(20) Prueba que la función $g:[1,2] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(y) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+y^4}} \quad \forall y \in [1,2]$$

es lipschitziana.

Sabemos que dado un intervalo I, una función $f: I \to \mathbb{R}$ derivable es lipschitziana si, y solo si, su derivada, f', es una función acotada.

Por tanto, tenemos que calcular $g'(y)$, pero antes trabajaremos un poco la función original $g(y)$. Apliquemos el siguiente cambio de variable:

$$x = ty \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{y} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1]$$
$$dx = y\,dt$$

De modo que:

$$g(y) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+y^4}} = \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{y\,dt}{\sqrt{(ty)^4+y^4}} = \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{y\,dt}{\sqrt{y^4(t^4+1)}} = \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{y\,dt}{y^2\sqrt{t^4+1}} =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dt}{y\sqrt{t^4+1}} = \frac{1}{y} \cdot \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$$

Llamemos $H(y) = \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$. Podemos expresar $H(y)$ como composición de:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \;;\; h(y) = \frac{1}{y} \;;\; p(y) = 0$$
$$f:[0,1] \to \mathbb{R} \;;\; h:[1,2] \to \mathbb{R} \;;\; p:[1,2] \to \mathbb{R}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que:

$$H'(y) = f(h(y))\, h'(y) - f(p(y))\, p'(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) - 0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^4 + 1}} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-1}{y^2 \sqrt{\frac{y^4+1}{y^4}}} = \frac{-1}{\sqrt{y^4+1}}$$

Por tanto, para calcular $g'(y)$:

$$g(y) = \frac{1}{y} \cdot H(y)$$

$$g'(y) = \left(\frac{1}{y}\right)' \cdot H(y) + \frac{1}{y} \cdot H'(y) = \left(-\frac{1}{y^2}\right) \cdot \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} + \frac{1}{y} \cdot \frac{-1}{\sqrt{y^4+1}}$$

Acotemos $g'(y)$ en valor absoluto teniendo en cuenta que $y \in [1,2]$:

$$|g'(y)| = \left| \left(-\frac{1}{y^2}\right) \cdot \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} + \frac{1}{y} \cdot \frac{-1}{\sqrt{y^4+1}} \right| \leq$$

$$\leq \left| \left(-\frac{1}{y^2}\right) \cdot \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \right| + \left| \frac{1}{y} \cdot \frac{-1}{\sqrt{y^4+1}} \right| =$$

$$= \left| \left(-\frac{1}{y^2}\right) \right| \cdot \left| \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \right| + \left| \frac{1}{y} \right| \cdot \left| \frac{-1}{\sqrt{y^4+1}} \right| \leq$$

$$\leq 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

Luego, como $|g'(y)| \leq 2$, es decir, la derivada de $g(y)$ está acotada, entonces la función g es lipschitziana.