Análisis Matemático I,

2º Doble Grado Informática-Matemáticas

Capítulo I: ESTRUCTURA EUCLÍDEA Y TOPOLOGIA DE $\mathbb{R}^N$

Tema 1: ESPACIO EUCLÍDEO. ESPACIOS MÉTRICOS. ESPACIOS NORMADOS

María D. Acosta

Universidad de Granada

21-9-2020

El espacio euclídeo

Operaciones en el espacio euclídeo N-dimensional

$$\mathbb{R}^N := \mathbb{R}\times \overset{N}{\cdots} \times\mathbb{R}$$

- Suma
$$(x_1, x_2, \ldots, x_N) + (y_1, y_2, \ldots, y_N) :=$$
$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_N + y_N), \qquad (x_k, y_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \{1, 2, \ldots, N\})$$
- Producto por escalares
$$t(x_1, x_2, \ldots, x_N) := (tx_1, tx_2, \ldots, tx_N) \quad (t, x_k, \in \mathbb{R}, \forall k \in \{1, 2, \ldots, N\})$$

$\mathbb{R}^N$ con las dos operaciones anteriores es un **espacio vectorial** (real).

El espacio euclídeo

Producto escalar en $\mathbb{R}^N$

Si $x, y \in \mathbb{R}^N$, entonces **el producto escalar** de x e y se define por

$$< x|y >= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

Es claro que el producto escalar es una función de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$.

Para $N = 1$, el producto escalar en $\mathbb{R}$ es el producto de reales.

El espacio euclídeo

$$< x|y >= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

Propiedades del producto escalar

Si $x, y, z \in \mathbb{R}^N$ y $r \in \mathbb{R}$, se verifica:

- $< x|y >=< y|x >$
- $r < x|y >=< rx|y >=< x|ry >$
- $< x|y + z >=< x|y > + < x|z >$
- $< x|x >\geq 0$
- $< x|x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

El espacio euclídeo

Norma euclídea

Si $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ definimos su **norma euclídea**, $\|x\|$, por la fórmula

$$\|x\| = \sqrt{< x|x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

Propiedades de la norma euclídea

- **No degeneración**
  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- **Homogeneidad**
  $\|rx\| = |r|\|x\|, \quad \forall r \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N$
- **Desigualdad triangular**
  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$
- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**
  $| < x|y > | \leq \|x\| \, \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x|y >, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$

El espacio euclídeo

Ejercicio: Prueba las propiedades anteriores de la norma euclídea y el producto escalar.

Sugerencia: Prueba la desigualdad de Cauchy-Schwarz antes de la desigualdad triangular. Para ello usa que para cada real t se verifica $< x + ty | x + ty > \geq 0$.

El espacio euclídeo

Distancia euclídea

Si $x, y \in \mathbb{R}^N$ definimos la distancia (euclídea) entre x e y, por la fórmula

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Propiedades de la distancia euclídea

Se verifica:

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.
3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^N$.

A continuación presentaremos dos nociones generales inspiradas en la norma euclídea y en la distancia euclídea.

Espacios métricos

Definición

Una **distancia** en un conjunto E (no vacío) es una función $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ que verifica las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x), \ \forall x, y \in E$ (**simétrica**).
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \ \forall x, y, z \in E$ (**desigualdad triangular**).

Al par ordenado (E, d) se le denomina **espacio métrico**.

Observaciones

a) Una aplicación $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique 1), 2) y 3) no toma valores negativos.

b) $|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z), \ \forall x, y, z \in E$.

c) Se verifica la desigualdad

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n), \ \forall x_1, \cdots, x_n \in E.$$

Espacios métricos

Prueba

a) Para cualesquiera $x, y \in E$, usando las propiedades 1), 2) y 3), obtenemos que d no toma valores negativos, ya que

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y).$$

b) Para probar la segunda afirmación, usamos 3), de donde se tiene

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \Rightarrow$$

$$d(x,y) - d(z,y) \leq d(x,z),$$

Intercambiando x por z y usando 2) se obtiene

$$d(z,y) - d(x,y) \leq d(x,z),$$

por tanto,

$$|d(x,y) - d(z,y)| \leq d(x,z), \ \forall x, y, z \in E.$$

c) Basta usar 3) e inducción.

Espacios métricos

Ejemplos

1) La distancia euclídea en $\mathbb{R}^N$ es una distancia.

2) La **distancia discreta**. Si E es un conjunto no vacío, la distancia discreta está definida por

$$d(x,y) = 1 \quad \text{si } x,y \in E, x \neq y, \qquad d(x,x) = 0, \forall x \in E.$$

Es inmediato comprobar que d es una distancia en E.

Espacios métricos

Notación.
Si (E,d) es un espacio métrico, $a \in E, r \in \mathbb{R}^+$, definimos

- **Bola abierta de centro a y radio r**

$$B(a,r) = \{x \in E : d(x,a) < r\}$$

- **Bola cerrada de centro a y radio r**

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in E : d(x,a) \leq r\}$$

- **Esfera de centro a y radio r**

$$S(a,r) = \{x \in E : d(x,a) = r\}$$

Espacios normados

Definición

Si X es un espacio vectorial (real), una **norma** en X es una función $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ que verifica

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (**no degeneración**).

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in X$ (**homogeneidad**).

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in X$ (**desigualdad triangular**).

El par ordenado $(X, \|\cdot\|)$ se llama **espacio normado**.

Observaciones

a) De la definición se sigue que también se puede prescindir en la definición de que la norma toma valores no negativos.

b) De ii) y iii) se deduce fácilmente que

$$\big|\ \|x\| - \|y\|\ \big| \leq \|x - y\|,\ \forall x, y \in X.$$

c) Por último, de iii) se deduce por inducción que

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|,\ \forall x_1, \cdots, x_n \in X.$$

Espacios normados

Ejemplos

1) El valor absoluto en $\mathbb{R}$ es una norma. En general, la norma euclídea en $\mathbb{R}^N$ es una norma.

2) En $\mathbb{R}^N$ consideraremos entre otras la **norma de la suma** y la **norma del máximo** dadas por

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_N|, \qquad \|x\|_\infty := \text{máx}\{|x_1|, \cdots, |x_N|\} \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

Se verifica la desigualdad

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq N\|x\|_\infty \quad (x \in \mathbb{R}^N).$$

Ejemplos

3) En el espacio vectorial $\mathcal{C}[a,b]$ de las funciones reales continuas definidas en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ $(a < b)$, se pueden definir la funciones dadas por

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\,\{|f(x)| : x \in [a,b]\} \qquad (f \in \mathcal{C}[a,b]),$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (f \in \mathcal{C}[a,b]).$$

Ambas funciones son normas en $C[a,b]$ y se verifica que

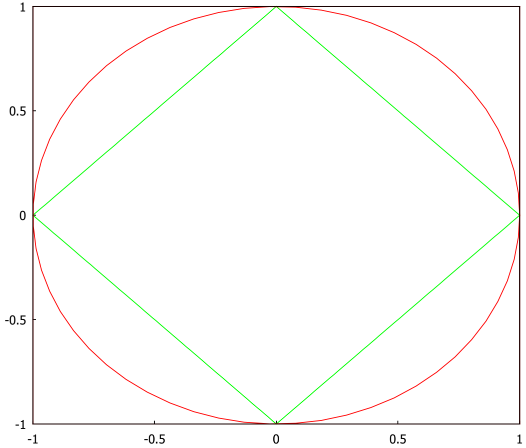
$$\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty, \qquad \forall f \in C[a,b].$$

Espacios normados

Ejercicio: Comprueba que las funciones de los ejemplos son normas.

Esferas unidad en $\mathbb{R}^N$

En la figura siguiente aparecen las esferas de centro 0 y radio 1 en $\mathbb{R}^2$ para la norma de la suma (verde), la euclídea (roja) y la del máximo (negro).



Producto escalar

Definición

Si X es un espacio vectorial (real), un producto escalar en X es una función $< \mid >: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica

i) $< x|y >=< y|x >, \forall x, y \in X.$

ii) $r < x + y|z >=< rx|z > + < ry|z >, \forall x, y, z \in X, r \in \mathbb{R}.$

iii) $< x|x >\geq 0, \forall x \in X$

iv) $x \in X, < x|x >= 0 \Rightarrow x = 0.$

En tal caso el par ordenado $(X, < \mid >)$ se llama **espacio prehilbertiano**.

Todo espacio prehilbertiano $(X, < \mid >)$ es un espacio normado, dotado de la norma dada por

$$\|x\| = \sqrt{< x|x >} \qquad (x \in X).$$

Espacios prehilbertianos

Proposición

Sea $(X, < \mid >)$ un espacio prehilbertiano. Entonces se verifica

a) **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**

$$| < x|y > | \leq \|x\| \; \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

b) Si $x, y \in X$ entonces

$$< x|y >= \|x\| \; \|y\| \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0 \text{ ó } x \in \mathbb{R}^+ y.$$

c)

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x|y >, \quad \forall x, y \in X.$$

d) **Identidad del paralelogramo**

$$< x+y, x+y >^2 + < x-y, x-y >^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad \forall x, y \in X.$$

Producto escalar

Ejercicio:
1) Prueba las propiedades anteriores la norma euclídea y el producto escalar.
2) Si $N \geq 2$, prueba que las normas de la suma y del máximo en $\mathbb{R}^N$ no proceden de un producto escalar.

Espacios métricos

Proposición

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x,y) := \|x-y\| \qquad (x,y \in X).$$

es una distancia en X y se llama **distancia asociada a la norma de X**.

Ejercicio: Comprueba que efectivamente d es una distancia.

Ejemplos

1) Nótese que si (E,d) es un espacio métrico y $A \subset E$, entonces la restricción de d a A es una distancia en A. Se llama distancia inducida en A.

2) Espacio métrico producto.

Dados n espacios métricos (E_1,d_1),(E_2,d_2),...,(E_n,d_n), podemos definir una distancia en el producto $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ por

$$d((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) := \text{máx}\,\{d_1(x_1,y_1),...,d_n(x_n,y_n)\}.$$