

MODELOS AVANZADOS DE COMPUTACIÓN

Relación 2

1. Sobre el alfabeto $A = \{a, b, c\}$, calcular las palabras $C(143)$ y $C(100)$.
2. Sobre el alfabeto $A = \{a, b, c\}$, calcular las palabras $Z(abc)$ y $Z(bac)$.
3. Discutir la posibilidad de asignar un número natural a cada MT con independencia del alfabeto de entrada.
4. Construir una MT que dada una entrada w , la convierte en una salida $w111w$.
5. Demostrar que el problema de la parada: determinar el conjunto de parejas (M, w) tales que la MT M para cuando tiene a w como entrada es r.e. pero no recursivo.
6. Describir de manera informal MTs con varias cintas que enumeren (produzcan como salida una lista que contenga todas sus palabras) los siguientes lenguajes (se supone que los números se escriben en binario):
 - (a) El conjunto de los cuadrados perfectos.
 - (b) El conjunto de todos los naturales primos .
 - (c) El conjunto de todos los números naturales n tales que la MT cuya descripción es la palabra w_n acepta la palabra w_n como entrada (w_n es la palabra sobre $\{0, 1\}$ cuyo número asociado es n).
7. Sean L_1, \dots, L_k ($k \geq 2$) un conjunto de lenguajes sobre el alfabeto A tales que:
 - (a) Para cada $i \neq j$, tenemos que $L_i \cap L_j = \emptyset$.
 - (b) $\bigcup_{i=1}^k L_i = A^*$.
 - (c) $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, el lenguaje L_i es r.e.

Demostrar que $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, el lenguaje L_i es recursivo.

8. Sea L r.e., pero no recursivo. Considérese el lenguaje

$$L' = \{0w \mid w \in L\} \cup \{1w \mid w \notin L\}$$

¿Puede asegurarse que L' o su complementario son recursivos, r.e. o no r.e.?

9. Estudiar si las clases de lenguajes recursivos y r.e. son cerradas para las siguientes operaciones:
 - (a) Unión.

- (b) Intersección.
 - (c) Concatenación.
 - (d) Clausura.
 - (e) Homomorfismo.
 - (f) Homomorfismo inverso.
10. Demostrar que determinar si una MT acepta al menos un palíndromo es indecidible.
 11. Supongamos que tenemos MT con dos tipos de estados: *campana* y *silbato*. Determinar que saber si una MT entrará alguna vez en un estado *silbato* es indecidible.
 12. Demostrar que es indecidible (no recursivo) saber si una MT termina escribiendo un 1 cuando comienza con una cinta completamente en blanco.
 13. Determinar si los siguientes lenguajes son recursivos, r.e. o no r.e.:
 - (a) Determinar si el lenguaje de una MT contiene, al menos, dos palabras distintas.
 - (b) Determinar si el lenguaje de una MT es finito o infinito.
 - (c) Determinar si el lenguaje de una MT es independiente del contexto.
 14. Sea L el lenguaje formado por pares de códigos de MT más un entero (M_1, M_2, k) tales que $L(M_1) \cap L(M_2)$ contiene, al menos, k palabras. Demostrar que L es r.e. pero no recursivo.
 15. Demostrar que las siguientes cuestiones son decidibles:
 - (a) El conjunto de las MT M tales que al comenzar con la cinta en blanco, en algún momento escribirán un símbolo no blanco en la cinta.
 - (b) El conjunto de las MT que nunca se mueven a la izquierda.
 - (c) El conjunto de los pares (M, w) tales que M , al actuar sobre la entrada w , nunca lee una casilla de la cinta más de una vez.
 16. Indicar si los siguientes lenguajes son recursivos, r.e. o no r.e.
 - (a) El conjunto de los códigos de MT que se paran para cualquier entrada.
 - (b) El conjunto de los códigos de MT que no se paran para ninguna entrada.
 - (c) El conjunto de los códigos de MT que se paran, al menos, para una entrada.
 - (d) El conjunto de los códigos de MT que no se paran, al menos, para una entrada.

17. Supongamos que tenemos 4 lenguajes L_1, L_2, L_3, L_4 de tal manera que existe una reducción de L_1 a L_2 , de L_2 a L_3 y de L_4 a L_3 . Para cada una de las siguientes frases indica si son CIERTAS, FALSAS o POSIBLES (podrían ser ciertas o falsas)
- (a) L_1 es recursivamente enumerable pero no recursivo, y L_3 es recursivo
 - (b) L_1 no es recursivo y L_4 no es recursivamente enumerable
 - (c) El complementario de L_1 no es recursivamente enumerable, pero el complementario de L_2 es recursivamente enumerable
 - (d) El complementario de L_2 no es recursivo, pero el complementario de L_3 es recursivo
 - (e) Si L_1 es recursivo, entonces el complementario de L_2 es recursivo
 - (f) Si L_3 es recursivo, entonces el complementario de L_4 es recursivo
 - (g) Si L_3 es recursivamente enumerable, entonces la unión de L_2 y L_4 es recursivamente enumerable.
 - (h) Si L_3 es recursivamente enumerable, entonces la intersección de L_2 y L_4 es recursivamente enumerable
18. Sea el problema de determinar si una MT acepta a lo más 100 palabras. Determinar si es recursivo, recursivamente enumerable o no recursivamente enumerable. Justificar la respuesta.
19. Determinar si los siguientes problemas son recursivos (decidibles) o recursivamente enumerables (semidecidibles)
- (a) Saber si una MT para una entrada 0011 no va a usar más de 10 casillas de la cinta.
 - (b) Saber si una MT acepta más de 10 palabras distintas.
 - (c) Dadas dos MT saber si aceptan el mismo lenguaje
 - (d) Dada una MT M y una palabra u , saber si la MT acepta la palabra u en un número de pasos menor o igual a $|u|$.
 - (e) Dada una MT determinar si no acepta la palabra vacías.
20. Determinar cuales de los siguientes problemas son decidibles, semidecidibles o no semidecidibles (se supone que las MTs tienen a $\{0, 1\}$ como alfabeto de entrada):
- (a) Dadas dos máquinas de Turing, M_1 y M_2 , determinar si existe, al menos, una palabra aceptada simultáneamente por ambas máquinas.

- (b) Dada una MT, determinar si para toda palabra de entrada no realiza más de 5 movimientos.
- (c) Determinar si una MT es no-determinística y no es determinística.
- (d) Dada una MT, determinar si ninguna de las palabras que acepta es un palíndromo.

Justifica las respuestas.

21. Supongamos que tenemos 3 lenguajes L_1, L_2, L_3 de tal manera que existe una reducción de L_1 a L_2 , y de L_2 a L_3 . Para cada una de las siguientes frases indica si son CIERTAS, FALSAS o POSIBLES (podrían ser ciertas o falsas)

- (a) L_1 es recursivamente enumerable pero no recursivo, y L_3 es recursivo.
- (b) El complementario de L_1 no es recursivamente enumerable, pero el complementario de L_2 es recursivamente enumerable.
- (c) Siempre que sea L_3 recursivo, L_1 también lo será.
- (d) Siempre que L_1 no sea recursivamente enumerable, tampoco lo será L_3 .
- (e) L_1 es recursivo pero L_3 no lo es.

22. Determinar cuales de los siguientes lenguajes son recursivos, recursivamente enumerables o no recursivamente enumerables (se supone que las MTs tienen a $\{0, 1\}$ como alfabeto de entrada:

- (a) Dadas dos máquinas de Turing, determinar si aceptan el mismo lenguaje.
- (b) Dada una MT, determinar si acepta, al menos, un palíndromo.
- (c) Dada una MT M con una cinta y una palabra de entrada u , determinar si el cabezal de lectura de la MT nunca se mueve a la izquierda para dicha entrada.

23. Supongamos que tenemos 3 lenguajes L_1, L_2, L_3 de tal manera que existe una reducción de L_1 a L_2 , y de L_2 a L_3 . Para cada una de las siguientes frases indica si son CIERTAS, FALSAS o POSIBLES (podrían ser ciertas o falsas)

- (a) L_1 es recursivamente enumerable pero no recursivo, y L_3 es recursivo.
- (b) El complementario de L_1 no es recursivamente enumerable, pero el complementario de L_2 es recursivamente enumerable.
- (c) Siempre que sea L_3 recursivo, L_1 también lo será.
- (d) Siempre que L_1 no sea recursivamente enumerable, tampoco lo será L_3 .

- (e) L_1 es recursivo pero L_3 no lo es.
24. Determinar justificando las respuestas cuales de los siguientes lenguajes son recursivos, recursivamente enumerables o no recursivamente enumerables (se supone que las MTs tienen a $\{0, 1\}$ como alfabeto de entrada):
- (a) Dadas dos máquinas de Turing, determinar si aceptan, al menos, una palabra en común (una misma palabra aceptada por las dos máquinas).
 - (b) Dada una máquina de Turing y una palabra de entrada determinar si visita menos de 10 casillas distintas de la cinta de lectura.
 - (c) Dadas dos Máquinas de Turing, determinar si el conjunto de las palabras aceptadas a la vez por ambas máquinas de Turing es finito.
25. Supongamos que tenemos 2 lenguajes L_1, L_2 y que L_1 se reduce a L_2 . Las siguientes frases contienen afirmaciones sobre la recursividad (total o parcial) de uno de los lenguajes. Completalas con lo que puedas deducir sobre el otro lenguaje:
- (a) Si L_1 es recursivamente enumerable, entonces L_2 ...
 - (b) Si L_1 no es recursivo, entonces ...
 - (c) Si el complementario de L_2 es recursivamente enumerable pero no recursivo, entonces ...
 - (d) Si L_2 es recursivo, entonces ...
26. Indica cuales de los siguientes problemas son decidibles, semidecidibles o no semidecidibles (se supone que las MTs tienen a $\{0, 1\}$ como alfabeto de entrada):
- (a) Determinar si el lenguaje aceptado por una MT es regular.
 - (b) Dadas dos MTs determinar si hay una palabra que es aceptada por las dos MT y además es un palíndromo.
 - (c) Dada una MT determinar si todos sus estados son accesibles (se puede llegar a ellos para un cálculo para alguna entrada).
 - (d) Dada una MT determinar si su número de estados es menor o igual a 5.

Justifica las respuestas.

27. Demuestra que el Problema de las Correspondencias de Post con un alfabeto A que tiene un sólo elemento es decidable.