Concepto de serie de funciones

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$

Consideramos la sucesión de funciones $\{S_n\}$ dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{es decir,} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces $\{S_n\}$ es una serie de funciones, que se denota por $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

La sucesión $\{f_n\}$ es el término general de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$

Para $n \in \mathbb{N}$, se dice que S_n es la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$

Toda sucesión de funciones $\{g_n\}$ se puede expresar como serie:

$$\{g_n\} = \sum_{n\geqslant 1} (g_n - g_{n-1}) \qquad \text{donde} \qquad g_0 = 0$$

$$\sum_{n\geqslant 1} (g_n - g_{n-1}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} (g_k - g_{k-1}) \right\} = \{g_n\}$$

$n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} (g_k - g_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} g_k - \sum_{k=1}^{n} g_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} g_k - \sum_{k=0}^{n-1} g_k = g_n - g_0 = g_n$

Condición necesaria para la convergencia uniforme

Si una serie de funciones converge uniformemente en un conjunto C, entonces su término general converge uniformemente a cero en C

$\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en C. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ \forall x\in C$

$\forall \varepsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}:\ n\geq m \Rightarrow \left|f(x)-\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|<\varepsilon/2\ \forall x\in C$

$n\geq m+1,\ n-1\geq m \quad \left|f(x)-\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)\right|<\varepsilon/2\ \forall x\in C$

$n\geq m \quad \left|f(x)-\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|<\varepsilon/2\ \forall x\in C$

$n\geq m+1,\ x\in C,\ |f_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)-f(x)+f(x)-\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)\right|\leq$

$\leq\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)-f(x)\right|+\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \forall x\in C$

$\{f_n\}$ converge uniformemente a cero en C

El recíproco es falso:

$f_n(x)=\frac{1}{n}\ \forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\{f_n\}$ converge uniformemente a cero en C

pero $\sum_{n\geq 1} f_n$ no converge en ningún punto de $\mathbb{R}$

Continuidad de la suma de una serie

Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto x_0

Supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en un entorno U del punto x_0,

y sea $f : U \to \mathbb{R}$ su suma, es decir: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in U$

Entonces f es continua en el punto x_0

$$\sum_{n \geqslant 1} f_n = \{S_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} f_k \right\}$$

f_n continua en x_0 $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n$ continua en x_0 $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{S_n\}$ converge a f uniformemente en U (entorno de x_0)

luego f es continua en x_0

Derivación de la suma de una serie

Dado un intervalo acotado no trivial $J \subset \mathbb{R}$,
para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : J \to \mathbb{R}$ una función derivable en J.

Supongamos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformemente en J,

y que existe $a \in J$, tal que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n(a)$ es convergente.

Entonces, la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en J

y definiendo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para todo $x \in J$,

se tiene que la función $f : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J con

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in J$$

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n = \{S_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} f_k\right\}$$

f_n derivable en J $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n$ derivable en J $\forall n \in \mathbb{N}$ con $S_n' = \sum_{k=1}^{n} f_k'$ $\forall n \in \mathbb{N}$. luego $\{S_n'\} = \sum_{n\geqslant 1} f_n'$

$\{S_n'\}$ converge uniformemente en J a una función $g : J \to \mathbb{R}$

$\{S_n(a)\}$ converge

luego $\sum_{n\geqslant 1} f_n = \{S_n\}$ converge uniformemente en J

a $f : J \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $\forall x \in J$

Además, f es derivable en J con

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} S_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Integral de la suma de una serie

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$,

Si la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $[a, b]$, se tiene que

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) dx \overset{\text{(convergencia uniforme)}}{=}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\, dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Relación con la convergencia puntual

Si la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C, entonces también converge puntualmente en C y se verifica que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left|f_n(x)\right| \qquad \forall x \in C$$

$x \in C$ $\quad \sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge absolutamente

$\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge

Luego $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C

$x \in C$, $n \in \mathbb{N}$ $\qquad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$

$$\downarrow \quad n\to\infty \quad \downarrow$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

$$\begin{tikzcd}
\text{convergencia uniforme} \arrow[rr, shift left, Rightarrow, "/"] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{convergencia absoluta} \arrow[ll, shift left, Rightarrow, "/", "\text{(más adelante)}"'] \arrow[dl, shift right, Rightarrow] \\
& \text{convergencia puntual} \arrow[ul, shift left, Rightarrow, "/"] \arrow[ur, shift right, Rightarrow, "/"'] &
\end{tikzcd}$$

$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$

$\sum_{n\geqslant 1} f_n$ no converge absolutamente en ningún punto.

Test de Weierstrass

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, de un conjunto A en $\mathbb{R}$ y C un subconjunto no vacío de A. Supongamos que existe una serie convergente $\sum_{n\geqslant 1} M_n$ de números reales, tal que

$$\left|f_n(x)\right| \leqslant M_n \qquad \forall x \in C, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en C.

$x \in C \qquad |f_n(x)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Criterio de comparación: $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ converge

$\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absolutamente en C

$\sum_{n\geq 1} M_n$ sucesión de Cauchy

$\varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : m \leq p < q \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{q} M_k < \varepsilon$

$$m \leq p < q \Rightarrow \left|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |f_k(x)| \leq \sum_{k=p+1}^{q} M_k < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

$\sum_{n\geq 1} f_n$ es uniformemente de Cauchy en C

luego converge uniformemente en C

La información que nos da el radio de convergencia

Si J es el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

1) La serie converge absoluta y uniformemente en todo compacto $K \subset J$, y en particular, converge absolutamente en J.

2) Además, la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \left(\overline{J} \cup \{a\}\right)$

1) Suponemos $R \neq 0$ (si $R=0$, $J=\emptyset$ no hay nada que demostrar)

K compacto, $K \subset J$

la función $x \longmapsto |x-a|$ tiene máximo en K

$\exists\, b \in K : |b-a| = \text{máx}\{|x-a| : x \in K\} = r$

Si $R \in \mathbb{R}^+$ $\quad b \in K \subset J =]a-R, a+R[\quad r = |b-a| < R$

tomamos $\rho \in \mathbb{R}^+$ con $r < \rho < R$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho}$$

Si $R = +\infty$ tomamos $\rho \in \mathbb{R}^+$ con $r < \rho$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0 < \frac{1}{\rho}$$

En ambos casos: $\exists\, m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\rho}$

$\sqrt[n]{|c_n|}\cdot\rho < 1$, $\quad |c_n|\cdot\rho^n < 1$

$\{|c_n|\rho^n\}$ acotada

$\exists\, M \in \mathbb{R}^+ : |c_n|\rho^n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$x \in K \quad |c_n(x-a)^n| = |c_n|\,|x-a|^n \leq |c_n|\cdot r^n = |c_n|\rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leq M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$

$M_n = M\cdot\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$, $\quad 0 < \frac{r}{\rho} < 1 \quad \sum_{n\geq 1} M_n$ converge

$|c_n(x-a)^n| \leq M_n \quad \forall x \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Test de Weierstrass: $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge absoluta y uniformemente en K

2) $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

Supongamos que $\{c_n (x_0 - a)^n\}$ está acotada

$\exists\, k \in \mathbb{R}^+ : |c_n (x_0 - a)^n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leq \frac{k^{1/n}}{|x_0 - a|} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \{k^{1/n}\} \to 1$$

$\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ acotada $\quad R \neq 0$

Si $R \in \mathbb{R}^+$ $\quad \dfrac{1}{R} = \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{k^{1/n}}{|x_0 - a|} = \dfrac{1}{|x_0 - a|}$

$|x_0 - a| \leq R \quad x_0 \in [a - R, a + R] = \overline{J}$

Si $R = +\infty \quad J = \mathbb{R} \quad x_0 \in \overline{J}$.

Por tanto: $\left.\begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \\ \{c_n (x_0 - a)^n\} \text{ acotada} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \in \overline{J}$

Si $x_0 \in \mathbb{R} \setminus (\overline{J} \cup \{a\})$, $\{c_n (x_0 - a)^n\}$ no acotada

luego $\{c_n (x_0 - a)^n\} \not\to 0$

luego $\sum\limits_{n \geq 0} c_n (x_0 - a)^n$ no converge.

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, el conjunto $\{n\in\mathbb{N} : c_n\neq 0\}$ es finito

$E=\{n\in\mathbb{N} : c_n\neq 0\}$.

E finito $\quad m=\max E \quad f(x)=\sum_{k=0}^{m} c_k(x-a)^k \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n=\{S_n\}=\left\{\sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k\right\}$$

$n\geqslant m+1 \quad S_n=\sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k=\sum_{k=0}^{m} c_k(x-a)^k=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$n\geqslant m+1 \Rightarrow |S_n(x)-f(x)|=0<\varepsilon \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

E infinito $\quad f_n(x)=c_n(x-a)^n \quad \forall x\in\mathbb{R} \ \forall n\in\mathbb{N}$

$$x_n=a+\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad \forall n\in E$$

$x_n=a \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus E \qquad x_n\in\,]-1,1[\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$|f_n(x_n)|=\left|\frac{c_n}{|c_n|}\right|=1 \quad \forall n\in E \qquad \{f_n(x_n)\}\not\to 0$$

$\{f_n\}$ no converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$

$\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$

Información que no nos da el radio de convergencia

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$$

- 1) Las tres series tienen radio de convergencia $R = 1$
- 2) La primera no converge en 1 ni en -1
- 3) La segunda converge en el punto -1 pero no en 1
- 4) La tercera converge uniformemente en $[-1, 1]$
- 5) La primera no converge uniformemente en $]-1, 1[$

1) $\{\sqrt[n]{1}\} \to 1$

$\left\{\frac{1/n+1}{1/n}\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} \to 1$. $\left\{\sqrt[n]{1/n}\right\} \to 1$

$\left\{\sqrt[n]{1/n^2}\right\} = \left\{\left(\sqrt[n]{1/n}\right)^2\right\} \to 1$.

Radio de convergencia 1 en los tres casos

2) $\{1^n\} \not\to 0$, $\{(-1)^n\} \not\to 0$ $\sum_{n\geqslant 0} 1^n$ y $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ no convergen

3) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (Leibniz) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ no converge

4) $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ $\forall x \in [-1, 1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge

Test de Weierstrass: $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge absoluta y uniformemente en $[-1, 1]$

5) $x_n = \frac{n}{n+1} \in]-1, 1[$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{x_n^n\} = \left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\} \to 1/e \neq 0$

$\sum_{n\geqslant 0} x^n$ no converge uniformemente en $]-1, 1[$ porque su término general no converge uniformemente a cero en $]-1, 1[$

La suma de una serie de potencias: motivación

$a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\{a_n\}$ acotada, $c_n = a_n^n\ \forall n \in \mathbb{N}$, $c_0, a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} c_n (x-a)^n$ serie de potencias con radio de convergencia $R \neq 0$

si $\{a_n\} \to 0$, $R = +\infty$

Ejemplos: $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^n}$ $R = +\infty$, $\sum_{n\geq 1} n^n x^n$ radio de convergencia 0

$\sum_{n\geq 0} c_n (x-a)^n$ serie de potencias con radio de convergencia $R \neq 0$

intervalo de convergencia $J \neq \emptyset$

suma de la serie: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\ \forall x \in J$

Continuidad $x_0 \in J$ $\exists \delta > 0$: $K = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset J$

$\sum_{n\geq 0} c_n (x-a)^n$ serie de funciones continuas en x_0

que converge uniformemente en K, entorno de x_0, luego

f es continua en x_0, $\forall x_0 \in J$, f continua en J

Derivabilidad: $f_n(x) = c_n (x-a)^n\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

f_n derivable en $\mathbb{R}$ con

$f_0'(x) = 0$, $f_n'(x) = n c_n (x-a)^{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n\geq 1} f_n' = \sum_{n\geq 1} n c_n (x-a)^n = \sum_{n\geq 0} (n+1) c_{n+1} (x-a)^n$$

otra serie de potencias, que tendrá el mismo radio de convergencia. Obtendremos:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}\ \forall x \in J$$

El proceso se puede iterar: $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$ etc.

Radio de convergencia de la serie de las derivadas

Las series de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)c_{n+1}(x-a)^n$ tienen el mismo radio de convergencia

$\sum_{n\geq 0} c_n(x-a)^n$ radio de convergencia R

$\sum_{n\geq 0}(n+1)c_{n+1}(x-a)^n$ radio de convergencia R_1 ¿$R=R_1$?

$x_0\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$ $\sum_{n\geq 0}(n+1)c_{n+1}(x_0-a)^n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0}(n+1)c_{n+1}(x_0-a)^{n+1}$ converge

$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} n c_n(x-a)^n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} n c_n(x-a)^n$ converge

$\sum_{n\geq 0} n c_n(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R_1

Basta probar que $\underline{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|c_n|}}$

$\sqrt[k]{|c_k|} \leq \sqrt[k]{k|c_k|} \quad \forall k\in\mathbb{N}$

si $R=0$ $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ no mayorada, $\sqrt[n]{n|c_n|}$ no mayorada. $R_1=0=R$

$R\neq 0$ $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ mayorada

$\{\sqrt[n]{n}\}\to 1$. $\varepsilon>0$ $\exists m\in\mathbb{N}: k\geq m \Rightarrow \sqrt[k]{k}<1+\varepsilon$

$k\geq m \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|} \leq \sqrt[k]{k|c_k|} \leq (1+\varepsilon)\sqrt[k]{|c_k|}$

$n\geq m$ $\sup\{\sqrt[k]{|c_k|}: k\geq n\} \leq \sup\{\sqrt[k]{k|c_k|}: k\geq n\} \leq (1+\varepsilon)\sup\{\sqrt[k]{|c_k|}: k\geq n\}$

$n\to\infty$ $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|c_n|} \leq (1+\varepsilon)\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$

$\varepsilon\to 0$ $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|c_n|}$

$R=R_1$ c.q.d.

Derivabilidad de la suma de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R\neq 0$,

J su intervalo de convergencia y $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \forall x\in J$

Entonces f es de clase C^∞ en J. Además, para todo $k\in N$,

la serie $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+k)!}{n!}c_{n+k}(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R y

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}c_{n+k}(x-a)^n=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}c_n(x-a)^{n-k} \quad \forall x\in J$$

En particular: $f^{(k)}(a)=k!\,c_k \quad \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$x_0\in J \quad \exists\, \delta>0 : \quad K=[x_0-\delta, x_0+\delta]\subset J$

$f_n(x)=c_n(x-a)^n \quad \forall x\in\mathbb{R} \ \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

f_n derivable en $\mathbb{R}$ con

$f_0'(x)=0$, $f_n'(x)=n\,c_n(x-a)^{n} \quad \forall n\in\mathbb{N} \ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n' = \sum_{n\geqslant 1} n\,c_n(x-a)^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)c_{n+1}(x-a)^n$$

serie de potencias con intervalo de convergencia J

luego converge uniformemente en K

K intervalo acotado no trivial

$\sum_{n\geqslant 0} f_n$ serie de funciones derivables en K

$\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformemente en K

$\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en el punto $x_0\in K$

Convergencia uniforme y derivación:

$\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en K (ya lo sabíamos)

$f|_K$ derivable en K, luego f es derivable en x_0

$f'(x_0)=(f|_K)'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n(x_0-a)^{n-1} \quad x_0\in J$ arbitrario

f derivable en J $\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n(x-a)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(x-a)^n \quad \forall x\in J$

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \qquad \forall x \in]-1,1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$n \in \mathbb{N} \quad x \in \mathbb{R} \quad (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^k = 1 - x^n$

$x \neq 1 \qquad \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$

$|x|<1, \ \{x^n\} \to 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-1,1[$

$\varphi(x) = \frac{1}{1-x} \ \forall x \in]-1,1[\ , \quad \varphi'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \ \forall x \in]-1,1[$

$\varphi''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \ \forall x \in]-1,1[\ , \quad \varphi'''(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4} \ \forall x \in]-1,1[$

Si $\varphi^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \ \forall x \in]-1,1[$, entonces $\varphi^{(k+1)}(x) = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}} \ \forall x \in]-1,1[$

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \varphi^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

$\forall x \in]-1,1[\ , \ \forall k \in \mathbb{N}$

La función exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

El logaritmo

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n \qquad \forall x \in]0,2[$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \qquad c_n = \frac{1}{n!} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

$$\{\sqrt[n]{|c_n|}\} = \{\sqrt[n]{1/n!}\} \to 0 \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$ radio de convergencia $+\infty$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 1$$

$$g(x) = f(x)\, e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x)\, e^{-x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

g constante : $\quad g(x) = g(0) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x)\, e^{-x} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\psi(x) = \log(1+x) \quad \forall x \in]-1, +\infty[$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in]-1, +\infty[$$

$$x \in]-1,1[\quad \Rightarrow \quad \psi'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ serie de potencias con radio de convergencia 1

$$\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$\lambda'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \psi'(x) \quad \forall x \in]-1,1[$$

$\psi - \lambda$ constante en $]-1,1[$ $\quad \lambda(0) = \psi(0) = 0$

$$\psi = \lambda \text{ en }]-1,1[\; : \; \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$x \in]0,2[\quad x-1 \in]-1,1[\quad \log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$$

$$\forall x \in]0,2[$$
