27) Sea $g: \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función definida por $g(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Prueba que g es biyectiva, continua y estrictamente creciente. Da una expresión explícita de su inversa.

→ g continua porque es composición de funciones continuas

$$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

→ $\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\quad g'(x) \neq 0$

Para ello voy a derivar la función $g(x)$ y voy a ver donde vale 0

$$g'(x) = \frac{2\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right) + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2}} =$$

$$\frac{2\cdot\left(\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right.}{\sqrt{1-\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2}} = \frac{2\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\sqrt{1-\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$g'(x) = 0 \iff \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \iff$$

$$1 - x^2 - x^2 = 0 \iff 0 = 2x^2 - 1 \iff x = \pm\sqrt{1/2}$$

por lo que $\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\quad g'(x) \neq 0$

Teorema 9.3.1 (Teorema de la función inversa (versión global)). *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable con* $f'(x) \neq 0$*, para todo* $x \in I$*. Entonces* f *es inyectiva y su función inversa,* f^{-1}*, es derivable en* $f(I)$ *con*

→ Como está definida en un intervalo donde $g'(x) \neq 0$, y es continua es inyectiva

→ Como g es continua e inyectiva y está definida en un intervalo, g es una función estrictamente monótona

$$g'(0) = 2 > 0 \Rightarrow g \text{ estrictamente creciente}$$

→ Teorema de Weierstrass.

Como sé que es estrictamente monótona, voy a definir el codominio calculando la imagen de los extremos.

- $g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsen\left(2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) = \arcsen\left(\frac{-2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right)$

$= \arcsen\left(\frac{-2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \arcsen\left(-\frac{2}{2}\right) = \arcsen(-1) = -\pi/2$

- $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsen\left(2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{1-\left(1/\sqrt{2}\right)^2}\right) = \arcsen\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-1/2}\right)$

$= \arcsen\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1/2}\right) = \arcsen\left(\frac{2}{2}\right) = \arcsen(1) = \pi/2$

luego $g([-1/2, 1/2]) = [-\pi/2, \pi/2]$

g es sobreyectiva.

Por lo tanto g es biyectiva, luego existe la inversa

$$g^{-1}: [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$$

$$x \longrightarrow \operatorname{sen}(2x\sqrt{1-x^2})$$

$\operatorname{sen} y = x \Rightarrow \operatorname{arcsen} y = x$ Aplico derivada. Tenemos

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 1 \Rightarrow y' = \sqrt{1-y^2}$$

como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$

$$y' = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow y' = \sqrt{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$y' = \cos x$$