(14) Sea $f \in C(\mathbb{R})$ y $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t)\, dt.$$

Prueba que H es derivable y calcula su derivada.

Según el Teorema Fundamental del Cálculo, dado un intervalo $\mathcal{I}$, $f: \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ una función continua y $g, h: I \to \mathbb{R}$ funciones derivables definidas en un intervalo I con $g(I), h(I) \subset \mathcal{I}$, entonces la función $F: I \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt$$

es derivable y $F'(x) = f(h(x))\, h'(x) - f(g(x))\, g'(x)$, para todo $x \in I$.

En nuestro caso, $f \in C(\mathbb{R})$ por lo que f es continua en $\mathbb{R}$. Por otro, lado, las funciones $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$ son derivables en todo $\mathbb{R}$ y $g(\mathbb{R}), h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Por tanto, la función $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t)\, dt$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$, por el Teorema Fundamental del Cálculo, y su derivada es:

$$H'(x) = f(x^3) \cdot 3x^2 - f(x^2) \cdot 2x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$