Análisis Matemático I,

2º Doble Grado Informática-Matemáticas

Capítulo II: FUNCIONES DIFERENCIABLES. APLICACIONES

Tema 7: DIFERENCIACIÓN. PRIMERAS PROPIEDADES

María D. Acosta

Universidad de Granada

28-10-2020

Posibles extensiones del concepto de derivada

Si $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, f es derivable en a si existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a).$$

Si $A \subset \mathbb{R}^2$, la definición anterior no tiene sentido.

Daremos dos conceptos que sí tienen sentido para funciones de varias variables y que coinciden para funciones reales de variable real.

Derivada direccional

Sean X e Y espacios normados, $A \subset X$ y sea $a \in A$, $v \in X \ \{0\}$. Supongamos que $0 \in \{t \in \mathbb{R} : a + tv \in A\}'$. Si $f : A \longrightarrow Y$, diremos que f **tiene derivada direccional en *a* según *v*** si existe el siguiente

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} := f'(a; v)$$

Al vector anterior $(f'(a; v))$ se llama derivada de f en a según v.

Derivadas direccionales

Por definición, $f'(a; v)$ es la derivada en 0 de la función

$$g(t) = f(a + tv)$$

definida en un subconjunto de $\mathbb{R}$ y con valores en el normado (Y).

Volviendo al caso de una función de variable real, se tiene que

$$f'(a) = f'(a; 1).$$

Derivadas direccionales

Proposición

Sean X e Y espacios normados, $A \subset X$ y sea $a \in A$, $v \in X \backslash \{0\}$. Supongamos que $0 \in \{t \in \mathbb{R} : a + tv \in A\}'$. Si $f : A \longrightarrow Y$ y **f tiene derivada direccional en a según v** entonces existe $f'(a; sv) = sf'(a; v)$ para cada $s \in \mathbb{R}^*$.

Demostración:
Supongamos que existe $f'(a; v)$ y sea $s \in \mathbb{R}^*$, entonces

$$\frac{f(a + tsv) - f(a)}{t} = \frac{f(a + tsv) - f(a)}{ts} s.$$

Por tanto, usando la hipótesis se tiene que f tiene derivada direccional en a según sv y vale $sf'(a; v)$. $\square$

Derivadas direccionales

Corolario

Si $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, existe $f'(a; s)$ para algún real no nulo s . En tal caso

$$f'(a; s) = sf'(a; 1) = sf'(a).$$

Derivadas direccionales

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ el campo escalar dado por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0.$$

Calculamos las derivadas direccionales en $(0,0)$.
Sea $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si $t \in \mathbb{R}^*$ tenemos

$$\frac{f((0,0) + t(x,y)) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tx, ty)}{t} = \frac{(tx)^2 ty}{t(tx)^2 + t(ty)^4} =$$

$$\frac{x^2 y}{x^2 + t^2 y^4}.$$

Si $x \neq 0$, tenemos que existe $f'((0,0);(x,y)) = y$.
Si $x = 0$, entonces $f'((0,0);(0,y)) = 0$.
Luego existen las derivadas direccionales en $(0,0)$ según cualquier dirección y la aplicación $v \mapsto f'((0,0);v)$ no puede extenderse a una aplicación lineal.

Derivadas direccionales

Es inmediato que f es continua en $(0,0)$, ya que

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| \leq |y|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Luego $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

Derivadas parciales

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \mathring{A}$, $f : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces la **derivada parcial de** f **en** a **respecto de la variable** i**-ésima**, que se suele notar por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ o $D_i f(a)$ viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := f'(a; e_i) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} \qquad (1 \leq i \leq N)$$

El **vector gradiente** de f en a, que se suele notar por $\nabla f(a)$ viene dado por

$$\nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a)\right)$$

Derivadas parciales

Observación:

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $A = \mathring{A}, (a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, las derivadas parciales de f en (a,b) (si existen) son derivadas de funciones de una variable real, ya que

$$\frac{f((a,b)+te_1) - f(a,b)}{t} = \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t},$$

por tanto, $D_1 f(a,b)$ es la derivada en a de la función
$x \mapsto f(x,b) := g(x)$, ya que

$$\frac{g(a+t) - g(a)}{t} = \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}.$$

De manera análoga, $D_2 f(a,b) = h'(b)$, donde

$$h(y) = f(a,y).$$

Si hay más variables (N), para calcular $D_i f(a_1, a_2, \cdots, a_N)$ se fijan todas las variables excepto la i-ésima, y se deriva en a_i la función de una variable que se obtiene.

Derivadas parciales

Ejemplo

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = x^2y - e^y, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces

$$D_1f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy, \quad D_2f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - e^y, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Luego

$$\nabla f(x,y) = (D_1f(x,y), D_2f(x,y)) = (2xy, x^2 - e^y), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Funciones derivables

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

1) f es derivable en a

2) Existe una aplicación lineal $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{x-a} = 0.$$

3) Existe una aplicación lineal $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{|x-a|} = 0.$$

Si se verifica cualquiera de ls condiciones equivalentes, entonces $T(s) = f'(a)s, \forall s \in \mathbb{R}$.

Funciones derivables

Demostración: Es trivial que las dos últimas afirmaciones equivalen, ya que en un espacio normado una función tiene límite igual a 0 en un punto sii su norma tiene límite igual 0 en el mismo punto.

Probaremos que 1) y 2) son equivalentes. Si $L \in \mathbb{R}$, definimos $T(x) = Lx$. Entonces $T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Si $x \in A \backslash \{a\}$ se tiene la igualdad

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L = \frac{f(x) - f(a) - L(x - a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{x - a}.$$

Si f es derivable en a y llamamos $L = f'(a)$, entonces el límite de la función que aparece a la izquierda de la igualdad existe y vale 0, luego se verifica 2). Recípocamente, si 2) es cierto y llamamos $L = T(1)$, la igualdad anterior nos asegura que f es derivable en a y $T(1) = L = f'(a)$.

Nótese que el argumento anterior es válido para funciones variable real valuadas en un espacio normado Y. En tal caso $L \in Y$ y $T \in L(\mathbb{R}, Y)$.

Aplicaciones diferenciables

Aplicación diferenciable

Sean X e Y espacios normados, $A \subset X$, $a \in \mathring{A}$, y $f : A \longrightarrow Y$ una aplicación. Se dice que f es **diferenciable** en el punto a si existe una aplicación $T \in L(X, Y)$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0. \tag{1}$$

En tal caso la aplicación T es única, se denomina la **diferencial de f en a** o y se nota por $Df(a)$. Se dice que f es diferenciable en un subconjunto $B \subset A$ si es diferenciable en cada punto de B.
Sea $A_1 \subset A$ el conjunto de puntos donde f es diferenciable. La aplicación $x \mapsto Df(x)$ de A_1 en $L(X, Y)$ se denomina la **aplicación diferencial** de f y se nota Df.

Aplicaciones diferenciables

Observaciones:

1) La hipótesis $a \in \mathring{A}$ no es imprescindible para la definición de diferenciable. Es necesario que $a \in A \cap A'$. Se impone para garantizar la unicidad de la aplicación T.

2) La definición de diferenciable no cambia si consideramos una norma equivalente en Y.

3) Si en el espacio X consideramos dos normas equivalentes, $\| \ \|$ y $\||\ \||$ usando la igualdad

$$\frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\||\, x - a \,\||} = \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x - a\|} \frac{\|x - a\|}{\||\, x - a \,\||}, \quad \forall x \in A \backslash \{a\},$$

dado que el cociente $\dfrac{\| \ \|}{\||\ \||}$ está acotado en $X \backslash \{0\}$ si f es diferenciable en a para $\| \ \|$, también lo es para $\||\ \||$.
Por tanto, en X la definición de diferenciable coincide si se consideran normas equivalentes.
Como consecuencia, si $X = \mathbb{R}^N$ podemos considerar cualquier norma para estudiar diferenciabilidad.

Aplicaciones diferenciables

Aplicación de clase C^1

En las mismas condiciones de la definición de aplicación diferenciable, se dice que f es de **clase** $\mathcal{C}^1$ en a, y se nota $f \in C^1(a)$, si f es diferenciable en un entorno de a y la aplicación Df es continua en a. Se dice que f es de clase C^1 en un subconjunto $B \subset A$ si es de clase C^1 en cada punto de B.

Se dice que f es de clase C^1 cuando lo sea en todos los puntos de su conjunto de definición (que necesariamente será abierto). Notamos por $C^1(A)$ al conjunto de las aplicaciones de clase C^1 en el abierto A.

Algunos ejemplos

Ejemplos

1) Si $A \subset \mathbb{R}$ e Y es un espacio normado y $a \in A$ y $f : A \longrightarrow Y$, entonces f es diferenciable en a equivale a que exista $\text{lím}_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} := f'(a)$.
En este caso tenemos

$$Df(a)(t) = tf'(a) \quad \Big(\Leftrightarrow Dg(a)(1) = f'(a) \Big).$$

2) Las aplicaciones constantes son diferenciables con diferencial cero.
Luego son de clase C^1.

3) Si X e Y son espacios normados y $T \in L(X, Y)$, entonces T es diferenciable y además $Df(a) = T$ para cada $a \in X$. Luego T es de clase C^1.

Para justificar lo anterior basta usar que

$$\frac{T(x) - T(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0, \qquad \forall x \in X \backslash \{a\}.$$

Algunos ejemplos

Ejemplos

4) Si X, Y, Z son espacios normados y $B : X \times Y \longrightarrow Z$ es una aplicación bilineal, continua, entonces B es diferenciable y además

$$DB(a,b)(u,v) = B(a,v) + B(u,b), \qquad \forall a, u \in X, b, v \in Y.$$

Luego B es de clase C^1.

Para probar lo anterior usaremos que una aplicación bilineal $B : X \times Y \longrightarrow Z$ es continua si, y sólo si, existe $M \in \mathbb{R}$ que verifica

$$\|B(x,y)\| \leq M\|x\| \, \|y\|, \qquad \forall x \in X, y \in Y.$$

Dado $(a,b) \in X \times Y$, por ser B bilineal y continua, la aplicación T dada por

$$(u,v) \mapsto B(a,v) + B(u,b) \qquad ((u,v) \in X \times Y)$$

es lineal y continua de $X \times Y$ en Z.

Algunos ejemplos

Ejemplos

Se verifica que

$$\Phi(x,y) := \frac{B(x,y) - B(a,b) - T(x-a, y-b)}{\|(x,y)-(a,b)\|} =$$

$$\frac{B(x,y) - B(a,b) - B(a,y-b) - B(x-a,b)}{\|(x,y)-(a,b)\|} =$$

$$\frac{B(x,y) - B(a,b) - B(a,y) + B(a,b) - B(x,b) + B(a,b)}{\|(x,y)-(a,b)\|} =$$

$$\frac{B(x,y) - B(a,y) - B(x,b) + B(a,b)}{\|(x,y)-(a,b)\|} =$$

$$\frac{B(x-a,y-b)}{\|(x,y)-(a,b)\|}$$

Usando la continuidad de B existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|B(x,y)\| \leq M\|x\| \, \|y\|$, para cualesquiera $x \in X, y \in Y$.

Ejemplos

5) Como consecuencia, el producto P en $\mathbb{R}$ es diferenciable y

$$DP(a,b)(x,y) = ay + xb, \qquad \forall a,b,x,y \in \mathbb{R}.$$

Proposición

Sean X e Y espacios normados, $A = \mathring{A} \subset X$ y $f : A \longrightarrow Y$. Si f es diferenciable en a entonces f tiene derivadas direccionales en a y además

$$f'(a;v) = Df(a)(v), \qquad \forall v \in X \backslash \{0\}.$$

Demostración: Llamamos $T = Df(a)$. Por hipótesis se verifica que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Sea $v \in X \backslash \{0\}$, si $t \in \mathbb{R}^*$, tomamos $x = a + tv$. Si $t \to 0$, entonces $x \to a$, luego

Aplicaciones diferenciables

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - T(tv)}{\|tv\|} = 0.$$

Usando la homogeneidad de la norma y multiplicando por $\|v\|$ se tiene

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - T(tv)}{|t|} = 0,$$

equivalentemente

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = T(v).$$

Luego existe $f'(a; v) = T(v) = Df(a)(v)$. $\square$

Funciones diferenciables

Carácter local de la diferenciabilidad

Sean X e Y espacios normados, $A \subset X$, $a \in \mathring{A}$ y $f : A \longrightarrow Y$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) f es diferenciable en a.
2) $f_{|U}$ es derivable en a para algun entorno $U \subset A$ del punto a.

Además, en caso de que sean ciertas las afirmaciones anteriores, entonces la diferencial de f en a y la diferencial de la restricción de f a U coinciden.

El resultado anterior es consecuencia del carácter local del límite.

Aplicaciones diferenciables

Diferenciabilidad y continuidad

Sean X e Y espacios normados, $A \subset X, a \in \mathring{A}$ y $f : A \longrightarrow Y$. Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.

Demostración: Llamamos $T = Df(a)$. Como $a \in \mathring{A} \subset A'$ la continuidad de f es a equivale a que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Si $x \in A \backslash \{a\}$ se tiene que

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}\|x-a\| + T(x-a).$$

Por ser f diferenciable en a y $T = Df(a)$ una aplicación lineal y continua de X en Y existe el límite en a de la aplicación anterior y vale 0, luego

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

luego f es continua en a. $\square$

Aplicaciones diferenciables

Probar el siguiente resultado es inmediato.

Caracterización de la diferenciabilidad
Sean X e Y espacios normados, $A \subset X, a \in \mathring{A}$ y $f : A \longrightarrow Y$. Entonces f es diferenciable en a si, y sólo si, f es continua en a y existe una aplicación afín y continua $g : X \longrightarrow Y$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{\|x - a\|} = 0.$$

Si se verifica lo anterior, entonces g es única y se tiene que $g(x) = f(a) + Df(a)(x - a)$, para cada $x \in X$.

Aplicaciones diferenciables

Proposición

Sean X e Y espacios normados, $A \subset X, a \in \mathring{A}$ y $f, g : A \longrightarrow Y$. Si f y g son diferenciables en a, y $t \in \mathbb{R}$, entonces $f + tg$ es diferenciable en a y además

$$D(f + tg)(a) = Df(a) + tDg(a).$$

Como consecuencia, si f y g son de clase C^1 en a, entonces $f + tg$ es de clase C^1 en a.

La comprobación es inmediata.

Regla de la cadena

Proposición

Sean X, Y y Z espacios normados, $A \subset X, B \subset Y$, $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow Z$. Si $a \in \mathring{A}$ y $b = f(a) \in \mathring{B}$, f es diferenciable en a y g es diferenciable en b, entonces $g \circ f$ es diferenciable en a y además

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Por tanto, si $f \in \mathcal{C}^1(a), g \in \mathcal{C}^1(f(a))$, entonces $g \circ f \in \mathcal{C}^1(a)$.

Lema previo

Sean X e Y espacios normados, $A \subset X$, y $f : A \longrightarrow Y$. Entonces f es diferenciable en a si, y sólo si, existe una aplicación $T \in L(X, Y)$ y $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que φ es continua en a y $\varphi(a) = 0$ y tal que

$$\|f(x) - f(a) - T(x - a)\| \leq \varphi(x)\|x - a\|, \qquad \forall x \in A \backslash \{a\}.$$

En caso de que f sea diferenciable en a, se verifica la otra condición para $T = Df(a)$ y $\varphi(x) = \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|}$ si $x \in A \backslash \{a\}$.

Regla de la cadena

Llamamos $S = Df(a) \in L(X, Y)$ y $R = Dg(b) \in L(Y, Z)$, luego
$T := R \circ S \in L(X, Z)$.
En vista del lema anterior, por ser f diferenciable en a, existe $s : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en a tal que $s(a) = 0$ y verifica

$$\|f(x) - f(a) - S(x - a)\| \leq s(x)\|x - a\|, \qquad \forall x \in A. \tag{2}$$

Como g es diferenciable en b, existe $r : B \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en b tal que $r(b) = 0$ y verifica

$$\|g(y) - g(b) - R(y - b)\| \leq r(y)\|y - b\|, \qquad \forall y \in B. \tag{3}$$

Regla de la cadena

Por tanto, si $x \in A$ se verifica

$$
\begin{gathered}
\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - T(x-a)\| = \\
\|g(f(x)) - g(f(a)) - R(f(x) - f(a)) + R(f(x) - f(a)) - S(x-a))\| \leq \\
\|g(f(x)) - g(b) - R(f(x) - b)\| + \|R(f(x) - f(a) - S(x-a)\| \leq \\
r(f(x))\ \|f(x) - b\| + \|R\|\ s(x)\ \|x-a\| = \\
r(f(x))\ \|f(x) - f(a) - S(x-a) + S(x-a)\| + \|R\|\ s(x)\ \|x-a\| \leq \\
r(f(x))\Big(\|f(x) - f(a) - S(x-a)\| + \|S\|\ \|x-a\|\Big) + \|R\| s(x) \|x-a\| \leq \\
r(f(x))\Big(s(x)\|x-a\| + \|S\|\|x-a\|\Big) + \|R\|\ s(x)\ \|x-a\| = \\
\Big(r(f(x))s(x) + r(f(x))\|S\| + \|R\|\ s(x)\Big)\|x-a\|,
\end{gathered}
$$

de donde se sigue el resultado, pues $\lim_{x\to a} s(x) = 0$, y, como f es continua en a, también $\lim_{x\to a} r(f(x)) = 0$. $\square$

Aplicaciones con valores en un producto

Proposición

Sean X un espacio normado e Y_k espacios normados para $1 \leq k \leq M$), $A \subset X$, $a \in \mathring{A}$ y $f : A \longrightarrow \prod_{k=1}^{M} Y_k$. Entonces f es diferenciable en a si, y sólo si, cada componente f_k es diferenciable en a para $1 \leq k \leq M$. En ese caso,

$$Df(a)(x) = (Df_1(a)(x), \ldots, Df_M(a)(x)), \ \forall x \in X.$$

Como consecuencia, $f \in C^1(a)$ si, y sólo si, $f_k \in C^1(a)$ para $k = 1, \ldots, M$.

Demostración:

Una aplicación $T = (T_1, ..., T_M)$ de X en $\prod_{k=1}^{M} Y_k$ es lineal y continua si, y sólo si, $T_k : X \longrightarrow Y_k$ es lineal y continua, para cada $1 \leq k \leq M$. Si $T : X \longrightarrow \prod_{k=1}^{M} Y_k$, entonces para cada $x \in A \backslash \{a\}$ se verifica

$$\frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} =$$

$$= \left(\frac{f_1(x) - f_1(a) - T_1(x-a)}{\|x-a\|}, ..., \frac{f_M(x) - f_M(a) - T_M(x-a)}{\|x-a\|} \right).$$

Aplicaciones diferenciables

Si f es diferenciable en a y $T = Df(a)$, entonces el límite en a de la primera aplicación existe y vale 0. Equivalentemente, para cada $1 \leq k \leq M$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f_k(x) - f_k(a) - T_k(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

y como $T_k = Df(a)_k \in L(X, Y_k)$, entonces f_k es diferenciable en a y

$$Df_k(a) = Df(a)_k.$$

Es inmediato probar que el recíproco también es cierto.

Por último, usando la relación probada antes entre $Df(a)$ y $Df_k(a)$, se obtiene que Df es continua en a si, y sólo si sus componentes lo son, es decir, Df_k es continua en a.
Obtenemos entonces que f es de clase $C^1(a)$ si y sólo si, todas sus componentes son de clase $C^1(a)$. $\square$

Funciones diferenciables

Productos y cocientes

Sea X un espacio normado, $A \subset X, a \in \mathring{A}$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f y g son diferenciables en a. Entonces

1) fg es diferenciable en a y

$$D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + g(a)Df(a).$$

2) Si $g(x) \neq 0, \forall x \in A$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es diferenciable en a y además

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{g(a)^2}.$$

Además, en caso de que ambas funciones sean de clase $C^1(a)$, entonces el producto y el cociente también lo son.

Aplicaciones diferenciables

Demostración: Probamos el resultado para el producto. Para ello consideramos las aplicaciones $(f,g): A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $P: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, donde

$$(f,g)(x) = (f(x), g(x)), \quad (x \in A) \qquad \text{y} \qquad P(s,t) = st, \quad \forall s,t \in \mathbb{R}.$$

Por hipótesis f y g son diferenciables en a, luego (f,g) es diferenciable en a y sabemos que P es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Por la regla de la cadena la composición $P \circ (f,g) = fg$ es diferenciable en a y además si $x \in X$ tenemos

$$\begin{gathered} D(fg)(a)(x) = D(P \circ (f,g))(a)(x) = \\ \Big(DP(f(a), g(a)) \circ D(f,g)(a) \Big)(x) = \\ DP(f(a), g(a)) \Big(Df(a)(x), Dg(a)(x) \Big) = \\ P(f(a), Dg(a)(x)) + P(Df(a)(x), g(a)) = \\ f(a)Dg(a)(x) + g(a)Df(a)(x) = \\ \Big(f(a)Dg(a) + g(a)Df(a) \Big)(x), \end{gathered}$$

$\square$

Producto y cociente

Por tanto,

$$D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + g(a)Df(a).$$

De la fórmula obtenida antes y de la estabilidad de las funciones continuas por sumas y producto se obtiene que fg es de clase $C^1(a)$ en caso de que f y g también lo sean.

Para el cociente el argumento es similar, sólo que hay que usar en una de ls componentes la inversión $J : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $J(x) = \frac{1}{x}$, que es derivable, luego diferenciable y además

$$DJ(b)(t) = J'(b)(t) = \frac{-1}{b^2}t, \qquad \forall b \in \mathbb{R}^*, t \in \mathbb{R}.$$

En este último caso se consideraría la composición dada por

$$x \mapsto \left(f(x), \frac{1}{g(x)}\right) \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Es decir, en este caso la primera aplicación es $(f, \frac{1}{g})$ y la segunda es el producto en $\mathbb{R}$. $\square$