Asociatividad y conmutatividad de las sumas de series

Para toda función $\alpha : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to [0,\infty]$

y toda biyección $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha(n,m) \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\alpha\big(\tau(k)\big) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n,m)$$

(*) $p,q\in\mathbb{N}$ fijos $\quad r = \max\{\tau^{-1}(n,m) : 1\le n\le p,\ 1\le m\le q\}$

$$\{(n,m) : 1\le n\le p,\ 1\le m\le q\} \subset \{\tau(k) : 1\le k\le r\}$$

$$\sum_{n=1}^{p}\sum_{m=1}^{q}\alpha(n,m) \le \sum_{k=1}^{r}\alpha(\tau(k))$$

$$\forall p,q\in\mathbb{N}\ \exists r\in\mathbb{N} : \sum_{n=1}^{p}\sum_{m=1}^{q}\alpha(n,m) \le \sum_{k=1}^{r}\alpha(\tau(k)) \le \sum_{k=1}^{\infty}\alpha(\tau(k))$$

fijo $p\in\mathbb{N}$, $q\to\infty$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{p}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha(n,m) \le \sum_{k=1}^{\infty}\alpha(\tau(k))$

$p\to\infty$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha(n,m) \le \sum_{k=1}^{\infty}\alpha(\tau(k))$

$r\in\mathbb{N}\ \exists p,q\in\mathbb{N} : \{\tau(k) : 1\le k\le r\} \subset \{(n,m) : 1\le n\le p,\ 1\le m\le q\}$

$$\sum_{k=1}^{r}\alpha(\tau(k)) \le \sum_{n=1}^{p}\sum_{m=1}^{q}\alpha(n,m) \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha(n,m)$$

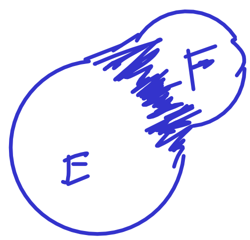
$r\to\infty$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(\tau(k)) \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha(n,m)$

Conjuntos medibles: motivación

$E, F \subset \mathbb{R}^N$, $E \cap F = \emptyset$

¿ $\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F)$? NO

Puede ocurrir que $\lambda^*(E \cup F) < \lambda^*(E) + \lambda^*(F)$



$E \cap F = \emptyset$ pero la "frontera" entre E y F es muy "difusa"

E y F "no parten bien" a $E \cup F$

λ^* no detecta que $E \cap F = \emptyset$

Nos quedamos con los conjuntos "que parten bien" a cualquier otro

$E, W \subset \mathbb{R}^N$ E parte a W en $W \cap E$ y $W \setminus E$

$(W \cap E) \cap (W \setminus E) = \emptyset$, $(W \cap E) \cup (W \setminus E) = W$

E "parte bien" a W cuando

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E)$$

La propiedad más importante de λ^*

Para toda sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, se tiene:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

Esto se expresa diciendo que λ^* es σ-subaditiva

En particular λ^* es finitamente subaditiva, esto es:

$$n \in \mathbb{N},\ \ E_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)\ \ \forall k \in \Delta_n \implies \lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(E_k)$$

Por tanto: $\lambda^*(E \cup F) \leqslant \lambda^*(E) + \lambda^*(F) \quad \forall E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) = \infty$, evidente

Suponemos $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) < \infty$ y por tanto $\lambda^*(E_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\varepsilon > 0$. $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I(n,m)$ con $I(n,m) \in \mathcal{J}\ \forall m \in \mathbb{N}$ y

$$\sum_{m=1}^{\infty} M(I(n,m)) < \lambda^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \qquad E \subset \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} I(n,m)$$

$\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ biyectiva $\{I(n,m) : (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} = \{I(\tau(k)) : k \in \mathbb{N}\}$

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I(\tau(k)),\ \ I(\tau(k)) \in \mathcal{J}\ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\lambda^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} M(I(\tau(k))) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M(I(n,m)) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) + \varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ $\quad \lambda^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$.

Abundancia de conjuntos medibles

Todo conjunto con medida exterior nula es medible, es decir:

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)\,, \quad \lambda^*(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{M}\,, \quad \lambda(E) = 0$$

En particular, si $E \subset \mathbb{R}^N$ es numerable, entonces E es medible con $\lambda(E) = 0$

$W \subset \mathbb{R}^N \qquad \lambda^*(W \cap E) \leq \lambda^*(E) = 0\,, \quad \lambda^*(W \cap E) = 0$

$$\lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) = \lambda^*(W \setminus E) \leq \lambda^*(W)$$

$$\lambda^*(W) = \lambda^*((W \cap E) \cup (W \setminus E)) \leq \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E)$$

luego $E \in \mathcal{M}$. $\lambda(E) = \lambda^*(E) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Resaltamos: para } E \subset \mathbb{R}^N \\ E \in \mathcal{M} \iff \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \leq \lambda^*(W) \quad \forall W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \end{array}}$$

$E \subset \mathbb{R}^N$, E numerable, $\varphi : \mathbb{N} \to E$ sobreyectiva

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\varphi(n)\}$, $\{\varphi(n)\}$ intervalo acotado, $\mathcal{M}(\{\varphi(n)\}) = 0$

$$\lambda^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}(\{\varphi(n)\}) = 0$$

$\lambda^*(E) = 0$, $\quad E \in \mathcal{M}$, $\quad \lambda(E) = 0$

Teorema

La familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles verifica:

(a) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

(b) $E \in \mathcal{M} \implies \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$

(c) $E_n \in \mathcal{M} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \ \Rightarrow \ E \in \mathcal{M}$

Estas tres propiedades se resumen diciendo que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra

A su vez, la medida de Lebesgue $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ verifica:

$$E_n \in \mathcal{M} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

Se alude a esta propiedad diciendo que λ es σ-aditiva

(a) $W \subset \mathbb{R}^N \quad W \cap \mathbb{R}^N = W$, $W \setminus \mathbb{R}^N = \emptyset$, $\lambda^*(\emptyset) = 0$

$\lambda^*(W \cap \mathbb{R}^N) + \lambda^*(W \setminus \mathbb{R}^N) = \lambda^*(W) + \lambda^*(\emptyset) = \lambda^*(W)$, $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

(b) $E \subset \mathbb{R}^N \quad \mathbb{R}^N \setminus E = E^c$

$E \in \mathcal{M} \Rightarrow \lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \cap E^c) =$

$= \lambda^*(W \cap E^c) + \lambda^*(W \cap (E^c)^c) \quad \forall W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

luego $E^c \in \mathcal{M}$

$E, F \in \mathcal{M}$ ¿$E \cup F \in \mathcal{M}$? $W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ arbitrario

$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \cap E^c) =$

(1) $= \lambda^*(W \cap E \cap F) + \lambda^*(W \cap E \cap F^c) + \lambda^*(W \cap E^c \cap F) + \lambda^*(W \cap E^c \cap F^c)$

lo mismo es válido para $W \cap (E \cup F)$ en lugar de W

(2) $\lambda^*(W \cap (E \cup F)) = \lambda^*(W \cap E \cap F) + \lambda^*(W \cap E \cap F^c) + \lambda^*(W \cap E^c \cap F)$

de (1) y (2): $\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap (E \cup F)) + \lambda^*(W \cap E^c \cap F^c) =$

$= \lambda^*(W \cap (E \cup F)) + \lambda^*(W \setminus (E \cup F))$, $E \cup F \in \mathcal{M}$

Además:

$E \cap F = \emptyset$, $W \cap E \cap F = \emptyset$, $W \cap E \cap F^c = W \cap E$, $W \cap E^c \cap F = W \cap F$

(2): $\lambda^*(W \cap (E \uplus F)) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \cap F) \quad \forall W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Inducción evidente a partir de lo anterior:

$$n\in\mathbb{N},\ E_k\in\mathcal{M}\ \forall k\in\Delta_n \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k\in\mathcal{M}$$

Además: $E=\biguplus_{k=1}^{n} E_k$, $E_k\in\mathcal{M}\ \forall k\in\Delta_n \Rightarrow$

$$\lambda^*(W\cap E) = \lambda^*\left(W\cap\left(\biguplus_{k=1}^{n} E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\lambda^*(W\cap E_k)$$

$$E=\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n,\quad E_n\in\mathcal{M}\ \forall n\in\mathbb{N},\quad F_n=\biguplus_{k=1}^{n} E_k\in\mathcal{M}\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$n\in\mathbb{N}$, $W\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda^*(W\cap E_k)+\lambda^*(W\setminus E)\leq\sum_{k=1}^{n}\lambda^*(W\cap E_k)+\lambda^*(W\setminus F_n)$$

$$=\lambda^*(W\cap F_n)+\lambda^*(W\setminus F_n)=\lambda^*(W)$$

$$n\to\infty\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(W\cap E_n)+\lambda^*(W\setminus E)\leq\lambda^*(W)$$

$$W\cap E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(W\cap E_n)$$

$$\lambda^*(W)\leq\lambda^*(W\cap E)+\lambda^*(W\setminus E)\overset{\lambda^*\ \sigma\text{-subaditiva}}{\leq}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(W\cap E_n)+\lambda^*(W\setminus E)\leq\lambda^*(W)$$

válido $\forall W\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, luego $E\in\mathcal{M}$.

para $W=E$: $\quad\lambda^*(E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(E_n)\leq\lambda^*(E)$

$$\lambda(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n)\qquad \lambda \text{ es } \sigma\text{-aditiva}$$

$E,F\in\mathcal{M}$ $\quad E\cap F=(E^c\cup F^c)^c\in\mathcal{M}$

$\quad E\setminus F=E\cap F^c\in\mathcal{M}$

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\quad A_1=E_1,\ A_2=E_2\setminus E_1,\ A_{n+1}=E_{n+1}\setminus\bigcup_{k=1}^{n}E_k\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$A_n\in\mathcal{M}\ \forall n\in\mathbb{N}\qquad E=\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n\Rightarrow E\in\mathcal{M}$$

Propiedades de continuidad de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue es crecientemente continua, es decir:

1) $E_n \in \mathcal{M} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{E_n\} \nearrow E \quad \Longrightarrow \quad \{\lambda(E_n)\} \nearrow \lambda(E)$

También es decrecientemente continua, en el siguiente sentido:

2) $E_n \in \mathcal{M} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{E_n\} \searrow E, \quad \lambda(E_1) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \{\lambda(E_n)\} \searrow \lambda(E)$

1) $B_n = E_n \setminus E_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_0 = \emptyset$

$$\biguplus_{k=1}^{n} B_k = E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \biguplus_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$$

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda(B_k) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\biguplus_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n)$$

$$\{\lambda(E_n)\} \nearrow \lambda(E)$$

2) $\{E_n\} \searrow E, \quad \lambda(E_1) < \infty$

$$(E_1 \setminus E) \uplus E = E_1 = (E_1 \setminus E_n) \uplus E_n$$

$$\lambda(E_1 \setminus E) + \lambda(E) = \lambda(E_1) = \lambda(E_1 \setminus E_n) + \lambda(E_n)$$

$$\{E_1 \setminus E_n\} \nearrow (E_1 \setminus E), \quad \{\lambda(E_1 \setminus E_n)\} \nearrow \lambda(E_1 \setminus E)$$

$$\{\lambda(E_n)\} \searrow \alpha \in [0, \infty]$$

$n \to \infty$ $\qquad \lambda(E_1 \setminus E) + \lambda(E) = \lambda(E_1 \setminus E) + \alpha$

$$\lambda(E_1 \setminus E) \leq \lambda(E_1) < \infty$$

$$\lambda(E) = \alpha, \quad \{\lambda(E_n)\} \searrow \lambda(E)$$

La hipótesis $\lambda(E_1) < \infty$ no se puede suprimir:

$N = 1 \qquad E_n = [n, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{E_n\} \searrow \emptyset$

Veremos que $E_n \in \mathcal{M}$ con $\lambda(E_n) = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\{\lambda(E_n)\} \not\to 0 = \lambda(\emptyset)$$

Intersección y diferencia de intervalos acotados

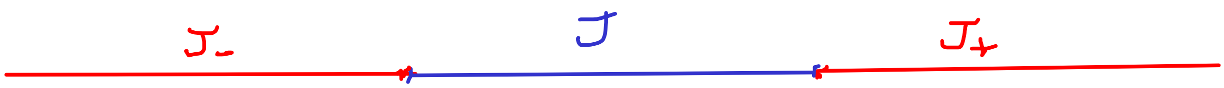
Para cualesquiera $I, J \in \mathcal{J}$ se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$ y que

$$I \setminus J = \biguplus_{k=1}^{n} H_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \; H_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Estabilidad de las figuras elementales

La familia $\mathcal{E}$ de las figuras elementales es estable por intersecciones finitas, diferencias y uniones finitas

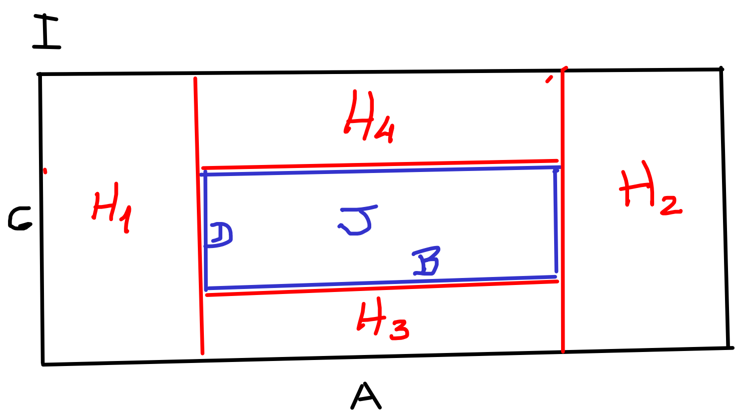
$N = 1$



$$\mathbb{R} = J_- \uplus J \uplus J_+ \quad , \quad \mathbb{R} \setminus J = J_- \uplus J_+$$

$$I \setminus J = (I \cap J_-) \uplus (I \cap J_+) = H_1 \uplus H_2$$

$N = 2$



$I = A \times C$

$J = B \times D$

$$I \setminus J = [(A \setminus B) \times C] \uplus [(A \cap B) \times (C \setminus D)]$$

$$(A \setminus B) \times C = H_1 \uplus H_2$$

$$A \cap B \times (C \setminus D) = H_3 \uplus H_4$$

Inducción sobre N :

En $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ se hace igual que en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

La propiedad clave de la función M

$$I \in \mathcal{J}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad I_k \in \mathcal{J} \ \ \forall k \in \Delta_n, \quad I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k \quad \Longrightarrow \quad M(I) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M(I_k)$$

$$A_1 = I \cap I_1 , \qquad A_k = I \cap \left(I_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} I_j \right) \ \text{para } k \in \Delta_n, k > 1$$

$$I = \biguplus_{k=1}^{n} A_k , \quad A_k \in \mathcal{E} , \quad A_k \subset I_k \quad \forall k \in \Delta_n$$

$$M(I) = \tilde{M}(I) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{M}(A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\tilde{M}(A_k) + \tilde{M}(I_k \setminus A_k) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \tilde{M}(I_k) = \sum_{k=1}^{n} M(I_k)$$

Aproximación por intervalos compactos o abiertos

Para cada $I \in \mathcal{J}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $K, J \in \mathcal{J}$, tales que

$$\overline{K} = K \subset I \subset J = J^\circ, \quad M(I) < M(K) + \varepsilon, \quad M(J) < M(I) + \varepsilon$$

(J) $I \neq \emptyset$, $I = \prod_{k=1}^{N} I_k$, I_k intervalo acotado en $\mathbb{R}$ $\forall k \in \Delta_N$

$a_k = \inf I_k$, $b_k = \sup I_k$

$$t \in \mathbb{R}^+ \quad U(t) = \prod_{k=1}^{N}]a_k - t, a_k + t[$$

$$U(t) \in \mathcal{J}, \quad U(t) = U(t)^\circ, \quad I \subset U(t)$$

$$M(U(t)) = \prod_{k=1}^{N} (b_k - a_k + 2t)$$

$$\lim_{t \to 0} M(U(t)) = \prod_{k=1}^{N} (b_k - a_k) = M(I)$$

$$\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < t < \delta \Rightarrow M(U(t)) < M(I) + \varepsilon$$

$$J = U(\delta/2), \; J \in \mathcal{J}, \; J = J^\circ; \; I \subset J, \; M(J) < M(I) + \varepsilon$$

(K) $\exists k \in \Delta_N . a_k = b_k \Rightarrow M(I) = 0$, $K = \emptyset$.

$$t_0 = \min \left\{ \frac{b_k - a_k}{2} : k \in \Delta_N \right\} > 0$$

$$0 < t < t_0 \qquad V(t) = \prod_{k=1}^{N} [a_k + t, b_k - t]$$

$$V(t) \in \mathcal{J}, \; \overline{V(t)} = V(t), \; V(t) \subset I$$

$$M(V(t)) = \prod_{k=1}^{N} (b_k - a_k - 2t)$$

$$\lim_{t \to 0} M(V(t)) = M(I)$$

$$\exists \delta > 0, \delta < t_0 : \; 0 < t < \delta \Rightarrow M(V(t)) > M(I) - \varepsilon . \quad K = V(\delta/2)$$

$$K \in \mathcal{J}, \; K = \overline{K} \subset I, \; M(I) < M(K) + \varepsilon$$

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue extiende a la elemental de los intervalos acotados:

$$\mathcal{J} \subset \mathcal{M} \qquad \text{y} \qquad \lambda(I) = M(I) \quad \forall I \in \mathcal{J}$$

$I \in \mathcal{J}$ ¿$\lambda^*(I) = M(I)$?

$I_1 = I$, $I_{n+1} = \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$, $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

$$\lambda^*(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) = M(I)$$

¿$M(I) \leq \lambda^*(I)$?

$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, $J_n \in \mathcal{J}$, $J_n = J^\circ \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathcal{J} : \overline{K} = K \subset I$, $M(I) < M(K) + \varepsilon$

$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : K \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k$

$$M(K) \leq \sum_{k=1}^{m} M(J_k)$$

$$M(I) \leq M(K) + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{m} M(J_k) + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} M(J_n) + \varepsilon$$

$\varepsilon \to 0 \quad M(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} M(J_n)$

$$M(I) \leq \lambda^*(I)$$