21º) f continua en $\mathbb{R}$

$$F(x) = \int_1^x \left(t \int_1^t f(s)\,ds \right) dt$$

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$g(t) = t \int_1^t f(s)\,ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

¿g es continua? $\Rightarrow$ Sí, al ser producto de funciones continuas y derivables, las cuales son:

$g_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g_1(t) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$g_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g_2(t) = \int_1^t f(s)\,ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$ por el Teorema Fundamental del Cálculo

$g_2'(t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Por ahora, se tiene que

$$F(x) = \int_1^x g(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces, por el T.F.C, se cumple, al ser g continua en $c = 1$, que:

- $F'(1) = g(1) = 1 \cdot \int_1^1 f(s)\,ds = 0$ (por la definición 15.1.1)

$$\boxed{F'(1) = 0}$$

- $F'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Por tanto, si $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$F''(x) = g'(x) = g_1'(x)\,g_2(x) + g_1(x)\,g_2'(x) =$$
$$= 1 \cdot \int_1^x f(s)\,ds + x\,f(x)$$

Finalmente:

$$F''(1) = 1 \cdot \int_1^1 f(s)\,ds + 1 \cdot f(1) = f(1) \Longrightarrow \boxed{F''(1) = f(1)}$$