16) Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) = \alpha\, f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, siendo α una constante. Prueba que $f(x) = f(0)\, e^{\alpha x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

① f derivable en $\mathbb{R}$
② $f'(x) = \alpha f(x)$

$\Rightarrow f(x) = f(0) \cdot e^{\alpha x}$

Definimos una función $h(x) = f(x) \cdot e^{-x\alpha}$

una función constante $h(x) = f(0) \cdot 1$

$$h'(x) = f'(x) \cdot e^{-x\alpha} + f(x) \cdot (-\alpha) e^{-x\alpha} =$$

$$\alpha f(x) \cdot e^{-\alpha x} - \alpha f(x) \cdot e^{-\alpha x} = 0$$

$$h(0) = f(0)$$

Así que: "despejando" $h(x) = f(x) \cdot e^{-x\alpha}$.

$$f(x) = \frac{h(x)}{e^{-\alpha x}} = h(x) \cdot e^{\alpha x} \overset{h\,cte}{=} h(0) \cdot e^{\alpha x} =$$

$$f(0) \cdot e^{\alpha x}$$