Análisis Matemático I,

2º Doble Grado Informática-Matemáticas

Capítulo II: FUNCIONES DIFERENCIABLES. APLICACIONES

Tema 8: CAMPOS ESCALARES DIFERENCIABLES

María D. Acosta

Universidad de Granada

4-11-2020

Campos escalares

Recordamos que un campo escalar es una función definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ y con valores reales.

Diferencial y gradiente

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \mathring{A}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en a, entonces f tiene gradiente en a y además

$$Df(a)(x) =< \nabla f(a), x >, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

es decir, el vector $\nabla f(a)$ representa a $Df(a)$.

Demostración: Sabemos que si f es diferenciable en a, f tiene derivadas direccionales en a según cualquier vector $v \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$. Luego f tiene derivadas parciales en a. Por tanto, f tiene gradiente en a, ya que

$$\nabla f(a) = \Big(D_1 f(a), D_2 f(a), \ldots, D_N f(a)).$$

Diferencial y gradiente

Probaremos ahora que $Df(a)(x) =< \nabla f(a), x >$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$.
Usaremos que las aplicaciones

$$x \mapsto < \nabla f(a), x > \quad \text{y} \quad x \mapsto Df(a)(x)$$

son lineales de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$. Por tanto, si coinciden sobre una base, serán iguales.
Si $1 \leq k \leq N$ se verifica que

$$< \nabla f(a), e_k >= D_k f(a) = f'(a; e_k) = Df(a)(e_k).$$

Luego ambas aplicaciones son iguales. $\square$

Espacio tangente a la gráfica de un campo escalar

Recordamos que si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$ y f es derivable en a, entonces la recta tangente a la gráfica de f en a viene dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Por tanto, es la gráfica de una función afín $(x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a))$ cuyo valor en a vale $f(a)$ y cuya primera derivada en a vale $f'(a)$. Nótese que en este caso

$$Df(a)(t) = f'(a)t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Variedad afín tangente

Variedad afín tangente a una gráfica

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \mathring{A}$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que f es diferenciable en a. Entonces la **variedad afín tangente a la gráfica de f en a** viene dada por

$$x_{N+1} = f(a) + Df(a)(x-a) = f(a) + < \nabla f(a), x-a >, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

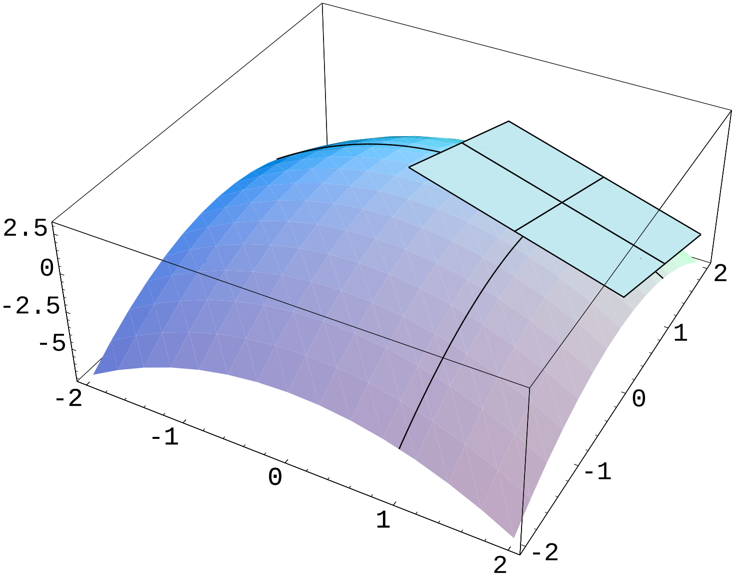
Por tanto, la variedad afín tangente es la gráfica de la función afín $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$x \mapsto f(a) + < \nabla f(a), x-a > .$$

Nótese que $f(a) = g(a)$ y $Df(a) = Dg(a)$.

Variedad afín tangente a una gráfica

Interpretación geométrica



Recta tangente a una curva

Definición

Sea I un intervalo abierto, $a \in I$ y $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Si γ es derivable en a, esto es, existe $\lim_{x \to a} \dfrac{\gamma(x) - \gamma(a)}{x - a} = \gamma'(a)$, y además $\gamma'(a) \neq 0$, la **recta tangente a la curva** γ **en** a viene dada por

$$\{\gamma(a) + \gamma'(a)(t - a) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Por supuesto, el conjunto anterior es una recta que pasa por $(a, \gamma(a))$ y el vector de dirección es $\gamma'(a) \neq 0$.

Nótese que los cocientes $\dfrac{\gamma(x) - \gamma(a)}{x - a}$ son los vectores directores de rectas secantes que pasan por los puntos de la gráfica $(a, \gamma(a))$ y $(x, \gamma(x))$.

Si tomamos límite ($x \to a$) los vectores directores de esas rectas tienden al vector director de la tangente.

Campos escalares diferenciables

Sabemos que las proyecciones canónicas en $\mathbb{R}^N$ son de clase C^1. Además los campos escalares de clase C^1 son estables operaciones algebraicas. Obtenemos el siguiente resultado.

Corolario

Las funciones polinómicas son funciones de clase uno en $\mathbb{R}^N$. Las funciones racionales son campos escalares de clase uno en su dominio.

Campos escalares de clase C^1

Condición suficiente de diferenciabilidad

Sean $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \mathring{A}$ y f un campo escalar en A. Supongamos que ∇f existe en un entorno de a y que ∇f es continuo en a. Entonces f es diferenciable en a.

Demostración: La prueba siguiente es válida para $N = 2$.
Supongamos que f tiene gradiente en un entorno de (a, b) y es continua en (a, b). Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x,y)-(a,b)\|_\infty < \delta \Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in A \\ \exists \nabla f(x,y) \\ |D_i f(x,y) - D_i f(a,b)| \leq \varepsilon, \quad \text{para} \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ verifica que $0 < \|(x,y) - (a,b)\|_\infty < \delta$ podemos escribir

$$f(x,y) - f(a,b) - < \nabla f(a,b), (x-a, y-b) >=$$

$$\Big(f(x,y) - f(a,y) - D_1 f(a,b)(x-a)\Big) + \Big(f(a,y) - f(a,b) - D_2 f(a,b)(y-b)\Big).$$

Si $x = a$, entonces el primer sumando de la expresión anterior es cero y se tiene que

Campos escalares de clase C^1

$$|f(x,y) - f(a,y) - D_1 f(a,b)(x-a)| = 0 \leq \varepsilon |x-a|.$$

Supongamos entonces que $x \neq a$. Para cada y fijo en el intervalo $]b-\delta, b+\delta[$, consideramos la función

$$g_1(x) = f(x,y) \quad (x \in]a-\delta, a+\delta[).$$

Como f tiene derivada parcial respecto de la primera variable en $]a-\delta, a+\delta[\times]b-\delta, b+\delta[$, entonces g_1 es derivable. Aplicamos el Teorema del valor medio a g_1 y obtenemos que existe $c_1 \in]a-\delta, a+\delta[$ que verifica

$$g_1(x) - g_1(a) = g_1'(c_1)(x-a).$$

Es decir

$$f(x,y) - f(a,y) = D_1 f(c_1, y)(x-a).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(a,y) - D_1 f(a,b)(x-a)| = \\ |D_1 f(c_1,y)(x-a) - D_1 f(a,b)(x-a)| \leq \\ \varepsilon |x-a| \end{aligned} \tag{1}$$

Campos escalares de clase C^1

Para el segundo sumando repetimos el mismo argumento. Si $y = b$, tenemos

$$|f(a,y) - f(a,b) - D_2 f(a,b)(y-b)| = 0 \leq \varepsilon |y-b|.$$

En otro caso, $y \neq b$. Entonces consideramos la función

$$g_2(y) = f(a,y) \quad (y \in]b-\delta, b+\delta[).$$

Como f tiene derivada parcial respecto de la segunda variable en $]a-\delta, a+\delta[\times]b-\delta, b+\delta[$, entonces g_2 es derivable. Aplicamos el Teorema del valor medio a g_2, luego $c_2 \in]b-\delta, b+\delta[$ tal que verifica

$$g_2(y) - g_2(b) = g_2'(c_2)(y-b).$$

Por tanto,

$$f(a,y) - f(a,b) = D_2 f(a,c_2)(y-b).$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned} |f(a,y) - f(a,b) - D_1 f(a,b)(y-b)| &= \\ |D_2 f(a,c_2)(y-b) - D_1 f(a,b)(y-b)| &\leq \\ \varepsilon |y-b| & \end{aligned} \tag{2}$$

Campos escalares de clase C^1

En vista de (1) y (2) obtenemos

$$|f(x,y) - f(a,b) - < \nabla f(a,b), (x-a, y-b) > | \leq$$

$$|f(x,y) - f(a,y) - D_1 f(a,b)(x-a)| + |f(a,y) - f(a,b) - D_2 f(a,b)(y-b)| \leq$$

$$\varepsilon\big(|x-a| + |y-b|\big) =$$

$$\varepsilon \|(x,y) - (a,b)\|_1$$

si $(x,y) \in]a-\delta, a+\delta[\times]b-\delta, b+\delta[$.
Por tanto, f es diferenciable en (a,b).

Para un natural N arbitrario la demostración usa el mismo argumento, sólo que hay que restar y sumar más sumandos. Por ejemplo, en caso de que $N = 3$, tendríamos

$$f(x,y,z) - f(a,b,c) = \Big(f(x,y,z) - f(a,y,z)\Big) + \Big(f(a,y,z) - f(a,b,z)\Big) +$$

$$+\Big(f(a,b,z) - f(a,b,c)\Big).$$

Para cada uno de los tres sumandos usaríamos el Teorema del valor medio para escribir cada diferencia en términos de una derivada parcial de f.

Campos escalares de clase C^1

Observación: Sea Φ la identificación de $\mathbb{R}^N$ en $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dada por

$$\Phi(y)(x) =< y, x >, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Es inmediato que Φ es una biyección lineal, luego continua. Como la inversa verifica las mismas condiciones, entonces Φ^{-1} también es continua.

Sabemos que si f es un campo escalar diferenciable en un punto a, entonces $\Phi(\nabla f(a)) = Df(a)$.

Campos escalares de clase C^1

Caracterización de los campos escalares de clase $\mathcal{C}^1$

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^N$ y f un campo escalar en A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) $f \in \mathcal{C}^1(A)$.
2) $\nabla f \in \mathcal{C}(A)$, esto es, f tiene gradiente en cada punto de A y el campo vectorial ∇f es continuo.

Demostración:
1) $\Rightarrow$ 2) Puesto que f es diferenciable, sabemos que f tiene gradiente en cada punto de A.
Por hipótesis $Df : A \longrightarrow L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ es continua. Dado que $\Phi^{-1} : L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es continua, entonces $\Phi^{-1} \circ Df$ es continua.
Como $\Phi(\nabla f(x)) = Df(x)$ para cada $x \in A$, se tiene que

$$(\Phi^{-1} \circ Df)(x) = \Phi^{-1}\big(Df(x)\big) = \nabla f(x), \forall x \in A.$$

Luego ∇f es continuo.

Campos escalares de clase C^1

2) $\Rightarrow$ 1) La condición suficiente de diferenciabilidad para campos escalares garantiza que f es diferenciable. Resta probar que Df es continua.
En efecto, sabemos que $\nabla f : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es continua y $\Phi : \mathbb{R}^N \longrightarrow L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ también lo es, luego $\Phi \circ \nabla$ es continua. Pero $\Phi \circ \nabla = Df$, luego Df es continua, luego f es de clase $C^1(A)$. $\square$

Teorema del valor medio para campos escalares

Partimos de la versión del Teorema del valor medio para funciones de una variable real.

Teorema del valor medio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$ y sea I el intervalo cerrado de extremos a y b. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en I y derivable en $\mathring{I}$, entonces existe $c \in \mathring{I}$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Teorema del valor medio para campos escalares

Sean $a, b \in \mathbb{R}^N$ verificando que $a \neq b$ y que $[a, b] \subset A \subset \mathbb{R}^N$. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = < \nabla f(c), b - a > = Df(c)(b - a),$$

donde $]a, b[= [a, b] \backslash \{a, b\}$.

Teorema del valor medio para campos escalares

Demostración: La prueba de este resultado se basa en aplicar el Teorema del valor medio a la función $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\sigma(t) = f(a + t(b-a)).$$

Puesto que σ es la composición de f y la función γ de $[0,1]$ en A definida por

$$t \mapsto a + t(b-a),$$

se tiene que σ es continua en $[0,1]$, por ser una composición de funciones continuas.
Es inmediato comprobar que γ es derivable y

$$\gamma'(t) = b - a, \qquad \forall t \in [0,1].$$

Por tanto, usando la regla de la cadena obtenemos que σ es derivable en $]0,1[$ y

$$\sigma'(t) = D\sigma(t)(1) = D(f \circ \gamma)(t)(1) =$$

$$Df(\gamma(t))\big(D\gamma(t)(1)\big) =$$

$$Df(a + t(b-a))(\gamma'(t)) =< \nabla f(a + t(b-a)), b - a > .$$

Campos escalares de clase C^1

Luego la función σ cumple las hipótesis del Teorema del valor medio. Por tanto, existe $t_0 \in]0,1[$ tal que

$$f(b) - f(a) = \sigma(1) - \sigma(0) = < \nabla f(a + t_0(b-a)), b - a > .$$

Basta llamar $c = a + t_0(b-a)$. $\square$

Corolario

Sean $a, b \in \mathbb{R}^N$ con $a \neq b$ tales que $[a,b] \subset A \subset \mathbb{R}^N$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, entonces

$$|f(b) - f(a)| \leq \|b-a\| \sup\{\|Df(x)\| : x \in]a,b[\}.$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^N$.

Campos escalares de clase C^1

Corolario

Sean A un abierto convexo de $\mathbb{R}^N$ y f un campo escalar diferenciable en A. Si existe M tal que $\|Df(x)\| \leq M$ para cada $x \in A$, entonces f es lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que M.

Corolario

Si A un abierto conexo de $\mathbb{R}^N$ y f un campo escalar diferenciable en A. Si Df es constatemente igual a cero, entonces f es constante.

Demostración: Suponemos que $A \neq \varnothing$. Sea $a \in A$. Definimos el subconjunto B dado por

$$B = \{x \in A : f(x) = f(a)\}.$$

Es claro que $B \neq \varnothing$, ya que $a \in B$. Como f es diferenciable, es continua, luego B es un cerrado en la topología inducida en A.
Comprobamos que B es abierto. Sea $b \in B$. Por ser A abierto, existe $r > 0$ tal que $B(b, r) \subset A$. Por ser $B(b, r)$ un abierto convexo y $Df = 0$ en $B(b, r)$, sabemos que f es constante en la bola. Por tanto,

$$f(x) = f(b) = f(a), \quad \forall x \in B(b, r).$$

Luego $B(b, r) \subset B$. Hemos probado que B es abierto en A. Como A es conexo y B es un subconjunto no vacío, abierto y cerrado en A, entonces $B = A$. Por tanto, f es constante. $\square$