Tema 1

Sucesiones de funciones

En Análisis Matemático es frecuente que la solución a un cierto problema sea una función desconocida, o no expresable mediante funciones más elementales, pero se conozcan funciones que se aproximan a dicha solución. Más concretamente, podemos tener funciones $f_1, f_2, f_3, \ldots$, obtenidas en sucesivas aproximaciones al problema, y tales que, hablando intuitivamente, el error que se comete al tomar f_n como solución del problema tiende a desaparecer cuando el número natural n se hace suficientemente grande. Ello motiva el estudio de las sucesiones de funciones, y de la noción de convergencia para ese tipo de sucesiones. Como se ha dicho, en la práctica será frecuente conocer las funciones de una sucesión convergente, pero no la función límite, luego será importante saber si ciertas propiedades de las funciones de la sucesión se transmiten o no a la función límite.

1.1. Convergencia puntual

Recordemos que una sucesión de elementos de un conjunto $\mathcal{F}$ no es más que una aplicación, del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, en $\mathcal{F}$. Las sucesiones de funciones aparecen como es lógico cuando $\mathcal{F}$ es un conjunto de funciones. Usaremos solamente funciones con valores reales, aunque todo el estudio podría hacerse en contextos más generales.

En todo lo que sigue, A será un conjunto no vacío arbitrario y denotamos por $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{R}$, así que una **sucesión de funciones** de A en $\mathbb{R}$ es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{F}(A)$, pero usaremos la misma notación que ya conocemos para otros tipos de sucesiones. Concretamente, para definir una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$ asociamos, a cada $n \in \mathbb{N}$, el **n-ésimo término** de nuestra sucesión, que será una función $f_n : A \to \mathbb{R}$. De esta forma obtenemos una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$, que denotaremos por $\{f_n\}$. Así pues, para definir una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de A en $\mathbb{R}$ debemos concretar, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in A$, el número real $f_n(x)$. De manera análoga, podríamos considerar sucesiones de funciones definidas en A, con valores en otro conjunto no vacío arbitrario B, pero como se ha dicho, sólo estudiaremos el caso $B = \mathbb{R}$.

Por razones que se irán entendiendo más adelante, existen diferentes tipos de convergencia para sucesiones de funciones, dos de los cuales trataremos en este tema.

Empezamos definiendo el tipo de convergencia más sencillo, que de hecho se conoce como convergencia *simple*, o también como convergencia *puntual*. Para motivarla pensemos que, dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de A en $\mathbb{R}$, para cada $x \in A$ tenemos una sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$, luego podemos discutir si esta sucesión converge, y en su caso, considerar su límite. En general, el resultado de tal discusión dependerá del *punto* $x \in A$ que hayamos considerado, luego estamos estudiando la convergencia *punto a punto* de la sucesión $\{f_n\}$, de ahí que hablemos de convergencia *puntual*. Hagamos la definición con detalle.

Decimos que una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de A en $\mathbb{R}$ **converge en un punto** $x \in A$ cuando la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ es convergente. Cuando esto ocurre en todos los puntos de un conjunto no vacío $C \subset A$, se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** en C. En tal caso podemos definir una función $f : C \to \mathbb{R}$ escribiendo $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in C$, y decimos que f es el **límite puntual** de $\{f_n\}$ en C, o también que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C. Obviamente, esto significa que $\{f_n(x)\} \to f(x)$ para todo $x \in C$.

Existe un máximo conjunto en el que se tiene convergencia puntual. De hecho, podemos considerar el conjunto C_p formado por todos los puntos en los que $\{f_n\}$ converge, es decir, todos los puntos $x \in A$ tales que la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente. Suponiendo que C_p no es vacío, podemos definir $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in C_p$, de forma que $\{f_n\}$ converge puntualmente a F en C_p. Pero si un conjunto $C \subset A$ verifica que $\{f_n\}$ converge puntualmente en C a una función $f : C \to \mathbb{R}$, se tiene obviamente que $C \subset C_p$ y $f(x) = F(x)$ para todo $x \in C$. Así pues, C_p es el máximo conjunto en el que la sucesión $\{f_n\}$ puede converger puntualmente, por lo que suele decirse que C_p es el **campo de convergencia puntual** de $\{f_n\}$.

Ilustramos las nociones recién introducidas con un ejemplo concreto, en el que aparece una sucesión de funciones reales de variable real, el tipo de funciones que más nos interesa. Más adelante irán apareciendo otros ejemplos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea φ_n la función potencia de exponente n. En este caso $A = \mathbb{R}$, y tenemos la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ dada por

$$\varphi_n(x) = x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < 1$, sabemos que $\{x^n\} \to 0$, mientras que si $|x| > 1$, tenemos $\{x^n\} \to \infty$. Además, es obvio que $\{\varphi_n(1)\} \to 1$, y que la sucesión $\{\varphi_n(-1)\} = \{(-1)^n\}$ no converge. Así pues, fijado $x \in \mathbb{R}$, la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ es convergente si, y sólo si, $-1 < x \leqslant 1$. Por tanto, el campo de convergencia puntual de $\{\varphi_n\}$ es el intervalo semiabierto $]-1,1]$, en el que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función $\varphi :]-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad \varphi(x) = 0 \ \ \forall x \in]-1,1[\tag{2}$$

Vemos que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente en un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ si, y sólo si, $C \subset]-1,1]$, en cuyo caso, el límite puntual de $\{\varphi_n\}$ en C es la restricción de φ a C. Por ejemplo, $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente en el intervalo abierto $]-1,1[$ a la función idénticamente nula. Para abreviar, se suele llamar “cero” a la función idénticamente nula en el conjunto del que se esté hablando. En este caso, podemos decir que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a cero en $]-1,1[$.

1.2. Convergencia uniforme

En el ejemplo anterior vemos que la convergencia puntual no es suficiente para que una propiedad importante, como es la continuidad, se transmita de los términos de la sucesión a la función límite. De hecho, φ_n es continua en $]-1,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero φ no es continua en el punto 1.

Nuestro objetivo es ahora definir otro tipo de convergencia, más fuerte que la puntual, que sí será suficiente para asegurar que el límite de una sucesión de funciones continuas tenga que ser una función continua. En lo que sigue, fijamos una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de A en $\mathbb{R}$, un conjunto no vacío $C \subset A$ y una función $f : C \to \mathbb{R}$.

Sabemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C cuando se verifica lo siguiente:

$$\forall x \in C, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant m \quad \Rightarrow \quad \big| f_n(x) - f(x) \big| < \varepsilon \tag{3}$$

En general, el número natural m que aquí ha aparecido, dependerá por supuesto de ε, pero también del punto $x \in C$ considerado. Intuitivamente hablando, la rapidez con la que $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$, puede depender de x. Pues bien, cuando se pueda conseguir que m no dependa de x, es decir, cuando podamos asegurar que $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$, al menos con una cierta rapidez independiente de x, diremos que la convergencia es uniforme. Concretamos la definición con más detalle:

Se dice que $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a f en C, cuando se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant m \quad \Rightarrow \quad \big| f_n(x) - f(x) \big| < \varepsilon \quad \forall x \in C \tag{4}$$

Ni que decir tiene, esto implica que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C, pero la diferencia entre (3) y (4) es justo la que habíamos anunciado: mientras en (3) aparece un $m \in \mathbb{N}$, que puede depender de $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y de $x \in C$, vemos en (4) que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ aparece un $m \in \mathbb{N}$ que cumple la misma desigualdad final, para todo $x \in C$.

Resaltamos una observación inmediata. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C, fijado un conjunto no vacío $D \subset C$, está claro que $\{f_n\}$ también converge uniformemente en D, a la restricción $f\big|_D$.

Volvamos a la sucesión $\{\varphi_n\}$ definida en (1), para discutir ahora su convergencia uniforme. Sabemos que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente en $]-1,1]$ a la función φ dada por (2), y por tanto converge puntualmente a cero en el intervalo abierto $J =]-1,1[$. Vamos a comprobar ahora que $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a cero en J, de donde se deduce que tampoco converge uniformemente a φ en $]-1,1]$.

Supongamos que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a cero en J, para llegar a contradicción. Tomando $\varepsilon = 1/3$ en (4), obtenemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x^m| < 1/3$ para todo $x \in J$. Pero si tomamos $x = 1/\sqrt[m]{2}$, tenemos $x \in J$ con $|x^m| = 1/2 > 1/3$, una contradicción.

Sin embargo, fijado $r \in \mathbb{R}^+$ con $r < 1$, veremos que sí hay convergencia uniforme en el intervalo $J_r = [-r, r]$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\{r^n\} \to 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $r^n < \varepsilon$. Para $n \geqslant m$, y para todo $x \in J_r$, deducimos que $|x^n| = |x|^n \leqslant r^n < \varepsilon$. Esto prueba que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a cero en J_r.

El ejemplo anterior muestra dos hechos que conviene destacar. En primer lugar, una sucesión de funciones puede converger puntualmente en un conjunto, sin hacerlo uniformemente. Así pues, *la convergencia uniforme implica la puntual, pero el recíproco es falso*.

También hemos visto que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en cada intervalo $J_r = [-r, r]$ con $r \in]0,1[$, pero no lo hace en $J =]-1,1[$, que es la unión de dichos intervalos. Por tanto, en general, no existe un máximo conjunto C en el que una sucesión converja uniformemente. En el ejemplo, tal conjunto C verificaría que $J_r \subset C$ para todo $r \in]0,1[$, luego se tendría $J \subset C$, y la sucesión convergería uniformemente en J, cosa que no sucede, como hemos visto. Así pues, a diferencia de lo que ocurría con la convergencia puntual, no tiene sentido hablar de un campo de convergencia uniforme.

Los razonamientos usados para comprobar que la sucesión $\{\varphi_n\}$ recién estudiada, converge uniformemente en ciertos conjuntos, y que no lo hace en otros, son casos particulares de dos criterios de convergencia uniforme, que vamos a estudiar en general. El primero de ellos es el que suele usarse en la práctica para probar la convergencia uniforme.

- *Para que la sucesión $\{f_n\}$ converja uniformemente a f en C, es condición necesaria y suficiente, que exista una sucesión $\{\rho_n\}$ de números reales, con $\{\rho_n\} \to 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que, para $n \geqslant m$, y para todo $x \in C$, se tenga: $\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \rho_n$.*

Probamos en primer lugar la suficiencia, que es la que tiene más utilidad. Dado $\varepsilon > 0$, usando que $\{\rho_n\} \to 0$ obtenemos $k \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant k$ se tiene que $\rho_n < \varepsilon$. Entonces, para $n \geqslant$ máx$\{m,k\}$, y para todo $x \in C$, se tiene que $\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \rho_n < \varepsilon$. Esto prueba que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C.

Recíprocamente, la convergencia uniforme nos da un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, y para todo $x \in C$, se tiene que $\big|f_n(x) - f(x)\big| < 1$. También para $n \geqslant m$, podemos entonces tomar

$$\rho_n = \sup \left\{ \big|f_n(x) - f(x)\big| : x \in C \right\}$$

De esta forma, para $n \geqslant m$ y para todo $x \in C$, se tiene $\big|f_n(x) - f_n(x)\big| \leqslant \rho_n$. Para $n < m$ podemos tomar por ejemplo $\rho_n = 0$, pues ello no afecta a la convergencia de la sucesión $\{\rho_n\}$.

Dado ahora $\varepsilon > 0$, volvemos a usar la convergencia uniforme para obtener un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant k \quad \Longrightarrow \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in C$$

Deducimos que, para $n \geqslant k$, se tiene $\rho_n \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$, luego $\{\rho_n\} \to 0$, como se quería. ■

Como se ha dicho, el criterio recién probado es el que suele usarse en la práctica, para probar la convergencia uniforme. De hecho, es frecuente que se cumpla una condición algo más restrictiva, que por supuesto sigue siendo suficiente, aunque ya no sea necesaria:

- *Si existe una sucesión $\{\rho_n\}$ de números reales, verificando que*

$$\{\rho_n\} \to 0 \qquad \text{y} \qquad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \rho_n \qquad \forall x \in C, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C.

Nótese que, para la sucesión $\{\varphi_n\}$ definida en (1), se probó la convergencia uniforme a cero en cada intervalo $[-r,r]$ con $r \in [0,1[$, usando la condición análoga a (5) con $\rho_n = r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos otro ejemplo ilustrativo, en el que se usa el criterio anterior. En el caso $A = \mathbb{R}$, consideremos la sucesión $\{g_n\}$ definida por

$$g_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es evidente que $\{g_n(x)\} \to 0$, lo que también es cierto para $x = 0$, pues de hecho $g_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\{g_n\}$ converge puntualmente a cero en $\mathbb{R}$. Tomando ahora $C = \mathbb{R}$, trataremos de encontrar una sucesión $\{\rho_n\}$ de números reales, que verifique (5), con g_n en lugar de f_n, y tomando $f = 0$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, la función g_n es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$g_n'(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{\left(1 + n^2 x^2\right)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \leqslant 1/n$, se tiene $g_n'(x) \geqslant 0$, luego g_n es creciente en $[-1/n,\, 1/n]$, y deducimos que

$$-\frac{1}{2n} = g_n\left(-\frac{1}{n}\right) \leqslant g_n(x) \leqslant g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \qquad \forall x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

Además g_n es decreciente, tanto en $]-\infty,\, 1/n]$ como en $[1/n,\, +\infty[$, de donde

$$0 > g_n(x) \geqslant -\frac{1}{2n} \quad \forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{n}\right] \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2n} \geqslant g_n(x) > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$$

Agrupando los tres casos estudiados, obtenemos que

$$\left|g_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ era arbitrario, basta usar el resultado anterior, con $\{\rho_n\} = \{1/(2n)\}$, para concluir que $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$.

Volviendo al caso general, veamos ahora el criterio que suele usarse para probar que no hay convergencia uniforme.

- *La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si, se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \big(f_n(x_n) - f(x_n)\big) = 0 \tag{6}$$

para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C.

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C, y sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de C. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos $m \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant m$, se tiene que $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ para todo $x \in C$. En particular, para $n \geqslant m$, tomando $x = x_n$ tenemos $\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| < \varepsilon$. Esto prueba que se cumple (6).

Recíprocamente, usando (6) para conveniente sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C, probaremos la convergencia uniforme. Fijado $n \in \mathbb{N}$, para definir x_n distinguimos los dos casos posibles. Si el conjunto $\{\,|f_n(x) - f(x)| : x \in C\,\}$ está mayorado, tomamos $x_n \in C$ verificando que

$$\sup\{\,|f_n(x) - f(x)| : x \in C\,\} < \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| + (1/n) \tag{7}$$

En otro caso, tomamos $x_n \in C$ verificando que $\big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| > n$.

Fijado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ con $\varepsilon < 1$, usando (6) tenemos un $m \in \mathbb{N}$ que verifica:

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| + (1/n) < \varepsilon$$

Para $n \geqslant m$, se tiene en particular que $\big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| < \varepsilon < n$, luego x_n se ha definido de forma que se verifique (7). Para todo $x \in C$ se tiene entonces que

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| + (1/n) < \varepsilon$$

Esto prueba que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C, como queríamos demostrar. ■

Del criterio anterior volvemos a destacar la parte que suele usarse:

- *Si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C, tal que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ no converge a cero, entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en C.*

Nótese que para probar que la sucesión $\{\varphi_n\}$ definida en (1) no converge uniformemente a cero en $]-1,1[$, se usó implícitamente el resultado anterior. En concreto, tomando $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\varphi_n(x_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{\varphi_n(x_n)\}$ no converge a cero. Deducimos que $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente en el conjunto $C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, luego tampoco en ningún conjunto que contenga a C.

Como otro ejemplo ilustrativo, con $A = [0,1]$, consideremos la sucesión $\{h_n\}$ dada por

$$h_n(x) = n^2 x\big(1 - nx\big) \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \qquad \text{y} \qquad h_n(x) = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \tag{8}$$

Dado $x \in]0,1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 1/x$, se tiene que $f_n(x) = 0$, luego $\{h_n(x)\} \to 0$. Como $h_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $\{h_n\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$.

Tomando $x_n = 1/(2n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\{h_n(x_n)\} = \{n/4\} \to +\infty$, luego $\{h_n\}$ no converge uniformemente en ningún conjunto $C \subset [0,1]$ que verifique $\{1/(2n) : n \in \mathbb{N}\} \subset C$. Por ejemplo, no hay convergencia uniforme en $]0, 1/2]$, luego tampoco en $[0,1]$.

Sin embargo, fijado $r \in]0,1]$, es fácil ver que $\{h_n\}$ converge uniformemente a cero en el intervalo $I_r = [r,1]$. En efecto, tomando $m \in \mathbb{N}$ con $m > 1/r$, para $n \geqslant m$ y $x \in I_r$ se tiene que $1/n < r \leqslant x$, luego $h_n(x) = 0$. Por tanto, se cumple la condición análoga a (5), incluso tomando $\rho_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.3. Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme

Seguimos trabajando con una sucesión $\{f_n\}$, de funciones de A en $\mathbb{R}$, y mantenemos fijo un conjunto no vacío $C \subset A$.

Los dos criterios recién probados, tienen un claro inconveniente: para poder estudiar la convergencia uniforme en C, exigen conocer la función f, límite puntual de $\{f_n\}$, al menos en el conjunto C. Por supuesto, para que haya convergencia uniforme ha de existir tal función f, pero es frecuente que no la conozcamos explícitamente, y sin embargo nos interese probar la convergencia uniforme. Esto ocurre sobre todo cuando se trabaja con series de funciones, como haremos más adelante,

Igual que cuando se trabaja con sucesiones de números reales, para resolver este problema disponemos de una condición de Cauchy, que caracteriza la convergencia uniforme.

Se dice que $\{f_n\}$ es **uniformemente de Cauchy** en C, cuando verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \ : \ p,q \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad \big| f_p(x) - f_q(x) \big| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Vemos en particular que, para cada $x \in C$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, pero la clave está en que, como ocurría con la convergencia uniforme, tenemos un $m \in \mathbb{N}$ que puede depender de $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, pero no del punto $x \in C$ que consideremos.

Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en C, a una función $f : C \to \mathbb{R}$, para cada $\varepsilon > 0$ tenemos un $m \in \mathbb{N}$ verificando que

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad \big| f_n(x) - f(x) \big| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in C$$

Entonces, para $p,q \geqslant n$, y para todo $x \in C$, se tiene claramente que

$$\big| f_p(x) - f_q(x) \big| \leqslant \big| f_p(x) - f(x) \big| + \big| f_(x) - f_q(x) \big| < (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon$$

luego $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C. Pero lo interesante, como ya se ha dicho, es el siguiente resultado:

- *Si $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en C.*

Para cada $x \in C$, sabemos que la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, luego es convergente. Esto nos permite definir una función $f : C \to \mathbb{R}$ escribiendo:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad \forall x \in C$$

con lo cual es evidente que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C.

Dado $\varepsilon > 0$, la condición de Cauchy uniforme nos da un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$p,q \in \mathbb{N}, \quad p,q \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad \big| f_p(x) - f_q(x) \big| < \varepsilon/2 \qquad \forall x \in C$$

Fijados $p \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m$, y $x \in C$, deducimos que

$$\big| f_p(x) - f(x) \big| = \lim_{q \to \infty} \big| f_p(x) - f_q(x) \big| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$$

En resumen, hemos probado que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que, si $p \in \mathbb{N}$ verifica que $p \geqslant m$, se tiene $\big| f_p(x) - f(x) \big| < \varepsilon$ para todo $x \in C$. Esto significa que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C, como queríamos demostrar. ■

1.4. Convergencia uniforme, continuidad y derivabilidad

Vamos ahora a comprobar que, como ya habíamos anunciado, la convergencia uniforme permite deducir la continuidad de la función límite, a partir de la continuidad de los términos de la sucesión. Por ello se dice que *la convergencia uniforme preserva la continuidad.*

- *Si A es un espacio topológico y $x_0 \in A$, supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en un entorno U del punto x_0, a una función $f : U \to \mathbb{R}$, y que la función f_n es continua en x_0, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces f es continua en el punto x_0.*

Fijado $\varepsilon > 0$, la convergencia uniforme en U nos da un $m \in \mathbb{N}$ que verifica:

$$\big| f_m(x) - f(x) \big| < \varepsilon/3 \qquad \forall x \in U$$

Por otra parte, la continuidad de f_m nos da otro entorno V del punto x_0, tal que

$$\big| f_m(x) - f_m(x_0) \big| < \varepsilon/3 \qquad \forall x \in V$$

Entonces $U \cap V$ es un entorno de x_0 y, para todo $x \in U \cap V$, se tiene

$$\begin{aligned} \big| f(x) - f(x_0) \big| &\leqslant \big| f(x) - f_m(x) \big| + \big| f_m(x) - f_m(x_0) \big| + \big| f_m(x_0) - f(x_0) \big| \\ &< (\varepsilon/3) + (\varepsilon/3) + (\varepsilon/3) = \varepsilon \end{aligned}$$

Esto prueba que f es continua en el punto x_0, como se quería. ■

Por supuesto, si f_n es continua (en todo punto de A) para todo $n \in \mathbb{N}$, la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en A permite asegurar que la función límite $f : A \to \mathbb{R}$ es continua. De hecho, basta que la convergencia sea uniforme en un entorno de cada punto de A.

En el caso $A \subset \mathbb{R}$, podría pensarse que la convergencia uniforme preserva la derivabilidad, igual que preserva la continuidad. No es así, como vamos a ver con un ejemplo, para luego comentar hasta qué punto tal idea es completamente errónea.

Consideremos la sucesión $\{\psi_n\}$, de funciones reales de variable real, dada por

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene claramente que $\big\{ \psi_n(x) \big\} \to \sqrt{x^2} = |x|$, luego $\{\psi_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función valor absoluto. De hecho, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\big| \psi_n(x) - |x| \big| = \frac{\sqrt{n^2x^2+1} - n|x|}{n} = \frac{n^2x^2 + 1 - n^2x^2}{n\big(\sqrt{n^2x^2+1} + n|x|\big)} \leqslant \frac{1}{n}$$

Puesto que $\{1/n\} \to 0$, deducimos que la convergencia es uniforme en $\mathbb{R}$. Tenemos así una sucesión de funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, que converge uniformemente en $\mathbb{R}$, a una función que no es derivable en el origen.

Dos resultados que no vamos a demostrar, permiten ilustrar hasta qué punto, la convergencia uniforme no preserva la derivabilidad. Por una parte, un famoso teorema de Weierstrass afirma que, para cada función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, existe una sucesión de funciones polinómicas, que converge uniformemente a f en $[0,1]$. El propio Weierstrass encontró también el primer ejemplo de una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, que no es derivable en ningún punto de $[0,1]$. Existe por tanto una sucesión de funciones polinómicas, que son funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, que converge uniformemente en $[0,1]$ a una función no derivable en ningún punto de $[0,1]$.

A la vista de la situación descrita, es natural preguntar si hay alguna forma de asegurarse de que el límite de una sucesión de funciones derivables es una función derivable. A continuación probamos un resultado en esta dirección, mostrando que la clave está en tener la convergencia uniforme, no de nuestra sucesión de funciones, sino de la sucesión de las derivadas.

- *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado no trivial, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de I en $\mathbb{R}$. Supongamos que f_n es derivable en I para todo $n \in \mathbb{N}$, y que la sucesión $\{f_n{}'\}$ converge uniformemente en I a una función $g : I \to \mathbb{R}$. Si $\{f_n\}$ converge en un punto $a \in I$, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en I, a una función $f : I \to \mathbb{R}$, que es derivable en I con $f\,'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$.*

Dado $\varepsilon > 0$, como la sucesión $\{f_n{}'\}$ es uniformemente de Cauchy en I, si $\lambda > 0$ es la longitud de I, tenemos $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p,q \in \mathbb{N}, \quad p,q \geqslant m_1 \quad \Longrightarrow \quad \left| f_p{}'(t) - f_q{}'(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2\lambda} \qquad \forall t \in I \tag{9}$$

Por otra parte, como $\{f_n(a)\}$ es una sucesión de cauchy en $\mathbb{R}$, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p,q \in \mathbb{N}, \quad p,q \geqslant m_2 \quad \Longrightarrow \quad \left| f_p(a) - f_q(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

Tomando $m = \max\{m_1, m_2\}$, fijamos $p,q \in \mathbb{N}$ con $p,q \geqslant m$ y un punto $x \in I$. Si $x \neq a$, el intervalo cerrado de extremos a y x está contenido en I, donde la función $f_p - f_q$ es derivable, luego podemos usar el teorema del valor medio para obtener un punto $t \in I$ que verifica

$$f_p(x) - f_q(x) = f_p(a) - f_q(a) + \big(f_p{}'(t) - f_q{}'(t) \big)(x-a)$$

Puesto que $|x-a| \leqslant \lambda$, usando (9) y (10) deducimos claramente que

$$\left| f_p(x) - f_q(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\lambda} |x-a| \leqslant \varepsilon$$

y para $x = a$ la misma desigualdad se deduce de (10). Esto prueba que $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en I, luego converge uniformemente en I a una función $f : I \to \mathbb{R}$.

Queda ahora comprobar que f es derivable en I, con derivada g. Fijado un punto $b \in I$, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la función $\Phi_n : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x-b} \quad \forall x \in I \setminus \{b\} \qquad \text{y} \qquad \Phi_n(b) = f_n{}'(b)$$

Con un razonamiento similar al usado para $\{f_n\}$, probaremos que $\{\Phi_n\}$ es uniformemente de Cauchy en I.

Dado $\varepsilon > 0$, usamos de nuevo que $\{f_n{}'\}$ es uniformemente de Cauchy en I, con lo que obtenemos un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$p,q \in \mathbb{N}, \quad p,q \geqslant k \quad \Longrightarrow \quad \left| f_p{}'(t) - f_q{}'(t) \right| < \varepsilon \qquad \forall t \in I \tag{11}$$

Fijamos ahora $p,q \in \mathbb{N}$ con $p,q \geqslant k$, y un punto $x \in I$. Si $x \neq b$, usando de nuevo el teorema del valor medio, obtenemos $t \in I$ verificando que

$$f_p(x) - f_q(x) = f_p(b) - f_q(b) + \big(f_p{}'(t) - f_q{}'(t) \big) (x - b)$$

de donde, usando (11) deducimos claramente que

$$\left| \Phi_p(x) - \Phi_q(x) \right| = \left| f_p{}'(t) - f_q{}'(t) \right| < \varepsilon$$

En el caso $x = b$, tenemos en (11) la misma desigualdad, ya que

$$\left| \Phi_p(b) - \Phi_q(b) \right| = \left| f_p{}'(b) - f_q{}'(b) \right| < \varepsilon$$

En resumen, para cada $\varepsilon > 0$, hemos encontrado $k \in \mathbb{N}$ tal que, para $p,q \geqslant k$, y para todo $x \in I$, se tiene $\left| \Phi_p(x) - \Phi_q(x) \right| < \varepsilon$. Esto significa que $\{\Phi_n\}$ es uniformemente de Cauchy en I, luego converge uniformemente en I a una función $\Phi : I \to \mathbb{R}$.

Ahora bien, como $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en I, para todo $x \in I \setminus \{b\}$ se tiene que

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

y por otra parte, vemos también que

$$\Phi(b) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(b) = \lim_{n\to\infty} f_n{}'(b) = g(b)$$

Finalmente observamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\lim_{x\to b} \Phi_n(x) = \lim_{x\to b} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} = f_n{}'(b) = \Phi_n(b)$$

luego Φ_n es continua en el punto b. Como $\{\Phi_n\}$ converge uniformemente a Φ en I, deducimos que Φ también es continua en el punto b. Por tanto, se tiene que

$$g(b) = \Phi(b) = \lim_{x\to b} \Phi(x) = \lim_{x\to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Esto significa que f es derivable en el punto b con $f'(b) = g(b)$. Como $b \in I$ era arbitrario, hemos probado que f es derivable en I con $f' = g$, como se quería. ■

1.5. Convergencia uniforme e integración

En el estudio de la integración que haremos más adelante, prestaremos mucha atención al comportamiento de la integral con respecto a la convergencia de sucesiones. Hablando de forma intuitiva, pues por ahora no podemos concretar las definiciones, se trata de discutir si, cuando una sucesión de funciones converge puntualmente, se puede obtener la integral de la función límite como el límite de las integrales de los términos de la sucesión.

Por ahora, sólo vamos a probar un resultado elemental de este tipo, válido para una integral que suponemos bien conocida, la de una función continua en un intervalo compacto.

- *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, que converge uniformemente en $[a,b]$ a una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Se tiene entonces que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \tag{12}$$

Nótese que la integral del primer miembro tiene perfecto sentido, pues sabemos que f es una función continua en $[a,b]$. Se trata de probar que la sucesión que aparece en el segundo miembro converge a la integral de f.

Para cada $n\in\mathbb{N}$, la función $|f_n-f|$ es continua en $[a,b]$, luego tiene un máximo absoluto en dicho intervalo, es decir, existe $x_n\in[a,b]$ tal que

$$\big|f_n(x_n)-f(x_n)\big| = \max\big\{\,|f_n(x)-f(x)|\;:\;x\in[a,b]\,\big\}$$

igualdad que es válida para todo $n\in\mathbb{N}$. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $[a,b]$, sabemos que $\big\{f_n(x_n)-f(x_n)\big\}\to 0$, luego se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\max\big\{\,|f_n(x)-f(x)| : x\in[a,b]\,\big\} = 0 \tag{13}$$

Usando ahora propiedades bien conocidas de la integral, para todo $n\in\mathbb{N}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b \big(f_n(x)-f(x)\big)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \big|f_n(x)-f(x)\big|\,dx \\ &\leqslant (b-a)\max\big\{\,|f_n(x)-f(x)| : x\in[a,b]\,\big\}\end{aligned}$$

y basta tener en cuenta (13) para concluir que se verifica (12). ■

Conviene resaltar que, en el resultado anterior, la convergencia uniforme no sólo ha servido para asegurar que la función límite f es continua, sino también para conseguir (12). Aún suponiendo que f es continua, la convergencia puntual de $\{f_n\}$ a f en $[a,b]$ no es suficiente para que se tenga (12).

Para comprobar la afirmación anterior, basta considerar la sucesión $\{h_n\}$ definida en (8), que converge puntualmente en $[0,1]$ a la función h, dada por $h(x)=0$ para todo $x\in[0,1]$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, la función h_n es idénticamente nula en el intervalo $[1/n\,,\,1]$ y coincide con una función polinómica en $[0\,,\,1/n]$. Por el carácter local de la continuidad se tiene que h_n es continua en $[0,1] \setminus \{1/n\}$, pero también lo es en el punto $1/n$ ya que

$$\lim_{x \to (1/n)^-} h_n(x) = \lim_{x \to (1/n)^-} n^2 x\big(1 - nx\big) = 0 = h_n(1/n) = \lim_{x \to (1/n)^+} h_n(x)$$

Por tanto $\{h_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en $[0,1]$, que converge puntualmente en $[0,1]$ a una función continua. Sin embargo, es fácil ver que no se verifica en este caso la igualdad análoga a (12). De hecho, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\int_0^1 h_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} n^2 x\big(1 - nx\big)\,dx = \left[\frac{n^2x^2}{2} - \frac{n^3x^3}{3}\right]_0^{1/n} = \frac{1}{6}$$

de donde deducimos que

$$\int_a^b h(x)\,dx = 0 \neq \frac{1}{6} = \lim_{n \to \infty} \int_a^b h_n(x)\,dx$$