Potencias de exponente natural: convergencia puntual

En el caso $A = \mathbb{R}$, sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones dada por

$$\varphi_n(x) = x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $x \in \mathbb{R}$, se tiene: $\{x^n\}$ converge $\iff$ $-1 < x \leqslant 1$

El campo de convergencia puntual de $\{\varphi_n\}$ es el intervalo $]-1, 1]$
en el que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función $\varphi :]-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Vemos que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente en un conjunto $C \subset \mathbb{R}$
si, y sólo si, $C \subset]-1, 1]$, en cuyo caso,
el límite puntual de $\{\varphi_n\}$ en C es $\varphi\big|_C$

Por ejemplo, $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a cero en $]-1, 1[$

φ_n es continua en $]-1, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero φ no es continua en 1

$$|x^n| = |x|^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\underline{|x| < 1}$ $\qquad |x|^{n+1} = |x|\,|x|^n \leq |x|^n$

$\{|x|^n\}$ decreciente y minorada

$\{|x|^n\} \to L \in \mathbb{R} \qquad \{|x|^{n+1}\} \to L$

$\{|x|\,|x|^n\} \to |x| \cdot L$

$L = |x| L$, $|x| < 1$, $L = 0$, $\{|x|^n\} \to 0$, $\{x^n\} \to 0$

$\underline{|x| > 1}$ $\qquad \dfrac{1}{|x|} < 1$, $\left\{\dfrac{1}{|x|^n}\right\} \to 0$

$$\{|x|^n\} = \left\{\frac{1}{1/|x|^n}\right\} \to +\infty$$

$\{x^n\}$ no converge

$\underline{|x| = 1}$ $\qquad x = 1 \quad \{x^n\} = \{1^n\} \to 1$

$x = -1 \quad \{x^n\} = \{(-1)^n\}$ no converge

$\{x^n\}$ converge $\iff -1 < x \leq 1 \qquad C_p =]-1, 1]$

$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \forall x \in]-1, 1[$, $\varphi(1) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$

Potencias de exponente natural: convergencia uniforme

$$\varphi_n(x) = x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge puntualmente en $]-1,1]$ a la función $\varphi :]-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in]-1,1[$$

1) - $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a cero en $]-1,1[= J$
- Por tanto, $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a φ en $]-1,1]$
- En general, la convergencia puntual no implica la convergencia uniforme

2) - Fijado $r \in \mathbb{R}^+$ con $r < 1$, se tiene que

  $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a cero en $[-r,r] = J_r$
- En general, no se puede hablar de un "campo de convergencia uniforme"

1) Supongamos que hay convergencia uniforme en J

$\varepsilon = 1/3 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |x^n| < \varepsilon \quad \forall x \in J$

$n = m, \quad x = \dfrac{1}{\sqrt[m]{2}}, \quad 0 < x < 1, \quad x \in J \quad |x^m| = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{3}$ contradicción.

2) $x \in J_r \Rightarrow |x| \leq r \Rightarrow |x^n| = |x|^n \leq r^n$

$0 < r < 1 \quad \{r^n\} \to 0$

$\varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} : \quad n \geq m \Rightarrow r^n < \varepsilon$

$n \geq m \quad |x^n| \leq r^n < \varepsilon \quad \forall x \in J_r$

$\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a cero en J_r

Primera caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,

existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en $\mathbb{R}$, con $\{\rho_n\} \to 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$n \geqslant m \implies \left| f_n(x) - f(x) \right| \leqslant \rho_n \quad \forall x \in C$$

Suponemos $n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \rho_n \quad \forall x \in C$, $\{\rho_n\} \to 0$

$\varepsilon > 0 \; \exists k \in \mathbb{N} : n \geq k \Rightarrow \rho_n < \varepsilon$

$$n \geq \max\{m, k\} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \overset{n \geq m}{\leq} \rho_n \overset{n \geq k}{<} \varepsilon \quad \forall x \in C$$

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C

Ejemplo

$$g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|g_n(x)| \leqslant 1/(2n) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N}$ fijo $\quad$ g_n derivable en $\mathbb{R}$ con

$$g_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

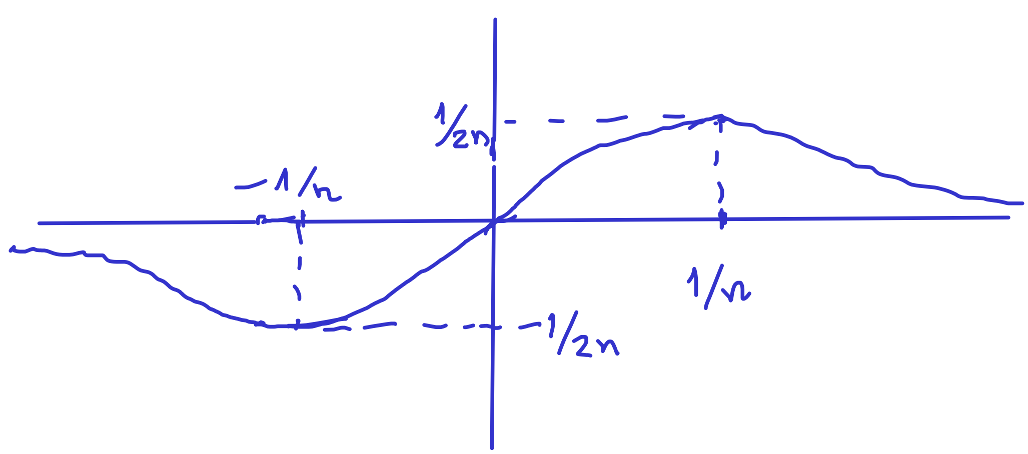
$x \leq -1/n$ $\quad$ g_n decreciente $\quad$ $0 > g_n(x) \geq g_n(-1/n) = -\frac{1}{2n}$

$-1/n \leq x \leq \frac{1}{n}$ $\quad$ g_n creciente $\quad$ $-\frac{1}{2n} = g_n(-\frac{1}{n}) \leq g_n(x) \leq g_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$

$\frac{1}{n} \leq x$ $\quad$ g_n decreciente $\quad$ $0 \leq g_n(x) \leq g_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$

Por tanto $\quad -\frac{1}{2n} \leq g_n(x) \leq \frac{1}{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$



Segunda caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C, se tiene que $\{f_n(x_n) - f(x_n)\} \to 0$

Supongamos convergencia uniforme en C

$\varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in C$

$n \geq m, \quad x = x_n \in C, \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon$

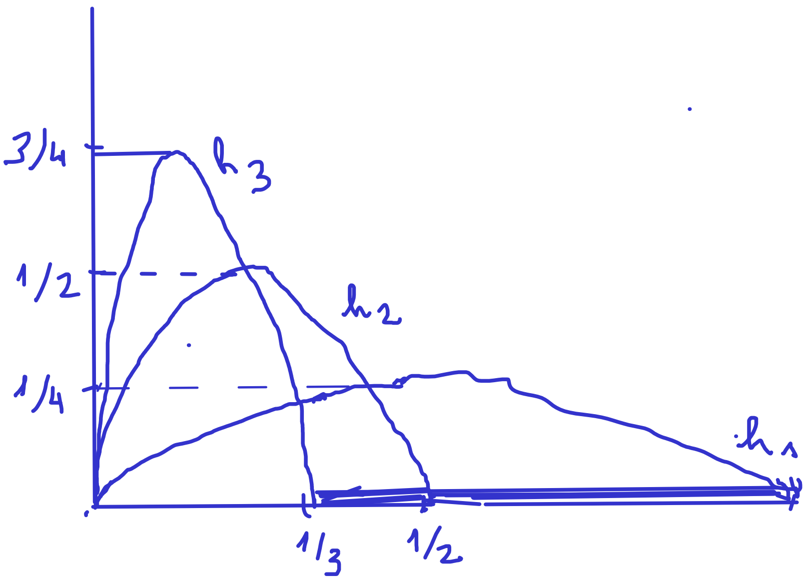
$$\{f_n(x_n) - f(x_n)\} \to 0$$

Ejemplo

En el caso $A=[0,1]$, para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos:

$$h_n(x) = n^2x(1-nx) \quad \forall x\in\left[0,\frac{1}{n}\right] \qquad \text{y} \qquad h_n(x)=0 \quad \forall x\in\left[\frac{1}{n},1\right]$$

$\{h_n\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$, pero no uniformemente



$h_n(0)=0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \{h_n(0)\}\to 0$

$0<x\le 1 \quad \exists m\in\mathbb{N}:$

$n\geq m \Rightarrow n>\frac{1}{x} \Rightarrow h_n(x)=0$

$\{h_n(x)\}\to 0$

$\{h_n\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$

$x_n=\frac{1}{2n}$, $h_n(x_n) = n\cdot\frac{1}{2n}\left(1-n\frac{1}{2n}\right)=\frac{n}{4} \quad \{h_n(x_n)\}\not\to 0$

No hay convergencia uniforme en $[0,1]$

Convergencia uniforme en ¿$[0,1/2]$? NO

" " " ¿$\left[0,\frac{1}{10^{20}}\right]$? NO

$0<r<1$ Convergencia uniforme en ¿$[r,1]$? SI:

$\exists m\in\mathbb{N}: \frac{1}{m}<r$

$n\geq m \Rightarrow \frac{1}{n}\le\frac{1}{m}<r \Rightarrow [r,1]\subset\left[\frac{1}{n},1\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow h_n(x)=0 \quad \forall x\in[r,1]$

Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme

Si $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C,

entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en C

Previo: Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C

$\forall \varepsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N} : n\geq m \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \forall x\in C$

$p,q\geq m \Rightarrow |f_p(x)-f_q(x)| \leq |f_p(x)-f(x)| + |f(x)-f_q(x)| <$
$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C

Recíproco: Suponemos $\{f_n\}$ uniformemente de Cauchy en C

$(*)\quad \forall \varepsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N} : p,q\geq m \Rightarrow |f_p(x)-f_q(x)|<\varepsilon\ \forall x\in C$

$\forall x\in C$ $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy, luego converge

$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall x\in C$, $f: C\to\mathbb{R}$

$\varepsilon>0$ fijo, $(*)\ \exists m\in\mathbb{N}: \ldots$, $p\geq m$ fijo, $x\in C$ fijo

$q\geq m \Rightarrow |f_p(x)-f_q(x)|<\varepsilon$

$|f_p(x)-f(x)| = \lim_{q\to\infty} |f_p(x)-f_q(x)| \leq \varepsilon$

Esto es cierto para todo $x\in C$, todo $p\in\mathbb{N}$ con $p\geq m$ y todo $\varepsilon>0$

Hemos demostrado:

$\forall \varepsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}: p\geq m \Rightarrow |f_p(x)-f(x)|\leq\varepsilon\ \forall x\in C$

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C

La convergencia uniforme preserva la continuidad

Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$
y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$
que converge uniformemente, en un entorno U del punto x_0,
a una función $f : U \to \mathbb{R}$.

Si f_n es continua en x_0 para todo $n \in \mathbb{N}$,

entonces f es continua en el punto x_0.

$$¿\ f(x) \sim f(x_0)\ ?$$

$$f_n(x) \sim f_n(x_0)$$

$\varepsilon > 0$ convergencia uniforme en U

$\exists\, m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in U$

f_m continua en x_0

$\exists\, V$ entorno de x_0 : $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in V$

$U \cap V$ entorno de x_0 y para $x \in U \cap V$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ U \cap V$ entorno de x_0 tal que:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in U \cap V$$

f es continua en x_0

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ψ_n es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, y la sucesión $\{\psi_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función valor absoluto, que no es derivable en el origen

$$\psi(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|\psi_n(x) - \psi(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \frac{\sqrt{n^2x^2+1} - n|x|}{n} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^2x^2+1} - n|x|\right)\left(\sqrt{n^2x^2+1} + n|x|\right)}{n\left(\sqrt{n^2x^2+1} + n|x|\right)} =$$

$$= \frac{n^2x^2 + 1 - n^2x^2}{n\left(\underset{\substack{\vee\!/ \\ 1}}{\sqrt{n^2x^2+1}} + n|x|\right)} \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\{\psi_n\}$ converge a ψ uniformemente en $\mathbb{R}$

Convergencia uniforme y derivación

Dado un intervalo acotado no trivial $I \subset \mathbb{R}$, y una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de I en $\mathbb{R}$, supongamos que:

- f_n es derivable en I, para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\{f_n'\}$ converge uniformemente en I a una función $g : I \to \mathbb{R}$
- $\{f_n\}$ converge en un punto $a \in I$

Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en I a una función $f : I \to \mathbb{R}$ que es derivable en I con $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$

λ longitud de I, $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$

$\{f_n'\}$ uniformemente de Cauchy en I

$\exists\, m_1 \in \mathbb{N} : p, q \geq m_1 \Rightarrow |f_p'(t) - f_q'(t)| < \frac{\varepsilon}{2\lambda} \quad \forall t \in I$

$\{f_n(a)\}$ Cauchy : $\exists\, m_2 \in \mathbb{N} : p, q \geq m_2 \Rightarrow |f_p(a) - f_q(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$m = \max\{m_1, m_2\}$, $p, q \geq m$

$x \in I \setminus \{a\}$ T$^{\underline{a}}$ del Valor Medio : $\exists\, t_x \in I$:

$$f_p(x) - f_q(x) = f_p(a) - f_q(a) + (x-a)\left(f_p'(t_x) - f_q'(t_x)\right)$$

$|f_p(a) - f_q(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|x-a| \leq \lambda$, $|f_p'(t_x) - f_q'(t_x)| < \frac{\varepsilon}{2\lambda}$

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{2\lambda} = \varepsilon \quad \forall x \in I \setminus \{a\}$$

$x = a \qquad |f_p(a) - f_q(a)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Por tanto : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \ \forall x \in I$

$\{f_n\}$ uniformemente de Cauchy en $I \Rightarrow$ converge uniformemente en I

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in I$$

¿$f' = g$? $\quad b \in I$ fijo $\quad$ ¿$f'(b) = g(b)$?

$n \in \mathbb{N}$ $\quad \Phi_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} \quad \forall x \in I \setminus \{b\}, \quad \Phi_n(b) = f_n'(b)$

Φ_n continua en b

$\varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} : \; p, q \geq k \Rightarrow |f_p'(t) - f_q'(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in I$

$p, q \geq k$, $x \in I \setminus \{b\}$ $\quad$ Tª del valor medio: $\exists \, t \in I$:

$$(f_p(x) - f_q(x)) - (f_p(b) - f_q(b)) = (x - b)(f_p'(t) - f_q'(t))$$

$$\Phi_p(x) - \Phi_q(x) = f_p'(t) - f_q'(t)$$

$$|\Phi_p(x) - \Phi_q(x)| = |f_p'(t) - f_q'(t)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \setminus \{b\}$$

$x = b$ $\quad |\Phi_p(b) - \Phi_q(b)| = |f_p'(b) - f_q'(b)| < \varepsilon$

Por tanto: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k \in \mathbb{N} : \; p, q \geq k \Rightarrow |\Phi_p(x) - \Phi_q(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$

$\{\Phi_n\}$ uniformemente de Cauchy en I $\Rightarrow$ converge uniformemente en I

$\{\Phi_n\} \to \Phi$ uniformemente en I

$x \in I \setminus \{b\}$ $\quad \Phi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \Phi_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$

$x = b$ $\quad \Phi(b) = \lim\limits_{n \to \infty} \Phi_n(b) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n'(b) = g(b)$

Convergencia uniforme y continuidad:

Φ_n continua en b $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{\Phi_n\} \to \Phi$ uniformemente en I, entorno de b

luego Φ es continua en b:

$\lim\limits_{x \to b} \Phi(x) = \Phi(b)$, es decir $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = g(b)$

f derivable en b con $f'(b) = g(b)$ $\quad \forall b \in I$

Permutación de la integral con el límite uniforme

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión
de funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$,
que converge uniformemente en $[a,b]$ a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Se tiene entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$n \in \mathbb{N}$, $|f_n - f|$ continua en $[a,b]$, tiene máximo en $[a,b]$

$\exists\, x_n \in [a,b] : |f_n(x_n) - f(x_n)| = \max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\}$

Convergencia uniforme en $[a,b] \Rightarrow \{|f_n(x_n) - f(x_n)|\} \to 0$

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq$$

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{\downarrow\, 0} \cdot (b-a)$$

$$\left\{ \int_a^b f_n(x)\,dx \right\} \to \int_a^b f(x)\,dx$$

No basta la convergencia puntual a una función continua

$$h_n(x) = n^2 x(1 - nx) \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \qquad \text{y} \qquad h_n(x) = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

$\{h_n\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$, pero

$$\int_0^1 h_n(x)\,dx = \frac{1}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^1 h_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} (n^2x - n^3x^2)\,dx = \left[\frac{n^2x^2}{2} - \frac{n^3x^3}{3}\right]_0^{1/n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$\{h_n\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$

pero $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)\,dx = \frac{1}{6} \neq 0$