MODELOS AVANZADOS DE COMPUTACIÓN

Relación 6

NP-Completitud

1. Demostrar que los siguientes problemas son NP-completos:

   a) **Camino más largo** Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo $K \leq |V|$, ¿contiene G un camino simple (que no pase dos veces por el mismo sitio) con K o más arcos?

   b) **Empaquetado de Conjuntos** Dada una colección C de conjuntos finitos y un entero $K \leq |C|$, ¿existen K conjuntos disjuntos en C?

   c) **Partición en subgrafos hamiltonianos** Dado un grafo $G = (V, E)$, y un entero positivo $K \leq |V|$, ¿pueden particionarse los vértices de G en $k \leq K$ conjuntos disjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de tal forma que para todo $1 \leq i \leq k$, V_i contiene un circuito hamiltoniano?

   d) **Subgrafo común maximal** Dados los grafos $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$, y un entero positivo K, ¿existen subconjuntos $E_1' \subseteq E_1$ y $E_2' \subseteq E_2$ tales que $|E_1'| = |E_2'| \geq K$ y tal que los dos subgrafos $G_1' = (V_1, E_1')$ y $G_2' = (V_2, E_2')$ son isomorfos?

   e) **Suma de cuadrados mínima** Dado un conjunto finito A y un tamaño $s(a) > 0$ para todo $a \in A$ y dos enteros positivos K y J, ¿pueden particionarse los elementos de A en K conjuntos disjuntos, $A_1, \ldots, A_k$, de tal forma que $\sum_{i=1}^{K} \left(\sum_{a \in A_i} s(a)\right)^2 \leq J$?

   f) **Conjunto de vértices de corte** Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, y un entero positivo $K \leq |V|$, ¿existe un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq K$ y tal que todo circuito dirigido en G incluya al menos un vértice de V'?

   g) **Cubrimiento exacto por conjuntos de 4 elementos** Dado un conjunto finito X con $|X| = 4q$, siendo q un entero y una familia C de subcojuntos de 4 elementos de X, ¿existe una subfamilia $C' \subseteq C$ tal que todo elemento de X pertenece a uno y solo uno de los subconjuntos de C?

   h) **Conjunto dominante** Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo $K \leq |V|$, ¿existe un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq K$ y tal que todo vértice $v \in V \setminus V'$ está conectado con al menos un vértice de V'?

   i) **Estrella de Steiner en grafos** Dado un grafo $G = (V, E)$, y un subconjunto $R \subseteq V$, y un entero positivo $K \leq |V| - 1$, ¿existe un subárbol de G que contiene todos los vértices de R y que no contiene más de K arcos?

   j) **No Equivalencia de expresiones regulares sin estrella** Dadas dos expresiones regulares E_1 y E_2 sobre el alfabeto A que no contienen el operador de clausura $*$, ¿representan estas expresiones regulares lenguajes distintos sobre A?

k) **Partición de conjuntos** Dada una familia C de subconjuntos de un conjunto finito S ¿existe una partición de S en dos partes S_1 y S_2 tales que no hay un elemento $A \in C$ que esté contenido en S_1 o esté contenido en S_2 (o equivalentemente todo $A \in C$ debe de tener intersección no vacía con S_1 y con S_2)?
Nota.- Reducir NAESAT.

l) **Partición en caminos de longitud 2** Dado un grafo $G = (V, E)$, con $|V| = 3q$ donde q es un entero positivo, ¿existe una partición de V en q conjuntos disjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_q$ de tamaño 3 de tal forma que para cada $V_i = \{v_{i[1]}, v_{i[2]}, v_{i[3]}\}$, al menos dos de los tres posibles arcos, $\{v_{i[1]}, v_{i[2]}\}, \{v_{i[1]}, v_{i[3]}\}, \{v_{i[2]}, v_{i[3]}\}$ está en E.
Nota.- Reducir cubrimiento por tripletas

m) **Numeración Grundy en Grafos** Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, ¿existe una numeración $L : V \to \mathbb{N}$, donde el mismo número puede asignarse a más de un vértice y tal que cada $L(u)$ es igual al mínimo de todos los valores enteros que no están en $\{L(v) \,:\, (u, v) \in A\}$.

n) **Colorear grafos(3)** Dado un grafo $G = (V, E)$, ¿existe una función $f : V \to \{1, 2, 3\}$, tal que $f(u) \neq f(v)$ para todos los arcos $\{u, v\} \in E$?

2. Una Máquina de Turing no-determinística fuerte es una máquina que tiene tres posibles respuestas 'Si', 'No', y 'Duda'. Una de estas máquinas decide L si y solo si, para para todo $x \in L$, todos los cálculos posibles terminan en 'Si' o 'Duda' y al menos uno en 'Si' y para todo $x \notin L$, todos los cálculos posibles terminan en 'No' o 'Duda' y al menos uno en 'No'. Demostrar que L es decidido por una Máquina de Turing no-determinística fuerte polinómica si y solo si L está en $\mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$.

3. Demostrar que el siguiente problema es NP-completo: dado un grafo y un circuito hamiltoniano determinar si el grafo tiene otro circuito hamiltoniano.

4. Demostrar que el problema MAX-CUT es NP-completo: dado un grafo no-dirigido $G = (V, E)$ y un entero K, determinar si existe una partición del conjunto de vértices en dos partes V_1, V_2, de tal manera que el número de aristas uniendo un nodo de V_1 y un nodo de V_2 es mayor o igual que K.

5. Supongamos un grafo $G = (V, E)$ donde cada arista entre los nodos i y j tiene asignada una fuerza de interacción J_{ij} que es un número entero.

   Un asignación de spines es una función $s : V \to \{-1, +1\}$ asignando a cada vértice i un valor $s(i)$ que puede ser $+1$ ó -1.

La energía de una asignación de spines s es $R(s) = -\sum_{(i,j)\in E} J_{ij}s_is_j$.

Se considera el siguiente problema:

Dado un grafo con interacciones J_{ij} y una energía máxima K, ¿existe una asignación de spines s tal que $R(s) \leq K$.

a) Demostrar que si $J_{ij} \geq 0$ para toda arista (i, j), entonces el problema se puede resolver en tiempo polinómico.

b) Demostrar que el problema si J_{ij} puede ser negativo, entonces el problema es NP-completo.

6. Consideremos el problema de la capacidad de una red telefónica en una misma frecuencia: tenemos un conjunto de individuos que llamaremos V. Si dos individuos i, j están hablando es porque se encuentran dentro del rango uno del otro, pero entonces ningún otro individuo que esté dentro de un rango de estos individuos puede estar hablando en esa frecuencia. Suponemos que disponemos de un grafo $G = (V, E)$ donde $(i, j) \in E$, si los individuos están dentro del rango uno del otro.

   Un conjunto de conversaciones es un subconjunto $C \subseteq E$ de aristas tal que vértices en aristas distintas no pueden estar conectados en el grafo G (no pueden compartir la misma frecuencia). Se supone que un vértice siempre está conectado consigo mismo.

   El problema de la capacidad de la red es dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero K, ¿existe un conjunto C de conversaciones tal que $|C| \geq k$?.

   Demostrar que este problema es NP-completo.

7. Cada lenguaje $L \in \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$ sugiere un problema en **TFNP** ¿Cual?

8. Demostrar que FSAT es **FNP**-completo.

9. Dar un certificado que demuestre que 13 es primo, de acuerdo con la caracterización vista en clase.

10. Demostrar que el siguiente problema está en **P**:

    Dados 4 enteros a, b, c, p determinar si $a^b \equiv c \,(\text{mod} p)$

11. Sea el problema *factorización* que consiste en dados dos números x, y determinar si x tiene un divisor k que sea $1 < k < y$. Demostrar que este problema está en $\mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$.

12. Demostrar que son NP-completos los siguientes problemas:

a) **Cubrimiento por cliques.** Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$ y un entero K, existe una partición de V en K conjuntos $V_1, \ldots, V_K$ de tal manera que cada V_i es completo: para cada $a, b \in V_i, \{a, b\} \in E\}$.

b) **Árbol generador restringido.** Dado un grafo no-dirigido $G = (V, E)$ y un entero K, ¿contiene el grafo un árbol generador de tal forma que cada nodo en el árbol tenga un grado menor o igual a K?

c) **Feedback vertex set.** Dado un grafo no-dirigido $G = (V, E)$ y un entero K, ¿existe un subconjunto $X \subseteq V$ de tamaño menor o igual a K tal que eliminando de G los vértices en V el grafo resultante no tiene ciclos?

d) **Partición en tríos.** Dado un conjunto de enteros cuya longitud es un múltiplo de 3, ¿es posible dividir el conjunto en tríos (conjuntos de 3 elementos) de forma que los enteros de cada trío sumen lo mismo?

e) **CSAT.** Un circuito lógico es un grafo con entradas binarias, puertas AND, OR y NOT y una salida binaria (ver `https://en.wikipedia.org/wiki/Boolean_circuit`). El problema CSAT es dado un circuito booleano, determinar si existe una entrada que hace que la salida sea verdadera.

f) **Cuadrados Latinos.** Un cuadrado latino de dimensión n es una tabla $n \times n$ que contiene símbolos de un alfabeto de tamaño n: $\{1, \ldots, n\}$ de tal forma que en cada fila y cada columna nunca se repita un símbolo. El problema consiste en dada una tabla $n \times n$ donde algunas entradas contienen símbolos y otras están vacías, determinar si se pueden completar las entradas vacías con símbolos de tal manera que el resultado es un cuadrado latino.

g) **Triángulo Monocromático.** Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$, determinar si V se puede dividir en dos partes V_1 y V_2, de tal forma que ninguna de ellas contenga un triángulo (tres vértices conectados entre sí).

h) **Conjunto diverso de clientes.** Un comerciante mantiene una matriz de compras de sus clientes. Hay una fila por cada cliente y una columna por cada producto y en cada entrada (i, j) registra el número de unidades que el cliente i ha comprado del producto j. Un subconjunto S de clientes se llama diverso si nunca dos clientes de S distintos han comprado alguna vez el mismo producto. El problema consiste en dado K, determinar si existe un conjunto S de clientes de tamaño K que sea diverso.

i) **Problema de la identificación por intersección.** Dado un conjunto U de tamaño n, m subconjuntos $A_1, \ldots, A_m$ y m números naturales $c_1, \ldots, c_m$, ¿existe un subconjunto X de U tal que el número de elementos de $X \cap A_i$ es igual a c_i?

j) **Problema del agrupamiento.** Supongamos que tenemos n objetos $U = \{p_1, \ldots, p_n\}$, una función de distancia simétrica $d(p_i, p_j) \in \mathbb{N}$ tal que $d(p_i, p_i) = 0$, un entero K y un umbral B, determinar si U se puede partir en K partes $U_1, \ldots, U_K$ de tal forma que en cada cluster la distancia entre cada dos objectos pertenecientes a él es menor o igual a B (para cada $p_i, p_j \in U_k$, $d(p_i, p_j) \leq B$.

k) **Problema de la Contratación Eficiente.** Tenemos un conjunto de n deportes $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ y un conjunto de m especialistas $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ tal que cada especialista e_j conoce un conjunto de deportes $D_j \subseteq D$. Si tenemos un límite de contratos $K \leq m$, determinar si existe un subcojunto $E' \subseteq E$ de tamaño menor o igual a K y tal que para cada deporte e_i exista un especialista $e_j \in E'$ con $e_i \in D_j$.