Tema 4

Compacidad y conexión

Estudiamos ahora dos propiedades clave de las funciones continuas entre espacios métricos, que generalizan sendos teoremas bien conocidos para funciones reales de variable real: el de Bolzano o del valor intermedio, acerca de la imagen de un intervalo por una función continua, y el de Weierstrass para el caso particular de un intervalo cerrado y acotado.

Para generalizar el segundo de estos teoremas, empezamos por estudiar, para subconjuntos de un espacio métrico, la noción de *acotación*. A diferencia de otras que hemos manejado hasta ahora, la acotación no es una propiedad topológica, no se conserva al cambiar la distancia del espacio por otra equivalente. Sin embargo, sí se conserva en un espacio normado, al cambiar la norma por otra equivalente, lo que permite manejarla cómodamente en $\mathbb{R}^N$. Probamos sin dificultad la versión para $\mathbb{R}^N$ del teorema de Bolzano-Weierstrass, afirmando que toda sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$ admite una sucesión parcial convergente.

Para llegar a una visión más abstracta y general del teorema de Weierstrass, estudiamos la noción de *compacidad*, más fuerte que la acotación. Esta vez sí se trata de una propiedad topológica, pero no usaremos la noción general de compacidad en espacios topológicos, sino otra propiedad mucho más sencilla que, para espacios métricos, es equivalente a la compacidad. La preservación de la compacidad por funciones continuas es la versión abstracta del teorema de Weierstrass que vamos buscando.

Como consecuencia fundamental de dicha versión, probaremos un teorema de Hausdorff, afirmando que todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes. Esto clarifica definitivamente la definición de la topología usual de $\mathbb{R}^N$, no sólo es la topología de la norma euclídea, la de la suma o la del máximo, es la topología de cualquier norma que queramos usar en $\mathbb{R}^N$. Más aún, se puede hablar sin ninguna ambigüedad de dicha topología en cualquier espacio vectorial de dimensión N, pues no depende de la base que usemos para identificar tal espacio con $\mathbb{R}^N$.

Si el análisis general del teorema de Weierstrass nos ha llevado al estudio de la compacidad, el teorema del valor intermedio nos lleva directamente a otra importante propiedad topológica, la *conexión*, que también estudiamos brevemente. Como una condición suficiente, muy intuitiva, para que un subconjunto de un espacio normado sea conexo, usamos una propiedad puramente algebraica como es la *convexidad*.

4.1. Acotación en espacios métricos

La acotación, un concepto muy útil para trabajar en $\mathbb{R}$, nace ligada al orden de $\mathbb{R}$, y de hecho se puede hablar de acotación en cualquier conjunto ordenado. Pero también podemos caracterizar la acotación mediante la distancia usual de $\mathbb{R}$, lo que permite hablar de acotación en cualquier espacio métrico. Concretamente, las bolas abiertas en $\mathbb{R}$ son los intervalos abiertos acotados, luego un subconjunto de $\mathbb{R}$ está acotado si, y sólo si, está incluido en una bola abierta, o lo que es lo mismo, en una bola cerrada. Queda así motivada la definición que sigue.

Se dice que un subconjunto de un espacio métrico está **acotado**, cuando está incluido en una bola. Observamos enseguida que el centro de dicha bola puede elegirse a voluntad:

- *Si A es un subconjunto acotado de un espacio métrico E, entonces, para todo $x \in E$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset B(x,r)$.*

Sean $x_0 \in E$ y $r_0 \in \mathbb{R}^+$ tales que $A \subset B(x_0, r_0)$. Si d es la distancia de E, dado $x \in \mathbb{R}$, para todo $a \in A$ tenemos

$$d(a,x) \leqslant d(a,x_0) + d(x_0,x) < r_0 + d(x_0,x)$$

luego $A \subset B(x,r)$ sin más que tomar $r = r_0 + d(x_0,x)$. ■

Es obvio que todo subconjunto finito de un espacio métrico E, está acotado. El siguiente paso es pensar en un subconjunto numerable de E, o lo que es lo mismo, en el conjunto de los términos de una sucesión de puntos de E. Naturalmente, si $x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que $\{x_n\}$ es una **sucesión acotada** cuando el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado. Esto equivale claramente a que exista $z \in E$ tal que la sucesión $\{d(x_n,z)\}$ esté acotada. Ahora es obvia la relación entre sucesiones convergentes y acotadas: si $\{x_n\} \to x \in E$, de $\{d(x_n,x)\} \to 0$ deducimos que la sucesión $\{d(x_n,x)\}$ está acotada. Así pues:

- *En cualquier espacio métrico, toda sucesión convergente está acotada.*

Por supuesto, el recíproco es falso: en cualquier espacio métrico que contenga al menos dos puntos, es fácil dar ejemplos de sucesiones acotadas que no son convergentes.

Es importante resaltar que la acotación no es una propiedad topológica: cuando sustituimos la distancia de un espacio métrico por otra equivalente, un subconjunto acotado puede dejar de serlo, y viceversa, como vamos a ver.

Ejemplo. *Dos distancias equivalentes que no dan lugar a los mismos conjuntos acotados.*

Si d es una distancia cualquiera en un conjunto no vacío E, podemos definir otra distancia ρ en E de la siguiente forma:

$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \qquad \forall x,y \in E \tag{1}$$

Comprobemos que ρ es una distancia en E, equivalente a d. De entrada, para $x,y \in E$ es evidente que $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, mientras que $\rho(x,y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

Para la desigualdad triangular usamos que la función $t \mapsto t/(1+t)$, de $\mathbb{R}_0^+$ es sí mismo, es creciente. Entonces, para $x,y,z \in E$ tenemos

$$\begin{aligned}\rho(x,z) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leqslant \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leqslant \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = \rho(x,y)+\rho(y,z)\end{aligned}$$

Observamos además que

$$\rho(x,y) < 1 \qquad \text{y} \qquad d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1-\rho(x,y)} \qquad \forall x,y \in E \tag{2}$$

En vista de (1) y (2) vemos claramente que si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E y $x \in E$, entonces $\{d(x_n,x)\} \to 0$ si, y sólo si, $\{\rho(x_n,x)\} \to 0$. Así pues, las distancias d y ρ dan lugar a las mismas sucesiones convergentes, luego son equivalentes.

Finalmente, es claro que todo subconjunto de E está acotado para la distancia ρ, cosa que no tiene por qué ocurrir para d. Por ejemplo, d podría ser la distancia usual de $\mathbb{R}$. ■

4.2. Teorema de Bolzano-Weierstrass

En un espacio normado X usamos siempre, como ya hemos dicho, la distancia asociada a su norma. Entonces, un conjunto $A \subset X$ está acotado si, y sólo si, está contenido en una bola de centro 0, lo que equivale a que A esté **acotado en norma**, es decir, a que el conjunto de números reales $\{\|x\| : x \in A\}$ esté mayorado:

$$A \text{ acotado} \iff \exists M > 0 : \|x\| \leqslant M \quad \forall x \in A$$

Si $\|\cdot\|'$ es otra norma en X, y existe $\rho > 0$ tal que $\|x\|' \leqslant \rho\|x\|$ para todo $x \in X$, está claro que todo conjunto acotado para la norma $\|\cdot\|$ lo estará también para $\|\cdot\|'$. Cuando ambas normas son equivalentes, podemos intercambiarlas, y obtenemos:

- *Dos normas equivalentes en un espacio vectorial dan lugar a los mismos subconjuntos acotados.*

En particular, en $\mathbb{R}^N$ podemos hablar sin ambigüedad de subconjuntos acotados, son los acotados para cualquier norma cuya topología sea la usual de $\mathbb{R}^N$. Podemos averiguar si un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ está acotado viendo lo que ocurre en cada coordenada. De hecho, lo mismo es cierto en cualquier producto de espacios normados:

- *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_N$ espacios normados y $X = \prod_{k=1}^{N} X_k$ el espacio normado producto. Un subconjunto $A \subset X$ está acotado si, y sólo si, el conjunto $A_k = \{x(k) : x \in A\}$ está acotado, para todo $k \in I_N$.*

Si A está acotado tenemos $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|x\|_\infty \leqslant M$ para todo $x \in A$. Fijado un $k \in I_N$, para todo $x \in A$ se tiene $\|x(k)\| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant M$, luego A_k está acotado. Recíprocamente, supongamos que, para cada $k \in I_N$, el conjunto A_k está acotado y sea $M_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|x(k)\| \leqslant M_k$ para todo $x \in A$. Tomando $M = \max\left\{M_k : k \in I_N\right\}$, es claro que $\|x\|_\infty \leqslant M$ para todo $x \in A$, con lo que A está acotado. ■

Como caso particular del último resultado, para una sucesión $\{x_n\}$ de vectores de $\mathbb{R}^N$, tenemos:

$$\{x_n\} \text{ está acotada} \quad \Longleftrightarrow \quad \{x_n(k)\} \text{ está acotada} \quad \forall k \in I_N$$

Para sucesiones convergentes teníamos la equivalencia análoga, luego podemos ya adivinar que el principal resultado sobre convergencia de sucesiones de números reales también será cierto en $\mathbb{R}^N$, pero debemos salvar un pequeño obstáculo.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$, para cada $k \in I_N$ la sucesión de números reales $\{x_n(k)\}$ admite una sucesión parcial convergente. El problema es que, en principio, dicha sucesión parcial se obtiene mediante una aplicación $\sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que depende de k, y no tenemos una sola sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ tal que $\{x_{\sigma(n)}(k)\}$ sea convergente *para todo* $k \in I_N$, para concluir que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es convergente. La forma de resolver este problema se puede adivinar: extraer sucesiones parciales en un proceso iterativo, de forma que en cada paso se consigue la convergencia en una nueva componente, manteniendo la de las anteriores. Este proceso se entiende mejor si razonamos por inducción.

Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Toda sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$ admite una sucesión parcial convergente.*

Demostración. Razonamos por inducción sobre N. La etapa base está clara, sabemos que el teorema es cierto para $N = 1$. Suponiendo que es cierto en $\mathbb{R}^N$, lo demostramos en $\mathbb{R}^{N+1}$. Sea pues $\{x_n\}$ una sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^{N+1}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escribiendo $y_n(k) = x_n(k)$ para todo $k \in I_N$ tenemos $y_n \in \mathbb{R}^N$, y hemos conseguido así una sucesión $\{y_n\}$ de vectores de $\mathbb{R}^N$, que evidentemente está acotada. Por la hipótesis de inducción, $\{y_n\}$ admite una sucesión parcial convergente $\{y_{\varphi(n)}\}$. Tenemos así que $\{x_{\varphi(n)}(k)\} = \{y_{\varphi(n)}(k)\}$ converge para todo $k \in I_N$. Ahora $\{x_{\varphi(n)}(N+1)\}$ es una sucesión acotada de números reales, que admitirá una sucesión parcial convergente $\{x_{\varphi(\tau(n))}(N+1)\}$. Definiendo $\sigma = \varphi \circ \tau$ es claro que $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Por un parte sabemos que $\{x_{\sigma(n)}(N+1)\}$ es convergente, pero por otra, para todo $k \in I_N$, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}(k)\}$ también converge, pues se trata de una sucesión parcial de $\{x_{\varphi(n)}(k)\}$, que era convergente. En resumen, tenemos que $\{x_{\sigma(n)}(k)\}$ es convergente para todo $k \in I_{N+1}$, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ converge. ■

Es un gran error pensar que el teorema de Bolzano-Weierstrass pueda ser cierto en cualquier espacio normado, no digamos ya en cualquier espacio métrico. De hecho se puede probar que *en todo espacio normado de dimensión infinita existe una sucesión acotada que no admite ninguna sucesión parcial convergente*.

4.3. Compacidad

El teorema de Bolzano-Weierstrass motiva una propiedad muy deseable para un espacio métrico, que ahora vamos a estudiar. Se dice que un espacio métrico E es **compacto** cuando toda sucesión de puntos de E admite una sucesión parcial convergente. Se trata claramente de una propiedad topológica, pues se define mediante la convergencia de sucesiones, pero conviene aclarar que esta no es la noción de compacidad que se usa en espacios topológicos generales, sino otra que no vamos a explicar. Ambas nociones no son equivalentes en general, pero sí lo son para espacios métricos.

Si E es un espacio métrico y $A \subset E$, diremos que A es un subconjunto compacto de E cuando A sea un espacio métrico compacto con la distancia inducida por la de E. Claramente, esto significa que toda sucesión de puntos de A admite una sucesión parcial que converge a un punto de A. Enseguida encontramos dos condiciones necesarias para que A sea compacto:

- *Sea A un subconjunto compacto de un espacio métrico E. Entonces A está acotado y es un subconjunto cerrado de E.*

Suponiendo que A no está contenido en ninguna bola llegaremos a contradicción. Fijado un punto cualquiera $x \in E$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $d(x_n, x) > n$. Entonces $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $a \in A$, es decir, $\{d(x_{\sigma(n)}, a)\} \to 0$. Pero $d(x_{\sigma(n)}, x) \leqslant d(x_{\sigma(n)}, a) + d(a, x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego la sucesión $\{d(x_{\sigma(n)}, x)\}$ está mayorada, lo cual es una contradicción, ya que $d(x_{\sigma(n)}, x) \geqslant \sigma(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea ahora $x \in \overline{A}$ y $\{a_n\}$ una sucesión de puntos de A con $\{a_n\} \to x$. Por ser A compacto, tenemos una sucesión parcial $\{a_{\sigma(n)}\}$ que converge a un $a \in A$, pero también $\{a_{\sigma(n)}\} \to x$, luego $x = a \in A$. Esto prueba que $\overline{A} \subset A$, es decir, A es cerrado. ■

En general, las dos condiciones necesarias para la compacidad que acabamos de encontrar están muy lejos de ser suficientes. Sin embargo, para subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, usando el teorema de Bolzano-Weierstrass, sí conseguimos el recíproco del resultado anterior:

- *Un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

Ya hemos visto que una implicación es válida, no sólo en $\mathbb{R}^N$, sino en cualquier espacio métrico. Para el recíproco, sea A un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^N$. Toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A es una sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$, y el teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que $\{a_n\}$ admite una sucesión parcial $\{a_{\sigma(n)}\}$ que converge a un vector $x \in \mathbb{R}^N$. Como A es cerrado, tenemos $x \in A$, lo que prueba que toda sucesión de puntos de A admite una sucesión parcial que converge a un punto de A, es decir, A es compacto. ■

Recordemos el teorema de Weierstrass que conocemos para funciones reales de variable real. Teniendo en cuenta lo que acabamos de probar, dicho teorema afirmaba que la imagen de un intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$ por una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ también es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Conseguiremos ahora muy fácilmente un resultado mucho más general.

Teorema. *Sean E y F dos espacios métricos y $f : E \to F$ una función continua. Si E es compacto, entonces $f(E)$ es compacto.*

Demostración. Dada una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de $f(E)$, deberemos probar que $\{y_n\}$ admite una sucesión parcial que converge a un punto de $f(E)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existirá un punto $x_n \in E$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como, por hipótesis, E es un espacio métrico compacto, la sucesión $\{x_n\}$ admitirá una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $x \in E$. Por ser f continua deducimos que $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, es decir, $\{y_{\sigma(n)}\} \to f(x) \in f(E)$. ■

Merece la pena destacar una consecuencia importante, que se obtiene tomando $F = \mathbb{R}$. Observamos que todo conjunto compacto no vacío $K \subset \mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo. En efecto, sabemos que K está acotado y entonces, tanto el supremo como el ínfimo de K son puntos adherentes a K, pero K es cerrado, luego ambos pertenecen a K, así que K tiene máximo y mínimo. Si ahora E es un espacio métrico compacto y $f : E \to \mathbb{R}$ es continua, el teorema anterior nos dice que $f(E)$ es compacto, luego tiene máximo y mínimo. Esto es tanto como decir que f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en sendos puntos de E:

- *Si E es un espacio métrico compacto y $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua, existen $u, v \in E$ tales que $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in E$.*

El resultado anterior se aplica obviamente al caso en que E es un subconjunto compacto, es decir, cerrado y acotado, de $\mathbb{R}^N$.

4.4. Teorema de Hausdorff

La equivalencia entre la norma euclídea, la del máximo y la de la suma, comprobada en su momento, no es más que un caso muy particular del siguiente resultado:

Teorema ***(Hausdorff, 1932).*** *Todas las normas en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes.*

Demostración. Bastará ver que toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^N$ es equivalente a la norma de la suma $\|\cdot\|_1$. Sea $\{e_k : k \in I_N\}$ la base usual de $\mathbb{R}^N$ y tomemos $\rho = \max\{\|e_k\| : k \in I_N\}$. Por ser $\|\cdot\|$ una norma, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ tenemos

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{N} x(k)\, e_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x(k)|\, \|e_k\| \leqslant \rho \sum_{k=1}^{N} |x(k)| = \rho\, \|x\|_1$$

Hemos conseguido, así de fácilmente, una de las dos desigualdades que buscamos:

$$\exists\, \rho \in \mathbb{R}^+ \,:\, \|x\| \leqslant \rho\, \|x\|_1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{3}$$

Debemos ahora encontrar $\lambda \in \mathbb{R}^+$ que verifique $\lambda \|x\|_1 \leqslant \|x\|$, también para todo $x \in \mathbb{R}^N$. En particular, si $\|x\|_1 = 1$ se deberá tener $\|x\| \geqslant \lambda$, lo que nos indica cómo encontrar λ.

Consideramos por tanto el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_1 = 1\}$, que es cerrado y acotado, luego compacto, para la topología usual de $\mathbb{R}^N$. Además, la función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es continua, pues de hecho, usando (3) tenemos:

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x - y\| \leqslant \rho\, \|x - y\|_1 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Deducimos que la función continua $\|\cdot\|$ tiene mínimo en el conjunto compacto S, lo que nos permite tomar $\lambda = \min\{\, \|x\| : x \in S\}$. Como $\lambda = \|x_0\|$ para algún $x_0 \in S$, será $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Además, para $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tenemos:

$$\frac{x}{\|x\|_1} \in S, \quad \text{luego} \quad \lambda \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \quad \text{es decir,} \quad \lambda\|x\|_1 \leqslant \|x\|$$

Esta desigualdad es obvia para $x = 0$ y hemos probado que

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+ : \lambda\|x\|_1 \leqslant \|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{4}$$

En vista de (3) y (4) las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes, como queríamos. ■

En algunos resultados ya estudiados anteriormente, se hablaba de una norma en $\mathbb{R}^N$ cuya topología sea la usual de $\mathbb{R}^N$. El teorema anterior deja claro que dicha condición es automática, la topología de cualquier norma en $\mathbb{R}^N$ es siempre la usual de $\mathbb{R}^N$. Así pues, por ejemplo, los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^N$ son los mismos para todas las normas en $\mathbb{R}^N$. Para resaltar mejor el contenido del teorema de Hausdorff, es conveniente hacer un enunciado que, formalmente, es más general:

Teorema. *Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.*

Demostración. Si X es un espacio vectorial de dimensión $N \in \mathbb{N}$, existe una biyección lineal $\Phi : \mathbb{R}^N \to X$. Cualesquiera dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en X, se "trasladan" a $\mathbb{R}^N$ mediante la aplicación Φ. Más concretamente, basta definir, para todo $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\|y\|_1' = \|\Phi(y)\|_1 \qquad \text{y} \qquad \|y\|_2' = \|\Phi(y)\|_2$$

Es rutinario comprobar que de esta forma se obtienen dos normas en $\mathbb{R}^N$ que, por el teorema anterior, son equivalentes, es decir, existen constantes $\lambda, \rho \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$\lambda\|y\|_1' \leqslant \|y\|_2' \leqslant \rho\,\|y\|_1' \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N$$

Entonces, para cada $x \in X$ podemos tomar $y = \Phi^{-1}(x)$ para obtener

$$\lambda\|x\|_1 = \lambda\|y\|_1' \leqslant \|y\|_2' = \|x\|_2 = \|y\|_2' \leqslant \rho\,\|y\|_1' = \rho\,\|x\|_1$$

luego las normas de partida en X también son equivalentes, como queríamos. ■

Expliquemos el interés de este enunciado que, como hemos visto, es equivalente al teorema de Hausdorff. La clave está en que, al hablar de $\mathbb{R}^N$, inevitablemente tenemos en mente su base usual, mientras que al hablar de un espacio vectorial de dimensión N, digamos X, está claro que no estamos pensando en ninguna base concreta de X.

El primer enunciado nos dice que, si fijamos una base de X e identificamos X con $\mathbb{R}^N$, todas las normas en X tienen la misma topología, pero esa topología podría depender de la forma en que hemos identificado X con $\mathbb{R}^N$, es decir, de la base fijada en X. El segundo enunciado deja claro que no hay tal dependencia, en el espacio X hay una topología común a todas las normas, que no depende de ninguna base que podamos fijar en X para identificarlo con $\mathbb{R}^N$.

La situación cambia drásticamente cuando consideramos espacios vectoriales de dimensión infinita. Aunque no vamos a demostrarlo, porque tampoco vamos a tener ocasión de usarlo, conviene conocer el siguiente resultado: *en todo espacio vectorial de dimensión infinita, existen dos normas que no son equivalentes.*

4.5. Conexión

Estudiamos ahora la propiedad topológica que nos va a permitir obtener una versión general para espacios métricos del teorema del valor intermedio que conocemos para funciones reales de variable real, afirmando que la imagen por una función continua de un intervalo es un intervalo. Es natural preguntarse qué condición debe cumplir un espacio métrico E para poder asegurar que la imagen de toda función continua de E en $\mathbb{R}$ sea un intervalo.

Para encontrar esta condición, supongamos que $f : E \to \mathbb{R}$ es continua, pero su imagen no es un intervalo. Por la caracterización de los intervalos, existen $\alpha, \beta \in f(E)$, con $\alpha < \beta$, y existe también un $\lambda \in]\alpha, \beta[$ tal que $\lambda \notin f(E)$. Consideramos entonces los conjuntos

$$U = \{x \in E : f(x) < \lambda\} \qquad \text{y} \qquad V = \{x \in E : f(x) > \lambda\}$$

Como f es continua, U y V son subconjuntos abiertos de E, ya que son las imágenes inversas por f de dos semirrectas abiertas de $\mathbb{R}$. Por ser $\alpha \in f(E)$, existe $a \in E$ tal que $f(a) = \alpha < \lambda$ luego $a \in U$ y $U \neq \emptyset$. Análogamente, de $\beta \in f(E)$ deducimos $V \neq \emptyset$. Además, como $\lambda \notin f(E)$, para $x \in E$ se tiene, o bien $f(x) < \lambda$ y $x \in U$, o bien $f(x) > \lambda$ y $x \in V$, así que $E = U \cup V$. Finalmente, es evidente que $U \cap V = \emptyset$. En resumen, si existe una función continua $f : E \to \mathbb{R}$ tal que $f(E)$ no es un intervalo, entonces E se puede expresar como unión de dos subconjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos. Enseguida veremos que el recíproco también es cierto, lo que motiva la siguiente definición.

Decimos que un espacio métrico E es **conexo**, cuando no se puede expresar como unión de dos subconjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos. Conviene reformular esta condición negativa como una implicación. Decir que dos subconjuntos abiertos de E, digamos U y V, no pueden cumplir las cuatro condiciones $U \cup V = E$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$, equivale obviamente a decir que, si U y V cumplen algunas de esas condiciones, no pueden cumplir las restantes. Esto deja varias posibilidades entre las que destacamos por ejemplo la siguiente:

$$U = U^\circ, \;\; V = V^\circ, \;\; U \cup V = E, \;\; U \cap V = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad U = \emptyset \;\; \text{o} \;\; V = \emptyset$$

A su vez, esta implicación puede expresarse de manera que sólo aparezca uno de los dos conjuntos, digamos U. En efecto, las condiciones $U \cup V = E$ y $U \cap V = \emptyset$ equivalen a que se tenga $V = E \setminus U$, y entonces, decir que V es abierto equivale a decir que U es cerrado. En cuanto a la conclusión, es claro que $V = \emptyset$ equivale a $U = E$.

Por tanto, la implicación anterior equivale a

$$U \subset E\,,\;\; U^\circ = U = \overline{U} \quad \Longrightarrow \quad U = \emptyset \;\;\text{o}\;\; U = E$$

Así pues, vemos que *un espacio métrico E es conexo si, y sólo si, $\emptyset$ y E son los únicos subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados*.

Resaltamos que la conexión es una propiedad topológica, se expresa usando sólo conjuntos abiertos y se puede definir de la misma forma para espacios topológicos cualesquiera. Veamos ya que esta propiedad responde adecuadamente a la pregunta planteada como motivación:

- *Para un espacio métrico E, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  (i) *E es conexo.*
  (ii) *La imagen de toda función continua de E en $\mathbb{R}$ es un intervalo.*
  (iii) *Toda función continua de E en $\{0,1\}$ es constante.*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Hemos visto anteriormente que si E no verifica (ii), no puede ser conexo, pero merece la pena repetir el razonamiento de forma más directa. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es una función continua, para probar que $f(E)$ es un intervalo, tomamos $\alpha, \beta \in f(E)$ con $\alpha < \beta$, y $a, b \in E$ tales que $f(a) = \alpha$ y $f(b) = \beta$. Fijado $\lambda \in]\alpha, \beta[$, debemos probar que $\lambda \in f(E)$. Para ello consideramos los conjuntos abiertos

$$U = f^{-1}\big(]-\infty, \lambda[\big) \qquad \text{y} \qquad V = f^{-1}\big(]\lambda, +\infty[\big)$$

Tenemos $U \neq \emptyset$ porque $a \in U$, y $V \neq \emptyset$ porque $b \in V$. También es obvio que $U \cap V = \emptyset$. Por ser E conexo, no podrá ser $E = U \cup V$, luego ha de existir $x \in E \setminus (U \cup V)$. Entonces $x \notin U$, luego $f(x) \geqslant \lambda$, y $x \notin V$, luego $f(x) \leqslant \lambda$. Por tanto, $\lambda = f(x) \in f(E)$ como queríamos.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Toda función continua $f : E \to \{0,1\}$ es una función continua de E en $\mathbb{R}$, luego tenemos que $f(E)$ es un intervalo contenido en $\{0,1\}$, lo que implica que f es constante.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Si U es un subconjunto abierto y cerrado de E, podemos considerar la función *característica* $\chi_U : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_U(x) = 1 \quad \forall x \in U \qquad \text{y} \qquad \chi_U(x) = 0 \quad \forall x \in E \setminus U$$

Puesto que U y $E \setminus U$ son abiertos y χ_U es constante en cada uno de esos conjuntos, el carácter local de la continuidad nos dice que χ_U es continua. De (iii) deducimos que χ_U es constante, luego $U = E$ o $U = \emptyset$. ■

Lógicamente, decimos que un subconjunto A de un espacio métrico E es conexo, cuando A es un espacio métrico conexo con la distancia inducida por la de E. Es importante resaltar que entonces, en la definición de espacio métrico conexo debemos obviamente usar subconjuntos abiertos de A, que no tienen por qué ser abiertos de E.

Por el teorema del valor intermedio, todo intervalo es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, puesto que verifica la afirmación (ii) anterior. Recíprocamente, si A es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, como la inclusión $I : A \to \mathbb{R}$, definida por $I(x) = x$ para todo $x \in A$, es continua, deducimos que $I(A) = A$ es un intervalo. Tenemos así una caracterización *topológica* de los intervalos:

- *Un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *es conexo si, y sólo si, es un intervalo.*

Queda claro ahora que el siguiente resultado es la generalización, para funciones continuas entre espacios métricos cualesquiera, del teorema del valor intermedio:

Teorema. *Sean* E *y* F *espacios métricos y* $f : E \to F$ *una función continua. Si* E *es conexo, entonces* $f(E)$ *es un subconjunto conexo de* F.

Demostración. Para toda función continua $g : f(E) \to \mathbb{R}$ tenemos que $g \circ f$ es continua, luego de ser E conexo deducimos que $\big(g \circ f\big)(E)$ es un intervalo. Así pues, la imagen de toda función continua de $f(E)$ en $\mathbb{R}$ es un intervalo, luego $f(E)$ es conexo.

Merece la pena mostrar un razonamiento alternativo. Si V es un subconjunto abierto y cerrado de $f(E)$, la continuidad de f nos dice que $U = f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto y cerrado de E. Como E es conexo, tenemos $U = \emptyset$, o bien $U = E$. Por ser $V \subset f(E)$, tenemos que $V = f(U)$, luego $V = \emptyset$ o $V = f(E)$. ■

Uniendo las dos propiedades básicas de las funciones continuas que hemos estudiado, en el caso particular de funciones con valores reales, tenemos la siguiente conclusión:

- *Si* E *es un espacio métrico compacto y conexo, y* $f : E \to \mathbb{R}$ *es una función continua, entonces* $f(E)$ *es un intervalo cerrado y acotado.*

4.6. Conjuntos convexos

A poco que se piense, comprobar en la práctica que un espacio métrico es conexo no es fácil. Por ejemplo, sabemos que $\mathbb{R}$ es conexo, pero no está nada claro que $\mathbb{R}^N$ lo sea, para $N > 1$. Si queremos sacar provecho de la versión recién probada del teorema del valor intermedio, debemos disponer de condiciones suficientes para que un espacio métrico sea conexo, que sean fáciles de comprobar. Para conseguirlas, empezamos caracterizando de nuevo la conexión:

- *Un espacio métrico* E *es conexo si, y sólo si, para cualesquiera dos puntos* $x, y \in E$ *existe un conjunto conexo* $C \subset E$*, tal que* $x, y \in C$.

Obviamente, si E es conexo, basta tomar $C = E$ para cualesquiera $x, y \in E$. Para probar el recíproco, suponiendo $E = U \cup V$ con U y V abiertos no vacíos, debemos ver que $U \cap V \neq \emptyset$. Tomados $x \in U$ e $y \in V$, existe un conjunto conexo $C \subset E$ tal que $x, y \in C$. Vemos que $U \cap C$ y $V \cap C$ son subconjuntos abiertos de C, que no son vacíos, porque $x \in U \cap C$ e $y \in V \cap C$, y es claro que $C = (E \cap C) = (U \cup V) \cap C = (U \cap C) \cup (V \cap C)$. Por tanto, al ser C es conexo, deducimos que $(U \cap C) \cap (V \cap C) \neq \emptyset$, luego $U \cap V \neq \emptyset$ como se quería. ■

Así pues, podemos decir que un espacio métrico E es conexo cuando cualesquiera dos puntos de E están *conectados*, en el sentido de que existe un subconjunto conexo de E que los contiene. Es bien fácil adivinar cómo podemos *conectar* dos puntos de un espacio normado, basta usar el segmento que los une.

Un subconjunto E de un espacio vectorial X es **convexo** cuando, para cualesquiera dos puntos de E, el segmento que los une está contenido en E, es decir:

$$x, y \in E \implies \big\{ (1-t)x + t\,y \,:\, t \in [0,1] \big\} \subset E$$

Nótese que la convexidad es una propiedad algebraica, tiene sentido en cualquier espacio vectorial. Es claro que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es convexo si, y sólo si, es un intervalo, pues para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, se tiene que $\big\{ (1-t)x + t\,y : t \in [0,1] \big\} = [x, y]$. Tenemos pues una caracterización algebraica de los intervalos y, para un subconjunto de $\mathbb{R}$, ser convexo equivale a ser conexo. En todo espacio normado se tiene una implicación:

- *Todo subconjunto convexo de un espacio normado es conexo.*

Sea E un subconjunto convexo de un espacio normado y fijemos $x, y \in E$. Consideramos la función $f : [0,1] \to E$ dada por $f(t) = (1-t)x + t\,y$ para todo $t \in [0,1]$ y comprobamos sin dificultad que f es continua. De hecho, para $s, t \in [0,1]$ se tiene claramente

$$\| f(s) - f(t) \| = \| (t-s)(x-y) \| = |t-s| \, \|x-y\|$$

Como $[0,1]$ es conexo y f es continua, deducimos que la imagen de f es un subconjunto conexo de E, que claramente contiene a los puntos $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Puesto que x e y eran puntos arbitrarios de E, el resultado anterior nos dice que E es conexo. ■

Por ejemplo, vemos que el propio espacio normado X es conexo, e igual le ocurre a toda bola en X, abierta o cerrada, que siempre es un conjunto convexo. En efecto, si $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, para cualesquiera $x, y \in B(a,r)$ y $t \in [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned} \| (1-t)x + t\,y - a \| &= \| (1-t)(x-a) + t(y-a) \| \\ &\leqslant (1-t)\,\|x-a\| + t\,\|y-a\| < (1-t)\,r + t\,r = r \end{aligned}$$

Para una bola cerrada el razonamiento es análogo. Por supuesto, todo lo dicho para un espacio normado, se aplica en particular a $\mathbb{R}^N$ con cualquier norma.

Con el fin de poner ejemplos de subconjuntos conexos de un espacio normado, que no sean convexos, conviene hacer la siguiente observación:

- *Sean C y D subconjuntos conexos de un espacio métrico. Si $C \cap D \neq \emptyset$, entonces $C \cup D$ es conexo.*

Dada una función continua $f : C \cup D \to \{0,1\}$, probaremos que f es constante. Puesto que las restricciones de f a C y D con continuas, de ser C y D conexos deducimos que f toma un sólo valor en C y un sólo valor en D. Pero ambos valores han de ser iguales, ya que $C \cap D \neq \emptyset$, luego f es constante como se quería. ■

Consideremos por ejemplo en $\mathbb{R}^2$ los semiplanos $C = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ y $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, que son convexos, luego conexos. Como $C \cap D \neq \emptyset$ el resultado anterior nos dice que $C \cup D$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, que claramente no es convexo.

4.7. Ejercicios

1. Probar que dos normas definidas en un mismo espacio vectorial, que den lugar a los mismos conjuntos acotados, han de ser equivalentes.

2. Dado un subconjunto A de un espacio normado, probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) A está acotado
   (ii) Si $\{a_n\}$ es una sucesión de puntos de A y $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números reales tal que $\{\lambda_n\} \to 0$, entonces $\{\lambda_n a_n\} \to 0$.
   (iii) Para toda sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A se tiene que $\{a_n/n\} \to 0$.

   ¿Significa esto que si $\{a_n/n\} \to 0$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ está acotada?

3. Probar que todo espacio métrico finito es compacto. Probar también que, en un conjunto no vacío E con la distancia discreta, todo subconjunto compacto de E es finito.

4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente de puntos de un espacio métrico y $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Probar que el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

5. Probar que, si E es un espacio métrico compacto, y A es un subconjunto infinito de E, entonces $A' \neq \emptyset$.

6. Sea E un espacio métrico con distancia d y K un subconjunto compacto de E. Probar que, para cada $x \in E$, existe un punto $k_x \in K$ tal que $d(x,k_x) \leqslant d(x,k)$ para todo $k \in K$.

7. Sea A un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^N$ y consideremos en $\mathbb{R}^N$ cualquier distancia d que genere la topología usual. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, se puede encontrar un $a_x \in A$, tal que $d(x,a_x) \leqslant d(x,a)$ para todo $a \in A$.

8. Sea F un conjunto no vacío con la distancia discreta. Probar que si E es un espacio métrico conexo, toda función continua de E en F es constante.

9. Probar que, en todo espacio métrico, el cierre de un conjunto conexo es conexo.

10. Probar que el conjunto $A = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 0 \big\}$ es conexo pero A° no lo es.

11. Sea X un espacio normado. Probar que para cualesquiera $x,y \in X \setminus \{0\}$ se tiene

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{2\,\|x-y\|}{\|x\|}$$

    Deducir que la función $\varphi : X \setminus \{0\} \to X$, dada por $\varphi(x) = x/\|x\|$ para todo $x \in X \setminus \{0\}$, es continua.

12. Probar que, si X es un espacio normado de dimensión mayor que 1, el conjunto $X \setminus \{0\}$ es conexo. Deducir que la *esfera unidad* $S(0,1) = \big\{ x \in X : \|x\| = 1 \big\}$ es un conjunto conexo.