Ejercicio 10.13. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con $f'(0) = 0$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = x^2 f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que si $f(0) \neq 0$, entonces g tiene un extremo relativo en 0.

7. Sea $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ 2 veces derivable $f'(0)=0$

$g: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x^2 f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ **Queremos probar:**

$\boxed{\text{Si } f(0) \neq 0 \Rightarrow g \text{ tiene un extremo relativo en } 0}$

Derivamos g dos veces:

$g(x) = x^2 f(x)$ $\quad g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x)$ $\quad$ Podemos ya que f es dos veces derivable

$g''(x) = 2f(x) + 2x f'(x) + 2x f'(x) + x^2 f''(x)$

Para que $g(x)$ tenga un extremo en el 0 $g''(0) \neq 0$ y $g'(0) = 0$

Veámoslo sustituyendo:

$\Rightarrow g'(0) = 2 \cdot 0 \cdot f(0) + 0 \cdot f'(0) = 0$ ✓

$\Rightarrow g''(0) = 2 \cdot f(0) + \underbrace{2 \cdot 0 f'(0)}_{0} + \underbrace{2 \cdot 0 f'(0)}_{0} \cdot \underbrace{0 \cdot f''(0)}_{0} = 2 \cdot f(0)$

$\Rightarrow g''(0) = 2f(0)$ si $f(0) \neq 0 \Rightarrow g''(0) \neq 0$ y 2 es par por lo que g tendría un extremo en $x=0$. La proposición usada está en la página 75:

Proposición 10.2.13. *Sea* I *un intervalo,* n *un número natural mayor o igual que dos y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función* $n-1$ *veces derivable en* I *y* n *veces derivable en* $a \in I$. *Supongamos que*

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad y \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

1) *Si* n *es par y* $f^{(n)}(a) > 0$, f *tiene un mínimo relativo en* a.

2) *Si* n *es par y* $f^{(n)}(a) < 0$, f *tiene un máximo relativo en* a.

3) *Si* n *es impar,* f *no tiene un extremo relativo en* a.