# Esquema: continuidad, diferenciabilidad y continuidad de deriv parc

Si $f \in C^1$ (las deriv parc son cont) entonces se verifican las 2 anteriores

## $C^1$

1. Calculo derivadas parciales en 0 (Es donde suele dar problemas)

$$D_1 f(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \; ; \; D_2 f(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y}$$

Si no existe alguno, $f \notin C^1$ $\quad * \; \nabla f(0,0) = (D_1 f(0,0), D_2 f(0,0))$

2. Calculo deriv parciales en $(x,y) \neq (0,0)$ derivando respecto de cada variable. Nota: intento dejar coordenadas divididas por la norma euclídea para acotar por 1

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\|(x,y)\|} \leq 1 \quad ; \quad \text{Nota: } |a-b| \leq |a| + |b|$$
$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

3. Calculo el límite en 0 de la función que he obtenido y si coincide con la derivada parcial en 0, entonces las deriv parciales son continuas y la función es $C^1$, por tanto continua y diferenciable.

Si no coincide, todavía puede ser diferenciable y continua (no es $C^1$ en general)

## Diferenciabilidad

Para ver si $f$ es diferenciable en un punto donde no es $C'$, tengo que aplicar la definición

1. Calculo el gradiente en 0 (pto que suele dar problemas)

$$\nabla f(0,0) = \left( D_1 f(0,0),\ D_2 f(0,0) \right)$$

2. Aplico la definición

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \overset{\nearrow \text{prod. escalar}}{\langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}}{\|(x,y)\|} = \phi(x,y)$$

$\|(x,y)\| \rightarrow$ Uso la norma que me sea más cómoda

3. Acoto (opcional) y veo si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \phi(x,y) = 0$

$(0,0) \downarrow$ depende del pto

Si se verifica es diferenciable. Si es diferenciable es continua

## Continuidad

Si quiero ver la continuidad en un pto que no es diferenciable ni $C'$, tengo que calcular el límite según la expresión "general" de la función y compararlo con el real.

Normalmente me dan una expresión para $(x,y) \neq (0,0)$ y un valor para $(x,y) = (0,0)$. Calculo el límite de esa expresión en $(0,0)$ y si coincide con $f(0,0)$ es continua en ese pto

# Tª Función implícita Esquema

Me dan $m$ ecuaciones con $n$ variables. Me dan también algún punto, de la forma $(x,y)=(1,0)$ ó $y(e)=0$, $z(e)=1$. Son equivalentes ya que $(x,y)=(1,0) \Rightarrow y(1)=0$; $y(e)=0$, $z(e)=1 \Rightarrow (x,y,z)=(e,0,1)$

El punto donde me tengo que centrar suele ser $x$.

0. Normalmente $x$ será mi variable independiente, y el resto las trato como funciones $y,z: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dependientes de $x$.

1. Defino $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m =$ la(s) ecuación(es) que me dan.

Ej: Para 3 variables y 2 ecuaciones: $f(x,y(x),z(x)): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

2. Compruebo que $f \in C^\infty$ ó $C^1$, normalmente por ser polinomios.

3. Si me falta alguna coordenada del punto que tengo que evaluar, evalúo en $f$ las coord que conozco y despejo. Ej: tengo $(e,0,c)$, hago $f(e,0,c)=0$ y despejo $c$.

4. Calculo $\nabla f$ y evalúo $\nabla f(a,b,c)$ (coord que me dan).

5. Compruebo que el determinante de la matriz regular más a la derecha del jacobiano es $\neq 0$. Si tengo una ecuación, será el número más a la derecha del gradiente.

6. Sol Teoría: Por el Tª de la func. implícita, $\exists\, U \subseteq \mathbb{R}$ abierto, $a \in U$, $W \subseteq \mathbb{R}^3$, $(a,b,c) \in W$ tq $\exists\, y,z: J \subseteq U \to \mathbb{R}$, $J$ abierto,

$y,z \in C^\infty(U)$, $\{(x,r,s) \in W : f(x,r,s)=0\} = \{(x,y(x),z(x)) : x \in U\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Big\{$ ecuaciones del principio $\forall x \in U$

Esto suponiendo que tenga 3 variables.

7. Si me piden calcular derivadas, derivo respecto de x en las ecuaciones que tenga y despejo, luego evalúo en las coord que me dan y debería de poder despejarse $y'(b)$ y $z'(c)$.

8. Si me piden el pol. Taylor de orden K en a para alguna variable (será dentro de las coord que me dan) calculo su derivada de orden K como he hecho arriba y calculo. Por ejemplo en y

$$P_K[y,b](x) = y(b) + \frac{y'(b)}{1!}(x-b) + \frac{y''(b)}{2!}(x-b)^2 + \cdots + \frac{y^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k$$

# Esquema ~~[illegible]~~ comprobar difeomorfismo

Me dan una función $f$ y un espacio $\Omega$. Tengo que comprobar que $f$ es difeomorfismo de $\Omega$ en $f(\Omega)$

Requisitos $\begin{cases} \cdot\ \Omega \text{ abierto} \\ \cdot\ f \text{ inyectiva} \\ \cdot\ f \in C^k(\Omega), k \geq 1 \text{ (difeomorfismo de clase } k) \\ \cdot\ Jf(\Omega) \text{ inversible} \end{cases}$

1. Compruebo que $\Omega$ es abierto. Lo más fácil es ver que viene definido por una discontinuidad estricta. Tmb puedo ver si es la imagen de un abierto por una continua.

2. Compruebo que $f \in C^k(\Omega)$. Si es polinómica, inmediatamente $f \in C^\infty(\Omega)$. Sino, ver si $\nabla f$ es continuo.

3. Compruebo que $f$ sea inyectiva. Tengo que hacer $f(x,y) = f(u,v)$ (para $\mathbb{R}^2$) y me tiene que salir $x = u$, $y = v$. Me ayudo de las ecuaciones de definición de $\Omega$.

4. Compruebo $Jf(\Omega)$ inversible. Calculo el jacobiano de $f$ y compruebo que ~~[illegible] $\neq 0$~~ $\det(Jf(x,y)) \neq 0 \ \forall x,y \in \Omega$ (caso $\mathbb{R}^2$) (usando ec. de $\Omega$)

5. Solfearía: Aplicando el Tª (global) de la función inversa, $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y $f$ es un difeomorfismo de clase $k$ (por $f \in C^k(\Omega)$) de $\Omega$ en $f(\Omega)$

6. Si me piden el jacobiano de $f^{-1}$ en $(x,y)$. Calculo el jacobiano de $f$ en $(a,b)$ e invierto la matriz, ya que por el Tª func. inversa $Jf^{-1}(x,y) = (Jf(a,b))^{-1}$. Hago $f(a,b) = (x,y)$ y soluciono para obtener $(a,b)$

# Esquema optimización sin función de Lagrange

Lo uso cuando tengo que calcular distancia mínima entre dos conjuntos que dependen de 2 o más variables. Por ejemplo, una recta $R$ en función de $x, y$ y una parábola/elipse $\mathcal{E}$ en función de $u, v$.

- Para obtener los puntos de mínima distancia, trabajo con el cuadrado de la distancia euclídea para más comodidad.

~~1. Fijo un punto de la elipse/parábola, $u \in \mathbb{R}$~~

Resuelvo mediante dos aplicaciones de una variable para asegurar que haya un mínimo global.

1. Fijo un punto de la elipse/parábola, $u \in \mathbb{R}$, y defino $f(x) = d(\mathcal{E}, R)^2$; donde expreso $v$ en función de $u$, e $y$ en función de $x$.
2. Calculo $f'(x)$ y lo igualo a 0 para obtener los puntos críticos. Si hay más de uno, me quedo con el mínimo. $x_0$

   Justificación: $\left.\begin{array}{l} x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x > x_0 \Rightarrow f'(x) > 0 \end{array}\right\}$ $f$ tiene mínimo en $x_0$, que es abs pq es el único. por ser $f'(x)$ lineal, grado 1 y coef. líder $>0$

3. Calculo $f(x_0)$. Si he obtenido varios, pues lo calculo para cada punto. Obtengo una expresión en función de $u$.
4. Defino $g(u) =$ la expresión de antes. Si hay alguna cte que multiplique a todo la puedo quitar. Si he obtenido varios ptos crit pues defino 2.
5. Calculo $g'(u)$ y ptos críticos con $g'(u) = 0$.

6. Evalúo los puntos críticos obtenidos para cada función $g_i$ (suponiendo que tenga varias). Evalúo también en los extremos del dominio de $g_i$ para asegurarnos que el mínimo es absoluto. El mínimo será el punto $u$ de mínima distancia en E.

7. Para calcular $x$, evalúo $u$ en el pto $x_0$

8. Ya sólo me queda calcular la distancia con los puntos que he obtenido.

# Esquema optimización usando función de Lagrange

Lo uso para calcular mínima distancia de un punto a un cerrado (plano, recta) o el volumen máximo de un cuerpo.

0. Justif teórica $\left\{ \begin{array}{l} \text{- Siempre se alcanza la distancia mínima de un pto a un subconjunto cerrado} \\ \text{- Sea } \mathcal{F} \text{ el cuerpo, es compacto, por lo que la función, dada por su ec. de definición, tiene máximo.} \end{array} \right.$

1. Defino $f(x,y,z) = d\big((x,y,z),(a,b,c)\big)^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ ($d^2$ por comodidad). $(a,b,c)$ coord del punto.

   Si es un cuerpo, $f(x,y,z) =$ fórmula del volumen.

2. Defino $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :$ ec. del plano/cuerpo$\}$ (Si es un cuerpo $M = \mathcal{F}$). Y veo que sea una variedad es decir, por lo menos $\mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y rango$(\nabla \mathcal{F}) = 1$. $\mathcal{F}$ es la ec del plano/cuerpo. $M =$ ceros de $\mathcal{F}$.

   Variedad de dim = nº var − nº ec.

3. Defino la función de Lagrange, que tendrá nº var = nº var + nº restr. Suponiendo $\mathbb{R}^3$ y 1 ecuación, tendré $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda(\mathcal{F}(x,y,z))$

4. Calculo $\nabla \mathcal{F}$ y calculo los ptos críticos haciendo $\nabla \mathcal{F} = 0$

5. La solución del sistema serán las soluciones del problema.

   Si tengo varias, tengo que ver con cuál alcanzo el mínimo/máximo.

6. Si quiero calcular la distancia, tengo que tener en cuenta que he usado el cuadrado, por lo que la distancia real será la raíz de lo que obtenga con $f$.

# Esquema deriv parciales en composición

Me dan $u = f(r,s,t)$, donde $r,s,t$ son funciones de variables $x,y,z$. Me piden por ejemplo $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ o $\frac{\partial u}{\partial z}$

Me hago mi esquema

$$(x,y,z) \longmapsto (\quad\cdot\quad , \quad\cdot\quad , \quad\cdot\quad)$$ (Aquí van funciones) Tengo q justificar q son dif.

$$\begin{matrix} & \| & \| & \| \\ & (r, & s, & t) \longmapsto f(r,s,t) = u \end{matrix}$$

$* \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$

- $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \cancel{f}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \cancel{f}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \cancel{f}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$
- $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \cancel{f}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$$
- $$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}$$

En general, lo que lleve $u$ no puedo calcularlo, así que tengo que dejar las expresiones en función de $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ y calcular lo demás.

# Calcular imagen de un conjunto por una función

Me dan $f: A \to B$. Normalmente $B = \mathbb{R}$

Tengo que ver que $A$ es compacto y conexo para que $f(A)$ sea cerrado y acotado y así alcance máximo y mínimos absolutos.

1. Compruebo $A$ cerrado. Normalmente por estar definido con $\leq$.
   Si hay 2 inecuaciones, es la intersección de dos cerrados.
2. Veo que $A$ es acotado. Veo los valores de $x$ en $A$ ($[a,b]$) y los de $y$ en $A$ ($[c,d]$). Tengo $A \subseteq [a,b] \times [c,d]$
3. Como $A$ es cerrado y acotado, por el Tª de Weierstrass es compacto.
4. Pruebo que $A$ es conexo, viendo que todos los puntos se pueden unir con el $(0,0)$. $A = \bigcup_{(x,y)\in A} [(0,0), (x,y)] \Rightarrow A$ es conexo por ser unión de conexos.
5. Por ser $A$ conexo y compacto $\Rightarrow f(A)$ cerrado y acotado
   Es decir, $f(A)$ alcanza un máximo y un mínimo absolutos.
6. Calculo ptos críticos en el interior ($\nabla f = 0$) y en la frontera.
   Los evalúo y me quedo con los absolutos.

* Si $A$ esta definida por 2 inecuaciones, su frontera es la unión de varios conjuntos, igualando una inecuación en cada uno. Ej:

$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2 - y^2\}$

$Fr(A) = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2 - y^2\} \cup \{(2-y^2, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$

$x = 0$ $\qquad$ $x = 2 - y^2$

* Si $f(A)$ no es cerrado y acotado, veo los límites en $(\pm\infty, \pm\infty)$, $(\pm\infty, y)$, $(x, \pm\infty)$

# Esquema clasificar ptos críticos

$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

1. Calculo el gradiente de $f$
2. Calculo soluciones del S.E $\nabla f = 0$

$$\left.\begin{array}{l} D_1 f = 0 \\ \vdots \\ D_N f = 0 \end{array}\right\}$$

3. Obtendré valores de una variable usando una ecuación, por lo que me quedará (por lo menos) otra ecuación.

P. ej: obtengo $x = \{-1, 1, 2, -2\}$ y la otra ec. $x \cdot y = 2$ $(\mathbb{R}^2)$

Entonces los ptos críticos son $(-1,-2), (1,2), (2,1), (-2,-1)$

4. Calculo el Hessiano. En $\mathbb{R}^2$ $Hf = \begin{pmatrix} D_{11} f(x,y) & D_{12} f(x,y) \\ D_{21} f(x,y) & D_{22} f(x,y) \end{pmatrix}$

5. Evalúo la matriz en cada pto crítico, hago los valores propios y clasifico la forma cuadrática. (Mirar otro esquema)

6. Intento ver si la función está acotada
   - Si no está mayorada ni minorada, no hay extremos absolutos
   - Si está acotada:
     - Si el dominio está acotado y es cerrado, calculo los valores de la frontera *
     - Si el dominio no está acotado, alguno de los extremos relativos es absoluto

* Obtendré una función $g$ de una variable donde calculo máximos y mínimos $g(t) = f(\varphi(t))$. Tengo que calcular valores en la frontera de $g$

# Esquema encontrar un punto fijo

Me dan una función $f: A \to B$. Normalmente $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$

Aplico Tª pto fijo

Necesito $\left\{ \begin{array}{l} \cdot\ C \text{ completo e invariante por } f \\ \cdot\ f \text{ es contractiva o lipschitziana} \end{array} \right.$

$C \subseteq A$

1. Calculo el jacobiano de $f$. $Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix}$ $([-1,1]^3$ para $\mathbb{R}^3)$
2. Restrinjo a un espacio cerrado. Normalmente uso $[-1,1]^2$
3. Compruebo que $f$ es invariante en $[-1,1]^2$. Esto es $f([-1,1]^2) \subseteq [-1,1]^2$. Esto lo hago acotando el valor absoluto de cada miembro de $f$, y viendo que su valor es $\leq 1$ para $(x,y) \in [-1,1]^2$
4. Tenemos que $[-1,1]^2$ es completo por ser cerrado y ser $[-1,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$
5. Tenemos que $[-1,1]^2$ es convexo por ser $[-1,1]^2 = \overline{B_\infty}((0,0),1)$

6. Calculamos $\|Jf(x,y)\| = \text{máx}\{\text{valores propios}\}$. Si la matriz no está en forma diagonal, hay que diagonalizar.
7. Si $\|Jf(x,y)\| < 1$, por ser $[-1,1]^2$ convexo, por el TVM, al estar la diferencial acotada por $K<1$, $f$ es lipschitziana con cte de lipschitz $\leq K$
8. Como consecuencia, por el Tª del punto fijo de Banach, $f$ tiene un punto fijo en $[-1,1]^2$

# Esquema comprobar variedad y calcular espacio tangente

Me dan un cjto $M$ definido por una ecuación. (ó 2)

1. Defino una función $f$ igual a la ecuación que define el conjunto.

   Ej: $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 8\} \Rightarrow f = xyz - 8$

2. Tengo que justificar que $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ó su dominio. $C^1$ como mínimo.

3. Calculo $\nabla f(x,y,z)$ y me aseguro que rango $(\nabla f) > 0$.

   Esto es que por lo menos una de las columnas no se anule.

4. Defino $M =$ "ceros de $f$", por tanto es una variedad, de

   dim = dim_dominio − nº_ec

5. Para calcular el subespacio tangente en un punto $a$ dado,

   uso la fórmula $f_M = f(a) + \langle \nabla f(a), u - a \rangle$

   Donde $u = (x,y,z)$