3.-

Sea $f:[a,b]$ integrable y $f(x)=0$ para algún $x\in]c,d[$, con $a<c<d<b$ cualesquiera. Veamos que $\int_a^b f(x)dx=0$.

Dado que f integrable $\Rightarrow \exists I\in\mathbb{R} / \int_a^b f=I$. Consideremos $P_n\in P([a,b]) / P_n=\{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}, \dots, b\}$.
Dentro de P_n, vemos que, por hipótesis, $\exists t_i\in[x_{i-1},x_i]$ $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $x_i\in P_n$, con $f(t_i)=0$. Pongamos ahora $\dot{P}_n$ la partición etiquetada $\{P_n, t_i\}$. Es claro que $\Sigma(f,\dot{P}_n)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})=0$, pero sabemos que, al ser $\inf(f([x_{i-1},x_i]))\leq f(t_i)\leq \sup(f([x_{i-1},x_i]))\Rightarrow I(f,P_n)\leq\Sigma(f,\dot{P}_n)\leq S(f,P_n)\Rightarrow$
$\Rightarrow I(f,P_n)\leq 0\leq S(f,P_n)$. Por ser f integrable, es $\lim_{n\to+\infty} I(f,P_n)=I=\lim_{n\to+\infty} S(f,P_n)$, lo que ocurrirá $\Longleftrightarrow I=0$.

4.-

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua $/ f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$. Supongamos que $\exists x_0\in[a,b] / f(x_0)>0$ y probemos que $\int_a^b f(x)dx>0$.

Por ser f continua, sabemos inmediatamente que es integrable Riemann $\Rightarrow \exists I\in\mathbb{R} / \int_a^b f=I$.
Consideremos ahora $P_n\in P([a,b]) / P_n=\{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}, \dots, b\}$. Sabemos, por el Teorema de conservación del signo, que $\exists\varepsilon>0 / \forall x\in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, $f(x)>0$. Sea, por tanto, n lo suficientemente grande como para que, para algún $i\in\{1,\dots,n\}$, $x_{i-1}, x_i\in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$. De esta forma aseguramos que

$$I(f,P_n)=\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{>0}\Big(\underbrace{\inf(f([a,a+\tfrac{b-a}{n}]))}_{\geq 0}+\underbrace{\inf(f([a+\tfrac{b-a}{n},a+2\tfrac{b-a}{n}]))}_{\geq 0}+\dots+\underbrace{\inf(f([x_{i-1},x_i]))}_{>0}+\dots+\underbrace{\inf(f([a+(n-1)\tfrac{b-a}{n},b]))}_{\geq 0}\Big)>0$$

Como por el Teorema de Wierstrass, al ser f continua en un intervalo cerrado y acotado, alcanza un máximo absoluto, $M>0 / f(x)\leq M$ $\forall x\in[a,b]$. Por ello, es evidente que $S(f,P_n)>0$
Así, dado que $\underbrace{I(f,P_n)}_{>0}\leq I\leq \underbrace{S(f,P_n)}_{>0}$, deducimos que $I>0$.

5.-