f restringida al intervalo $I \cap]-\infty, c[$ es una función creciente que está mayorada por $f(x)$ para cualquier $x > c$. Por tanto, f tiene límite por la izquierda en c. El límite por la derecha existe por el mismo motivo.

2) Dado que las únicas posibles discontinuidades son las discontinuidades son las de salto, si f no es continua en $c \in \mathring{I}$, eso quiere decir que los límites laterales son distintos y, por tanto, existe un natural n de forma que
$$\lim_{x \to c^+} f(x) - \lim_{x \to c^-} f(x) > \frac{1}{n}.$$
Sea $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones monótonnas de elementos de I tales que
$$\lim_{n \to \infty} a_n = \inf I, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = \sup I.$$
Entonces, el conjunto de discontinuidades de f
$$\begin{aligned} &\{x \in I : f \text{ no es continua en } x\} \\ &\qquad = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ t \in [a_n, b_n] : \lim_{x \to t^+} f(x) - \lim_{x \to t^-} (x) > \frac{1}{n} \right\} \end{aligned}$$
es numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos. $\square$

Teorema 11.2.5 (Continuidad y convexidad)**.** *Sea* I *un intervalo abierto y sea* $f\colon I \to$ *una función convexa.*

1) *La función* f *tiene derivadas laterales en todos los puntos. En particular,* f *es continua.*

2) f'_+ *y* f'_- *son funciones crecientes.*

3) *El conjunto de puntos donde* f *no es derivable es numerable.*

Demostración. 1) Usando la proposición 11.2.2 y el lema 4.3.7, se obtiene que f tiene derivadas laterales en todos los puntos de $\mathring{I}$.

2) Si $x, y \in \mathring{I}$ con $x < y$, entonces $f'_-(x) \leqslant f'_+(x) \leqslant f'_-(y) \leqslant f'_+(y)$. En particular f'_+ y f'_- son crecientes.

3) f es derivable en un punto $a \in I$ si, y sólo si, $f'_-(a) = f'_+(a)$ o, equivalentemente, si f'_+ y f'_- son continuas en a. Por tanto, los puntos donde f no es derivable son las discontinuidades de la función creciente f'_+ que ya hemos visto que son numerables. $\square$

11.3 CARACTERIZACIONES DE LA CONVEXIDAD

Teorema 11.3.1. *Sea* I *un intervalo y* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) f *es convexa.*
2) f' *es creciente.*
3) *Se cumple que* $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$ *para todo* $a, x \in I$.

Demostración. 1) ⇒ 2) Sean $a, b \in I$ con $a < b$. Tenemos que probar que $f'(a) \leqslant f'(b)$. Elegimos $x \in]a, b[$. Entonces

$$f'(a) \leqslant f_a(x) = f_x(a) \leqslant f_x(b) = f_b(x) \leqslant f'(b).$$

2) ⇒ 3) Distinguimos dos casos: $x < a$ y $x > a$. En ambos casos, el teorema nos dice que existe c entre a y x tal que

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a).$$

Usando que f' es creciente se obtiene la desigualdad buscada.

3) ⇒ 1) Sean $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ y sea $a = (1-t)x + ty$. Tenemos que demostrar que

$$f(a) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Para ello usamos el apartado anterior aplicado a x e y:

$$\begin{aligned}(1-t)f(x) + tf(y) &\geqslant (1-t)\left(f(a) + f'(a)(x-a)\right)\\ &\quad + t\left(f(a) + f'(a)(y-a)\right)\\ &= f(a)\left(1-t+t\right)\\ &\quad + f'(a)\left((1-t)(x-a) + t(y-a)\right)\\ &= f(a).\end{aligned}$$

□

Corolario 11.3.2. *Sea* I *un intervalo y* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función convexa dos veces derivable. Entonces* f *es convexa si, y sólo si,* $f''(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in I$.

Ejemplo 11.3.3.

1) Las funciones afines, polinomios de grado uno, son funciones convexas y cóncavas (véase el ejercicio 11.6).
2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^\alpha$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Por tanto, es convexa si $\alpha(\alpha-1) \geqslant 0$ lo que ocurre si $\alpha \leqslant 0$ o $\alpha \geqslant 1$.
3) La función exponencial es convexa y el logaritmo es cóncava.
4) $f(x) = x^3$ es convexa en $[0, +\infty[$ y cóncava en $]-\infty, 0]$.
5) $f(x) = \arctan(x)$, $f''(x) = -2x/(1+x^2)^2$. La función arcotangente es convexa en $]-\infty, 0]$ y cóncava en $[0, +\infty[$.

11.3.1 Puntos de inflexión*

FALTA

Es usual que el alumno escuche en algún momento la noción de punto de inflexión. Aunque no hay acuerdo total en su definición, parece que la más popular es un punto donde la función cambia de cóncava a convexa o viceversa. Hay definiciones más restrictivas que exigen derivabilidad. También hay variantes geométricas: un punto es de inflexión si la recta tangente corta a la gráfica de la función. No son definiciones equivalentes.

Definición 11.3.4. Sea I un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que $a \in \mathring{I}$ es un *punto de inflexión* de la función f si existe $r > 0$ tal que

1) f es convexa en $]a-r, a]$ y cóncava en $[a, a+r[$, o

2) f es cóncava en $]a-r, a]$ y convexa en $[a, a+r[$.

Proposición 11.3.5. *Sea* I *un intervalo y* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función dos veces derivable. Si* $a \in I$ *es un punto de inflexión de* f*, entonces* $f''(a) = 0$.

Ejemplo 11.3.6. El origen es un punto de inflexión de la función $f(x) = x^3$.

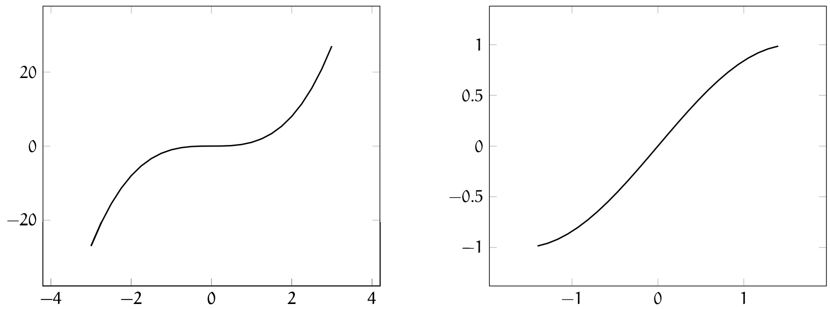

Figura 26: Las funciones x^3 y $\operatorname{sen}(x)$ tiene un punto de inflexión en el origen

Observación 11.3.7. Si la derivada de una función f se anula en un punto a, pero en dicho punto no se alcanza un extremo relativo ¿tiene la función f un punto de inflexión en a? (Véase [15, 27]) FALTA

11.4 EJERCICIOS

Ejercicio 11.1. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función convexa.

1) Si f tiene un mínimo relativo en un punto, entonces dicho mínimo es absoluto.

2) Supongamos que f es derivable. Si x_0 es un punto crítico de f, entonces f alcanza su mínimo absoluto en x_0. ¿Es cierto el mismo resultado si sólo suponemos que f es derivable en el punto crítico?

Ejercicio 11.2. La suma de funciones convexa es una función convexa. Dar un ejemplo de dos funciones convexas cuyo producto no lo sea.

Ejercicio 11.3. Encuentra los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$,

2) $f(x) = \log(1+x^2)$,

3) $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+1}$,

4) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$.

Ejercicio 11.4. Si I es un intervalo no trivial y $f\colon I \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces la función $g\colon I \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{f(x)}$ para todo $x \in I$, también es convexa.

Ejercicio 11.5. Sean I, J intervalos no triviales, $f\colon I \to J$ una función convexa y $g\colon J \to \mathbb{R}$ una función convexa y creciente. Prueba que $g \circ f$ es convexa.

Da un ejemplo que pruebe que la composición de funciones convexas no tiene que ser una función convexa.

Ejercicio 11.6. Recordemos que una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es *afín* si es de la forma $f(x) = mx + n$, esto es, un polinomio de orden 1. Demuestra las siguientes afirmaciones:

1) f es afín en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, $f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b)$ para cualesquiera t, a, $b \in \mathbb{R}$.
2) f es afín si, y sólo si, f es cóncava y convexa.
3) Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es convexa y existe $t \in]0,1[$ tal que $f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b)$, entonces f es afín en $[a,b]$.

Ejercicio 11.7. Sea I un intervalo abierto, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función convexa y $[a,b] \subset I$. Demuestra que existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x-y|, \quad \forall\, x, y \in [a,b].$$

Ejercicio 11.8. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa y acotada. Demuestra que f es constante.

Ejercicio 11.9. Sean a, $b \in \mathbb{R}^+$ y p, $q \in \mathbb{R}^+$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Prueba que se verifica

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Indicación: usa que el logaritmo neperiano es una función cóncava.

Ejercicio 11.10. Sea $f\colon [a,b] \to [a,b]$ una función verificando que $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$ para cualesquiera x, $y \in [a,b]$. Dado $x_1 \in [a,b]$, definimos $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$. Demuestra que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto fijo de f.