Ejercicios de Cálculo II
Relación 6: Integración

1. Prueba, usando directamente alguna descripción de la integral, que

$$\int_0^1 x^p \, \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

2. Justifica las siguientes desigualdades

   a) $\displaystyle \frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{10+x} < \frac{1}{5}$,

   b) $\displaystyle \frac{1}{110} < \int_0^1 \frac{x^9}{10+x} \, \mathrm{d}x < \frac{1}{10}$.

3. *a*) Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Sean $m = \inf f([a,b])$ y $M = \sup f([a,b])$. Prueba que existe $\mu \in [m, M]$ tal que $\int_a^b f = \mu(b-a)$.

   b) Si además f es continua, existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

4. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Supongamos que para cualesquiera $a < c < d < b$ existe un punto $x \in]c,d[$ tal que $f(x) = 0$. Prueba que $\int_a^b f = 0$.

5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Demuestra que si existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) > 0$, entonces $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x > 0$.

6. Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función continua verificando que

$$\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t = \int_x^1 f(t) \, \mathrm{d}t$$

   para cualquier $x \in [0,1]$. Demuestra que $f(x) = 0$, para todo x.

7. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas de forma que

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

   Demuestra que existe un punto $c \in [a,b]$ de forma que $f(c) = g(c)$.

8. Prueba que para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, se tiene

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{2} \left(\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x \right).$$

Prueba también la llamada *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, esto es,

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x \right).$$

9. Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Para cada partición $P \in \mathcal{P}[a, b]$, denotemos por $\Sigma(f, P)$ al conjunto de todas las sumas integrales de f para la partición P. Prueba que, para $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica

$$\lambda = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \iff \lambda \in \Sigma(f, P), \quad \forall P \in \mathcal{P}[a, b].$$

10. Sea $r \in \mathbb{R}^+$ y $f \in \mathcal{C}([-r, r])$. Prueba que

    a) Si f es par, entonces $\int_{-r}^r f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^r f(x)\,\mathrm{d}x$.

    b) Si f es impar, entonces $\int_{-r}^r f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

11. Sea I un intervalo no trivial y $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua. Prueba las siguientes igualdades:

    a) $\displaystyle\int_{a-h}^{b-h} f(x+h)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall a, b \in I,\ \forall h \in \mathbb{R}.$

    b) $\displaystyle\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall a, b \in I,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*.$

12. Demuestra que si f es una función continua y periódica de período T se verifican las siguientes igualdades

$$\int_x^{x+T} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^T f(u+x)\,\mathrm{d}u, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

13. Calcula los límites de las siguientes sucesiones expresándolas como sumas integrales

a) $x_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+4} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$

b) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n(n+n)}}$

c) $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$

d) $x_n = \dfrac{n+1}{n^2+1} + \dfrac{n+2}{n^2+4} + \cdots + \dfrac{n+n}{n^2+n^2}$

14. Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $H \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Prueba que H es derivable y calcula su derivada.

15. Definimos la siguiente función

$$F(x) = \int_{\sqrt[3]{x}}^{x^2} \frac{x}{\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t.$$

Comprueba que F es derivable. Calcula $F'(1)$.

16. Calcula las derivadas de cada una de la funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_a^x \frac{1}{1+t^2+e^{-t^2}}\,\mathrm{d}t$,

b) $F(x) = \int_x^b \frac{t}{1+t^3+e^{-t^2}}\,\mathrm{d}t$,

c) $F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+e^{-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

17. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Halla los extremos relativos de la función g dada por

$$g(x) = \int_0^{x^2-3x+2} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (x \in \mathbb{R}).$$

18. Sea I un intervalo no trivial y G una primitiva de una función $f \in \mathcal{C}(I)$. ¿Se puede asegurar que G es una integral indefinida de f?

19. Se considera la función $H \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = \int_0^{\pi x^2} e^{2t}\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in [-1,1]$$

Estudia los extremos absolutos y relativos de H y calcula su imagen. ¿Existe $x \in [-1, 1]$ tal que $H(x) = 13$?

20. Prueba que la función $g\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4 + y^4}} \qquad \forall y \in [1,2]$$

es lipschitziana.

21. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y se define $F(x) = \displaystyle\int_1^x \left(t \int_1^t f(s)\, ds \right) \mathrm{d}t$. Calcula $F'(1)$ y $F''(1)$.

22. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{x^3 - x^2} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Como consecuencia, estudia los extremos relativos de dicha función.

23. Calcula la imagen de las funciones $F, G\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas por

$$F(x) = \int_1^x \frac{1-t}{t(t+1)(t^2+1)}\, \mathrm{d}t, \qquad G(x) = \int_1^{1+(x-1)^2} \frac{\operatorname{arc\,tg}(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

24. Dado $a > 0$, calcula la imagen de la función $G\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ definida como

$$G(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{a^2 - t^2}\, \mathrm{d}t.$$