TEMA 1

Espacios topológicos

1.1. Espacios métricos

En estas notas supondremos que X es un conjunto no vacío.

Definición 1.1. Una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una *distancia* en X si verifica las siguientes propiedades:

D1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
D2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo par de puntos $x, y \in X$.
D3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, para todo trío de puntos $x, y, z \in X$.

Un *espacio métrico* es un par (X, d) formado por un conjunto no vacío X y una distancia d en X.

A la propiedad D2 se la llama propiedad de *simetría*. La propiedad D3 es la *desigualdad triangular*. Si se verifican las tres propiedades anteriores, entonces $d(x, y) \geqslant 0$ para todo par de puntos $x, y \in X$. Esta propiedad se sigue de $0 = d(x, x) \leqslant d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$.

Algunos ejemplos de espacios métricos son los siguientes:

Ejemplo 1.2. Si $x, y \in \mathbb{R}$, la función $d(x, y) := |x - y|$ define una distancia en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.3. Si E es un espacio vectorial Euclídeo, y $|| \cdot ||$ es la norma asociada al producto escalar, entonces la distancia asociada $d(u, v) := ||u - v||$ es una distancia en X.

Ejemplo 1.4. Un espacio vectorial E con una norma $|| \cdot ||$ es un espacio métrico con la distancia asociada.

Ejemplo 1.5 (Distancia discreta)**.** Sea X un conjunto no vacío. Definimos

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Las propiedades D1, D2 se verifican trivialmente. Para probar desigualdad triangular D3 distinguimos los casos $x = y$, $x \neq y$.

En la definición de distancia discreta se puede cambiar 1 por cualquier número real positivo.

Ejemplo 1.6 (Distancia del río)**.** Sean $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ puntos de $\mathbb{R}^2$. Definimos:

$$d(x, y) := \begin{cases} |x_2 - y_2|, & x_1 = y_1, \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & x_1 \neq y_1. \end{cases}$$

Las propiedades D1, D2 son también triviales. Para probar la desigualdad triangular D3 hay que distinguir los casos $x_1 = y_1$ y $x_1 \neq y_1$.

Ejemplo 1.7. Si $A \subset X$ es un subespacio de un espacio métrico (X, d), la *distancia inducida* en A es $d_A(x, y) := d(x, y)$ para todo $x, y \in A$. Es fácil comprobar que se verifican las propiedades de distancia.

Las siguientes definiciones son básicas en la teoría de espacios métricos:

Definición 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$, $r > 0$.

1. La *bola abierta* de centro a y radio r es el conjunto $B(a, r) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$.
2. La *bola cerrada* de centro a y radio r es el conjunto $\overline{B}(a, r) := \{x \in X : d(x, a) \leqslant r\}$.
3. La *esfera* de centro a y radio r es el conjunto $S(a, r) := \{x \in X : d(x, a) = r\}$.

Es inmediato comprobar que $S(a, r) = \overline{B}(a, r) \setminus B(a, r)$ y que $B(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$. Además, toda bola abierta contiene una bola cerrada. De hecho, si $r < s$, entonces $\overline{B}(x, r) \subset B(x, s)$.

Definición 1.9. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ es *abierto* si es vacío o bien si, para todo $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.

Definición 1.10. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $C \subset X$ es *cerrado* si su complementario $C^c = X \setminus C = \{x \in X : x \notin C\}$ es un conjunto abierto.

Definición 1.11. Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$. Un conjunto U es *entorno* de x si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$.

Ejemplo 1.12. En un espacio métrico discreto, se tiene:

$$B(x, r) = \begin{cases} \{x\}, & r \leqslant 1, \\ X, & r > 1. \end{cases}$$

Además, todo subconjunto de X es abierto y cerrado.

Tenemos las siguientes propiedades:

Proposición 1.13. *En un espacio métrico (X, d):*

1. *Las bolas abiertas con conjuntos abiertos.*
2. *Las bolas cerradas son conjuntos cerrados.*
3. *Los puntos son conjuntos cerrados.*

Demostración. 1. Tomamos la bola abierta $B(a, r)$. Si $b \in B(a, r)$, entonces $d(a, b) < r$. Definimos $s = r - d(a, b) > 0$. Veamos que $B(b, s) \subset B(a, r)$. Como el punto b es un punto arbitrario de la bola $B(a, r)$, deducimos que $B(a, r)$ es un conjunto abierto. Para comprobar la inclusión $B(b, s) \subset B(a, r)$ tomamos un punto $z \in B(b, s)$ y calculamos $d(x, a)$. Por la desigualdad triangular:

$$d(x, a) \leqslant d(x, b) + d(b, a) < s + d(a, b) = r.$$

Por tanto, $x \in B(a, r)$ como queríamos demostrar.

2. Tomamos la bola cerrada $\overline{B}(a, r)$. Comprobemos que el conjunto complementario

$$A = \{x \in X : d(x, a) > r\}$$

es un conjunto abierto. Para ello tomamos $b \in A$, de modo que $d(b, a) > r$. Definimos $s = d(a, b) - r > 0$. Veamos que $B(b, s) \subset A$. Como $b \in A$ es arbitrario, esto demostraría que A es un conjunto abierto. Para comprobar que $B(b,s) \subset A$ tomamos $x \in B(b,s)$ y calculamos

$$d(a,b) \leqslant d(a,x) + d(x,b) < d(x,a) + s,$$

lo que implica que $d(x,a) > d(a,b) - s = r$, como queríamos probar.

3. La demostración de que los puntos son conjuntos cerrados es similar a la anterior. □

Proposición 1.14. *En un espacio métrico, todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto en un espacio métrico (X,d). Para cada $x \in U$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x,r_x) \subset U$. Es fácil ver que:

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x),$$

lo que concluye la demostración. □

Proposición 1.15. *Sean a,b dos puntos distintos de un espacio métrico (X,d). Existe entonces un entorno V_a del punto a y otro entorno V_b del punto b tales que $V_a \cap V_b = \emptyset$.*

Demostración. Como $a \neq b$, la distancia $r = d(a,b)$ es positiva. Veamos que

$$B(a,r/2) \cap B(b,r/2) = \emptyset.$$

Si existiera un punto x en la intersección, por la desigualdad triangular

$$r = d(a,b) \leqslant d(a,x) + d(x,b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r = d(a,b)$$

llegamos a un absurdo. Por tanto $B(a,r/2) \cap B(b,r/2) = \emptyset$. El resultado se sigue tomando $V_a = B(a,r/2)$, $V_b = B(b,r/2)$. □

Proposición 1.16. *Sea (X,d) un espacio métrico. Tenemos entonces:*

1. *$\emptyset$, X son conjuntos abiertos.*
2. *Si $\{U_i\}_{i \in I}$ son conjuntos abiertos, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i$ es un conjunto abierto.*
3. *Si U, V son conjuntos abiertos, $U \cap V$ es un conjunto abierto.*

Demostración. 1. $\emptyset$ es un conjunto abierto por definición. Si $x \in X$, cualquier bola abierta centrada en x está contenida en X. Por tanto, X es un conjunto abierto.

2. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Existe entonces $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Como U_{i_0} es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Como x es un punto arbitrario de la unión, se sigue que $\bigcup_{i \in I} U_i$ es abierto.

3. Podemos suponer que $u \cap V \neq \emptyset$. Si $x \in U \cap V$, existen $r, s > 0$ tales que $B(x,r) \subset U$, $B(x,s) \subset V$. Tomando $t = \text{mín}\{r,s\}$ obtenemos que $B(x,t) \subset U \cap V$. Como el punto $x \in U \cap V$ es arbitrario, deducimos que $U \cap V$ es abierto. □

Definición 1.17. A la colección de conjuntos abiertos de un espacio métrico (X,d) la llamaremos *topología* asociada a d y la denotaremos por T_d. La familia de conjuntos cerrados se denotará por C_{T_d}.

En principio podríamos tener la misma topología asociada a dos distancias diferentes. La siguiente definición nos proporciona una condición adecuada.

Definición 1.18. Sea X un conjunto y d, d' dos distancias en X. Diremos que son equivalentes si existen $\delta, \varepsilon > 0$ tales que:

$$\delta d'(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant \varepsilon d'(x, y)$$

para todo par de puntos $x, y \in X$.

Teorema 1.19. *Dos distancias equivalentes tienen la misma topología asociada.*

Demostración. Supongamos que d, d' son distancias en las condiciones de la definición de distancias equivalentes. Si $x \in X$ entonces $d'(x, y) < r$ implica que $d(x, y) < \varepsilon r$. Por tanto $B'(x, r) \subset B(x, \varepsilon r)$. Análogamente $B(x, r) \subset B'(x, \delta^{-1} r)$.

Supongamos que U es un abierto para la topología asociada a d. Para todo $x \in U$ existe $s > 0$ tal que $B(x, s) \subset U$. Entonces $B'(x, \varepsilon^{-1} s) \subset B(x, s) \subset U$ y, por tanto, U es un abierto para la topología inducida por d'. esto demuestra $T_d \subset T_{d'}$. Análogamente se demuestra que $T_{d'} \subset T_d$. □

1.2. Espacios topológicos