2. Justifica las siguientes desigualdades:

a) $\frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{dx}{10+x} < \frac{1}{5}$

Sea $f(x) = \frac{1}{10+x}$ con $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ continua.

Por el T^a de Weierstrass, una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza su mínimo y máximo absolutos en dicho intervalo.

Calculemos la derivada de f:

$$f'(x) = \frac{-1}{(10+x)^2} < 0 \quad \forall x \in \,]0,2[$$

Por tanto sabremos que $f([0,2]) = [1/12, 1/10]$

Sea $g(x) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10+x}$ $\forall x \in [0,2]$ continua. $g(x) \geq 0$

$h(x) = \frac{1}{10+x} - \frac{1}{12}$ $\forall x \in [0,2]$ continua $h(x) \geq 0$

Tenemos que:

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10+x}\right) dx = \int_0^2 \frac{dx}{10} - \int_0^2 \frac{dx}{10+x} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} - \int_0^2 \frac{dx}{10+x} > 0 \iff \boxed{\frac{1}{5} > \int_0^2 \frac{dx}{10+x}}$$

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{10+x} - \frac{1}{12}\right) dx = \int_0^2 \frac{dx}{10+x} - \int_0^2 \frac{dx}{12} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{dx}{10+x} - \frac{1}{6} > 0 \iff \boxed{\frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{dx}{10+x}}$$

Scanned with CamScanner

b) $\frac{1}{110} < \int_0^1 \frac{x^9}{10+x}\,dx < \frac{1}{10}$

Sea $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{x^9}{10+x}$. ~~Por ser~~ f continua

Por el T^a de Weierstrass, f alcanza su mínimo y máximo absolutos en el intervalo.

$$f'(x) = \frac{9x^8\cdot(10+x) - x^9}{(10+x)^2} = \frac{9x^9 - x^9 + 90x^8}{(10+x)^2} = \frac{8x^9 + 90x^8}{(10+x)^2} \geq 0 \quad \forall x \in]0,1[$$

$$f([0,1]) = [0, 1/11]$$

Sea $h(x) = \frac{1}{10} - \frac{x^9}{10+x}$ $\forall x \in [0,1]$ continua. $h(x) > 0$ $\forall x \in [0,1]$

Tendremos que: $\int_0^1 \left(\frac{1}{10} - \frac{x^9}{10+x}\right) dx > 0 \iff \boxed{\frac{1}{10} > \int_0^1 \frac{x^9}{10+x}\,dx}$

Para la otra desigualdad:

$$\frac{x^9}{11} < \frac{x^9}{10+x} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^9}{11}\,dx < \int_0^1 \frac{x^9}{10+x}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{11}\int_0^1 x^9\,dx < \int_0^1 \frac{x^9}{10+x}\,dx \Rightarrow \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{10} < \int_0^1 \frac{x^9}{10+x}\,dx \iff$$

$$\iff \boxed{\frac{1}{110} < \int_0^1 \frac{x^9}{10+x}\,dx}$$