Análisis Matemático I,

2º Doble Grado Informática-Matemáticas

Capítulo I: ESTRUCTURA EUCLÍDEA Y TOPOLOGIA DE $\mathbb{R}^N$

Tema 4: COMPACIDAD Y CONEXIÓN

María D. Acosta

Universidad de Granada

14-10-2020

Compactos

Sabemos que

$\mathbb{R}^N$ es un espacio normado,

los normados son espacios métricos

y los espacios métricos son topológicos

Compactos

Sabemos que

$$\mathbb{R}^N \text{ es un espacio normado,}$$

los normados son espacios métricos

y los espacios métricos son topológicos

Compacto

Sea (E,d) un espacio métrico y $A \subset E$.
Un **recubrimiento por abiertos de** A es una familia $\{O_i : i \in I\}$ de subconjuntos abiertos de E tal que $A \subset \cup_{i\in I} O_i$. Dados dos recubrimientos por abiertos de A, $\{O_i : i \in I\}$ y $\{G_j : j \in J\}$ diremos que $\{O_i : i \in I\}$ es un **subrecubrimiento** de $\{G_j : j \in J\}$ si $O_i \in \{G_j : j \in J\}$ para cada $i \in I$.
Diremos que el conjunto A es **compacto** si de todo recubrimiento de abiertos de A puede extraerse un subrecubrimiento finito de A.

Compactos

Ejemplos

1) Todo subconjunto finito de un espacio métrico es compacto.
En efecto, si (E, d) es un espacio métrico y $F = \{x_1, \cdots, x_N\} \subset E$ y $\{O_j : j \in J\}$ es un recubrimiento por abiertos de F, para cada $1 \leq i \leq N$, existe $j_i \in J$ tal que $x_i \in O_{j_i}$. Por tanto,

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{N} O_{j_i}$$

y $\{O_{j_1}, O_{j_2}, \cdots, O_{j_N}\}$ es un subrecubrimiento de $\{O_j : j \in J\}$.

2) $\mathbb{R}$ no es compacto, ya que

$$\{]-n, n[: n \in \mathbb{N}\}$$

es un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{R}$ que no admite ningún subrecubrimiento finito.

Compactos

Ejemplos

3) $]0,1[$ no es compacto.
La familia $\{]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}[: n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento por abiertos de $[0,1]$ que no admite ningún subrecubrimiento finito.
Si llamamos $I_n =]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}[$, para cada natural n, como $\{\frac{1}{n}$ es una sucesión decreciente y $\{1-\frac{1}{n+1}\}$ es creciente, entonces la sucesión $\{I_n\}$ es creciente, luego una unión finita de intervalos de la familia $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uno de los intervalos de la familia, por lo que no contiene al intervalo $]0,1[$.

Compactos

Teorema de Heine-Borel-Lebesgue

Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subset E$. Entonces K es compacto si, y sólo si, toda sucesión de elementos de K admite una subsucesión convergente a un elemento de K.

La segunda condición que aparece en el resultado anterior se conoce como **compacidad secuencial**. En espacios topológicos arbitrarios no hay relación entre la compacidad y la compacidad secuencial.

Probaremos que en espacios métricos la compacidad implica compacidad secuencial.

Compactos

Lema

Sea (E, d) un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en E. Equivalen las dos siguientes condiciones:

1) $\{x_n\}$ admite una subsucesión convergente.

2) Existe $x \in E$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon)\} \text{ es infinito.}$$

Demostración: Es claro que 1) $\Rightarrow$ 2), ya que si $\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in E$, para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ que verifica

$$x_{\sigma(n)} \in B(x, \varepsilon) \text{ para } n \geq N.$$

Luego

$$\{\sigma(n) : n \geq N\} \subset \{m \in \mathbb{N} : x_m \in B(x, \varepsilon)\},$$

y por ser σ inyectiva, el primer conjunto es infinito y se verifica 2).

Compactos

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que existe $x \in E$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \; \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon)\} \text{ es infinito.}$$

Compactos

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que existe $x \in E$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon)\} \text{ es infinito.}$$

Usando la hipótesis para $\varepsilon = 1$ elegimos $\sigma(1) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{\sigma(1)}, x) < 1$.

Compactos

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que existe $x \in E$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon)\} \text{ es infinito.}$$

Usando la hipótesis para $\varepsilon = 1$ elegimos $\sigma(1) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{\sigma(1)}, x) < 1$.
Usando la hipótesis para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, sabemos que

$$\left\{ m \in \mathbb{N} : d(x_m, x) < \frac{1}{2} \right\} \text{ es infinito.}$$

Definimos entonces

$$\sigma(2) = \text{mín}\left\{ m \in \mathbb{N} : m > \sigma(1), d(x_m, x) < \frac{1}{2} \right\}.$$

Por tanto $\sigma(2) > \sigma(1)$ y $d(x_{\sigma(2)}, x) < \frac{1}{2}$.

Compactos

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que existe $x \in E$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x,\varepsilon)\} \text{ es infinito.}$$

Usando la hipótesis para $\varepsilon = 1$ elegimos $\sigma(1) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{\sigma(1)}, x) < 1$.
Usando la hipótesis para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, sabemos que

$$\left\{m \in \mathbb{N} : d(x_m, x) < \frac{1}{2}\right\} \text{ es infinito.}$$

Definimos entonces

$$\sigma(2) = \min\left\{m \in \mathbb{N} : m > \sigma(1), d(x_m, x) < \frac{1}{2}\right\}.$$

Por tanto $\sigma(2) > \sigma(1)$ y $d(x_{\sigma(2)}, x) < \frac{1}{2}$.
Supuesto definido $\sigma(n)$, definimos $\sigma(n+1)$ como sigue

$$\sigma(n+1) = \min\left\{m \in \mathbb{N} : m > \sigma(n), d(x_m, x) < \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Por tanto $\sigma(n+1) > \sigma(n)$ y además $d(x_{\sigma(n+1)}, x) < \frac{1}{n+1}$.

Compactos

Por recurrencia se define una subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a x, ya que verifica

$$d(x_{\sigma(n)}, x) < \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hemos probado que 2) $\Rightarrow$ 1).

Compactos

Demostración de una de las implicaciones del Teorema de Heine-Borel-Lebesgue
Supongamos que (E, d) es un espacio métrico y $A \subset E$ es compacto.
Si existe una sucesión $\{a_n\}$ en A que no admite subsucesiones convergentes en A, entonces, en virtud del lema probado antes, sabemos que

$$\forall a \in A \ \exists r_a > 0 : \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(a, r_a)\} \ \text{ es finito.}$$

Compactos

Demostración de una de las implicaciones del Teorema de Heine-Borel-Lebesgue

Supongamos que (E, d) es un espacio métrico y $A \subset E$ es compacto. Si existe una sucesión $\{a_n\}$ en A que no admite subsucesiones convergentes en A, entonces, en virtud del lema probado antes, sabemos que

$$\forall a \in A \ \exists r_a > 0 : \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(a, r_a)\} \text{ es finito.}$$

Entonces $\{B(a, r_a) : a \in A\}$ es un recubrimiento por abiertos de A. Como cada uno de los abiertos del recubrimiento contiene una cantidad finita de términos de la sucesión $\{a_n\}$, cualquier subrecubrimiento finito contiene un número finito de términos sólo. Esto contradice la compacidad del conjunto A.

Compactos

Definición

Si (E, d) es un espacio métrico, un subconjunto A de E es **acotado** si existe $x \in E$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset B(x, r)$.

Observación

Un subconjunto A de un espacio normado $(A, \| \ \|)$ es acotado si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|a\| \leq M$ para cada $a \in A$.

Ejemplos

1) Si E es un conjunto y d la distancia discreta, entonces todo subconjunto de E es acotado. De hecho, si $a \in E$ se tiene que $E \subset B(a, 2)$.
2) Toda recta y todo subespacio vectorial no nulo de $\mathbb{R}^N$ son conjuntos no acotados.
3) Toda bola es un espacio métrico es un conjunto acotado.
4) Todo subconjunto finito es acotado.
5) Toda sucesión convergente en un espacio métrico es acotada, esto es, el conjunto de sus términos es acotado.

Compactos

Proposición

Todo subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado.

Demostración: Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subset E$ un compacto. Probamos primero que K es cerrado, es decir, que $\overline{K} \subset K$. Sea $x \in E \cap \overline{K}$, luego existe una sucesión $\{x_n\} \to x$ tal que $x_n \in K$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Por ser K compacto, existe una subsucesión de $\{x_n\}$ convergente a un elemento de K. Pero como $\{x_n\} \to x$, toda subsucesión de $\{x_n\}$ también converge a x y tenemos $x \in K$. Hemos probado que $\overline{K} \subset K$, es decir, K es cerrado.
Probamos a continuación que K es acotado. Es claro que la familia $\{B(x, 1) : x \in K\}$ es un recubrimiento por abiertos de K. Por ser K compacto, existe $F \subset K$ finito tal que $K \subset \bigcup_{x \in F} B(x, 1)$. Si elegimos $x_0 \in F$ (si $F = \varnothing$ $K = \varnothing$, luego K está acotado), entonces

$$B(x, 1) \subset B(x_0, R), \qquad \text{donde } R = \text{máx}\{d(x, x_0) : x \in F\} + 1.$$

Luego $K \subset \bigcup_{x \in F} B(x, 1) \subset B(x_0, R)$ y K es un conjunto acotado.

Compacidad

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}$ en E es **acotada** si el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

Observaciones:

1) Si X es un espacio vectorial y $\| \ \|$ y $||| \ |||$ son dos normas equivalentes en X, los conjuntos acotados para ambas normas coinciden.

2) En $\mathbb{R}^N$ un subconjunto A es acotado si, y sólo si, sus imágenes por las proyecciones canónicas son conjuntos acotados en $\mathbb{R}$.
En efecto, A es acotado para la norma euclídea si lo es para la norma del máximo. Por tanto,

$$A \text{ es acotado} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \|a\|_\infty \leq M, \forall a \in A \Leftrightarrow$$

$$\exists M \in \mathbb{R} : |a_k| \leq M, \forall a \in A, \forall 1 \leq k \leq N \Leftrightarrow$$

$$\exists M \in \mathbb{R} : |P_k(a)| \leq M, \forall a \in A, \forall 1 \leq k \leq N \Leftrightarrow$$

$$P_k(A) \text{ es acotado}, \ \forall 1 \leq k \leq N.$$

Compacidad

Teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}^N$

Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^N$ admite una subsucesión convergente.

Demostración: Inducción sobre N,
Para $N = 1$ es conocido.
Supuesto cierto para N, lo probaremos para $N + 1$. Sea $\{x_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^{N+1}$ acotada. Escribimos $x_k = (y_k, z_k) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ para cada natural k. Por hipótesis $\{y_k\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^N$. Usando la hipótesis de inducción existe una subsucesión $\{y_{\sigma(k)}\} \to y \in \mathbb{R}^N$. Como $\{z_k\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ también lo es $\{z_{\sigma(k)}\}$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}$ admite una subsucesión convergente $\{z_{\sigma(\tau(k))}\} \to z \in \mathbb{R}$.
Como $\{y_{\sigma(k)}\} \to y$, entonces $\{y_{\sigma(\tau(k))}\} \to y \in \mathbb{R}^N$. Además $\{z_{\sigma(\tau(k))}\} \to z \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\{x_{\sigma(\tau(k))}\} = \{(y_{\sigma(\tau(k))}, z_{\sigma(\tau(k))})\} \to (y, z) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Compacidad

Caracterización de los compactos de $\mathbb{R}^N$

Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^N$. Equivalen:

i) K es compacto (def. topológica).

ii) Toda sucesión de puntos de K admite una subsucesión que converge a un punto de K.

iii) K es cerrado y acotado.

Demostración: El Teorema de Heine-Borel-Lebesgue asegura que en espacios métricos i) y ii) son equivalentes. Sabemos también que en espacios métricos i) $\Rightarrow$ iii). Basta probar que iii) $\Rightarrow$ ii).
Suponemos entonces que K es cerrado y acotado. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en K. Como K es acotado, por el Teorema de Bolzano-Weiertrass, existe una subsucesión $\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in \mathbb{R}^N$. Usando la caracterización secuencial de la adherencia tenemos que $x \in \overline{K}$. Como K es cerrado, entonces $x \in K$ y hemos probado ii).

Compactos

Ejemplos

1) Cualquier bola cerrada en $\mathbb{R}^N$ es un compacto.

2) Ninguna bola abierta (no vacía) en $\mathbb{R}^N$ es compacta.

3) Los intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$ son los únicos intervalos compactos.

Sabemos que en espacios métricos todo compacto es cerrado y acotado. En general, el recíproco no es cierto, como muestra el siguiente ejemplo.

Si E es un conjunto infinito y consideramos la distancia discreta d en E, la topología asociada a d es la llamada **topología discreta**. Es decir, todo subconjunto de E es abierto. Luego todos los subconjuntos son cerrados. Sabemos también que E es acotado. Sin embargo, E (ni ningún subconjunto infinito de E) es compacto.
De hecho, los subconjuntos compactos de E son los conjuntos finitos.

Compactos

Ejemplo

Si $X = (C[0,1], \| \ \|_\infty)$, entonces $\overline{B}(0,1)$ es cerrado, acotado, pero no es compacto. Para ello basta considerar para cada natural n el intervalo $I_n = \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$ y la función $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

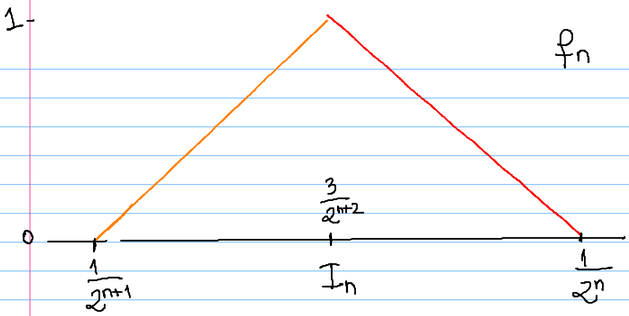
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin I_n \\ 2^{n+2}(x - \frac{1}{2^{n+1}}) & \text{si } \frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{3}{2^{n+2}} \\ -2^{n+2}(x - \frac{1}{2^n}) & \text{si } \frac{3}{2^{n+2}} < x \leq \frac{1}{2^n} \end{cases}$$

Como la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}$ es estrictamente decreciente, dos intervalos I_n distintos sólo pueden intersecarse en los extremos.
Por tanto, si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n < m$, tenemos que

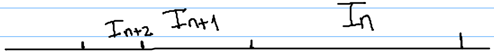
$$\|f_n - f_m\|_\infty \geq \left|(f_n - f_m)\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right)\right| = f_n\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right) = 1.$$

Como consecuencia, $\{f_n\}$ no tiene ninguna subsucesión convergente.

Compactos



$$I_{n+1} \subseteq I_n \,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$



Compactos

Teorema de conservación de la compacidad

Sean E, F espacios métricos, K un subconjunto compacto de E y $f : K \to F$ continua. Entonces $f(K)$ es compacto.

Demostración:
Usaremos el Teorema de Heine-Borel-Lebesgue que afirma que la compacidad equivale a la compacidad secuencial en espacios métricos.
Sea $\{y_n\}$ una sucesión en $f(K)$. Luego existe una sucesión $\{x_n\}$ en K tal que

$$f(x_n) = y_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Al ser K compacto $\exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in K$. La continuidad de f nos asegura que $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, es decir:

$$\{y_{\sigma(n)}\} \to f(x) \in f(K).$$

Luego $f(K)$ es compacto. $\square$

Ejercicio: Prueba el mismo resultado en espacios topológicos.

Compactos

Proposición

Todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ no vacío tiene máximo y mínimo.

Demostración:
Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Luego es acotado. Por ser no vacío K tiene supremo. Como $\sup K \in \overline{K}$ y K es cerrado, entonces $\sup K \in K$, luego K tiene máximo. La prueba para mínimo es análoga. $\square$

Corolario (Teorema de Weierstrass)

Si (K, d) es un espacio métrico compacto, $K \neq \varnothing$ y $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f tiene máximo y mínimo absolutos en K. Es decir, existen $a, b \in K$ tales que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in K.$$

Teorema de Hausdorff

Teorema de Hausdorff

En $\mathbb{R}^N$ dos normas cualesquiera son equivalentes.

Demostración:
Probaremos que si $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^N$, entonces es equivalente a la norma euclídea. Para ello usaremos la base canónica de $\mathbb{R}^N$, que notamos $\{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$.
Dado un vector $x \in \mathbb{R}^N$, lo podemos expresar como $x = x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N$, se tiene

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N\| \leq$$

$$|x_1| \, \|e_1\| + \cdots + |x_N| \, \|e_N\| \leq$$

$$\leq (\|e_1\| + \cdots + \|e_N\|)\|x\|_\infty$$

$$\leq (\|e_1\| + \cdots + \|e_N\|)\|x\|_2,$$

luego, tomando $M = \|e_1\| + \cdots + \|e_N\|$ se tiene que

$$\|x\| \leq M\|x\|_2, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Teorema de Hausdorff

Hemos probado que $\|x\| \leq M\|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^N$.
Definimos

$$m := \text{ínf}\{\|x\| : \|x\|_2 = 1\}.$$

A continuación probaremos que m es un mínimo.

Teorema de Hausdorff

Hemos probado que $\|x\| \leq M\|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^N$.
Definimos

$$m := \text{ínf}\{\|x\| : \|x\|_2 = 1\}.$$

A continuación probaremos que m es un mínimo.
Dado que

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| \leq M\|x - y\|_2, \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

la función norma $\|\cdot\|$ es continua en $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$.

Teorema de Hausdorff

Hemos probado que $\|x\| \leq M\|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^N$.
Definimos

$$m := \inf\{\|x\| : \|x\|_2 = 1\}.$$

A continuación probaremos que m es un mínimo.
Dado que

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| \leq M\|x - y\|_2, \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

la función norma $\|\cdot\|$ es continua en $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$. Como la esfera unidad para la norma euclídea $S_{\|\cdot\|_2}(0,1)$ es compacta, el conjunto $\{\|x\| : \|x\|_2 = 1\}$ tiene mínimo (Teorema de Weierstrass). Luego existe un vector $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\|x_0\|_2 = 1 \;\text{ y }\; m = \|x_0\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in S_{\|\cdot\|_2}(0,1).$$

Por tanto $m \in \mathbb{R}^+$. Queremos probar ahora que

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

desigualdad que trivial si $x = 0$.

Teorema de Hausdorff

Sabemos que

$$\|x\| \leq M\|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$0 < m \leq \|x\|, \qquad \forall x \in S_{\|\cdot\|_2}(0,1).$$

Teorema de Hausdorff

Sabemos que

$$\|x\| \leq M\|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$0 < m \leq \|x\|, \quad \forall x \in S_{\|\cdot\|_2}(0,1).$$

Si $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, entonces $\frac{x}{\|x\|_2} \in S_{\|\cdot\|_2}(0,1)$, luego

$$m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|,$$

es decir, se verifica

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Hemos probado que las normas euclídea y $\| \ \|$ son equivalentes. $\square$

Continuidad uniforme

Definición

Sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos, y $f : E \longrightarrow F$ una aplicación. Se dice que f es **uniformemente continua** si se verifica

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (x, y \in E, d(x,y) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Caracterización de la continuidad uniforme

Una aplicación $f : E \to F$ es uniformemente continua si, y sólo si, se verifica la condición

$$\big(x_n, y_n \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \{d(x_n, y_n)\} \to 0\big) \ \Rightarrow\ \{\rho(f(x_n), f(y_n))\} \to 0.$$

De hecho, si f no es uniformemente continua, existe $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ en E tales que

$$\{d(x_n, y_n)\} \to 0 \quad \text{y} \quad \rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

La prueba de que la continuidad uniforme implica la condición secuencial es directa. La del recíproco usa reducción al absurdo.

Continuidad uniforme

Es claro que toda aplicación uniformemente continua es continua, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, la $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es continua y, sin embargo, no es uniformemente continua ya que para cada natural n se tiene que

$$\left|f\left(\frac{1}{2n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=n.$$

Es claro que la restricción de una función uniformemente continua también lo es. También que las funciones uniformemente continuas son estables por sumas y por productos por escalares.

En general, esta clase no es estable por productos. Por ejemplo, la función $f(x)=x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, mientras que la identidad sí lo es.

Es inmediato probar que las aplicaciones lipschitzianas son uniformemente continuas.

Continuidad uniforme

Teorema de Heine

Sean E y F espacios métricos, supongamos que E es compacto y $f : E \longrightarrow F$ una aplicación continua. Entonces f es uniformemente continua.

Demostración: Notemos por d y ρ las distancias de E y F, respectivamente. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que f no es uniformemente continua. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ que verifica

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n, y_n \in E :\ \{d(x_n, y_n)\} \to 0 \qquad \text{y} \qquad \rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

Como E es compacto, $\exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in E$. Se tiene que

$$d(y_{\sigma(n)}, x) \leq d(y_{\sigma(n)}, x_{\sigma(n)}) + d(x_{\sigma(n)}, x), \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde se deduce que $\{y_{\sigma(n)}\} \to x$. Por último, la continuidad de f nos asegura que

$$\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x) \qquad \text{y} \qquad \{f(y_{\sigma(n)})\} \to f(x),$$

lo que contradice que $\rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Conjuntos conexos

Definición

Un conjunto C de un espacio métrico es **conexo** si verifica que la única partición de C en dos abiertos relativos es la trivial.

Ejemplos

- El conjunto vacío es conexo.
- Un subconjunto de un métrico que contenga un único elemento es conexo.
- Un subconjunto finito de un métrico que contenga al menos dos elementos no es conexo.
- En $\mathbb{R}$ un subconjunto que no sea un intervalo no es conexo.

Conjuntos conexos

Como los subconjuntos cerrados son aquellos cuyo complementario es abierto se tiene el siguiente resultado.

Proposición

Un espacio métrico es conexo si los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados son el total y el vacío.

Teorema de conservación de conexos por aplicaciones continuas

Sean E, F dos espacios métricos, C un subconjunto conexo de E y $f : C \to F$ continua. Entonces $f(C)$ es conexo.

Conjuntos conexos

Demostración: Como la conexión depende de la topología inducida, podemos suponer que f es sobreyectiva, esto es, $f(C) = F$.

Sean U y V abiertos disjuntos de F tales que $f(C) = U \cup V$. Como f es continua, entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en C tales que $C = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Además $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son disjuntos.

Por ser C conexo tenemos que $f^{-1}(U) = \varnothing$ o $f^{-1}(V) = \varnothing$.
Como f es sobreyectiva, entonces $U = f(f^{-1}(U)) = f(\varnothing) = \varnothing$ o V es vacío.

Hemos probado que $f(C)$ es conexo. $\square$

Conjuntos conexos

Caracterización de los conexos

Sea C un subconjunto no vacío de un espacio métrico. Equivalen las siguientes afirmaciones:

1. C es conexo.
2. Toda función continua $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica que $f(C)$ es un intervalo.
3. Toda función continua de C en $\{0, 1\}$ es constante.

Demostración: $1 \Rightarrow 2$) Es consecuencia del teorema anterior y de que los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son intervalos.
$2 \Rightarrow 3$ Trivial
$3 \Rightarrow 1$ Probamos el contrarrecíproco. Si C no es conexo existe una partición no trivial $\{U, V\}$ de C en abiertos relativos.
Definimos la función $f: C \longrightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & \text{si } x \in V \end{cases}$$

es continua (por el carácter local de la continuidad), y verifica $f(C) = \{0, 1\}$, y por tanto, 3 no es cierta.

Conexos

Del Teorema del valor intermedio para funciones reales de variable real y la caracterización anterior obtenemos:

Corolario

Los intervalos son los únicos conjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

Es claro que la unión de dos subconjuntos conexos de un espacio métrico no es un conexo. Por ejemplo, el conjunto formado por dos puntos no es conexo. Sin embargo, imponiendo hipótesis adicionales sí hay un resultado positivo.

Corolario

Sea $\{C_i : \ i \in I\}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio métricos tal que dos conjuntos cualesquiera tienen intersección no vacía. Entonces $\bigcup_{i \in I} C_i$ es conexo.

Nótese que el resultado anterior es una consecuencia inmediata de la caracterización de los conexos dada antes.

Conjuntos convexos

Definición

Un subconjunto C de un espacio vectorial X es **convexo** si verifica que

$$t \in [0,1], x, y \in C \Rightarrow tx + (1-t)y \in C.$$

En lo que sigue, si X es un espacio vectorial y $x, y \in X$, notaremos por

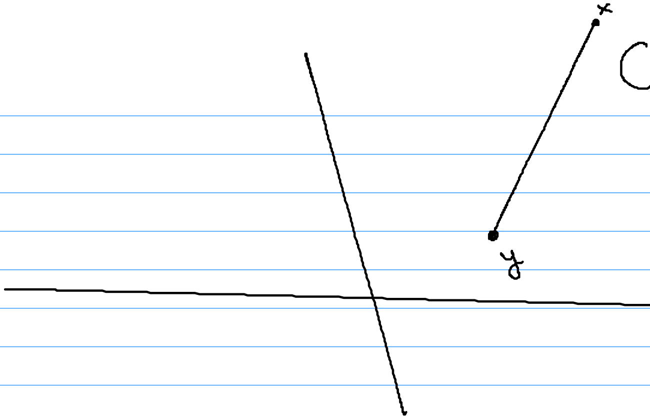
$$[x,y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\},$$

y llamaremos al conjunto anterior **segmento de extremos** x **e** y**.**

Es inmediato comprobar que $[x,y] = [y,x]$. Basta usar que $t \in [0,1] \Leftrightarrow 1-t \in [0,1]$.

Conjuntos convexos

Idea intuitiva



Conjuntos convexos

Proposición

Si $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, entonces el segmento de extremos x e y es el intervalo cerrado $[x, y]$.

Demostración: Probamos las dos inclusiones. Sea $t \in [0, 1]$ y llamamos $z = tx + (1-t)y$. Tenemos entonces

$$x = tx + (1-t)x \leq tx + (1-t)y = z \leq ty + (1-t)y = y,$$

luego el segmento de extremos x e y está contenido en el intervalo $[x, y]$. Sea $z \in [x, y]$, luego $x \leq z \leq y$. Si llamamos

$$t = \frac{y-z}{y-x} \in [0, 1] \Rightarrow 1 - t = \frac{z-x}{y-x}.$$

Además

$$tx + (1-t)y = \frac{y-z}{y-x}x + \frac{z-x}{y-x}y = \frac{yx - zx + zy - xy}{y-x} = \frac{z(y-x)}{y-x} = z,$$

luego el intervalo $[x, y]$ está contenido en el segmento de extremos x e y. $\square$

Conjuntos convexos

Ejemplos

- Un espacio vectorial es convexo.
- En $\mathbb{R}$ los conjuntos convexos son los intervalos.
- Si X es un espacio vectorial, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal, y $r \in \mathbb{R}$, los conjuntos

  $$\{x \in X : f(x) < r\}, \quad \{x \in X : f(x) = r\} \quad \text{y} \quad \{x \in X : f(x) \geq r\}$$

  son convexos.
- La intersección de subconjuntos convexos es un conjunto convexo.
- En un espacio normado, las bolas son conjuntos convexos.

Conjuntos convexos

Probamos que en un espacio normado X toda bola abierta es convexo.

Sea $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Si $x, y \in B(a, r), t \in [0, 1]$. Queremos probar que $tx + (1-t)y \in B(a, r)$.
Si $t = 0$ ó $t = 1$, obtenemos $y, x \in B(a, r)$. En otro caso $0 < t < 1$ luego $0 < 1 - t < 1$. Tenemos entonces que

$$\|tx + (1-t)y - a\| = \|tx + (1-t)y - \big(ta + (1-t)a\big)\| =$$

$$\|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \leq t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| <$$

$$tr + (1-t)r = r.$$

Hemos comprobado que $tx + (1-t)y \in B(a, r)$, para cada $t \in [0, 1]$. Luego $B(a, r)$ es un conjunto convexo.

Para probar la convexidad de las bolas cerradas el argumento es similar. $\square$

Conjuntos convexos

Proposición

Todo subconjunto convexo de un espacio normado es conexo.

Demostración:
Nótese que un segmento de un espacio normado es un conjunto conexo por ser la imagen de un intervalo por una función continua.

Sea C un subconjunto convexo de un espacio normado X. Si $C = \varnothing$, C es conexo.

En otro caso, elegimos $c_0 \in C$. Entonces $C = \bigcup_{x \in C} [c_0, x]$ es conexo por ser unión de conexos tales que dos cualesquiera tienen al menos el punto en común. $\square$

Conjuntos conexos

Como consecuencia, cualquier espacio normado es conexo. Lo mismo ocurre para cualquier bola contenida en el normado.

Conjuntos arcoconexos

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$. Se dice que A es **arcoconexo** si dados dos puntos $x, y \in A$ existen reales a, b con $a < b$ y una aplicación continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ tal que

$$\gamma(a) = x \quad \text{y} \quad \gamma(b) = y.$$

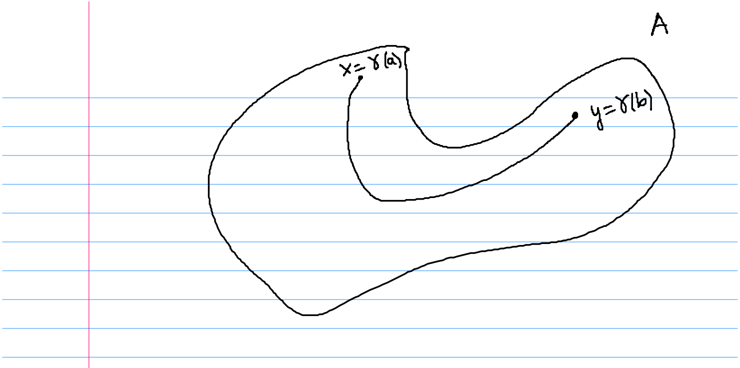
Conjuntos arcoconexos

Definición

Sea (E,d) un espacio métrico y $A \subset E$. Se dice que A es **arcoconexo** si dados dos puntos $x,y \in A$ existen reales a,b con $a<b$ y una aplicación continua $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ tal que

$$\gamma(a)=x \quad \text{y} \quad \gamma(b)=y.$$

Idea intuitiva



Conjuntos conexos

Es claro que todo subconjunto convexo de un espacio normado es arcoconexo.

Conjuntos conexos

Es claro que todo subconjunto convexo de un espacio normado es arcoconexo.

Proposición

Todo subconjunto arcoconexo de un espacio métrico es conexo.

Conjuntos conexos

Es claro que todo subconjunto convexo de un espacio normado es arcoconexo.

Proposición

Todo subconjunto arcoconexo de un espacio métrico es conexo.

Demostración: Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subset E$ un conjunto arcoconexo.
Si $A = \varnothing$, el resultado es trivial. En otro caso, elegimos $a_0 \in A$.
Por ser A arcoconexo, para cada punto $a \in A$ existe $\gamma_a : [x, y] \longrightarrow A$ continua tal que

$$\gamma_a(x) = a_0 \quad \text{y} \quad \gamma_a(y) = a.$$

Por el Teorema de conservación de la conexión, el conjunto $\gamma_a([x, y])$ es conexo y obviamente contiene al elemento a y a a_0.
Por tanto $A = \bigcup_{a \in A}$ imagen de γ_a. Como consecuencia, A es conexo, por ser unión de conexos tales que dos cualesquiera tienen intersección no vacía. $\square$

Conexos

En resumen, tenemos que

convexo $\Rightarrow$ arcoconexo $\Rightarrow$ conexo

En general, los recíprocos de las implicaciones anteriores no son ciertos.

En $\mathbb{R}$ las tres nociones coinciden y la clase de conjuntos conexos son los intervalos.