2. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Dado $p > 0$, probar $\begin{cases} f_{[p,+\infty[} \text{ es lipschitziana.} \\ f_{]0,p]} \text{ no es uniformemente continua.} \end{cases}$

• $f_{[p,+\infty[} := f_1 : [p,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. $f_1(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in [p,+\infty[$.

f_1 es lipschitziana si $\exists M \geq 0$ t.q.

$|f_1(y) - f_1(x)| \leq M\,|y-x| \quad \forall x,y \in [p,+\infty[$.

$$\Longleftrightarrow \frac{|f_1(y)-f_1(x)|}{|y-x|} \leq M \Longleftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right|}{|y-x|} \leq M \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\left|\frac{x-y}{yx}\right|}{|y-x|} \leq M \Longleftrightarrow \frac{|x-y|}{|y-x|} \cdot \left|\frac{1}{yx}\right| \leq M \Longleftrightarrow \frac{1}{|yx|} \leq M.$$

Tomamos $M = \sup \left\{ \frac{1}{xy} : x, y \in [p,+\infty[, x \neq y \right\}$

M existe ya que $p > 0$, luego f restringida a $[p,+\infty[$

es una función lipschitziana.

• $f_{]0,p]} := f_2 :]0,p] \longrightarrow \mathbb{R}$ $f_2(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in]0,p]$.

f_2 no es uniformemente continua si al fijar un ε_0, podemos encontrar dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, de puntos del intervalo $]0,p]$ tal que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Considero $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$, $\{y_n\} = \{\frac{1}{n+\alpha}\}$, tomando $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tq $\alpha > \varepsilon_0$.

Entonces: $|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\alpha}\right| = \left|\frac{n+\alpha-n}{(n+\alpha)n}\right| = \left|\frac{\alpha}{n(n+\alpha)}\right| < \frac{1}{n}$.

ya que $n\alpha < n^2 + n\alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora vemos que $|f_2(x_n) - f_2(y_n)| = |n - n - \alpha| = \underline{\alpha > \varepsilon_0}$.

Con lo que hemos probado que no es uniformemente continua f restringida a $]0,p]$.