Análisis Matemático II

Tema 1: Sucesiones de funciones

22-23 de febrero y 2 de marzo

Sucesiones de funciones

Concepto de sucesión de funciones

Una sucesión de elementos de un conjunto $\mathcal{F} \neq \emptyset$ es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{F}$

Si A un conjunto no vacío, sea $\mathcal{F}(A)$ el conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{R}$

Entonces, una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$ es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{F}(A)$

Tal sucesión asocia, a cada $n \in \mathbb{N}$, el n-ésimo término de la sucesión que será una función $f_n : A \to \mathbb{R}$
y entonces la sucesión se denota por $\{f_n\}$

Definir una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de A en $\mathbb{R}$ equivale a definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, y cada $x \in A$, un número real $f_n(x)$

Convergencia puntual

Convergencia puntual y límite puntual

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$

Se dice que $\{f_n\}$ **converge en un punto** $x \in A$
cuando la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ es convergente

Si esto ocurre para todo $x \in C$, con $\emptyset \neq C \subset A$ y definimos

$$f : C \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in C$$

se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a f en C
y que f es el **límite puntual** de $\{f_n\}$ en C

Sea $C_p = \big\{ x \in A : \{f_n(x)\} \text{ converge} \big\}$ y $F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in C_p$

Si $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C,
entonces $C \subset C_p$ y $f(x) = F(x) \quad \forall x \in C$

Se dice que C_p es el **campo de convergencia puntual** de $\{f_n\}$

Ejemplo de convergencia puntual

Potencias de exponente natural: convergencia puntual

En el caso $A = \mathbb{R}$, sea $\{\varphi_n\}$ la sucesión de funciones dada por

$$\varphi_n(x) = x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $x \in \mathbb{R}$, se tiene: $\{x^n\}$ converge $\iff -1 < x \leqslant 1$

El campo de convergencia puntual de $\{\varphi_n\}$ es el intervalo $]-1,1]$
en el que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función $\varphi :]-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in]-1,1[$$

Vemos que $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente en un conjunto $C \subset \mathbb{R}$
si, y sólo si, $C \subset]-1,1]$, en cuyo caso,
el límite puntual de $\{\varphi_n\}$ en C es $\varphi\big|_C$

Por ejemplo, $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a cero en $]-1,1[$

φ_n es continua en $]-1,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero φ no es continua en 1

Definición de convergencia uniforme

Notación para todo lo que sigue

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$

C subconjunto no vacío de A y $f : C \to \mathbb{R}$ una función

Convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C cuando:

$$\forall x \in C, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \;:\; n \geqslant m \quad \Rightarrow \quad \big| f_n(x) - f(x) \big| < \varepsilon$$

Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \;:\; n \geqslant m \quad \Rightarrow \quad \big| f_n(x) - f(x) \big| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

En tal caso se tiene:

- $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en C
- $\emptyset \neq D \subset C \quad \Longrightarrow \quad \{f_n\}$ converge uniformemente en D a $f\big|_D$

Ejemplo de convergencia uniforme

Potencias de exponente natural: convergencia uniforme

$$\varphi_n(x) = x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge puntualmente en $]-1,1]$ a la función $\varphi :]-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in]-1,1[$$

- $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a cero en $]-1,1[$
- Por tanto, $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a φ en $]-1,1]$
- En general, la convergencia puntual no implica la convergencia uniforme
- Fijado $r \in \mathbb{R}^+$ con $r < 1$, se tiene que

  $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a cero en $[-r,r]$
- En general, no se puede hablar de un "campo de convergencia uniforme"

Primer criterio de convergencia uniforme

Caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si,

existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en $\mathbb{R}$, con $\{\rho_n\} \to 0$, y un $m \in \mathbb{N}$, tales que:

$$n \geqslant m \qquad \Longrightarrow \qquad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \rho_n \quad \forall x \in C$$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{\rho_n\}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\{\rho_n\} \to 0 \qquad \text{y} \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \rho_n \quad \forall x \in C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C

Ejemplo

$$g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|g_n(x)| \leqslant 1/(2n) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$

Segundo criterio de convergencia uniforme

Otra caracterización de la convergencia uniforme

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C si, y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C, se tiene que $\left\{ f_n(x_n) - f(x_n) \right\} \to 0$

Consecuencia que más se usa en la práctica

Si existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C
tal que $\left\{ f_n(x_n) - f(x_n) \right\}$ no converge a 0,
entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en C

Ejemplo

En el caso $A = [0,1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$h_n(x) = n^2 x(1 - nx) \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \qquad \text{y} \qquad h_n(x) = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

$\{h_n\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$, pero no uniformemente

Criterio de Cauchy

Condición de Cauchy uniforme

Se dice que $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, m \in \mathbb{N} \; : \; p, q \geqslant m \quad \Rightarrow \quad \big| f_p(x) - f_q(x) \big| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en C, entonces

$\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C

Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme

Si $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en C,

entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en C

Convergencia uniforme y continuidad

La convergencia uniforme preserva la continuidad

Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$

y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$

que converge uniformemente, en un entorno U del punto x_0,

a una función $f : U \to \mathbb{R}$.

Si f_n es continua en x_0 para todo $n \in \mathbb{N}$,

entonces f es continua en el punto x_0.

Convergencia uniforme y derivación

La convergencia uniforme no preserva la derivabilidad

$$\psi_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ψ_n es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, y la sucesión $\{\psi_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función valor absoluto, que no es derivable en el origen

Convergencia uniforme y derivación

Dado un intervalo acotado no trivial $I \subset \mathbb{R}$, y una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de I en $\mathbb{R}$, supongamos que:

- f_n es derivable en I, para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\{f_n'\}$ converge uniformemente en I a una función $g : I \to \mathbb{R}$
- $\{f_n\}$ converge en un punto $a \in I$

Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en I a una función $f : I \to \mathbb{R}$ que es derivable en I con $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$

Convergencia uniforme e integración

Permutación de la integral con el límite uniforme

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, que converge uniformemente en $[a,b]$ a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Se tiene entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

No basta la convergencia puntual a una función continua

$$h_n(x) = n^2 x(1-nx) \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \qquad \text{y} \qquad h_n(x) = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

$\{h_n\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$, pero

$$\int_0^1 h_n(x)\,dx = \frac{1}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$