(3) I intervalo no trivial. Probar: si todas las funciones continuas en I son uniformemente continuas en I, entonces I es un intervalo cerrado y acotado.

Supongamos que $I = [a, +\infty[$

Sea $g: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x^2$

Claramente g es continua en $[a, +\infty[$ $\Rightarrow$ es uniformemente continua en $[a, +\infty[$ pero:

Sean $\varepsilon = 1/2$ y sea $\delta > 0$: $x = n$, $y = m \in [a, +\infty[$ con $n, m \in \mathbb{N}$

$|n - m| < \delta \Rightarrow |f(n) - f(m)| = |n^2 - m^2| < 1/2$!! ABSURDO $\Rightarrow$

$\Rightarrow I \neq [a, +\infty[$

De manera análoga ocurre con los intervalos $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ y $]-\infty, b]$

Por lo tanto, I está acotado

Supongamos que $I =]a, b]$

Sea $g:]a, b] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{x - a}$$

Claramente g es continua en $]a, b]$ $\Rightarrow$ es uniformemente continua en $]a, b]$ pero:

Sean $\varepsilon = 1/2$ y sea $\delta > 0$: $x = a + 1/n$, $y = a + \frac{1}{m} \in]a, b]$ con $n, m \in \mathbb{N}$

$|a + 1/n - a - 1/m| = \left|\frac{1}{n} - 1/m\right| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| f(a+1/n) - f(a+1/m) \right| = |n-m| < 1/2 \quad \text{Absurdo}$$

$$\Rightarrow I \neq]a,b]$$

De manera análoga ocurre con los intervalos $[a,b[$ y $]a,b[$

Por lo tanto, <u>I es cerrado</u>.