Tema 1: Máquinas de Turing. Funciones y Lenguajes Calculables

Serafín Moral

Universidad de Granada

Febrero, 2020

Contenido

- Máquinas de Turing
- Lenguajes recursivamente enumerables. Lenguajes recursivos
- Técnicas de construcción de Máquinas de Turing: memoria adicional, pistas múltiples, subrutinas
- Extensiones del concepto de MT
  - Movimientos estáticos
  - Máquinas multicinta
  - Máquinas no deterministas
- Limitaciones de las MT
  - Máquinas con cintas semiilimitadas
- Problemas y Programas
  - Tipos de problemas
  - Programas
  - Problemas de decisión y Lenguajes
  - Palabras y Números
- Calculabilidad
  - El lenguaje diagonal
  - El lenguaje universal
  - Problemas indecidibles
  - Teorema de Rice
  - El problema de las correspondencias de Post

El Problema de la Parada

Enunciado

- Entrada: un programa y unos datos de entrada
- Salida: SI (cuando el programa termina para esos datos) y NO (cuando el programa cicla de forma indefinida para esos datos)

¿Por qué es difícil saber si un programa termina?

```
int exp(int i,n)
/* calcula i a la potencia n */
{
    int ans,j;
    ans = 1;
    for (j=1; j<=n; j++) ans *= i;
    return(ans);
}

main()
{
    int n, total, x,y,z;
    scanf("%d",&n);
    total = 3;
    while (1) {
        for(x=1; x<=total-2; x++)
            for(y=1; y<=total-x-1; y++) {
                z = total-x-y;
                if (exp(x,n) + exp(y,n) == exp(z,n))
                    printf("hola mundo");
            }
        total++;
    }
}
```

Motivación

- El programa termina para una entrada n si y solo si existen números enteros positivos x, y, z tales que

$$x^n + y^n = z^n$$

- Ahora se sabe que no termina para $n > 2$ según el *último teorema de Fermat*, pero hace algunos años esto no se sabía.
- El teorema fue enunciado en 1637, pero no fue demostrado hasta 1995 por el matemático Andrew Wiles
- Se han necesitado más de 300 años para saber si un programa concreto termina, pero nosotros queremos un algoritmo que nos diga si cualquier programa termina!!
- Este es un problema indecidible. La teoría para demostrar esto la haremos usando Máquinas de Turing. La podríamos hacer usando programas en C, pero las demostraciones matemáticas serían más complejas.

Máquinas de Turing

Una Máquina de Turing (MT) es una séptupla $(Q, A, B, \delta, q_0, \#, F)$ en la que

- Q es un conjunto finito de estados
- A es un alfabeto de entrada
- B es el alfabeto de símbolos de la cinta que incluye a A
- δ es la función de transición que asigna a cada estado $q \in Q$ y símbolo $b \in B$, el valor $\delta(q, b)$ que puede ser vacío (no definido) o una tripleta (p, c, M) donde $p \in Q, c \in B, M \in \{I, D\}$ donde I indica izquierda y D indica derecha.
- q_0 es el estado inicial
- $\#$ es un símbolo de $B \setminus A$ llamado símbolo blanco
- F es el conjunto de estados finales

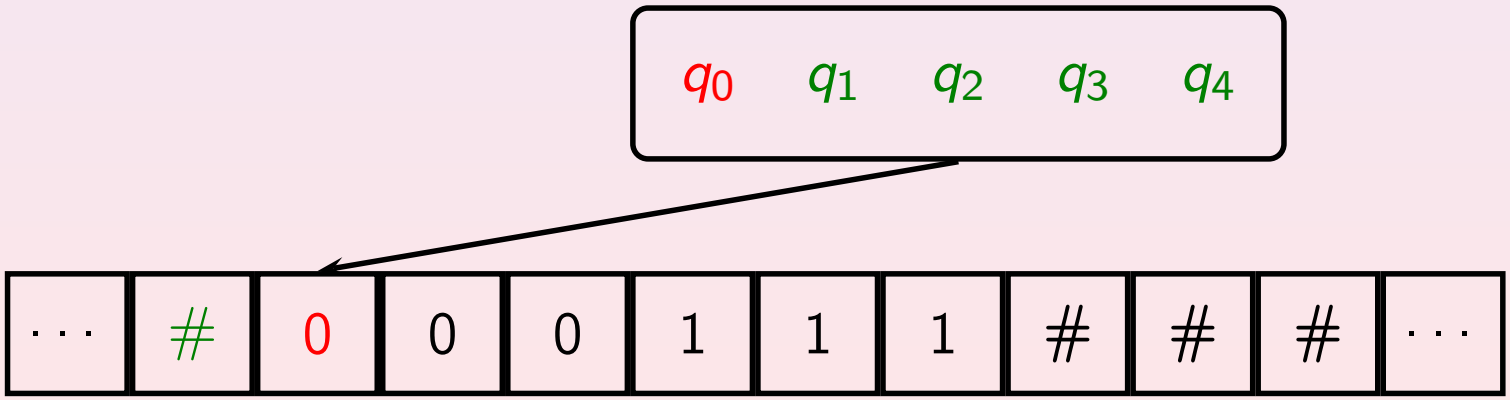
Ejemplo

Consideremos la MT
$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \{0,1,X,Y,\#\}, \delta, q_0, \#, \{q_4\})$ donde las transiciones no nulas son las siguientes:

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0,0) = (q_1, X, D) & \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D) \\ \delta(q_1,0) = (q_1, 0, D) & \delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I) \\ \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D) & \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I) \\ \delta(q_2, X) = (q_0, X, D) & \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I) \\ \delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D) & \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D) \end{array}$$

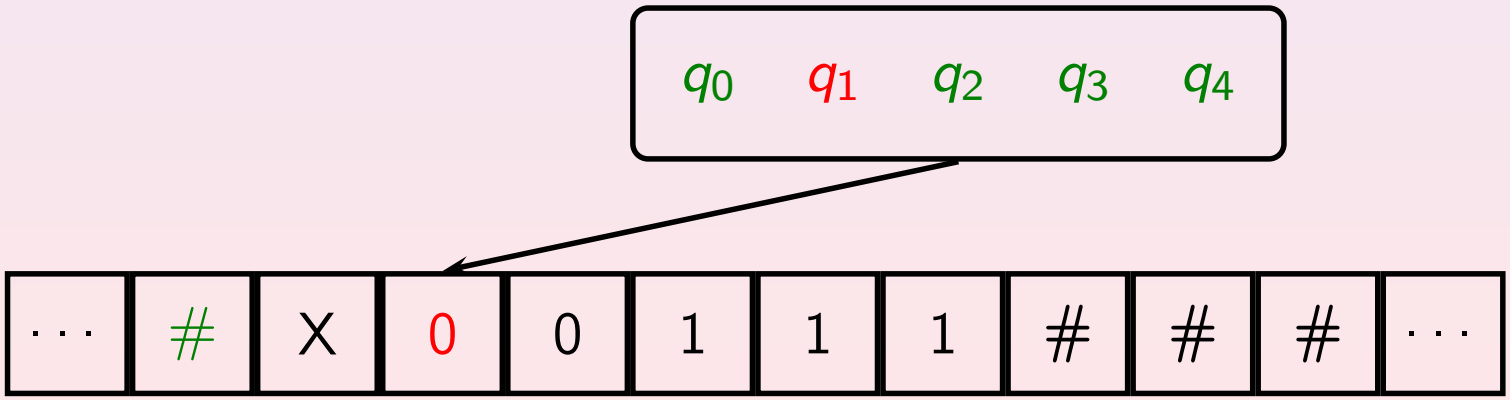
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



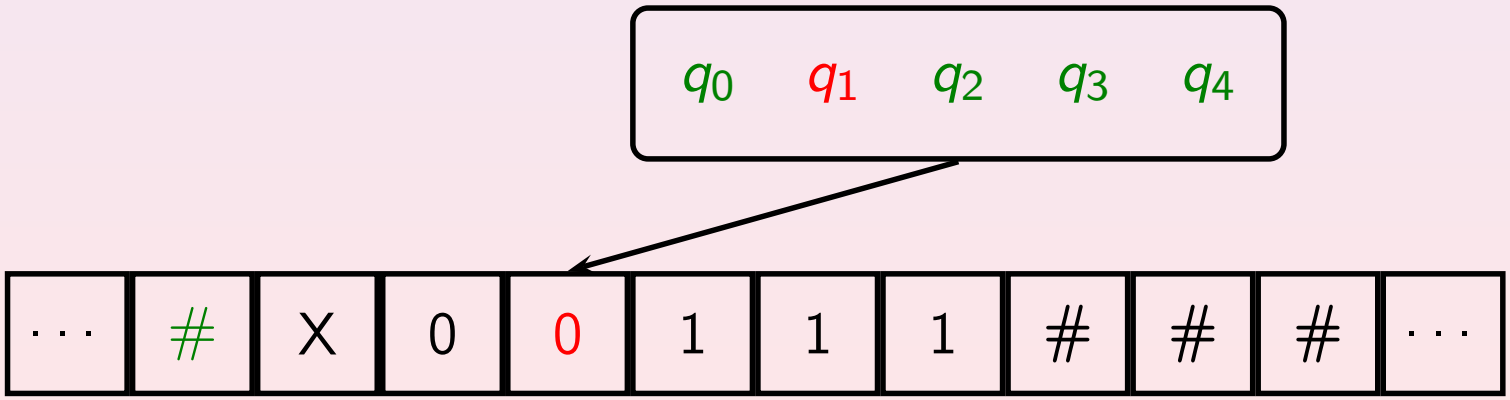
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



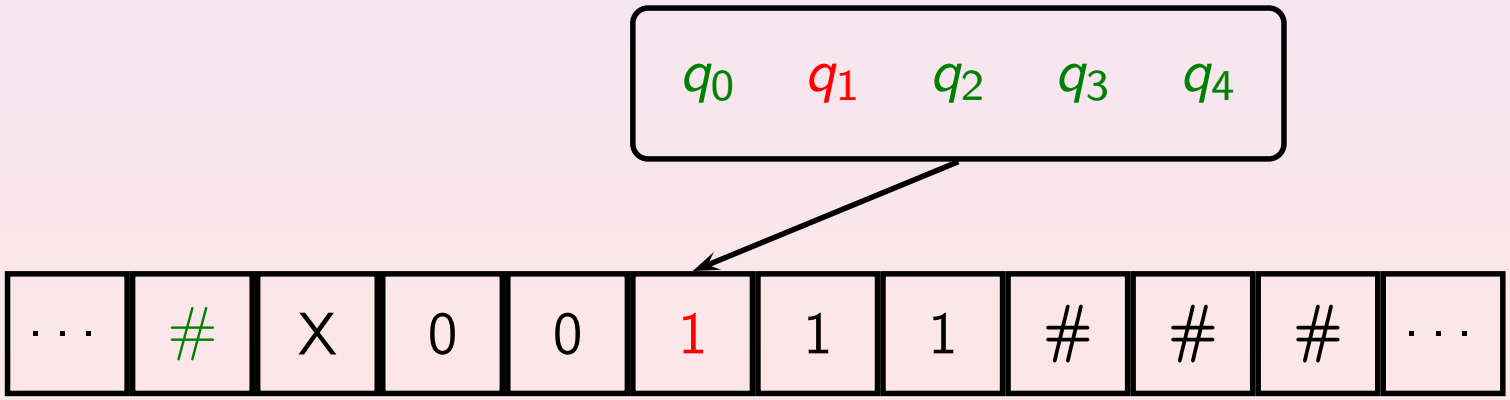
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



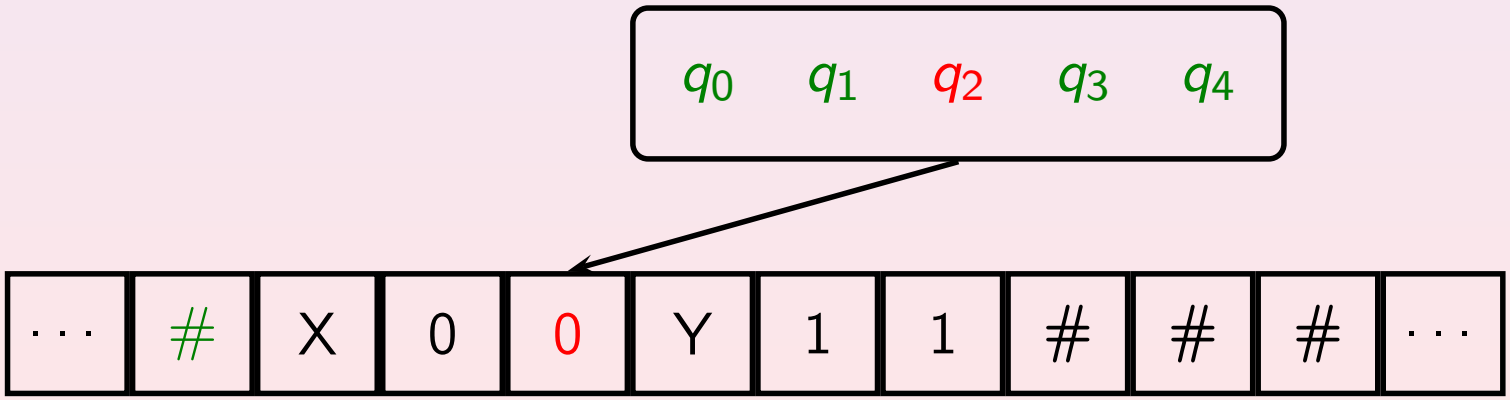
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



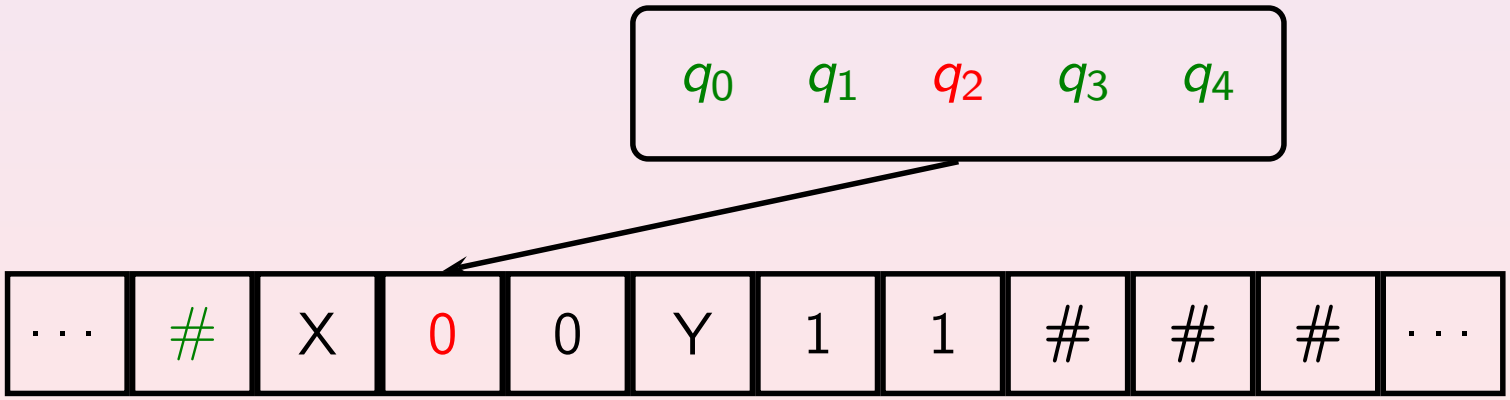
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



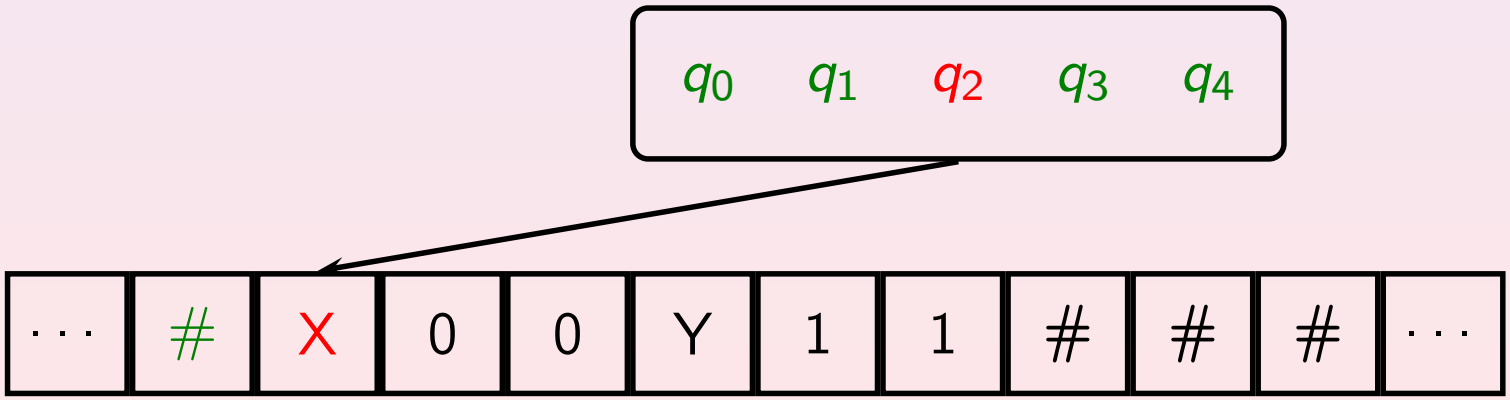
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



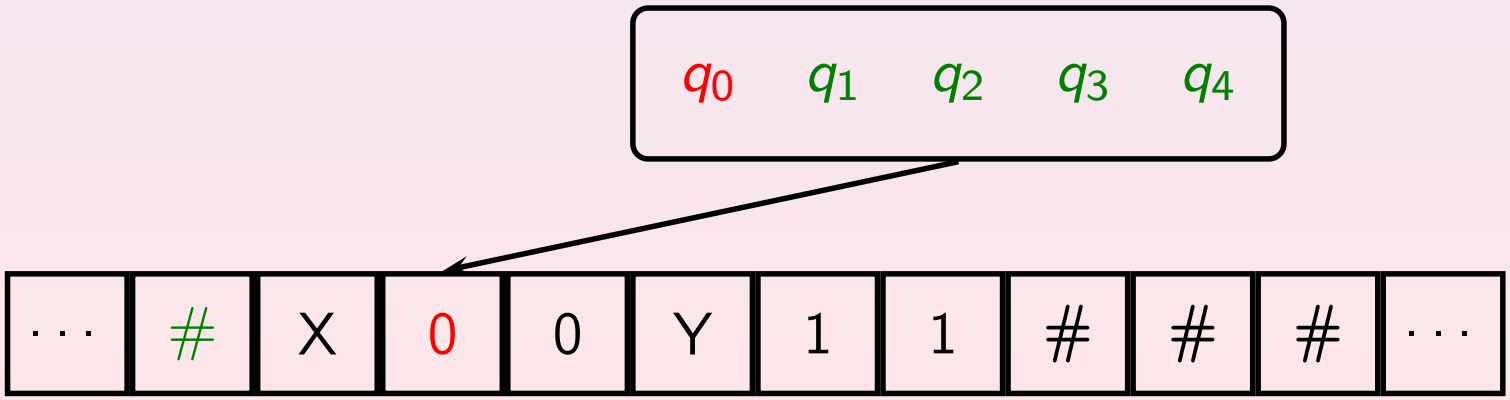
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



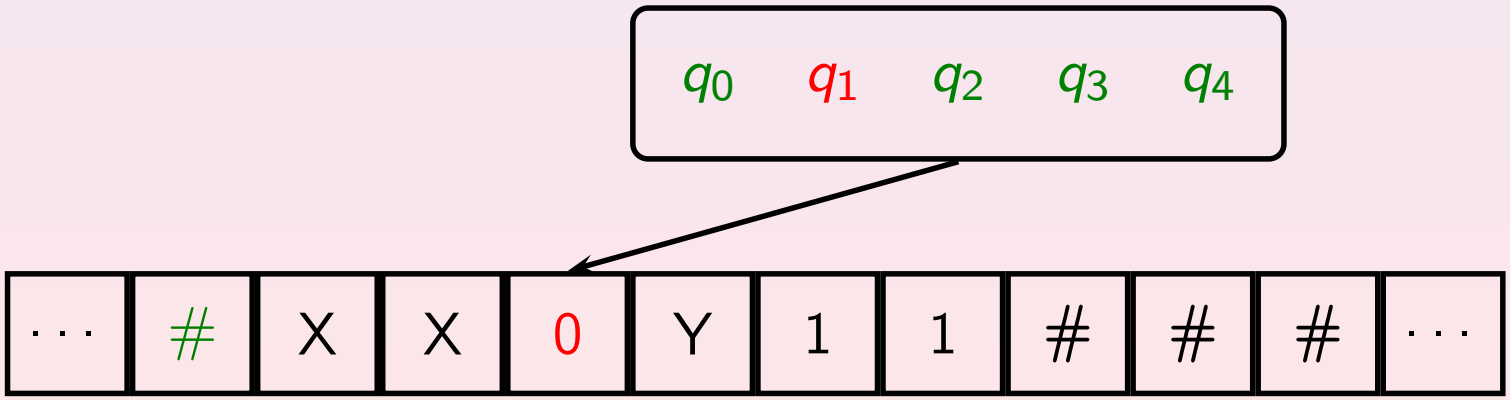
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



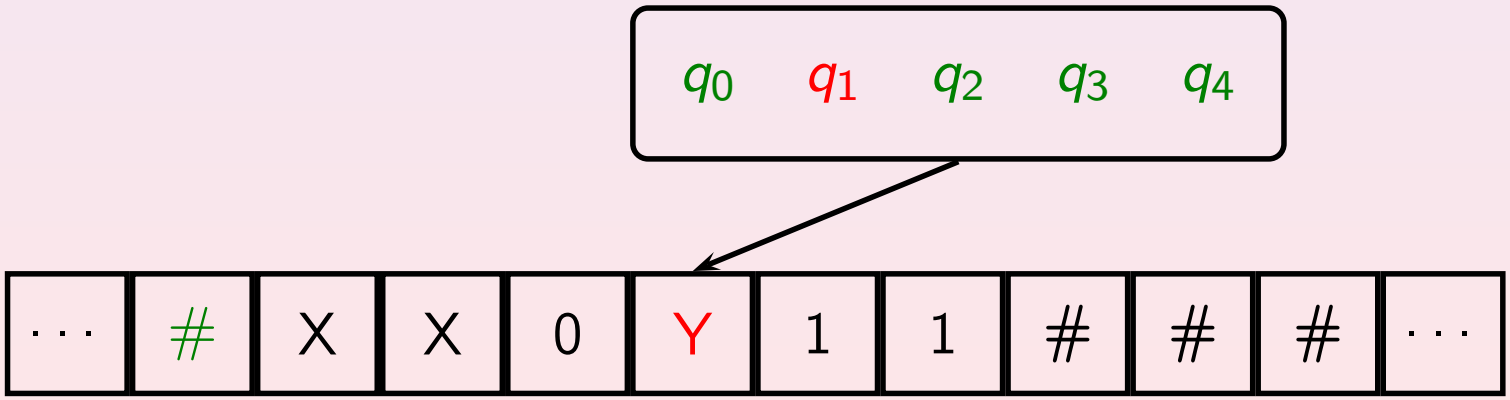
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



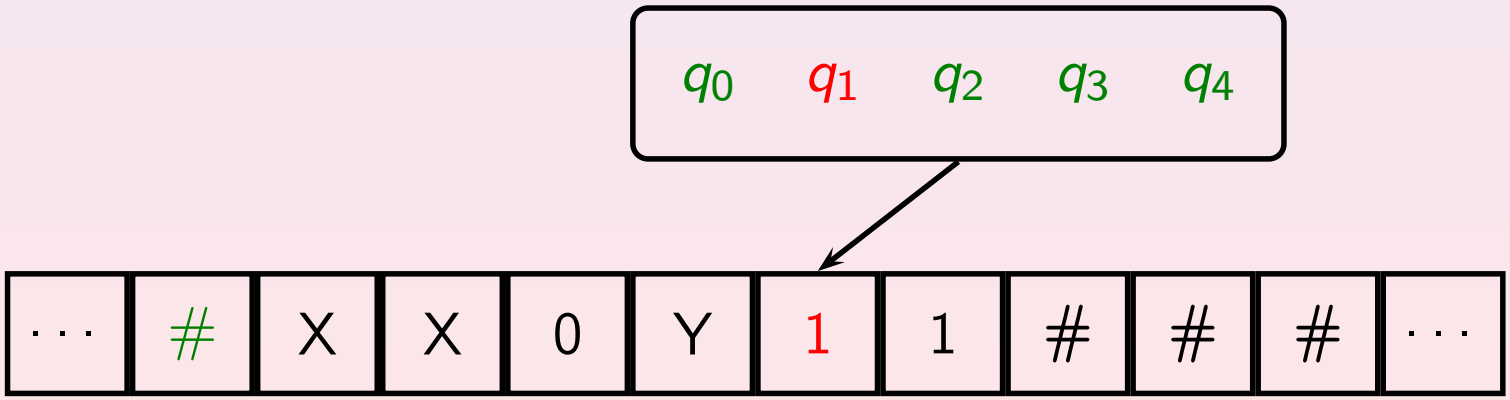
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



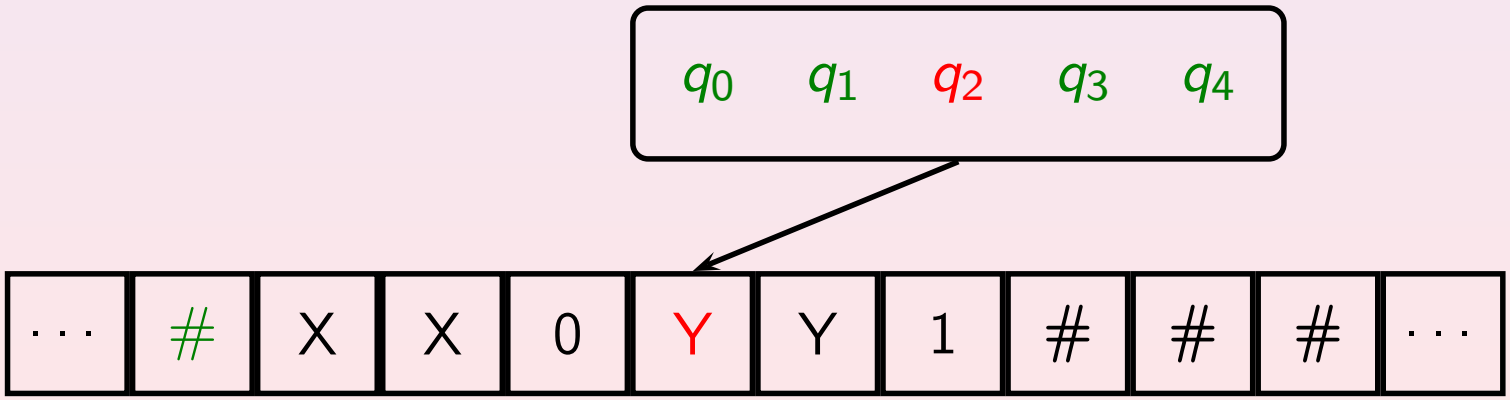
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



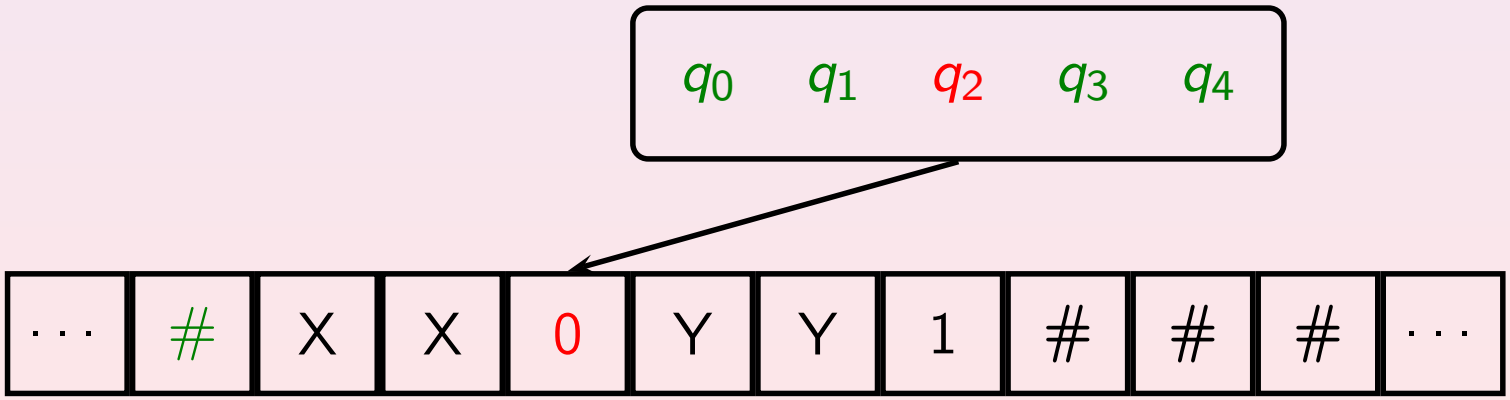
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



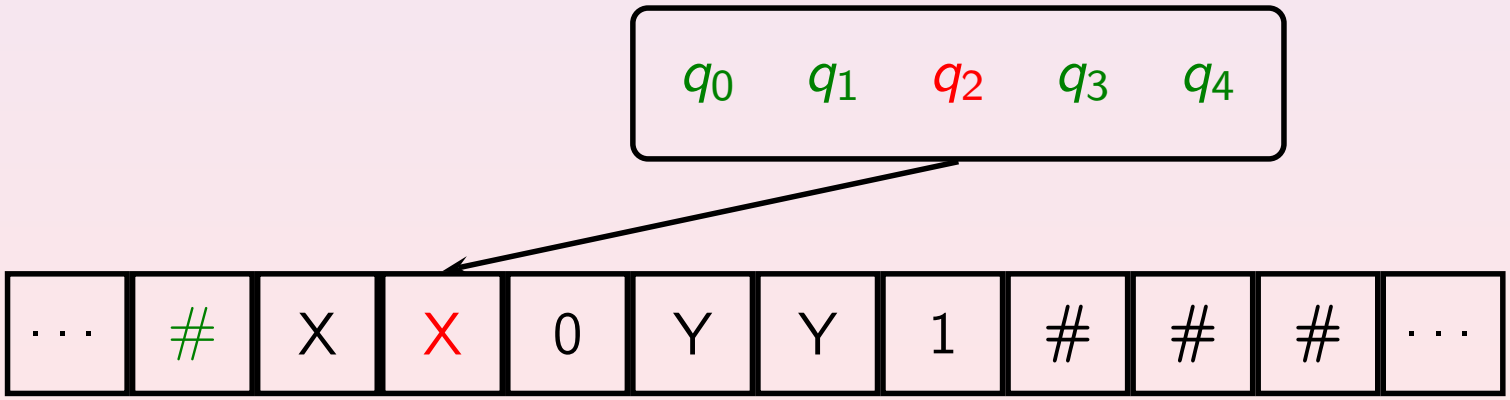
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



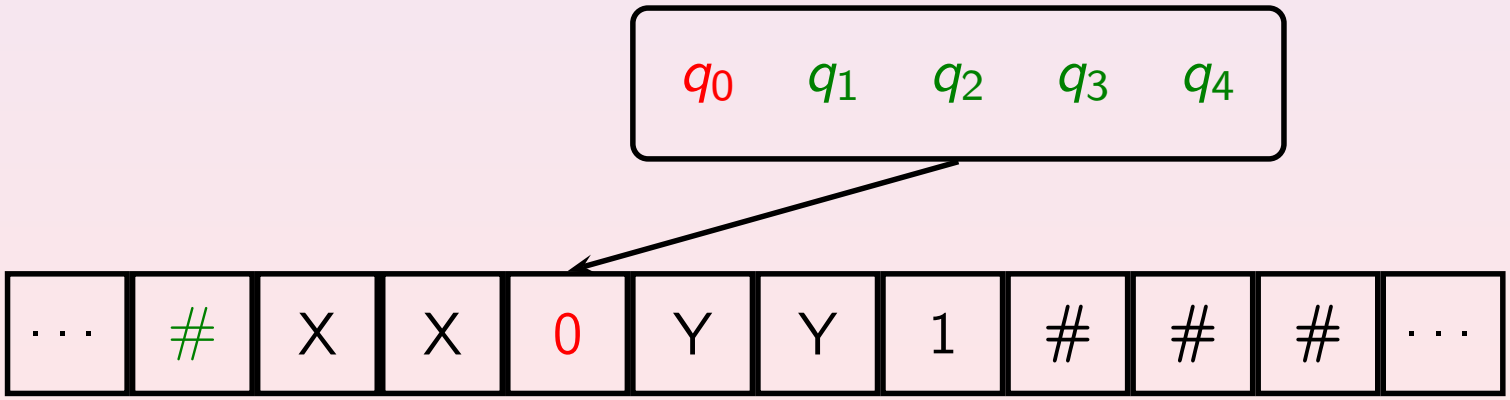
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



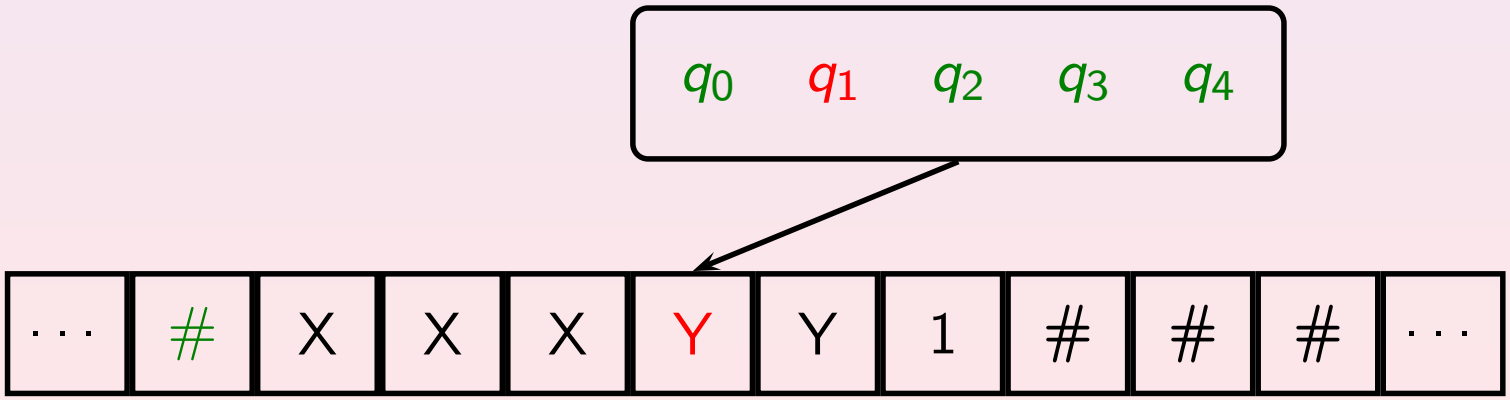
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



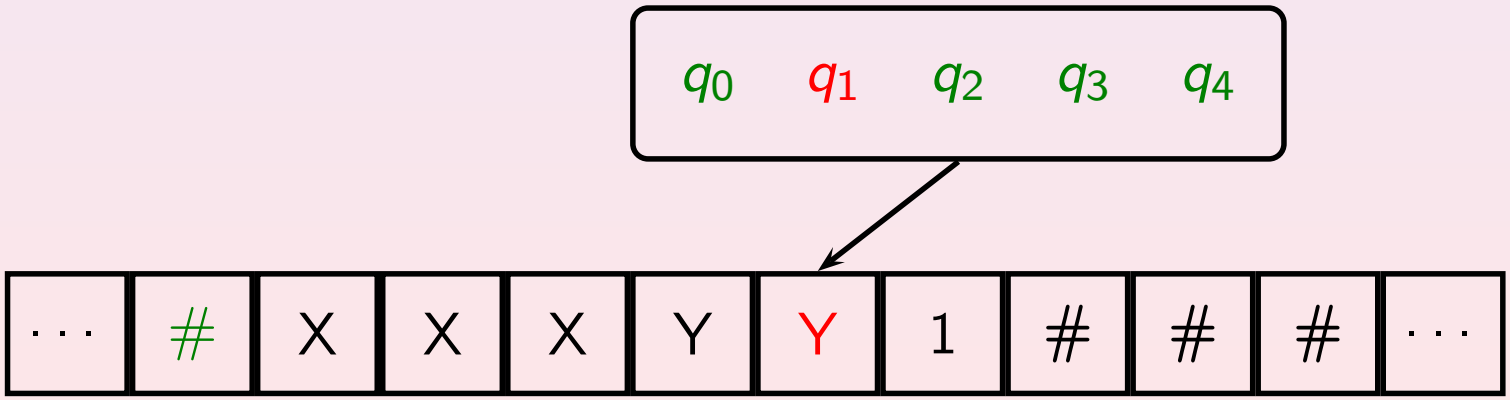
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



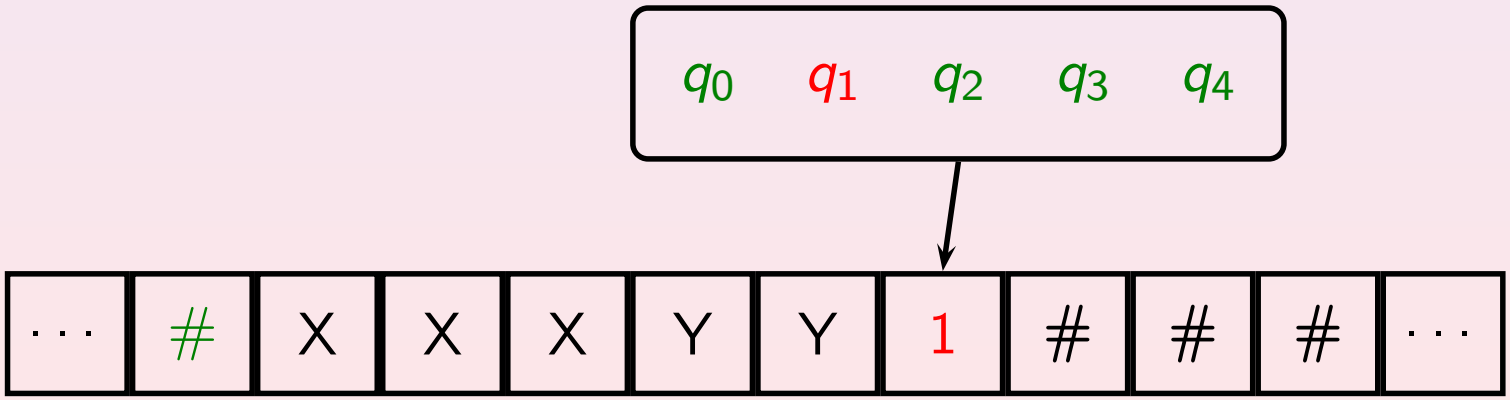
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



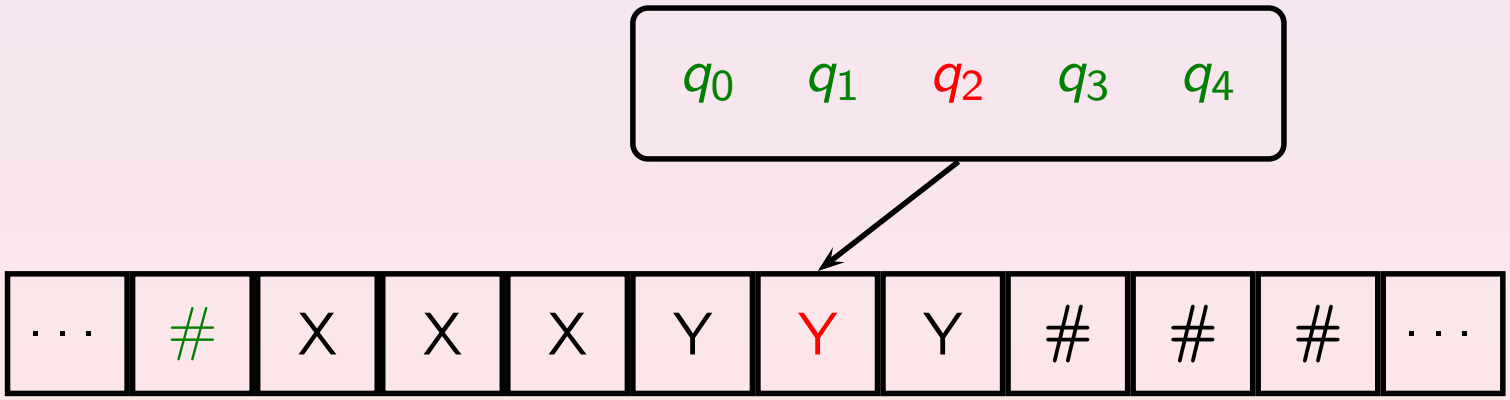
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



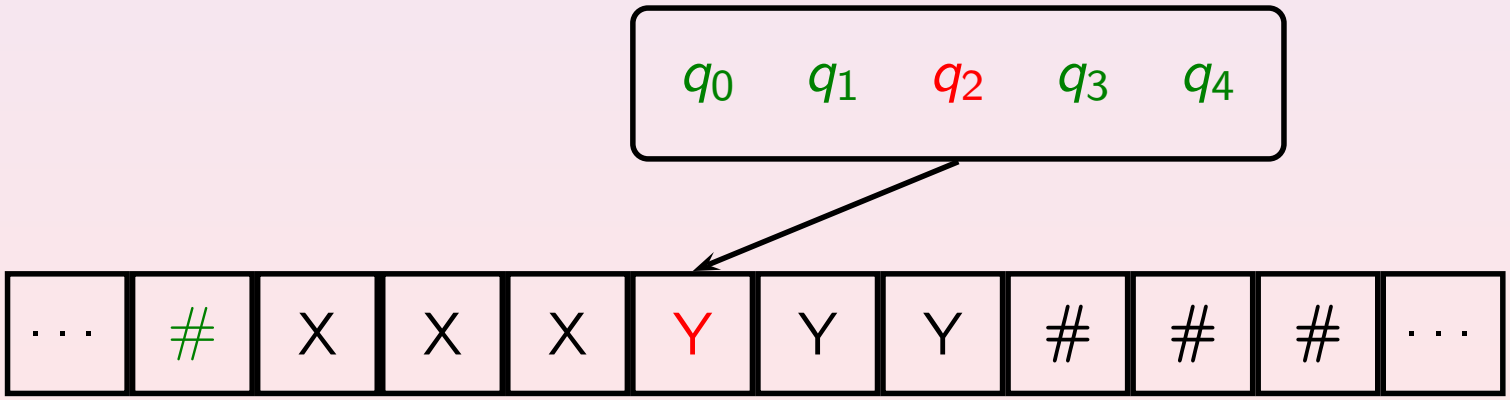
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



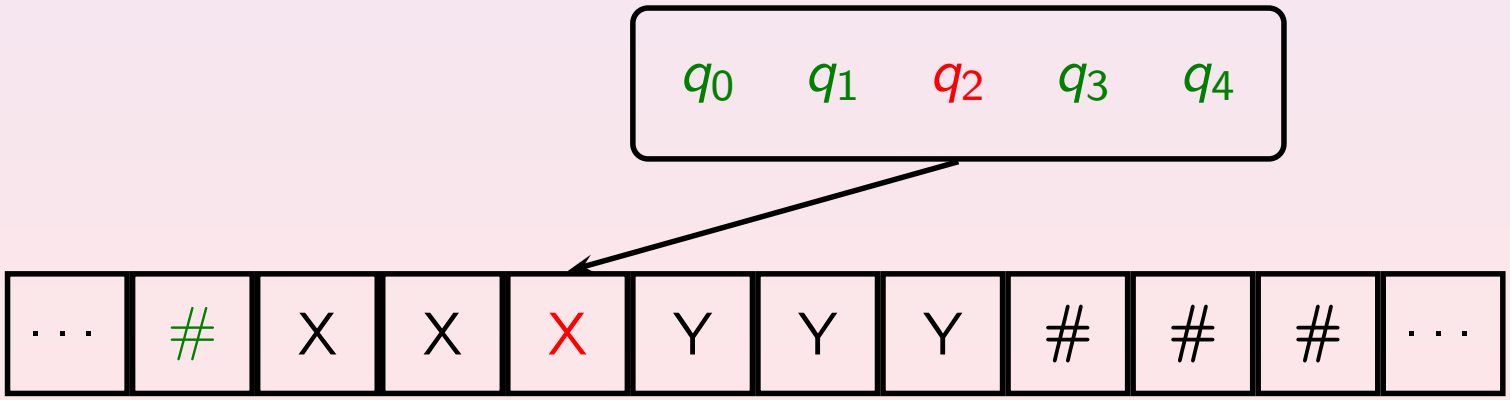
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



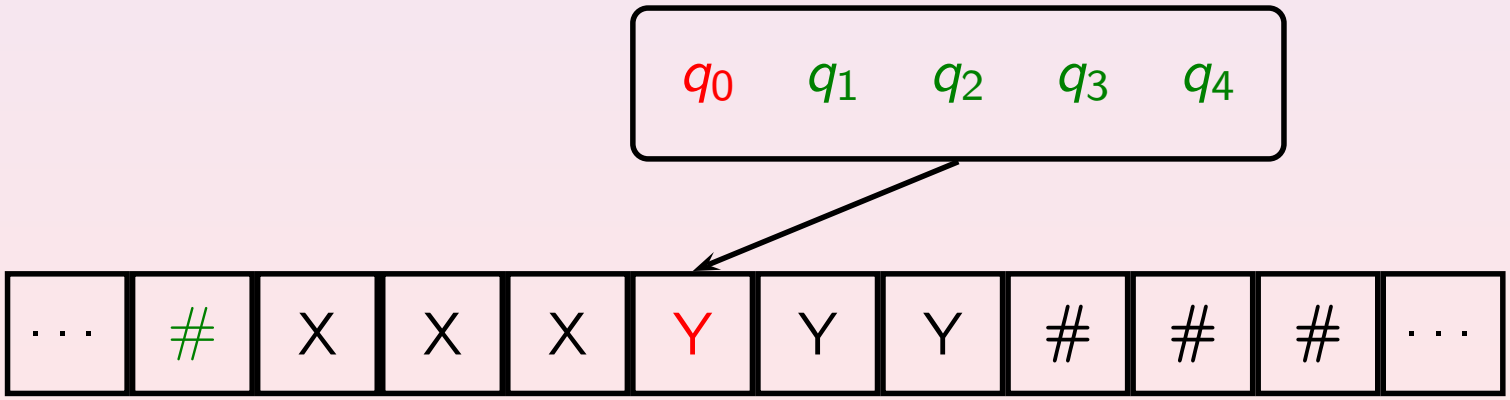
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



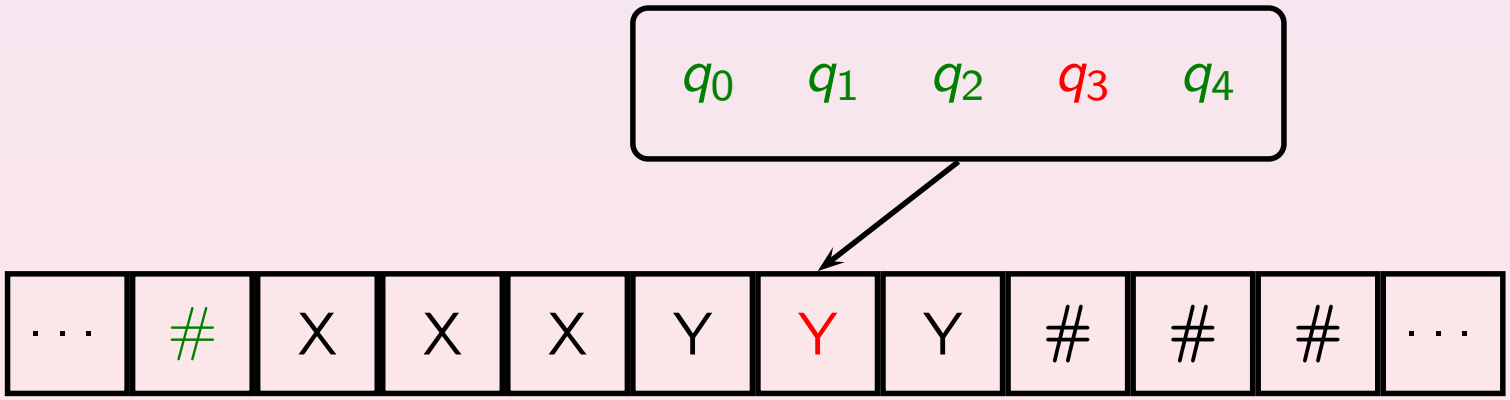
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



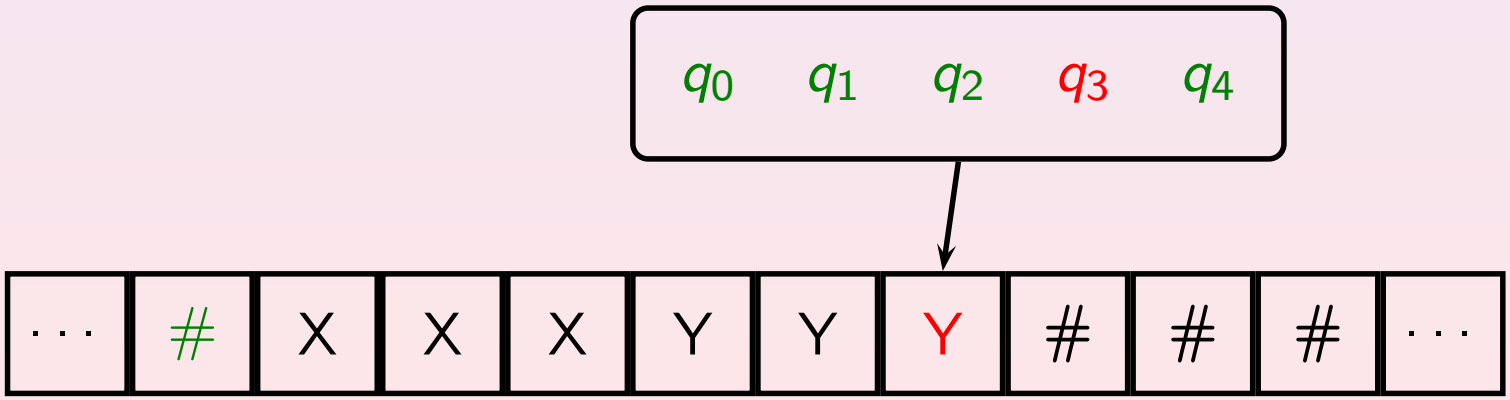
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



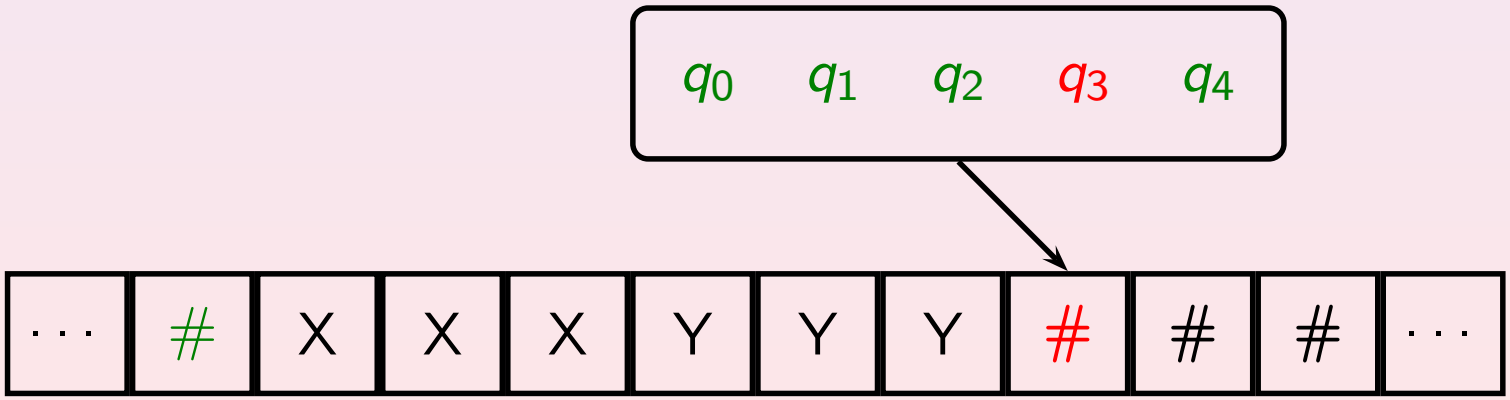
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



Funcionamiento

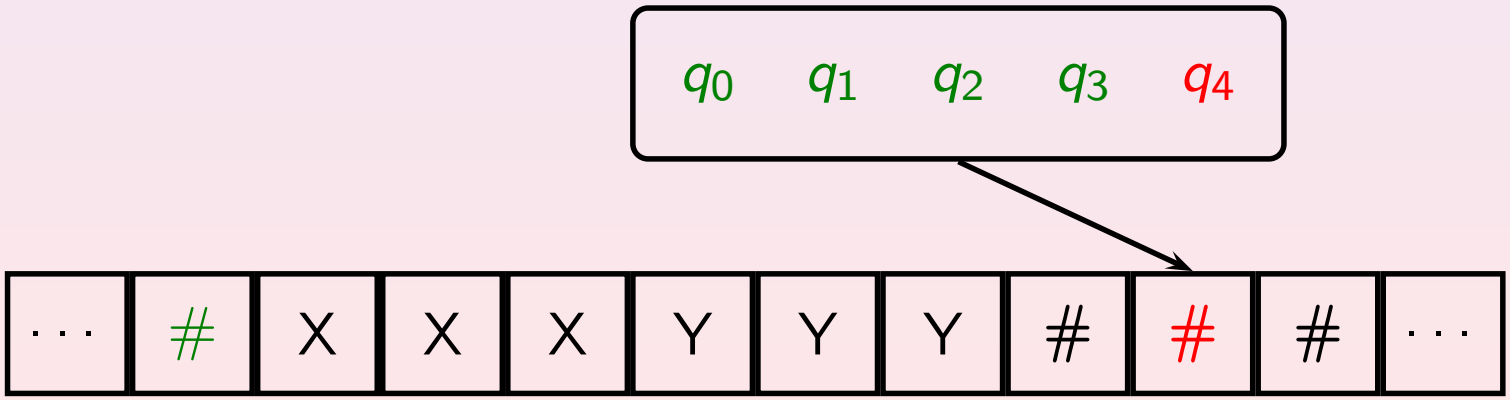
$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$

La palabra 000111 es aceptada



Configuración

Una configuración de una Máquina de Turing es una tripleta (q, w_1, w_2) donde

- q es el estado en el que se encuentra la máquina
- w_1 es la representación de la parte de la palabra que hay a la izquierda de la posición del cabezal de lectura (puede ser vacío). Esta representación se obtiene eliminando la sucesión infinita de blancos a la izquierda de las casillas que son distinto de blanco.
- w_2 es la representación de la parte de la palabra que se obtiene empezando en el cabezal de lectura hacia la derecha. No puede ser vacío. Esta representación se obtiene eliminando la sucesión infinita de blancos a la derecha de las casillas que son distinto de blanco.

Configuración Inicial

Si $u \in A^*$, la configuración inicial de la Máquina de Turing $(Q, A, C, \delta, q_0, \#, F)$ asociada a esta palabra es (q_0, ε, u), siendo $(q_0, \varepsilon, \#)$ si $u = \varepsilon$.

Paso de Cálculo (movimiento a la izquierda)

Si $\delta(q, a) = (p, b, I)$ entonces decimos que de la configuración $(q, c_1 \dots c_n, ad_2 \dots d_m)$ llegamos en un paso de cálculo a la configuración $(p, c_1 \dots c_{n-1}, c_n b d_2 \dots d_m)$ lo que se denota como $(q, c_1 \dots c_n, ad_2 \dots d_m) \vdash (p, c_1 \dots c_{n-1}, c_n b d_3 \dots d_m)$ donde se supone:

- Si $c_1 \dots c_n = \varepsilon$, entonces $c_1 \dots c_{n-1} = \varepsilon$ y $c_n = \#$.
- Se eliminan los blancos a la derecha de la palabra $c_n b d_3 \dots d_m$ excepto el primero si toda la palabra está formada por blancos.

Paso de Cálculo (movimiento a la derecha)

Si $\delta(q, a) = (p, b, D)$ entonces decimos que de la configuración $(q, c_1 \dots c_n, ad_2 \dots d_m)$ llegamos en un paso de cálculo a la configuración $(p, c_1 \dots c_n b, d_2 d_3 \dots d_m)$ lo que se denota como $(q, c_1 \dots c_n, ad_2 \dots d_m) \vdash (p, c_1 \dots c_n b, d_2 d_3 \dots d_m)$ donde se considera:

- Si $m = 1$ entonces $d_2 d_3 \dots d_m = \#$
- Se eliminan todos los blancos a la izquierda en $c_1 \dots c_n b$.

Relación de pasos de cálculo

Si R y R' son configuraciones de una máquina de Turing $M = (Q, A, C, \delta, q_0, \#, F)$, se dice que desde R se llega en una suceción de pasos de cálculo a R' lo que se denota como $R \overset{*}{\vdash} R'$ si y solo si existe una sucesión finita de configuraciones $R_1, \ldots, R_n$ tal que $R = R_1$, $R' = R_n$ y $R_i \vdash R_{i+1}, \forall i < n$.

Lenguaje Aceptado

Lenguaje aceptado por una Máquina de Turing

Si M es una máquina de Turing, entonces el lenguaje aceptado es el conjunto de palabras $L(M)$ tales que $u \in L(M)$ si y solo si existen $w_1, w_2 \in A^*$ y $q \in F$ tales que $(q_0, \varepsilon, u) \overset{*}{\vdash} (q, w_1, w_2)$ (es decir desde la configuración inicial asociada a u se puede llegar mediante una sucesión de pasos de cálculo a una configuración en la que estamos en un estado final).

Lenguaje Recursivamente Enumerable

Definición: Recursivamente Enumerable

Un lenguaje $L \subseteq A^*$ se dice recursivamente enumerable (e.r.) si y solo si existe una máquina de Turing $M = (Q, A, C, \delta, q_0, \#, F)$ tal que $L(M) = L$.

Parada en las Máquinas de Turing

Una máquina para cuando en el estado actual y símbolo de la cinta no hay ninguna transición definida.
Cuando se llega a un estado final $q \in F$ podemos suponer que la Máquina de Turing para, es decir no hay ninguna transición definida.

Existe otro criterio de aceptación: una palabra es aceptada cuando la MT para. La clase de lenguajes aceptada por este criterio es también la clase de los lenguajes recursivamente enumerables.

Aceptación y Parada de MTs

- Si una MT llega a un estado de aceptación, ya acepta la palabra de entrada, con independencia de lo que haga después. Luego ese cálculo es irrelevante y la MT acepta el mismo lenguaje si no sigue calculando. Por ese motivo, nosotros supondremos que los estados de aceptación no tienen transiciones salientes y las MTs siempre terminan cuando llegan a un estado de aceptación.
- Una MT puede no aceptar una palabra de dos formas distintas:
  - LLegando a un estado no final en el que para el contenido de la cinta no hay transición definida. Termina y rechaza. En algunos casos se le exige que la MT llegue a un estado de rechazo, pero para nosotros no será necesario.
  - Ciclando de forma indefinida sin llegar a un estado de aceptación. En este caso nunca llega a aceptar la palabra, aunque técnicamente tampoco la rechaza. La palabra no es aceptada ni rechazada.

Lenguaje Recursivo

Definición

Un lenguaje se dice recursivo si es aceptado por una MT que siempre termina: todas las palabras son aceptadas o rechazadas.

Un lenguaje recursivo es siempre recursivamente enumerable. Los lenguajes recursivos son aquellos cuyo problema de aceptación pueder ser resuelto mediante un algoritmo.
En el caso de lenguajes recursivos, podemos suponer que hay dos tipos de estados finales: de aceptación y de rechazo. La máquina acepta cuando se llega a un estado de aceptación y rechaza cuando llega a un estado de rechazo.

Máquinas de Turing Calculadoras

Definición

Dada una MT $M = (Q, A, C, \delta, q_0, \#, F)$, la función f calculada por esta MT es una función

$$f : D \to B^*$$

tal que $D \subseteq A^*$ es el conjunto de entradas para los que la MT termina y si $u \in D$, entonces $f(u)$ es el contenido de la cinta cuando la MT termina excluyendo los símbolos en blanco.

Funciones Parcialmente Calculables

Una función f se dice que es parcialmente calculable cuando existe una MT que la calcula.

Funciones Calculables Totales

Si una función es parcialmente calculable y $D = A^*$ (la MT termina en todas las entradas) se dice que es calculable total.

Ejemplo: restar números en unario

- Vamos a diseñar una MT que resta números en unario.
- Para dos números naturales $n, m \in \mathbb{N}$ calcula $f(n,m)$ que es igual a $n-m$ si $n \geq m$ y 0 si $n < m$.
- La entrada debe de ser 0^n10^m y la salida debe de ser una confiración en la que en la cinta esté $0^{f(n,m)}$ rodeado de blancos. No nos preocupa cual es la salida si la entrada no es correcta (no corresponde a dos series de ceros separadas por un 1).
- La MT será
  $M = (\{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0,1\}, \{0,1,\#\}, \delta, q_0, \#, q_6)$

Restar números en unario: función de transición

δ viene dada por la siguiente tabla:

Estado	0	1	#
q_0	$(q_1, \#, D)$	$(q_5, \#, D)$	–
q_1	$(q_1, 0, D)$	$(q_2, 1, D)$	–
q_2	$(q_3, 1, I)$	$(q_2, 1, D)$	$(q_4, \#, I)$
q_3	$(q_3, 0, I)$	$(q_3, 1, I)$	$(q_0, \#, D)$
q_4	$(q_4, 0, I)$	$(q_4, \#, I)$	$(q_6, 0, D)$
q_5	$(q_5, \#, D)$	$(q_5, \#, D)$	$(q_6, \#, D)$
q_6	–	–	–

El primer 0 se convierte en blanco y se mueve a la derecha en q_1 hasta que encuentre un 1 y cambia a q_2.

Restar números en unario: función de transición

δ viene dada por la siguiente tabla:

Estado	0	1	#
q_0	$(q_1, \#, D)$	$(q_5, \#, D)$	–
q_1	$(q_1, 0, D)$	$(q_2, 1, D)$	–
q_2	$(q_3, 1, I)$	$(q_2, 1, D)$	$(q_4, \#, I)$
q_3	$(q_3, 0, I)$	$(q_3, 1, I)$	$(q_0, \#, D)$
q_4	$(q_4, 0, I)$	$(q_4, \#, I)$	$(q_6, 0, D)$
q_5	$(q_5, \#, D)$	$(q_5, \#, D)$	$(q_6, \#, D)$
q_6	–	–	–

En q_2 se mueve a la derecha saltando 1's hasta que encuentra un 0 y entonces empieza a moverse a la izquierda hasta encontrar un blanco, entonces se mueve a la derecha y empieza de nuevo en q_0.

Restar números en unario: función de transición

δ viene dada por la siguiente tabla:

Estado	0	1	#
q_0	$(q_1, \#, D)$	$(q_5, \#, D)$	–
q_1	$(q_1, 0, D)$	$(q_2, 1, D)$	–
q_2	$(q_3, 1, I)$	$(q_2, 1, D)$	$(q_4, \#, I)$
q_3	$(q_3, 0, I)$	$(q_3, 1, I)$	$(q_0, \#, D)$
q_4	$(q_4, 0, I)$	$(q_4, \#, I)$	$(q_6, 0, D)$
q_5	$(q_5, \#, D)$	$(q_5, \#, D)$	$(q_6, \#, D)$
q_6	–	–	–

El proceso se repite: si al volver a q_0 lo que encuentra es un 1, entonces es que $m \geq n$ y el resultado es la cadena vacía que representa a 0, para ello pasa a q_5 donde borra todo.

Restar números en unario: función de transición

δ viene dada por la siguiente tabla:

Estado	0	1	#
q_0	$(q_1, \#, D)$	$(q_5, \#, D)$	–
q_1	$(q_1, 0, D)$	$(q_2, 1, D)$	–
q_2	$(q_3, 1, I)$	$(q_2, 1, D)$	$(q_4, \#, I)$
q_3	$(q_3, 0, I)$	$(q_3, 1, I)$	$(q_0, \#, D)$
q_4	$(q_4, 0, I)$	$(q_4, \#, I)$	$(q_6, 0, D)$
q_5	$(q_5, \#, D)$	$(q_5, \#, D)$	$(q_6, \#, D)$
q_6	–	–	–

Si en q_2 no encuentra 0, es que $n > m$ y hemos borrado un 0 de más, se pasa a q_4 en el nos movemos a la izquierda borrando los 1's y añadiendo un 0 (cuando se llega a #) y se pasa al estado final.

Ejercicios

Diseñar máquinas de Turing para los siguientes lenguajes:

- Palabras sobre el alfabeto $\{0,1\}$ con el mismo número de ceros que de unos.
- $L = \{a^n b^n c^n | n \geq 1\}$
- $\{ww^{-1} \,|\, w \in \{0,1\}^*\}$
- $\{wcw \,|\, w \in \{0,1\}^*\}$

Programación de Máquinas de Turing: recordando símbolos

- Una MT puede diseñarse para que recuerde un símbolo del alfabeto de trabajo (o del alfabeto de entrada).
- Por ejemplo, si queremos que se recuerde un símbolo de B cuando está en el estado q, entonces basta con cambiar el estado q por las parejas de estados $[q, b]$ donde $b \in B$.
- A menudo queremos que se recuerde un símbolo en cualquier estado y entonces el conjunto de estados sería el conjunto de las parejas $Q' \times B$ formadas por un elemento $q \in Q'$ y un símbolo $b \in B$.
- Podemos considerar que un estado es $[q', b]$ donde q' es el estado básico y b el símbolo recordado.
- Escribir los estados de esta forma ayuda a comprender el significado de los mismos y se usa para describir las MT sin llegar al detalle de las transiciones.

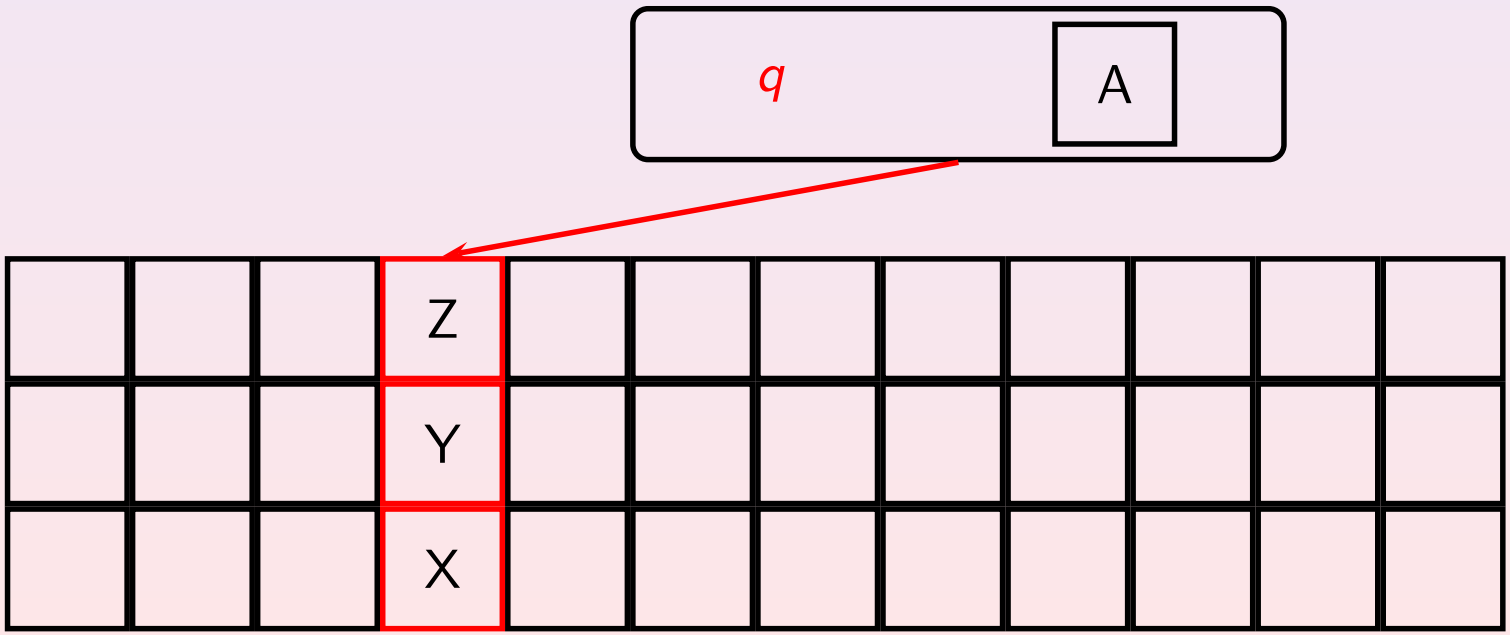
Ejemplo

Vamos a hacer una máquina de Turing que reconozca el lenguaje $01^* + 10^*$: la Máquina tiene que recordar el primer símbolo leído y después comprobar que nunca más aparezca.
La Máquina es $M = (Q, \{0,1\}, \{0,1,\#\}, \delta, [q_0, \#], \{[q_1, \#]\})$ donde

- $Q = \{q_0, q_1\} \times \{0,1,\#\}$
- Las posibles transiciones de δ son:
  1. $\delta([q_0, \#], a) = ([q_1, a], a, D)$ para $a = 0$ o $a = 1$.
  2. $\delta([q_1, a], \overline{a}) = ([q_1, a], \overline{a}, D)$, donde $\overline{a}$ es el complementario de a (esto es, $\overline{a} = 1$ si $a = 0$ y $\overline{a} = 0$ si $a = 1$).
  3. $\delta([q_1, a], \#) = ([q_1, \#], \#, D)$

Programación de Máquinas de Turing: pistas múltiples

- A menudo es útil pensar que la MT tiene una cinta con varias pistas: en lugar de tener una sola casilla, disponemos de varias casillas en cada posición donde poder escribir un símbolo.
- Tener dos pistas equivale a suponer que el alfabeto de trabajo está formado por los elementos de $B \times B$ y tener k cintas a suponer que el alfabeto de trabajo es B^k. Se supone que un símbolo $a \in A$ se identifica con $(a, \#, \ldots, \#)$.



Ejemplo

Una forma de utilizar las pistas múltiples es imaginar que una pista se usa para los datos y otra para poner una marca. Vamos a diseñar una MT que acepte el lenguaje $L = \{wcw \mid w \in \{0,1\}^+\}$.
La MT tiene los siguientes elementos
$M = (Q, A, B, \delta, [q_1, \#], [\#, \#], \{[q_9, \#]\})$ donde

- $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_9\} \times \{0,1\}$ (podemos recordar $0, 1$.
- $B = \{0,1,c,\#\} \times \{\#, *\}$
- $A = \{0,1,c\}$. 0 se identifica con $[0,\#]$ y 1 se identifica con $[1,\#]$
- La función de transición δ se especifica en la siguiente pantalla.

Ejemplo: Función de Transición

a y b pueden ser $0, 1$.

$$\delta([q_1,\#],[a,\#]) = ([q_2,a],[a,*],D) \quad \delta([q_2,a],[b,\#]) = ([q_2,a],[b,\#],D)$$
$$\delta([q_2,a],[c,\#]) = ([q_3,a],[c,\#],D) \quad \delta([q_3,a],[b,*]) = ([q_3,a],[b,*],D)$$
$$\delta([q_3,a],[a,\#]) = ([q_4,\#],[a,*],I) \quad \delta([q_4,\#],[a,*]) = ([q_4,\#],[a,*],I)$$
$$\delta([q_4,\#],[c,\#]) = ([q_5,\#],[c,\#],I) \quad \delta([q_5,\#],[a,\#]) = ([q_6,\#],[a,\#],I)$$
$$\delta([q_6,\#],[a,\#]) = ([q_6,\#],[a,\#],I) \quad \delta([q_6,\#],[a,*]) = ([q_1,\#],[a,*],D)$$
$$\delta([q_5,\#],[a,*]) = ([q_7,\#],[a,*],D) \quad \delta([q_7,\#],[c,\#]) = ([q_8,\#],[c,\#],D)$$
$$\delta([q_8,\#],[a,*]) = ([q_8,\#],[a,*],D) \quad \delta([q_8,\#],[\#,\#]) = ([q_9,\#],[\#,\#],D)$$

Leemos el primer símbolo, lo recordamos en el estado y lo marcamos como leído, pasando a q_2

Ejemplo: Función de Transición

a y b pueden ser $0, 1$.

$$\delta([q_1,\#],[a,\#]) = ([q_2,a],[a,*],D) \qquad \delta([q_2,a],[b,\#]) = ([q_2,a],[b,\#],D)$$
$$\delta([q_2,a],[c,\#]) = ([q_3,a],[c,\#],D) \qquad \delta([q_3,a],[b,*]) = ([q_3,a],[b,*],D)$$
$$\delta([q_3,a],[a,\#]) = ([q_4,\#],[a,*],I) \qquad \delta([q_4,\#],[a,*]) = ([q_4,\#],[a,*],I)$$
$$\delta([q_4,\#],[c,\#]) = ([q_5,\#],[c,\#],I) \qquad \delta([q_5,\#],[a,\#]) = ([q_6,\#],[a,\#],I)$$
$$\delta([q_6,\#],[a,\#]) = ([q_6,\#],[a,\#],I) \qquad \delta([q_6,\#],[a,*]) = ([q_1,\#],[a,*],D)$$
$$\delta([q_5,\#],[a,*]) = ([q_7,\#],[a,*],D) \qquad \delta([q_7,\#],[c,\#]) = ([q_8,\#],[c,\#],D)$$
$$\delta([q_8,\#],[a,*]) = ([q_8,\#],[a,*],D) \qquad \delta([q_8,\#],[\#,\#]) = ([q_9,\#],[\#,\#],D)$$

En q_2 nos movemos hacia la derecha hasta que encontremos la c, entonces cambiamos a q_3

Ejemplo: Función de Transición

a y b pueden ser $0, 1$.

$$\delta([q_1,\#],[a,\#]) = ([q_2,a],[a,*],D) \quad \delta([q_2,a],[b,\#]) = ([q_2,a],[b,\#],D)$$
$$\delta([q_2,a],[c,\#]) = ([q_3,a],[c,\#],D) \quad \delta([q_3,a],[b,*]) = ([q_3,a],[b,*],D)$$
$$\delta([q_3,a],[a,\#]) = ([q_4,\#],[a,*],I) \quad \delta([q_4,\#],[a,*]) = ([q_4,\#],[a,*],I)$$
$$\delta([q_4,\#],[c,\#]) = ([q_5,\#],[c,\#],I) \quad \delta([q_5,\#],[a,\#]) = ([q_6,\#],[a,\#],I)$$
$$\delta([q_6,\#],[a,\#]) = ([q_6,\#],[a,\#],I) \quad \delta([q_6,\#],[a,*]) = ([q_1,\#],[a,*],D)$$
$$\delta([q_5,\#],[a,*]) = ([q_7,\#],[a,*],D) \quad \delta([q_7,\#],[c,\#]) = ([q_8,\#],[c,\#],D)$$
$$\delta([q_8,\#],[a,*]) = ([q_8,\#],[a,*],D) \quad \delta([q_8,\#],[\#,\#]) = ([q_9,\#],[\#,\#],D)$$

En q_3 saltamos todo lo marcado hasta que encontremos un símbolo no marcado. En ese momento si es el mismo que el recordado, lo marcamos y pasamos a q_4.

Ejemplo: Función de Transición

a y b pueden ser $0, 1$.

$$\delta([q_1,\#],[a,\#]) = ([q_2,a],[a,*],D) \quad \delta([q_2,a],[b,\#]) = ([q_2,a],[b,\#],D)$$
$$\delta([q_2,a],[c,\#]) = ([q_3,a],[c,\#],D) \quad \delta([q_3,a],[b,*]) = ([q_3,a],[b,*],D)$$
$$\delta([q_3,a],[a,\#]) = ([q_4,\#],[a,*],I) \quad \delta([q_4,\#],[a,*]) = ([q_4,\#],[a,*],I)$$
$$\delta([q_4,\#],[c,\#]) = ([q_5,\#],[c,\#],I) \quad \delta([q_5,\#],[a,\#]) = ([q_6,\#],[a,\#],I)$$
$$\delta([q_6,\#],[a,\#]) = ([q_6,\#],[a,\#],I) \quad \delta([q_6,\#],[a,*]) = ([q_1,\#],[a,*],D)$$
$$\delta([q_5,\#],[a,*]) = ([q_7,\#],[a,*],D) \quad \delta([q_7,\#],[c,\#]) = ([q_8,\#],[c,\#],D)$$
$$\delta([q_8,\#],[a,*]) = ([q_8,\#],[a,*],D) \quad \delta([q_8,\#],[\#,\#]) = ([q_9,\#],[\#,\#],D)$$

En q_4 nos movemos a la izquierda pasando a q_5 cuando pasemos por la c y a q_6 cuando pasemos por un símbolo no marcado hasta encontrar un símbolo marcado, cuando pasamos a q_1 y repetimos.

Ejemplo: Función de Transición

a y b pueden ser $0, 1$.

$$\delta([q_1,\#],[a,\#]) = ([q_2,a],[a,*],D) \quad \delta([q_2,a],[b,\#]) = ([q_2,a],[b,\#],D)$$
$$\delta([q_2,a],[c,\#]) = ([q_3,a],[c,\#],D) \quad \delta([q_3,a],[b,*]) = ([q_3,a],[b,*],D)$$
$$\delta([q_3,a],[a,\#]) = ([q_4,\#],[a,*],I) \quad \delta([q_4,\#],[a,*]) = ([q_4,\#],[a,*],I)$$
$$\delta([q_4,\#],[c,\#]) = ([q_5,\#],[c,\#],I) \quad \delta([q_5,\#],[a,\#]) = ([q_6,\#],[a,\#],I)$$
$$\delta([q_6,\#],[a,\#]) = ([q_6,\#],[a,\#],I) \quad \delta([q_6,\#],[a,*]) = ([q_1,\#],[a,*],D)$$
$$\delta([q_5,\#],[a,*]) = ([q_7,\#],[a,*],D) \quad \delta([q_7,\#],[c,\#]) = ([q_8,\#],[c,\#],D)$$
$$\delta([q_8,\#],[a,*]) = ([q_8,\#],[a,*],D) \quad \delta([q_8,\#],[\#,\#]) = ([q_9,\#],[\#,\#],D)$$

Si en q_5 encontramos un símbolo marcado es que hemos terminado de analizar w, ahora nos queda comprobar que no quedan símbolos no marcados a la derecha (con estados q_7 y q_8

Subrutinas

- Una subrutina en una MT es un conjunto de estados que realiza una acción concreta.
- En este conjunto de estados habrá un estado inicial y otro estado que sirve como estado de retorno.
- No se añade ninguna funcionalidad nueva, sólo es una forma de organizar los estados de una MT agrupando aquellos que realizan una tarea concreta y suponiendo que siempre podemos movermos a ese conjunto de estados.
- La MT no tiene un sistema de llamadas que permita saber a qué posición y en qué estado hay que volver.
- La posición se puede recordar con una pista adicional y un símbolo extra que indique la casilla en la que se tiene que posicionar.
- El estado se puede determinar haciendo varias copias del último estado de la subrutina, una para cada estado al que haya que volver. El número de copias es finito.
- Siempre que hagamos un conjunto de estados para una tarea determinada, por ejemplo, desplazar el contenido de todas las casillas a partir de la posición actual un lugar a la derecha, supondremos que esta tarea siempre la podemos hacer en una MT sin necesidad de especificar los estados.

Ejemplo

- Vamos a diseñar una MT que multiplique números en binario escritos en base 1: la MT comenzará con una cadena de la forma 0^m10^n en la cinta, y terminará con 0^{mn} al final. No nos preocupamos se la MT tienen una entrada mal escrita. Finalizará con algo en la cinta que no tendrá sentido, en general.
- En etapas sucesivas, la cinta va a contener cadenas de la forma $0^i10^n10^{kn}$ donde $i+k=m$ para valores de $k=1,\ldots,m$.
- En un paso básico se cambia el primer cero del primer grupo por un blanco y se añaden n ceros al último grupo: se pasa de $0^i10^n10^{kn}$ a $0^{i-1}10^n10^{(k+1)n}$.
- Finalmente la subcadena 10^n1 se sustituye por blancos.

Ejemplo: Subrutina

Vamos a diseñar un conjunto de estados que copia n ceros al final de la cinta cuando está situada justo al principio de la serie de n ceros. Termina en la misma posición de la cinta en el estado q_5. Tiene los siguientes estados y estructura:

$$\delta(q_1,0) = (q_2,X,D)$$
$$\delta(q_2,0) = (q_2,0,D) \qquad \delta(q_2,1) = (q_2,1,D)$$
$$\delta(q_2,\#) = (q_3,0,I)$$
$$\delta(q_3,0) = (q_3,0,I) \qquad \delta(q_3,1) = (q_3,1,I)$$
$$\delta(q_3,X) = (q_1,X,D) \qquad \delta(q_1,1) = (q_4,1,I)$$
$$\delta(q_4,X) = (q_4,0,I) \qquad \delta(q_4,1) = (q_5,1,D)$$

Estructura del Programa

- Pasamos de la configuración en la que hay 0^m10^n en la cinta y estamos colocados al principio de esta palabra a la configuración en la que en la cinta hay 0^m10^n1 y estamos colocados al principio de la palabra.

$$\delta(q_0,0)=(q_0,0,D) \quad \delta(q_0,1)=(q_0,1,D)$$
$$\delta(q_0,\#)=(q_{13},1,I) \quad \delta(q_{13},0)=(q_{13},0,I)$$
$$\delta(q_{13},1)=(q_{13},1,I) \quad \delta(q_{13},\#)=(q_{14},\#,D)$$

- Miramos si hay un 0 al principio, lo sustituimos por un blanco, $\#$, y nos ponemos en situación para copiar n ceros al final.

$$\delta(q_{14},0)=(q_6,\#,D)$$
$$\delta(q_6,0)=(q_6,0,D) \quad \delta(q_6,1)=(q_1,1,D)$$

Estructura del Programa (II)

- Después de hacer la copia, estamos en q_5 y desde este estado, volvemos a la posición inicial si hay más 0 en la primera serie o finalizamos si ya no hay más ceros (q_{12} es el estado final de parada):

$$\begin{array}{ll} \delta(q_5,0)=(q_7,0,I) & \delta(q_7,1)=(q_8,1,I) \\ \delta(q_8,0)=(q_9,0,I) & \delta(q_8,\#)=(q_{10},\#,D) \\ \delta(q_9,0)=(q_9,0,I) & \delta(q_9,\#)=(q_{14},\#,D) \\ \delta(q_{10},1)=(q_{11},\#,D) & \\ \delta(q_{11},0)=(q_{11},\#,D) & \delta(q_{11},1)=(q_{12},\#,D) \end{array}$$

Descripción de Máquinas de Turing

- Para describir MTs se pueden usar diagramas de transición similares a los autómatas finitos, pero no los vamos a usar en esta asignatura.
- Normas para describir una MT
  - Se puede pedir descripción detallada o algorítmica.
  - En el primer caso:
    1. Dar una idea global del funcionamiento de la MT
    2. Se dan las instrucciones concretas de la MT, pero agrupando las instrucciones por grupos, e ´indicando que acción realiza cada grupo.
  - En el caso caso dar una descripción global como un algoritmo, describiendo acciones que se sabe que se pueden traducir en transiciones. Por ejemplo: 'Moverse a la derecha hasta encontrar un blanco'

Ejercicios

- Rediseñar las MT de los ejercicios anteriores introduciendo las técnicas de programación de almacenamiento de símbolo, multipista o subrutinas.
- Diseñar una subrutina que desplace todos los símbolos desde la posición actual a la derecha, dejando un espacio en dicha posición en el que se pueda escribir un carácter. Debe de terminar con la cabeza de lectura en la misma posición en la que se terminó.
- Escribir una subrutina que comience en una posición con un cero y se mueva a la derecha de todos los ceros hasta que alcance un uno o un blanco. Se suponen que en la cinta solo hay caracteres del conjunto $\{0, 1, \#\}$. Si se comienza con un carácter que es distinto de cero, la MT debe de pararse. Utilizar dicha rutina para escribir una MT que acepte todas las cadenas de ceros y unos, que no tengan dos unos consecutivos.

Variaciones de la MT básica

- Extensiones:
  - MT que se pueden quedar en la misma posición en un paso: no es necesario moverse a la izquierda o derecha y pueden quedarse en el mismo sitio (S).
  - MT con múltiples cintas: hay distintas cintas en las que se puede leer o escibir y una cabeza de lectura para cada una de ellas.
  - MT no deterministas: hay distintas transiciones que puede realizar una MT en una configuración dada.
- Limitaciones:
  - MT con cintas semiilimitadas: la cinta de la MT es ilimitada sólo por la derecha y en la izquierda tiene un tope.

Ninguna de estas modificaciones cambiará la potencialidad de las MT.

MT que se pueden quedar en la misma posición en un paso

- En estas MT se supondrá que $\delta(q, b)$ puede ser vacío (no definido) o una tripleta (p, c, M) donde $p \in Q, c \in B, M \in \{I, D, S\}$. El símbolo S indica que el cabezal de lectura no se mueve en ninguna dirección y permanece en el mismo sitio.
- Esto no supone ninguna potencialidad adicional, ya que si $\delta(q, b) = (p, c, S)$, esto lo podemos simular con un nuevo estado r_p por cada estado p de la MT con estos movimientos haciendo, $\delta(q, b) = (r_p, c, D)$ y desde todos los estados r_p lo único que se puede hader es movernos a la izquierda: $\delta(r_p, d) = (p, d, I)$ para todo estado r_p y todo símbolo d de B.

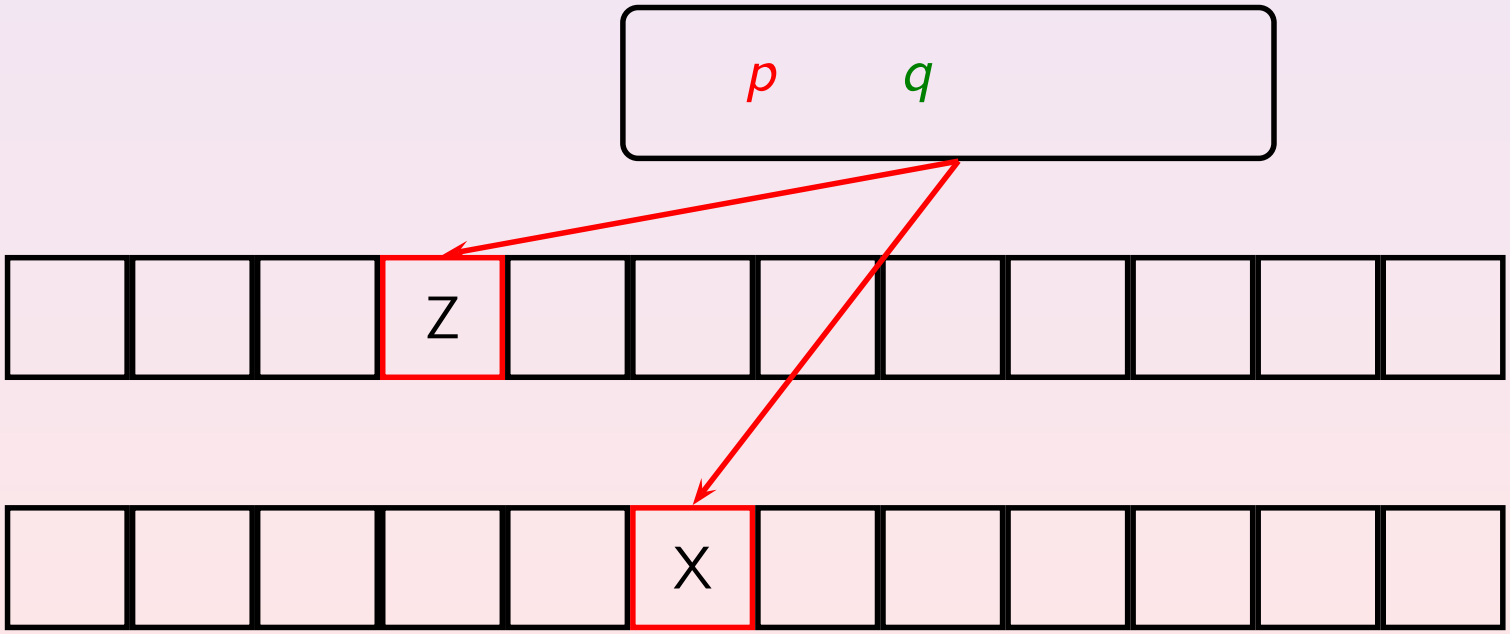
MT con Múltiples Cintas

- En estas MTs suponemos que existen k cintas ilimitadas en las que leer y escribir.
- Las diferencias entre múltiples pistas y múltiples cintas son:
  - Múltiples pistas no supone una modificación de la definición de MT, simplemente es una forma de visualizar la cinta de una MT en la que el alfabeto de trabajo es un producto cartesiano $B = B' \times B'$, es decir cada símbolo está formado por una pareja de símbolos básicos. El tener múltiples cintas si implicará una modificación de la definición. Ahora a cada $(q, b_1, \ldots, b_k)$, δ le podrá asignar un vector $(p, c_1, \ldots, c_k, M_1, \ldots, M_k)$.
  - Cuando hay múltiples cintas, el cabezal de lectura podrá estar en una posición distinta en cada cinta. Por eso hay que especificar qué movimiento M_i hay que realizar en cada cinta i, además de lo que se ve en cada cinta b_i y lo que se escribe en cada una c_i. Suponemos que el movimiento de cada cinta puede ser $\{I, D, S\}$.

MT con Múltiples Cintas

Configuración

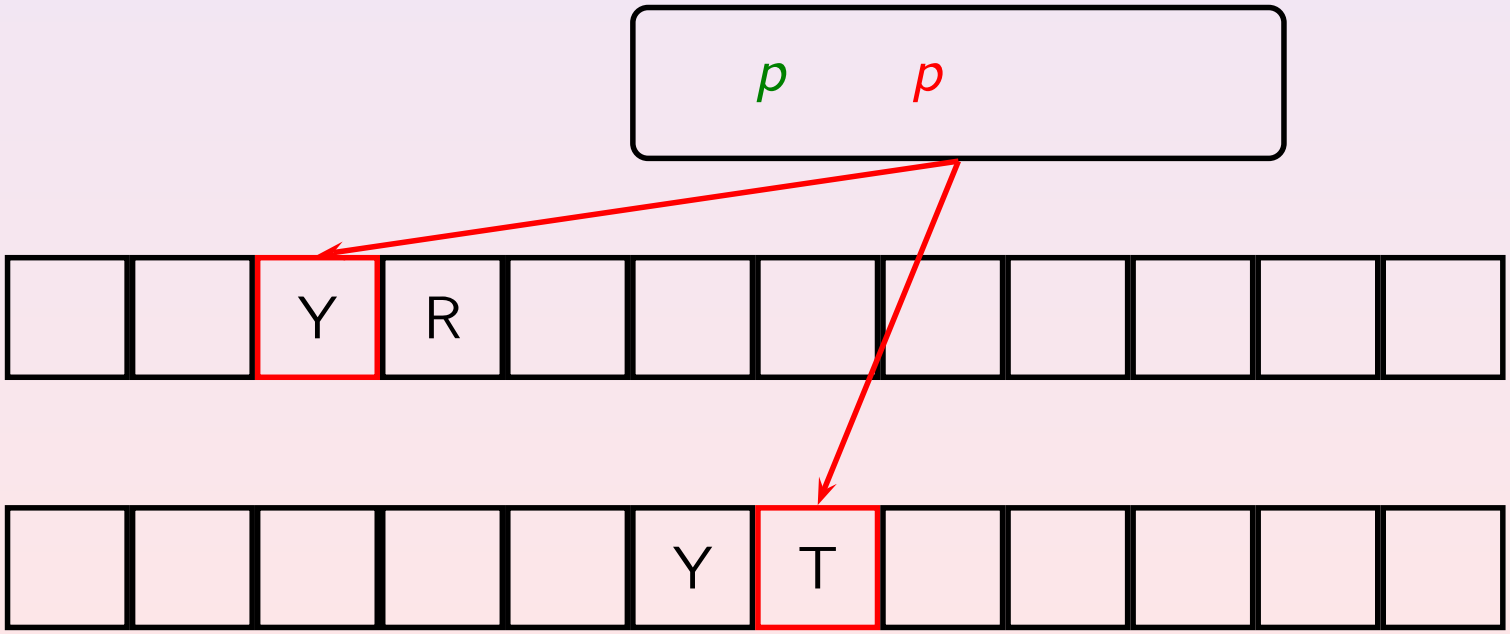
Será un vector $(q, u_1, w_1, u_2, w_2, \ldots, u_k, w_k)$, donde q es el estado en el que está la MT, u_i es la parte de la palabra que hay a la izquierda del cabezal de lectura de la cinta i y w_i la parte de la palabra que hay en la cinta i a partir del cabezal de lectura de esa cinta hacia la derecha (incluyendo el símbolo que se lee en ese momento).



MT con Múltiples Cintas

Configuración

Será un vector $(q, u_1, w_1, u_2, w_2, \ldots, u_k, w_k)$, donde q es el estado en el que está la MT, u_i es la parte de la palabra que hay a la izquierda del cabezal de lectura de la cinta i y w_i la parte de la palabra que hay en la cinta i a partir del cabezal de lectura de esa cinta hacia la derecha (incluyendo el símbolo que se lee en ese momento).



Lenguaje Aceptado y Función Calculada

Lenguaje Aceptado

El aceptado por una MT con múltiples cintas es el conjunto de palabras u tales que empezando en una configuración en la que en la primera cinta está la palabra u y el resto de las cintas son vacías y el cabezal de lectura de la primera cinta está en el primer símbolo de u y en cualquier casilla de las otras cintas termina en un estado de aceptación.

Función Calculada

La función parcial f calculada por una MT es la función definida en todas las entradas en las que la MT termina. Si $u \in A^*$ es una entrada para la que la MT termina, entonces lo hace con $f(u)$ como contenido de la última cinta excluyendo los blancos.

Equivalencia

Está claro que si un lenguaje es aceptado por una MT con una cinta puede hacerlo por una MT con varias cintas. El recíproco también es cierto.

Teorema

Todo lenguaje aceptado por una MT con varias cintas es recursivamente enumerable.

Supongamos que M es la MT con k cintas, vamos a simular su funcionamiento con una MT N con una sola cinta.

Equivalencia

Está claro que si un lenguaje es aceptado por una MT con una cinta puede hacerlo por una MT con varias cintas. El recíproco también es cierto.

Teorema

Todo lenguaje aceptado por una MT con varias cintas es recursivamente enumerable.

Supongamos que M es la MT con k cintas, vamos a simular su funcionamiento con una MT N con una sola cinta.

La MT N tendrá una cinta con $2k$ pistas. En cada par de pistas se simula una cinta de M. En una de las pistas se coloca un símbolo especial $*$ en el lugar en el que se encuentre el cabezal de la MT de k pistas, en la otra pista se coloca el contenido de la cinta de M.

Equivalencia (Cont.)

La MT N almacena en la unidad de control los k símbolos que contiene M. Para ello comienza a revisar la cinta de izquierda a derecha y cada vez que encuentra un símbolo lo almacena en su correspondiente lugar de la unidad de control. Lleva un contador donde empieza en 0 y se aumenta en 1 cada vez que encuentra un símbolo hasta llegar a k (el valor de k es fijo y se puede almacenar).
Una vez hecho esto, tiene todos los elementos para realizar la transición de la MT de k cintas, para ello se va colocando en cada una de las posiciones señaladas de cada una de las cintas y realiza la transición correspondiente, escribiendo el símbolo que corresponda y moviendo la señal de posición del cabezal de lectura.

Equivalencia (Cont.)

La MT N almacena en la unidad de control los k símbolos que contiene M. Para ello comienza a revisar la cinta de izquierda a derecha y cada vez que encuentra un símbolo lo almacena en su correspondiente lugar de la unidad de control. Lleva un contador donde empieza en 0 y se aumenta en 1 cada vez que encuentra un símbolo hasta llegar a k (el valor de k es fijo y se puede almacenar).
Una vez hecho esto, tiene todos los elementos para realizar la transición de la MT de k cintas, para ello se va colocando en cada una de las posiciones señaladas de cada una de las cintas y realiza la transición correspondiente, escribiendo el símbolo que corresponda y moviendo la señal de posición del cabezal de lectura.
Los estados de aceptación de N son aquellos estados que corresponden a los estados de aceptación de M.

Simulación: complejidad en tiempo

Teorema

Si la MT M del teorema anterior emplea un número de pasos inferior o igual a $t(n)$ para una entrada de longitud n, entonces la MT N de una cinta emplean un número de pasos de orden $O(t^2(n))$.

Para la demostración, basta tener en cuenta:

- Después de $t(n)$ movimientos de la MT M la diferencia entre las posiciones de los distintos cabezales de lectura es, a lo más, $2t(n)$. Al principio podemos suponer que todos están en la misma posición y, en cada paso, se alejan a lo más en dos posiciones (si dos cabezales se mueven en distintas direcciones).
- Para ver los contenidos de las distintas casillas en las cintas en la máquina N nos hacen falta $2t(n)$ pasos como máximo.
- Ahora nos movemos de derecha a izquierda y cada vez que encontramos un marcador de posicionamiento, realizamos la transición correspondiente. Esta transición, a lo más, necesita 2 movimientos (para llevarlo a cabo y volver a la posición en la que estábamos). Esto implica $2t(n)+2k$ movimientos.
- Si le sumamos a los $2t(n)$ iniciales, hacen $4t(n)+2k$ por cada movimiento, así que los $t(n)$ movimientos implicarán como máximo $t(n)(4t(n)+2k)$ que es de orden $O(t^2(n))$, teniendo en cuenta que k es constante.

Máquinas de Turing No Deterministas

Definición

Una Máquinas de Turing No Determinista (MTND) tiene la misma definición que una MT con la única diferencia que ahora $\delta(q, a)$ puede ser un conjunto finito de tripletas

$$\{(q_1, b_1, M_1), \ldots, (q_k, b_k, M_k)\}$$

Cálculo

El cálculo asociado a una MTND se define de forma similar a una MT. Ahora en una configuración en la que está en el estado q y ve a en la cinta puede evolucionar con cualquiera de las tripletas (q_i, b_i, M_i): puede ir a q_i escribir b_i y hacer el movimiento M_i para $i = 1, \ldots, k$.

Lenguaje Aceptado

Lenguaje Aceptado

Es el conjunto de todas las palabras aceptadas.
Acepta una palabra cuando para la configuración inicial asociada a la palabra, existe una sucesión de movimientos posibles que permiten llegar a un estado de aceptación y parar. No importa que haya otras computaciones posibles que no lleguen a un estado de aceptación.

Equivalencia MTND y MT

Toda MT es una MTND por lo que todo lenguaje recursivamente enumerable es también aceptado por una MTND. También se da el inverso.

Teorema

Si un lenguaje L es aceptado por una MTND, entonces es recursivamente enumerable.

Suponemos m el número máximo de opciones en la MTND.

- Utilizamos una MT con dos cintas.
- En la primera tenemos una sucesión de configuraciones (q, u, v) separadas por un símbolo $\square$, también existe una marca $*$ en la *configuración activa*.
- Inicialmente hay sólo una configuración: la configuración inicial.

Equivalencia (Cont.)

- En cada momento se coge la configuración activa, se copia en la cinta auxiliar, nos vamos al final de la primera cinta y se realizan todas las transiciones posibles sobre la configuración de la cinta auxiliar colocándolas al final de la primera cinta.
- Se busca la configuración marcada y se pasa a procesar la siguiente.
- Si en algún momento sale una configuración con un estado de aceptación terminamos.
- El procedimiento hace una búsqueda en anchura exhaustiva de todos los posibles cálculos de la MTND. Si en uno se acepta, lo encontrará. Si en un nivel, todos los cálculos han terminado sin aceptar, rechaza.

Ejemplo de MT para saber si un número binario es compuesto (no es primo)

- Supongamos que u es la entrada.
- la MTND elige de forma no determinista un número en binario v de longitud menor o igual a u
- Realiza la división de u entre v
- Si la división es exacta acepta que es compuesto. En caso contrario rechaza.

Observemos como si el número es compuesto, AL MENOS una de las opciones posibles acaba en aceptación y si no lo es TODAS las opciones acaban en rechazo.

Ejemplo de MT para saber si hay un camino entre dos nodos del grafo.

- Inicialmente la MT tiene en la cinta codificado un grafo y un par de nodos.
- la MTND escribe de forma no determinista una lista de nodos que comienza en el primer nodo del par y termina en el último nodo del par. Podemos suponer que no repite nodos.
- Comprueba si hay un enlace entre cada nodo de la lista y el siguiente
- Si el resultado es positivo para todos los nodos de la lista acepta. En caso contrario rechaza.

Observemos como si exuste un camino, AL MENOS una de las opciones posibles acaba en aceptación y si no existe TODAS las opciones acaban en rechazo.

Número de Pasos (tiempo) en MT

- En una MT el número de pasos (tiempo) para una entrada u es el número de pasos de cálculo entre la configuración de entrada y la última configuración.
- Una MT tiene complejidad $t(n)$ en tiempo si para toda entrada de longitud n la MT termina en $t(n)$ o menos pasos.

Número de Pasos (tiempo) en MTND

- En una MTND el número de pasos (tiempo) para una entrada u es el número de pasos para el cálculo más largo posible para esa entrada. Si hay una secuencia de cálculos que no termina, entonces el tiempo es infinito.
- Si decimos que una MTND tiene complejidad $t(n)$ en tiempo, quiere decir que todos los posibles cálculos de la MTND terminan en $t(n)$ o menos pasos donde n es la longitud de la entrada.
- Si una MTND tiene complejidad $t(n)$, veremos (estudio de la complejidad algorítmica) que la MT que la simula tiene complejidad $O(d^{t(n)})$ donde d es una constante mayor que uno.

Ventaja de las MTNDs

- Son útiles para resolver problemas donde tenemos que buscar un elemento en una población que cumpla una condición.
- La MTND elige de forma no-determinista un elemento de la población y comprueba si cumple condición.
- Si la cumple acepta y en otro caso rechaza.
- Observemos como son problemas que llevan un proceso de búsqueda asociado. La MTND no tiene que describir el procedimiento de búsqueda.
- La simulación de una MTND por una determinista añade es una forma de añadir la búsqueda que es válida en todos los casos y que da lugar a una MT determinista.

Ejercicios 1

- Supongamos la MTND
  $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \#\}, \delta, q_0, \#, \{q_2\})$ donde

δ	0	1	$\#$
q_0	$\{(q_0, 1, D)\}$	$\{(q_1, 0, D)\}$	$\emptyset$
q_1	$\{(q_1, 0, D), (q_0, 0, I)\}$	$\{(q_1, 1, D), (q_0, 1, I)\}$	$(q_2, \#, D)$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

  Estudiar las configuraciones que se pueden alcanzar si la palabra de entrada es:

  1. 01
  2. 011

Ejercicios 2

- Describir MTND (con una o varias cintas) que acepten los siguientes lenguajes:
  1. Conjunto de palabras que contienen una subcadena de longitud 100 que se repite aunque no necesariamente de forma consecutiva.
  2. El conjunto de las cadenas $w_1 \circ w_2 \circ \cdots \circ w_n$ donde $w_i \in \{0,1\}^*$ y para algún j w_j coincide con la representación en binario de j.
  3. El conjunto de las cadenas $w_1 \circ w_2 \circ \cdots \circ w_n$ donde $w_i \in \{0,1\}^*$ y para, al menos, dos valores de j w_j coincide con la representación en binario de j.

Ejercicios 3

- Se considera la MTND
  $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{0,1\}, \{0,1,\#\}, \delta, q_0, \#, \{q_f\})$ con

$$\delta(q_0,0) = \{(q_0,1,D),(q_1,1,D)\} \quad \delta(q_1,1) = \{(q_2,0,I)\}$$
$$\delta(q_2,1) = \{(q_0,1,D)\} \quad \delta(q_1,\#) = \{(q_f,\#,D)\}$$

  Describir el lenguaje generado.

Cintas semiilimitadas

Podemos suponer que las cintas son ilimitadas sólo por la derecha y que la palabra de entrada se escribe a partir de la primera casilla. Para ello, vamos a demostrar que todo lenguaje se puede aceptar sin escribir a la izquierda de la primera casilla que ocupa la palabra de entrada, lo que equivale a suponer que no existe cinta a la izquierda de la palabra de entrada.

Teorema

Todo lenguaje aceptado por una MT M_2 es también aceptado por una MT M_1 con las siguientes restricciones:

1. M_1 nunca escribe el espacio en blanco $\#$
2. La cabeza de M_1 nunca se mueve hacia la izquierda de su posición inicial.

La primera condición es muy fácil de conseguir añadiendo un nuevo símbolo a M_1 que es otro espacio en blanco $\#'$.
Si M_2 escribe un espacio en blanco $\delta_2(q,a) = (p,\#,M)$, entonces M_1 escribe el nuevo blanco: $\delta_1(q,a) = (p,\#',M)$. Después, cada transición $\delta_1(q,\#')$ se hace idéntica a $\delta_2(q,\#)$.

Cintas semiilimitadas

Para la segunda condición, una cinta ilimitada por ambos extremos se simula con una cinta ilimitada sólo por la derecha con dos pistas y la siguiente estructura:

X_0	X_1	X_2								
$\triangleright$	X_{-1}	X_{-2}								

Si $M_2 = (Q_2, A, B_2, \delta_2, q_2, \#, F_2)$ entonces $M_1 = (Q_1, A \times \{\#\}, B_1, \delta_1, q_0, [\#, \#], F_1)$ donde

- Los estados de M_1 son $\{q_0, q_1\} \cup (Q_2 \times \{S, I\})$. Los estados q_0 y q_1 sirven para preparan la cinta de entrada (por ejemplo, poner el tope $\triangleright$ en la pista inferior). En los otros estados tenemos que especificar el valor S (pista superior) o I (pista inferior) además del estado.
- Los símbolos de trabajo de M_1 son $B_2 \times B_2$, es decir todas las parejas de símbolos de trabajo de M_2. Cada símbolo $a \in A_2$ de M_2 se identifica con el símbolo $[a, \#]$ de M_1. Además en B_1 están todas las parejas $[b, \triangleright]$ donde $b \in B_2$. Este símbolo $\triangleright$ se usa como tope para saber que estamos en el extremo izquierdo de la cinta.

Cintas semiilimitadas

- $\delta_1(q_0, [a, \#]) = (q_1, [a, \triangleright], D)$ para cualquier $a \in B_2$
- $\delta_1(q_1, [a, \#]) = ([q_2, S], [a, \#], I)$ (nos movemos a la izquierda y decimos que estamos arriba)
- Si $\delta_2(q, a) = (p, b, M)$, entonces para todo $c \in B_2$
  1. $\delta_1([q, S], [a, c]) = ([p, S], [b, c], M)$
  2. $\delta_1([q, I], [c, a]) = ([p, I], [c, b], \overline{M})$, donde $\overline{M}$ es el movimiento de sentido opuesto a M.

Cintas semiilimitadas

- Si $\delta_2(q,a) = (p,b,D)$ entonces
  $\delta_1([q,I],[a,\triangleright]) = \delta_1([q,S],[a,\triangleright]) = ([p,S],[b,\triangleright],D)$

  Si estamos al principio de la cinta, siempre se supone que el símbolo activo es el superior. Allí se escribe y si nos movemos a la derecha el superior es el activo.

- Si $\delta_2(q,a) = (p,b,I)$ entonces
  $\delta_1([q,I],[a,\triangleright]) = \delta_1([q,S],[a,\triangleright]) = ([p,I],[b,\triangleright],D)$

  Si estamos al principio de la cinta, siempre se supone que el símbolo activo es el superior. Allí se escribe y si nos movemos a la izquierda el infererior es el activo.

Los estados de aceptación F_1 de M_1 es el conjunto de estados $F_2 \times \{S,I\}$.

Cintas Semiilimitadas

- Cuando usamos cintas semiilimitadas, supondremos desde el principio que tenemos el símbolo $\triangleright$ a la izquierda de cada una de las cintas que se usen y que si se llega a ese símbolo inmediatamente nos vamos hacia la derecha en el próximo movimiento.
- Esto no supone ninguna limitación, ya que toda MT se puede simular con una con estas restricciones: siempre podemos incluir ese símbolo al principio de la palabra de entrada, desplazando todos los símbolos una casilla a la derecha y después como hemos visto siempre se puede simular la MT con una de cintas semiilimitadas en las que nunca se pasa a la izquierda de la palabra de entrada.

Problemas

Definición

Un problema PROBLEMA(x) ó PROBLEMA consta de:

- Un conjunto X de entradas. Un elemento $x \in X$ se llama una entrada.
- Un conjunto Y de solución. Un elemento $y \in Y$ se llama una solución.
- Una aplicación $R : X \times Y \to \{0,1\}$ que representa la relación que debe de existir entre las entradas y las soluciones. Si $R(x,y) = 1$ también escribiremos $R(x,y)$ simplemente y si $R(x,y) = 0$ escribiremos también $\neg R(x,y)$.

Problemas

Definición

Un problema PROBLEMA(x) ó PROBLEMA consta de:

- Un conjunto X de entradas. Un elemento $x \in X$ se llama una entrada.
- Un conjunto Y de solución. Un elemento $y \in Y$ se llama una solución.
- Una aplicación $R : X \times Y \to \{0,1\}$ que representa la relación que debe de existir entre las entradas y las soluciones. Si $R(x,y) = 1$ también escribiremos $R(x,y)$ simplemente y si $R(x,y) = 0$ escribiremos también $\neg R(x,y)$.

Ejemplo

Búsqueda de caminos en grafos dirigidos:

- Entradas X: conjunto formado por las tripletas (G, ns, nl), donde G es un grafo dirigido, ns es un nodo de salida, nl es un nodo de llegada.
- Conjunto Y: lista de nodos $(n_1, \ldots, n_k)$
- La relación que debe de haber entre las entradas y las soluciones es que $n_1 = ns, n_k = nl$ y todas las parejas (n_i, n_{i+1}) sean arcos de G.

Resolución de Problemas

- Los problemas se resuelven mediante algoritmos.
- ¿Qué es un algoritmo? En esta asignatura vamos a considerar dos conceptos que son equivalentes:
  - Un programa en Phyton (Ph) bien escrito sintácticamente y con, al menos, una función definida, la primera de las cuales es la función principal (más adecuados para una resolución efectiva de problemas).
  - Una Máquina de Turing (MT) que definiremos en el siguiente tema (más adecuadas para el razonamientos teórico-matemáticos).
- Un algoritmo ALG resuelve un problema $\text{PROBLEMA}(x)$ cuando el argumento de dicho algoritmo es un elemento $x \in X$ y $ALG(x)$ es un $y \in Y$ tal que $R(x, y) = 1$.

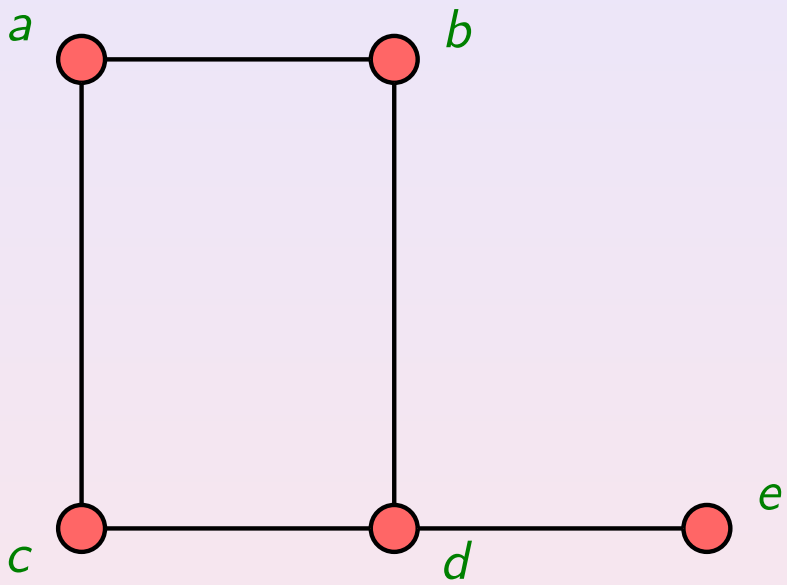
Problemas y su codificación

- Si queremos resolver un problema en un ordenador habrá que codificar las entradas y las soluciones en unos datos que pueda entender el ordenador.
- Nosotros vamos a suponer que las entradas y soluciones están siempre codificadas como palabras o cadenas de caracteres.
- Esto no supone ninguna restricción ya que cualquier tipo de entrada a un programa se puede representar mediante una cadena de caracteres, así como cualquier tipo de salida.
- También supondremos que hay sólo una palabra de entrada y una palabra de salida. Esto tampoco supone restricción ya que un conjunto de palabras se pueden codificar como una sola palabra en la que aparecen las palabras originales encadenadas con un separador para indicar el final de una y el comienzo de la siguiente.
- A partir de ahora, en términos generales hablaremos sólo sobre problemas en las que las entradas y las salidas son palabras sobre un alfabeto (Problema Computacional), aunque al hablar de un problema concreto hablaremos de grafos, números u otros elementos.

Problemas y su Codificación

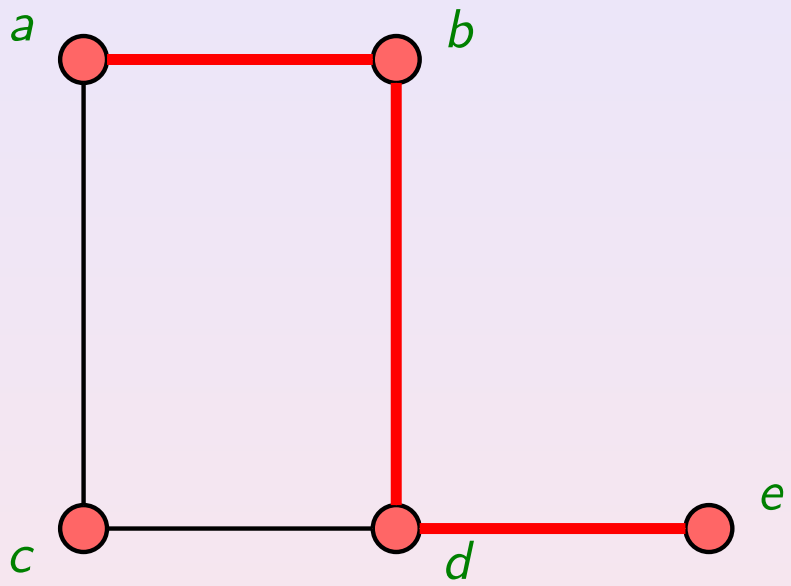
- Cualquier problema se transforma en un problema computacional con un sistema de codificación de las entradas y salidas.
- Puede haber palabras que no sean una codificación correcta de una entrada del problema original. En ese caso, supondremos que a esa entrada le corresponde una salida especial: 'NO'.
- En general, nuestro estudio teórico se hará sobre problemas computacionales, pero su resultado se aplicará también a problemas en general, ya que estos resultados no dependerán de la codificación elegida (siempre que ésta sea razonable).

Codificando Grafos



Grafo: `a,b b,d c,d a,c d,e`

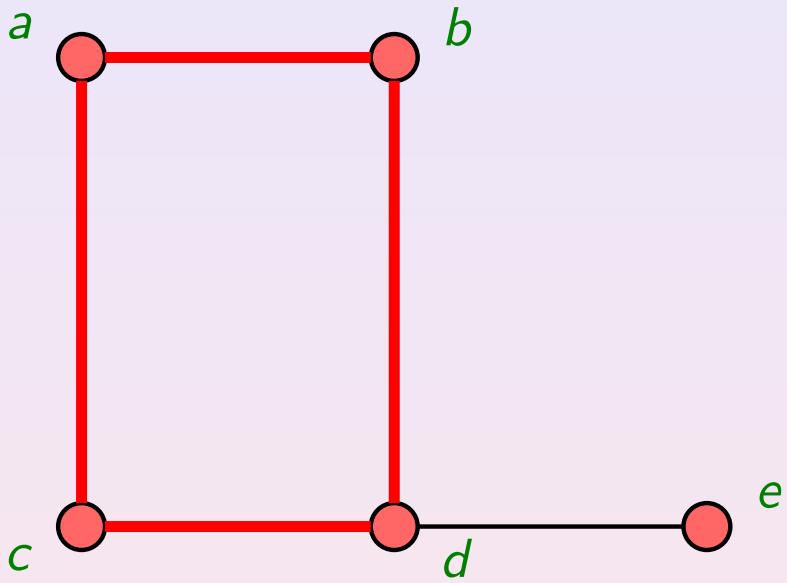
Codificando Grafos



Grafo: `a,b b,d c,d a,c d,e`

Camino: `a,b,d,e`

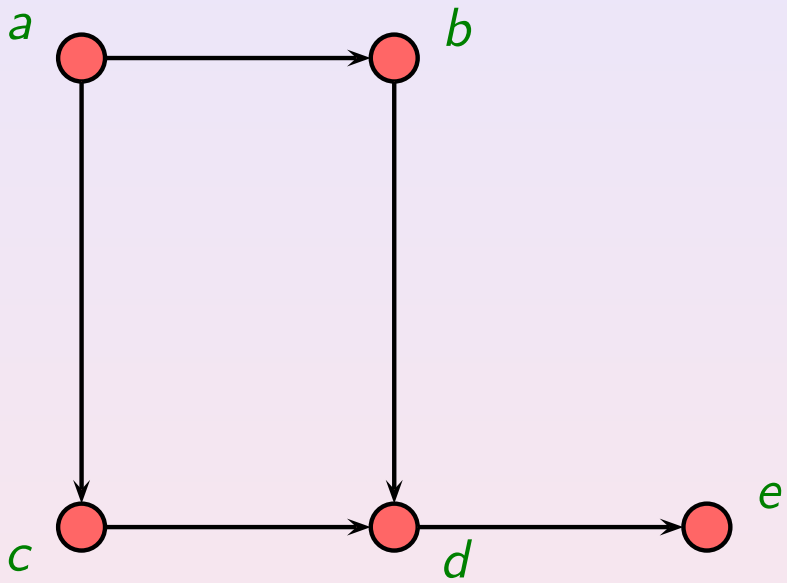
Codificando Grafos



Grafo: `a,b b,d c,d a,c d,e`

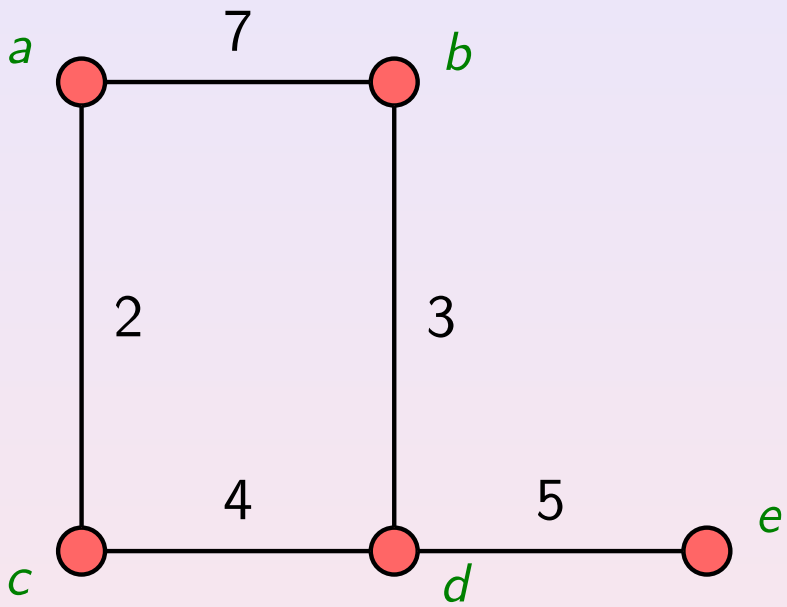
Ciclo: `a,b,d,c`

Codificando Grafos Dirigidos



Grafo dirigido: `a,b b,d c,d a,c d,e`

Codificando Grafos Con Pesos



Grafo con pesos: `a,b,7 b,d,3 c,d,4 a,c,2 d,e,5`

Tipos de Problemas

- Problemas de Búsqueda: Para una entrada x el problema consiste en encontrar una solución y tal que $R(x, y)$ cuando esta exista y decir 'NO' en caso contrario. Ejemplo: dado un grafo no dirigido encontrar un circuito hamiltoniano.
- Problemas de Decisión: Son aquellos en los que las soluciones son $Y = \{SI, NO\}$ y cada entrada x tiene una única solución. Ejemplo: dado un grafo determinar si tiene un circuito hamiltoniano.
- Problemas de Optimización: La solución optimiza (minimiza o maximiza) una función definida sobre un conjunto de soluciones factibles asociadas a la entrada. Ejemplo: el problema del viajante de comercio.
- Problemas de función: Cada entrada x tiene siembre una y sólo una solución. Por ejemplo, dado un número n calcular su cuadrado n^2. A la solución que corresponde a la entrada x se le denota también por $\mathrm{PROBLEMA(x)}$ (también en problemas de decisión).

Versión Decisión de los problemas

Los probemas de decisión son especialmente importantes ya que son simples y es fácil razonar sobre ellos y además cualquier otro problema tiene asociado un problema de decisión:

- Problemas de umbral para problemas de optimización: Los mismos datos de un problema de optimización más un umbral K y ahora se pregunta si existe una solución de valor mayor o menor que el valor K según sea un problema de máximo o mínimo. Ejemplo: dado un caso del problema del viajante de comercio y un valor K determinar si existe un circuito de coste menor o igual que K.
- Problemas de existencia para problemas de búsqueda: Dado un x, determinar si existe un y tal que sea una solución de x.
- Problemas de comprobación para problemas de función y búsqueda: Dado x y una posible solución y determinar si y es una solución de x.

Ejemplo

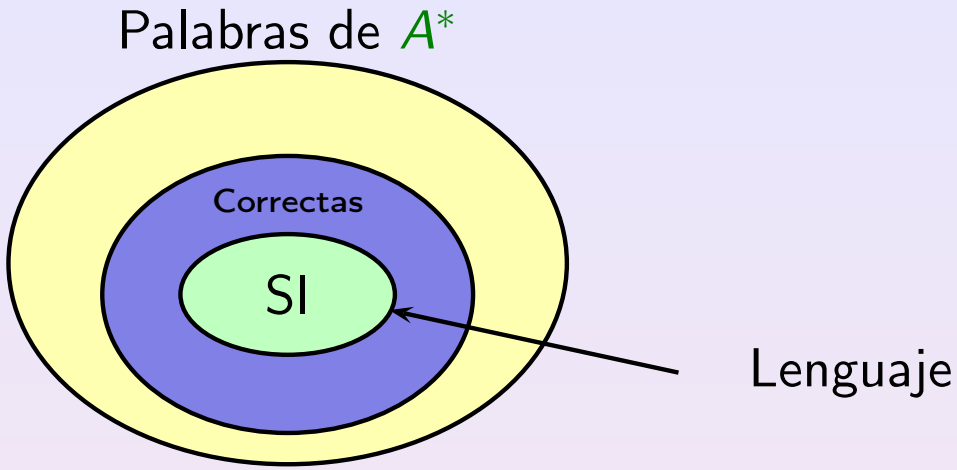
- **Camino mínimo:** Dado un grafo y dos nodos, encontrar un camino de longitud mínima entre estos nodos si este existe (problema de optimización).
- **Busqueda de caminos:** Dado un grafo y dos nodos, encontrar un camino entre ambos nodos, en caso de que exista, decir 'NO' en caso contrario.
- **Existencia de Caminos:** Dado un grafo y dos nodos, determinar si existe un camino entre ellos (problema de existencia).
- **Umbral del camino mínimo:** Dado un grafo, dos nodos, y un umbral K determinar si existe un camino entre estos nodos de longitud menor o igual a K (problema de umbral).
- **Problema de comprobación:** Dado un grafo, dos nodos, y un camino, determinar si es un camino que une esos dos nodos (problema de comprobación).

Problemas de Decisión y Lenguajes

Un problema computacional de decisión en el que las entradas se codifican como palabras del alfabeto A con el lenguaje de las entradas que tienen respuesta 'SI':
$L(\text{PROBLEMA(x)}) = \{x \in A^* : \text{PROBLEMA}(x) =' SI'\}$.

- Es decir los casos con respuesta afirmativa.
- Un lenguaje L sobre un alfabeto A, siempre define también un problema de decisión: dada $x \in A^*$ determinar si $x \in L$.

Problemas y Lenguajes



- En muchos casos, la teoría se desarrolla hablando de lenguajes.
- Cuando comenzamos con un problema genérico de decisión y lo transformamos en un problema computacional mediante una codificación de las entradas, las palabras que no son una codificación correcta de un ejemplo del problema se meten en el mismo 'saco' que los casos en los que la respuesta es 'NO'.
- La identificación de las codificaciones correctas (palabras que corresponden realmente a un ejemplo del problema) se considera que no es importante desde el punto de vista computacional y no se tendrá en cuenta.

Problemas y Lenguajes

Un problema de decisión + Una codificación $\equiv$ Problema Computacional 'SI' 'NO'
$\equiv$ Problema Computacional 'SI' 'NO' $\equiv$ Lenguaje

- Las definiciones sobre lenguajes se pueden transformar en definiciones sobre los problemas asociados. Los problemas cuyos lenguajes son recursivos se llaman decidibles o calculable y los que no lo son indecidibles o no calculables. Esta terminología se aplica también a los lenguajes.
- Los problemas cuyos lenguajes son r.e. se llaman semidecidibles o parcialmente calculables.
- La identificación de las codificaciones correctas (palabras que corresponden realmente a un ejemplo del problema) se considera que no es importante desde el punto de vista computacional (en todos los ejemplos el reconocimiento de una entrada correcta se puede realizar en tiempo lineal).

Problema Contrario

Dado un problema de decisión PROBLEMA, el problema contrario de PROBLEMA, es el problema $\mathrm{C}-\mathrm{PROBLEMA}$ que intercambia las salidas 'SI' y 'N0' o de forma más precisa $\mathrm{PROBLEMA}(x) =' SI' \Leftrightarrow \mathrm{C}-\mathrm{PROBLEMA}(x) =' NO'$.

Problemas contrarios y lenguajes

El lenguaje asociado al problema contrario de PROBLEMA es el lenguaje complementario del lenguaje del lenguaje asociado a PROBLEMA:

$$L(\mathrm{C}-\mathrm{PROBLEMA}) = \overline{L(\mathrm{PROBLEMA})}$$

Problema Contrario

Dado un problema de decisión PROBLEMA, el problema contrario de PROBLEMA, es el problema $C-PROBLEMA$ que intercambia las salidas 'SI' y 'N0' o de forma más precisa $PROBLEMA(x) =' SI' \Leftrightarrow C-PROBLEMA(x) =' NO'$.

Problemas contrarios y lenguajes

El lenguaje asociado al problema contrario de PROBLEMA es el lenguaje complementario del lenguaje del lenguaje asociado a PROBLEMA:

$$L(C-PROBLEMA) = \overline{L(PROBLEMA)}$$

Nota: Cuando hablamos de problemas genéricos, esto no es del todo exacto: ya que las codificaciones incorrectas estarán englobadas con el 'SI' en el lenguaje complementario o problema contrario, pero nosotros consideraremos que esta propiedad también se aplica a los problemas genéricos sin tener esto en cuenta: en realidad no importa como se traten las codificaciones incorrectas, ya que estas son siempre fáciles de detectar.

Ejemplo: Isomorfismo de subgrafos

- X: Datos
  Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$
- Y: 'SI','NO' (Problema de Decisión)
  Relación: Respuesta 'SI' corresponde a ¿Contiene G_1 un subgrafo isomorfo a G_2?
  Es decir, existe un subconjunto $V' \subseteq V_1$ y un subconjunto de aristas $E' \subseteq E_1$ tal que $E' \subseteq V' \times V'$ y existe una aplicación biyectiva $f : V_2 \to V'$ de tal manera que se verifica

$$(u, v) \in E_2 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E'$$

Palabras y Números

Supongamos un alfabeto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Podemos establecer una correspondencia biyectiva entre las palabras sobre este alfabeto y los números naturales. Supongamos $w = a_{i_k} \ldots, a_{i_1}$, entonces el número de w que denotaremos como $Z(w)$ es $\sum_{j=1}^{k} i_j . n^{j-1}$, siendo $Z(\varepsilon) = 0$.

Ejemplo

Si $A = \{0,1,2\}$, $Z(\varepsilon) = 0, Z(0) = 1, Z(1) = 2, Z(2) = 3, Z(202) = 3 + 1 \times 3 + 3 \times 3^2$

Dado un alfabeto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, Si m es un número natural, siempre se puede encontrar una cadena, que denotaremos como $C(m)$ o como w_m cuya codificación sea m. Esto se puede conseguir de la siguiente forma,

- Si $m = 0$, $C(m) = \varepsilon$
- Si $m > 0$, sea

$$i = \begin{cases} R(m,n) & \text{si } n \text{ no divide a } m \\ n & \text{si } n \text{ divide a } m \end{cases}$$

$$p = \begin{cases} [m/n] & \text{si } n \text{ no divide a } m \\ [m/n] - 1 & \text{si } n \text{ divide a } m \end{cases}$$

donde $R(m,n)$ es el resto de la división entera de m entre n y $[m/n]$ es la división entera de m entre n.
Entonces $C(m) = C(p)a_i$.

Distintos alfabetos

Si tenemos dos alfabetos A y B podemos establecer una aplicación biyectiva entre las palabras de ambos alfabetos:

- Sea Z_A la aplicación que codifica las palabras de A como números naturales: $Z_A : A^* \to \mathbb{N}$.
- Sea C_B la aplicación que transforma números naturales en palabras sobre B: $C_B : \mathbb{N} \to B^*$.
- La composición $C_B \circ Z_A$ es una aplicación biyectiva de A^* en B^* (primero se calcula el código numérico de una palabra de B y entonces la palabra del alfabeto de A que corresponde a ese código.
- Esta función es calculable en una MT.

Distintos alfabetos

Si tenemos dos alfabetos A y B podemos establecer una aplicación biyectiva entre las palabras de ambos alfabetos:

- Sea Z_A la aplicación que codifica las palabras de A como números naturales: $Z_A : A^* \to \mathbb{N}$.
- Sea C_B la aplicación que transforma números naturales en palabras sobre B: $C_B : \mathbb{N} \to B^*$.
- La composición $C_B \circ Z_A$ es una aplicación biyectiva de A^* en B^* (primero se calcula el código numérico de una palabra de B y entonces la palabra del alfabeto de A que corresponde a ese código.
- Esta función es calculable en una MT.

Es suficiente trabajar sobre un sólo alfabeto. Usualmente, lo haremos sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ (para desarrollar la teoría) aunque lo haremos sobre alfabetos más amplios (ASCII) para un caso práctico.

Orden Total en las Palabras de un Alfabeto

- Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ nosotros siempre vamos a considerar el siguiente orden total en sus palabras:
  - $u_1 \leq u_2$ si y solo si se da una de las siguientes condiciones:
    1. $u_1 = u_2$
    2. $|u_1| < |u_2|$
    3. $|u_1| = |u_2|$ y u_1 precede a u_2 en orden alfabético, teniendo en cuenta que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Es decir si $u_1 = a_{r_1} \ldots a_{r_i} a_{s_1} \ldots a_{s_m}$ y $u_2 = a_{r_1} \ldots a_{r_i} a_{l_1} \ldots a_{l_m}$ y $s_1 < l_1$ (el primer símbolo en el que son distintas las palabras es menor en u_1 que en u_2.
- El orden alfabético como tal no es operativo ya que no podemos establecer un ciclo infinito que recorra todas las palabras: hay infinitas palabras que empiezan por a_1 antes de las palabras que empiezan por a_2 y nunca se llegaría a ellas.

Codificando Máquinas de Turing

Se le puede asignar a cada MT sobre un alfabeto $\{0,1\}$ una cadena y un número natural. Para ello, suponemos

- Los estados son $\{q_1,\ldots,q_k\}$. El estado inicial es q_1 y hay un único estado final q_2 (esto siempre se puede conseguir).
- Los símbolos de B son $\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ donde a_1 es 0, a_2 es 1 y a_3 es el símbolo blanco.
- Al movimiento izquierda le asignamos un 1 y al de la derecha un 2. Este número será $u(M)$.

La codificación de la MT se realiza de la siguiente forma:

- Cada transición $\delta(q_i,a_j)=(q_k,a_l,M)$ se codifica como $0^i10^j10^k10^l10^{u(M)}$.
- Todas las transiciones se van añadiendo a la codificación separadas por 11.

Una vez calculada la cadena $w=R(M)$, podemos calcular su número $Z(w)$ con el alfabeto $\{0,1\}$, según el procedimiento que hemos visto para asignar números a palabras. Este número también se denotará como $Z(M)$.
Cada número natural corresponderá a una MT, o corresponderá a una cadena sin sentido alguno. Sea $T(n)$ la MT correspondiente al número n o *'Nula'* si no hay MT asociada al número n. También denotaremos como $T(w)$ la MT cuyo código es w.

Codificando Máquinas de Turing y Entradas

- Para codificar una MT M y una palabra w sobre el alfabeto $\{0,1\}$, podemos codificar M como hemos visto y después añadir 111 seguido de w, dando lugar a la cadena $R(M,w)$

El lenguaje de diagonalización

Vamos a definir un lenguaje L_d sobre $\{0,1\}$ que no es r.e. Este lenguaje se conoce como lenguaje de diagonalización.

Lenguaje de Diagonalización

Sea $w \in \{0,1\}^*$, $w \in L_d$ si y solo si la MT cuya codificación es w no acepta w.
Se interpreta que si w no es un MT correcta, entonces representa una MT con un sólo estado y ninguna transición (siempre rechaza).

Si $w_0, w_1, w_2, \ldots$ son todas las palabras de $\{0,1\}^*$ ordenadas, entonces

Máquinas \ Palabras	w_0	w_1	w_2	w_3	$\ldots$
w_0	0	0	0	0	$\ldots$
w_1	1	0	1	0	$\ldots$
w_2	1	1	0	0	$\ldots$
w_3	0	1	0	1	$\ldots$
.	.	.	.	.	$\ldots$
.	.	.	.	.	$\ldots$

El lenguaje de diagonalización

Vamos a definir un lenguaje L_d sobre $\{0,1\}$ que no es r.e. Este lenguaje se conoce como lenguaje de diagonalización.

Lenguaje de Diagonalización

Sea $w \in \{0,1\}^*$, $w \in L_d$ si y solo si la MT cuya codificación es w no acepta w.
Se interpreta que si w no es un MT correcta, entonces representa una MT con un sólo estado y ninguna transición (siempre rechaza).

Si $w_0, w_1, w_2, \ldots$ son todas las palabras de $\{0,1\}^*$ ordenadas, entonces

Máquinas \ Palabras	w_0	w_1	w_2	w_3	$\ldots$
w_0	0	0	0	0	$\ldots$
w_1	1	0	1	0	$\ldots$
w_2	1	1	0	0	$\ldots$
w_3	0	1	0	1	$\ldots$
.	.	.	.	.	$\ldots$
.	.	.	.	.	$\ldots$
L_d	1	1	1	0	$\ldots$

L_d no es r.e.

Teorema

L_d no es r.e.

Supongamos una MT M que acepta L_d. Dicha MT estará definida sobre el alfabeto $\{0,1\}$. Dicha máquina acepta palabras w tales que la MT cuya codificación es w no acepta la palabra w.
Sea w_M la codificación de la MT M: $w_M = R(M)$.

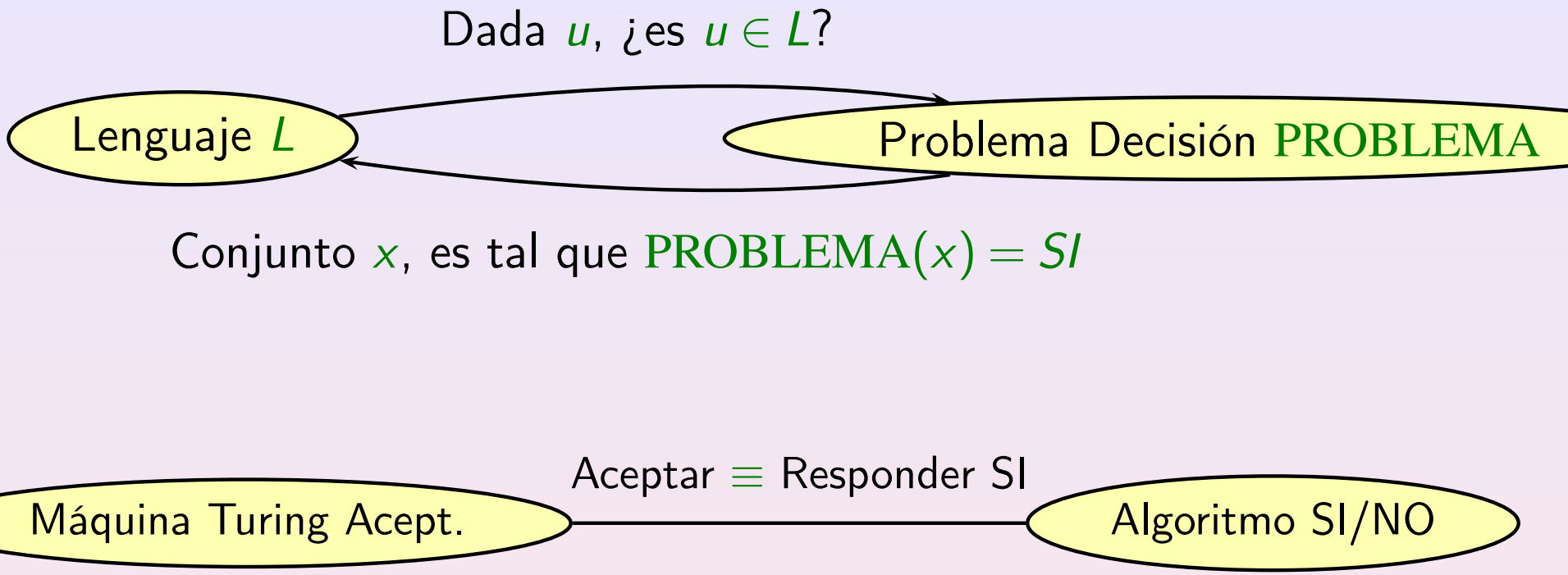
- Si $w_M \in L_d$ entonces M acepta w_M y la MT cuya codificación es w_M acepta la palabra w_M y, por la definición de L_d, $w_M \notin L_d$.
- Si $w_M \notin L_d$ entonces M no acepta w_M y la MT cuya codificación es w_M no acepta la palabra w_M y, por la definición de L_d, $w_M \in L_d$.

Con lo que la existencia de una MT M que acepte L_d nos lleva a una contradicción.

Problema de Diagonalización

A la versión problema de decisión del lenguaje de diagonalización le llamaremos Problema de Diagonalización y lo notaremos como DIAGONAL(M).
Consiste en determinar si dada una máquina de Turing M, entonces M no acepta cuando se lee a ella misma.

Recordatorio: Problemas y Lenguajes



Recordatorio: Problemas y Lenguajes

- Lenguaje recursivamente enumerable $\equiv$ Problema semidecidible
  - Existe una MT que acepta las palabras del lenguaje. Para las palabras del lenguaje la MT puede rechazar o ciclar.
  - Existe un algoritmo que responde correctamente las entradas cuya salida es 'SI', para las entradas de 'NO' el algoritmo puede decir 'NO' o ciclar
- Lenguaje recursivo $\equiv$ Problema decidible
  - Existe una MT que acepta las palabras del lenguaje y rechaza las palabras que no son del lenguaje (nunca cicla).
  - Existe un algoritmo que responde correctamente las entradas cuya salida es 'SI' y aquellas cuya salida es 'NO' (nunca cicla).

Complementarios de los lenguajes recursivos y r.e.

Si $L \subseteq A^*$, el complementario de L respecto a A^* se denotará como $\overline{L}$.

Teorema

Si L es un lenguaje recursivo, entonces $\overline{L}$ también lo es.

Demostración

Si L es recursivo, entonces es aceptado por una MT que siempre para. Se construye $\overline{M}$ con las siguientes características:

- Los estados de aceptación de M se convierten en estados de rechazo de $\overline{M}$ donde no se realizan nuevas transiciones.
- $\overline{M}$ tiene un nuevo estado r que es de aceptación y que no tiene transiciones definidas.
- Para cada estado p de M que no sea de aceptación y para cada símbolo de la cinta $a \in B$ para el que no haya definida una transición, se añade $\delta(p, a) = (r, a, D)$.

Está claro que $\overline{M}$ acepta el lenguaje $\overline{L}$ y siempre termina, ya que M lo hace.

Complementarios de los lenguajes recursivos y r.e.

Teorema

Si L y $\overline{L}$ son ambos r.e., entonces L es recursivo.

Demostración

Sea M_1 la MT que acepta L y M_2 la MT que acepte $\overline{L}$. Vamos a construir una MT M con dos cintas: en una funciona como M_1 y en la otra como M_2.
M es una máquina que funciona como M_1 y M_2 a la vez (como en el autómata producto).
El conjunto de estados de M es el producto $Q_1 \times Q_2$ donde Q_1 es el conjunto de estados de M_1 y Q_2 el de M_2. En cada paso, se pasa al estado que correspone según M_1 y al estado que corresponde según M_2.
La MT termina cuando una de las dos máquinas termina.
Los estados de aceptación de M son las parejas, en las que el primer elemento es un estado de aceptación de M_1.
Está claro que M acepta L y siempre termina, ya que toda palabra $u \in A^*$ está en L o en $\overline{L}$. En el primer caso, M_1 termina y en el segundo lo hace M_2. Por lo tanto M siempre termina.

El lengauje L_d no es r.e. Su complementario podría ser r.e., pero nunca recursivo. De hecho, es r.e.

El Lenguaje Universal

Definición

El lenguaje universal L_u es el conjunto de todas v las cadenas del alfabeto $\{0,1\}$ que codifican parejas (M,w) (es decir $v = R(M,w)$) donde M tiene como alfabeto de entrada $\{0,1\}$, w está definida sobre el mismo alfabeto y tales que la MT M acepta la cadena w.

Problema Universal

A la versión problema de decisión del lenguaje universal le llamaremos Problema Universal y lo notaremos como UNIVERSAL(M.w).
Consiste en determinar si dada una máquina de Turing M y una entrada w, entonces M acepta w.

Teorema

El lenguaje L_u es r.e.

Demostración

La idea básica es construir una MT M_u que lea la codificación $R(M, w)$ simule la MT M sobre la entrada w y termine cuando termina M, aceptando si lo hace M. Esta MT se llama Máquina de Turing Universal. Está claro que si hace la simulación, aceptará cuando M acepta w. M_u contiene varias cintas:

- En la primera contiene la codificación de M y w
- En la segunda contiene lo que sería la cinta de M para la entrada w. Un símbolo $a_i \in B$ se representa como 0^i y los distintos símbolos se separan por un 1.
- En la tercera cinta representa el estado de M. El estado q_i se representa mediante 0^i
- La cuarta cinta se utiliza para cálculos auxiliares

Demostración (cont.)

1. Primero M_u examina M y w para asegurarse de que la entrada es correcta.
2. Inicializa la segunda cinta con w. El 0 se codifica como 01. El 1 se codifica como 001. Cada vez que introduzca un blanco lo tendrá que hacer como 0001. Todo de acuerdo con los códigos vistos.
3. Inicializa la tercera cinta con 0 que corresponde con el estado inicial (suponemos que es q_1).
4. Simula los movimientos. Tendrá que localizar en la primera cinta $0^i10^j10^k10^l10^m$ donde q_i es el estado en el que se encuentra, 0^j1 es lo que se ve en la segunda cinta. Si no lo encuentra para. Entonces debe de ejecutar el movimiento correspondientes:
   1. Cambiar el la cinta 3, el estado a 0^k
   2. Sustituir 0^j en la cinta 2 por 0^l
   3. Hacer el movimiento en la cinta 2, según sea m ($m = 1$ a la izquierda, $m = 2$ a la derecha).
5. Si M pasa a un estado de aceptación (el estado q_2), entonces M_u para y acepta.

Indecibilidad del Lenguaje Universal

Teorema

El lenguaje universal L_u no es recursivo.

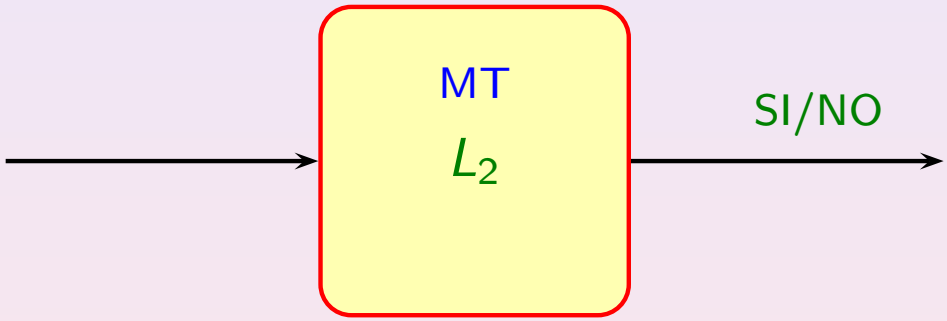
Demostración

Por reducción al absurdo.

- Si L_u fuese recursivo, entonces $\overline{L_u}$ también sería recursivo.
- Si M es una MT que aceptase $\overline{L_u}$, construiríamos la siguiente MT, M':
  - Si M' lee w entonces, convierte w en $w111w$ (como la codificación de (w, w)).
  - Entonces pasa a funcionar como M, aceptando si M acepta.
  - M' acepta w si y solo sí, M acepta $w111w$. Es decir $w111w \notin L_u$. Esto es la MT cuya codificación es w no acepta la palabra w. Esto es equivalente a que $w \in L_d$.
- Hemos construido una MT que acepta L_d, en contra de lo que sabemos: L_d no es r.e.

Reducción (en términos de lenguajes)

Si $L_1 \subseteq A^*$ y $L_2 \subseteq B^*$ son lenguajes, el lenguaje L_1 se reduce al lenguaje L_2 si existe un algoritmo M (una MT) que siempre para y calcula una función $f : A^* \to B^*$ tal que para toda entrada $w \in A^*$, $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$.

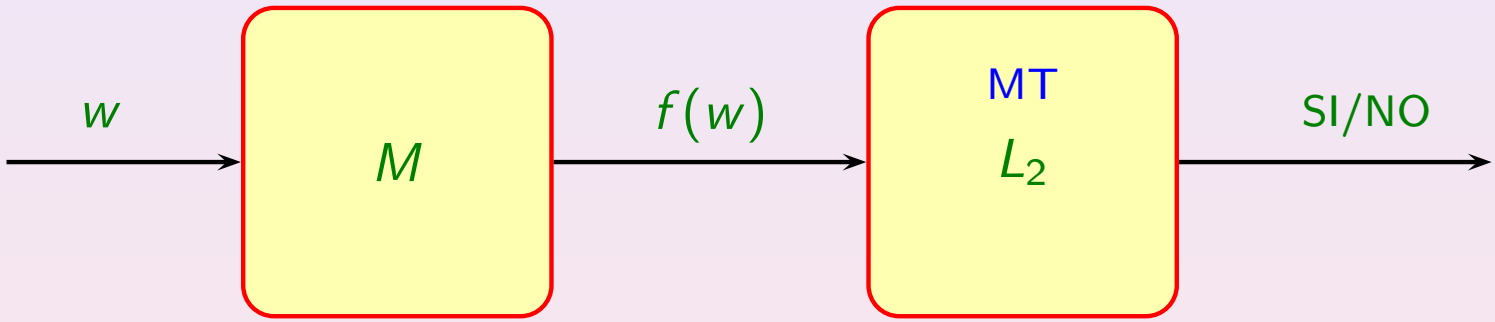


Teorema

Si L_1 se reduce a L_2, entonces si L_1 no es recursivo, tampoco lo es L_2 y si L_1 no es r.e., tampoco lo es L_2.

Reducción (en términos de lenguajes)

Si $L_1 \subseteq A^*$ y $L_2 \subseteq B^*$ son lenguajes, el lenguaje L_1 se reduce al lenguaje L_2 si existe un algoritmo M (una MT) que siempre para y calcula una función $f : A^* \to B^*$ tal que para toda entrada $w \in A^*$, $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$.

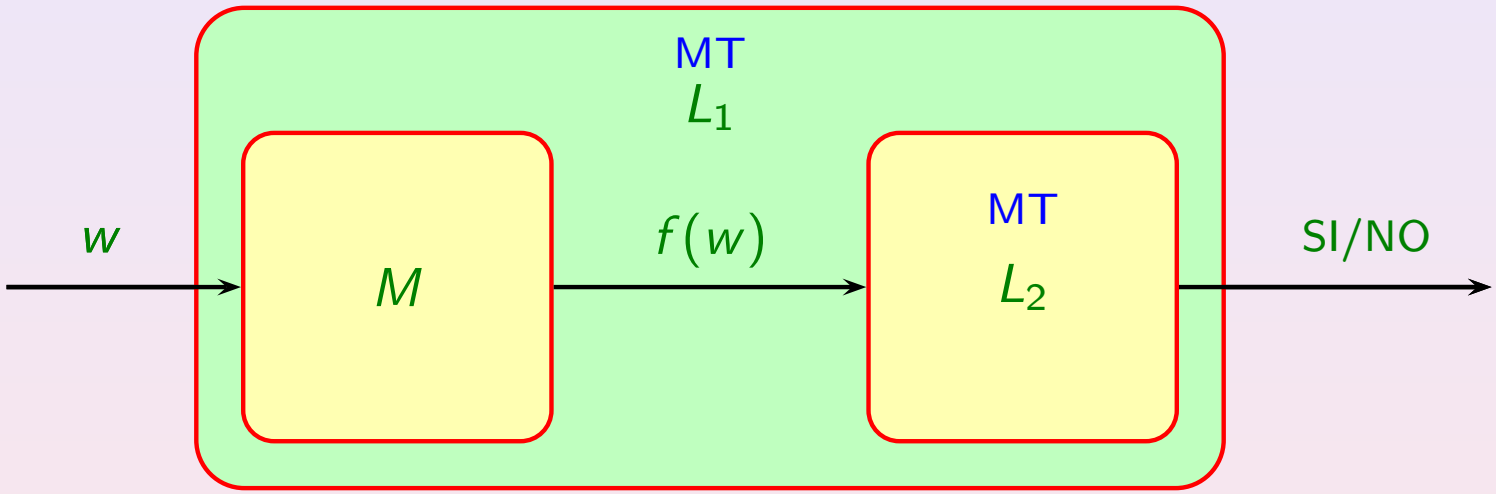


Teorema

Si L_1 se reduce a L_2, entonces si L_1 no es recursivo, tampoco lo es L_2 y si L_1 no es r.e., tampoco lo es L_2.

Reducción (en términos de lenguajes)

Si $L_1 \subseteq A^*$ y $L_2 \subseteq B^*$ son lenguajes, el lenguaje L_1 se reduce al lenguaje L_2 si existe un algoritmo M (una MT) que siempre para y calcula una función $f : A^* \to B^*$ tal que para toda entrada $w \in A^*$, $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$.



Teorema

Si L_1 se reduce a L_2, entonces si L_1 no es recursivo, tampoco lo es L_2 y si L_1 no es r.e., tampoco lo es L_2.

Reducción (en términos de problemas)

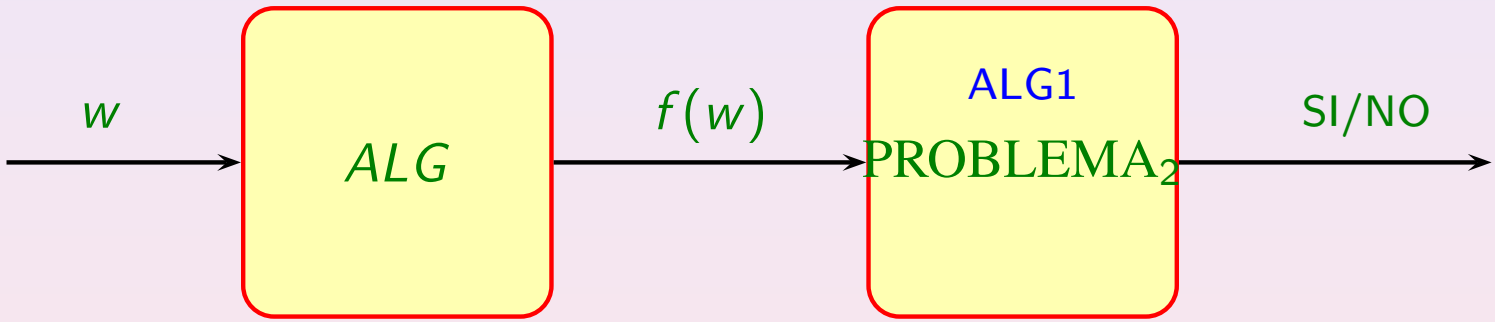
Sean PROBLEMA_1 y PROBLEMA_2 problemas de decisión, entonces decimos que PROBLEMA_1 se reduce a PROBLEMA_2 si existe un algoritmo $ALG(w)$ que siempre para y calcula una función $f(w)$ tal que para toda entrada w a PROBLEMA_1, tenemos que PROBLEMA_2 produce la misma respuesta para la entrada $f(w) = ALG(w)$.

Una reducción de PROBLEMA_1 a PROBLEMA_2 es una algoritmo $ALG(x)$ de las entrandas de PROBLEMA_1 a las entrandas de PROBLEMA_2 de tal forma que

$$\text{PROBLEMA}_1(x) = \text{PROBLEMA}_2(ALG(x))$$

Reducción (en términos de problemas)

Sean PROBLEMA_1 y PROBLEMA_2 problemas de decisión, entonces decimos que PROBLEMA_1 se reduce a PROBLEMA_2 si existe un algoritmo $ALG(w)$ que siempre para y calcula una función $f(w)$ tal que para toda entrada w a PROBLEMA_1, tenemos que PROBLEMA_2 produce la misma respuesta para la entrada $f(w) = ALG(w)$.

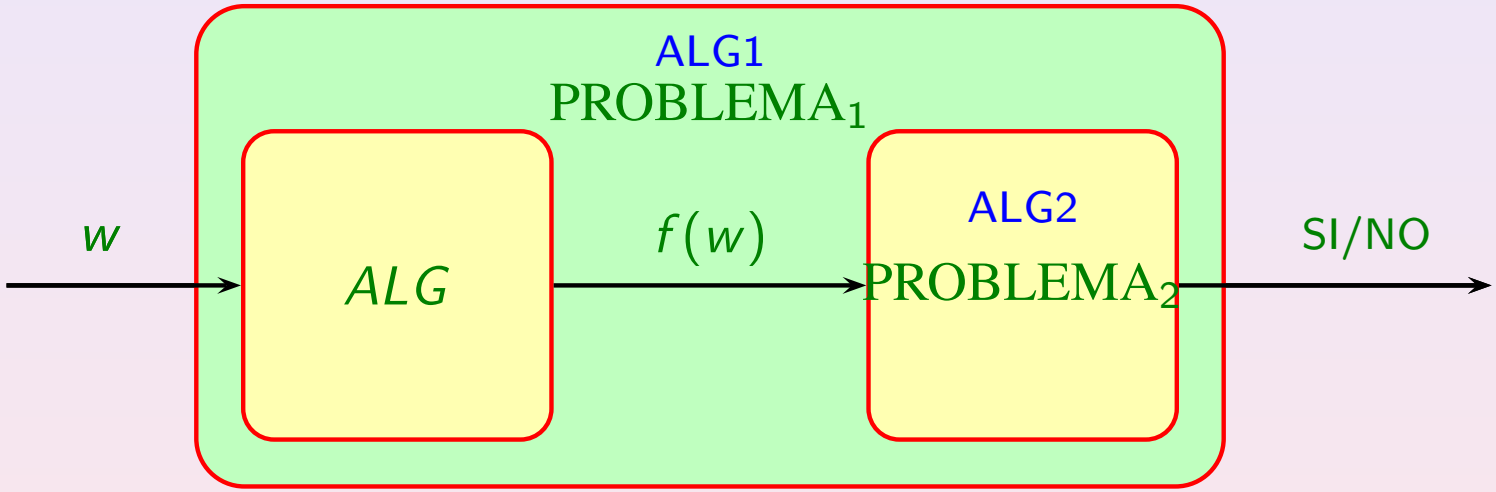


Una reducción de PROBLEMA_1 a PROBLEMA_2 es una algoritmo $ALG(x)$ de las entrandas de PROBLEMA_1 a las entrandas de PROBLEMA_2 de tal forma que

$$\text{PROBLEMA}_1(x) = \text{PROBLEMA}_2(ALG(x))$$

Reducción (en términos de problemas)

Sean PROBLEMA_1 y PROBLEMA_2 problemas de decisión, entonces decimos que PROBLEMA_1 se reduce a PROBLEMA_2 si existe un algoritmo $ALG(w)$ que siempre para y calcula una función $f(w)$ tal que para toda entrada w a PROBLEMA_1, tenemos que PROBLEMA_2 produce la misma respuesta para la entrada $f(w) = ALG(w)$.



Una reducción de PROBLEMA_1 a PROBLEMA_2 es una algoritmo $ALG(x)$ de las entrandas de PROBLEMA_1 a las entrandas de PROBLEMA_2 de tal forma que

$$\text{PROBLEMA}_1(x) = \text{PROBLEMA}_2(ALG(x))$$

Reducción (en términos de problemas)

Teorema

Si PROBLEMA_1 se reduce a PROBLEMA_2, entonces si PROBLEMA_1 es indecidible, también lo es PROBLEMA_2 y si PROBLEMA_1 no es semidecidible, tampoco lo es PROBLEMA_2.

Sea $ALG(w)$ el algoritmo de la reducción de PROBLEMA_1 a PROBLEMA_2. Supongamos que $ALG2(x)$ es un algoritmo que hace a PROBLEMA_2 semidecidible (decidible), entonces el algoritmo:

```
ALG1(x)
     w = ALG(x)
     Return (ALG2(w))
```

hará al problema PROBLEMA_1 semidecidible (decidible).
Por lo tanto si PROBLEMA_1 no es semidecidible (decidible), tampoco lo puede ser PROBLEMA_2.

MTs que aceptan el lenguaje vacío

Definimos los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

- L_e conjunto de palabras w tales que la MT M sobre $\{0,1\}$ cuya cofiación es w no acepta ninguna palabra ($L(M) = \emptyset$).
- L_{ne} conjunto de palabras w tales que la MT M sobre $\{0,1\}$ cuya cofiación es w acepta alguna palabra ($L(M) \neq \emptyset$).

Teorema

L_{ne} es r.e.

Demostración

Hay una MT no determinista M que acepta L_{ne}:

- M lee w que codifica una MT N, entonces con el algoritmo no determinista genera una palabra de entrada u.
- Después pone a simular N sobre u con la MT universal M_u.
- Si M_u para y acepta, entonces M acepta w.

Problema VACIO(M)

- VACIO(M) es la versión de problema de L_e: dada una MT M, determinar si acepta el lenguaje vacío.
- C-VACIO(M) es la versión de problema de L_{ne}: dada una MT M, determinar si acepta un lenguaje distinto del vacío.

MTs que aceptan el lenguaje vacío

Teorema

L_{ne} no es recursivo

Demostración

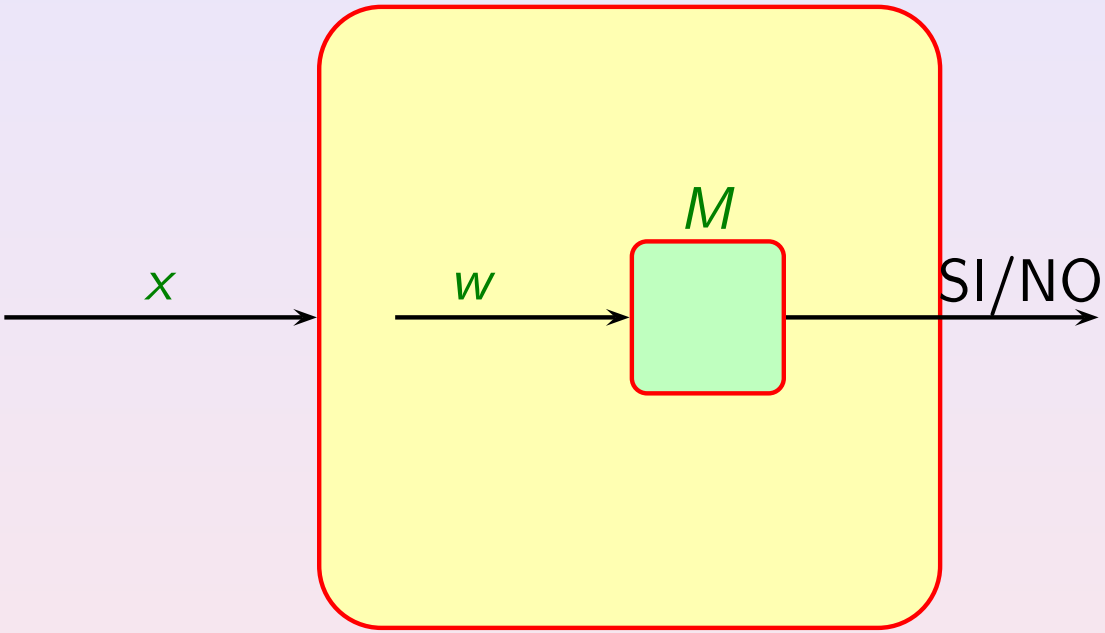
Vamos a demostrarlo usando los problemas asociados. Vamos a reducir UNIVERSAL(M,w) and C-VACIO(M'). Eso consiste en un algoritmo ALG(M,w) que calcula una MT M' de tal manera que UNIVERSAL(M,w) tenga la misma solución que C-VACIO(M'). Este funciona de la siguiente forma:

- Supongamos una entrada (M, w) vamos a construir una MT M' que funciona de la siguiente forma.
- M' ignora su entrada x y coloca en la cinta de entrada w. Si la longitud de w es n, esto se puede hacer con n estados. Cada estado q_i escribe el símbolo i de (M, w) y se mueve a la derecha. Después pasaría a un nuevo estado en el que borra lo que quede de x.
- M' se mueve a la izquierda hasta el primer símbolo de w.
- M' pasa al estado inicial de M con w y funciona como M para w.
- La salida de M' es la misma que la de M para w.

Está claro que M acepta w si y solo si M' acepta alguna palabra. De hecho $L(M') = A^*$ si M acepta w y $L(M') = \emptyset$ si M no acepta w.

Demostración Gráfica y Consecuencia

Dada una entrada (M, w) la reducción construye la siguiente MT:



Teorema

L_e no es r.e. (si lo fuese, entonces L_{ne} sería recursivo)

Propiedades de los r.e.

Propiedad lenguaje r.e. $\leftrightarrow$ Propiedad de los lenguajes de las MTs
Una propiedad de los lenguajes r.e. se identifica con el problema de saber si el lenguaje de una MT verifica esa propiedad.
Es una problema de decisión del tipo: Dada una MT M, ¿verifica el lenguaje $L(M)$ la propiedad P?

Ejemplo

Propiedades
Saber si el lenguaje de una MT es finito.

No es una propiedad de los r.e. saber si una MT tiene más de 10 estados.

Definición

Una propiedad de los lenguajes r.e. se dice trivial si para toda MT su lenguaje aceptado no verifica la propiedad o para toda MT su lenguaje aceptado siempre verifica la propiedad.

Teorema de Rice

Toda propiedad no trivial sobre los lenguajes r.e. es indecidible

Demostración

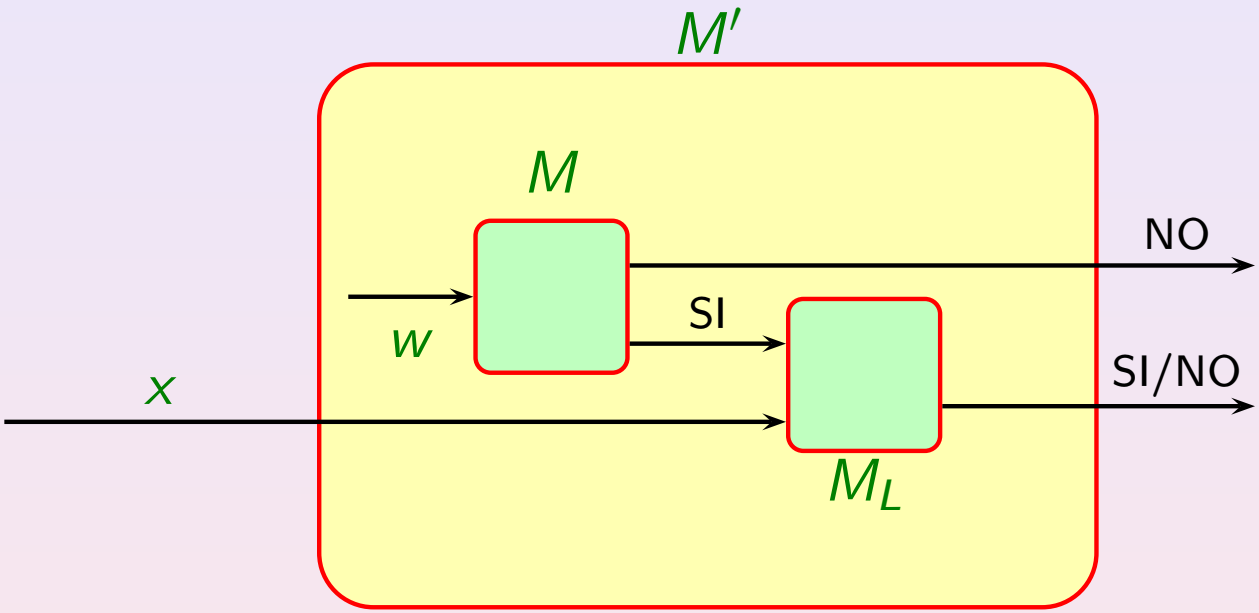
Llamemos NOTRIVIAL(M) a dicha propiedad no trivial y supongamos una propiedad no trivial y supongamos que el lenguaje vacío aceptado por la MT M_e no verifica la propiedad que otro lenguaje L aceptado por la MT M_L si verifica la propiedad.
Vamos a reducir el problema UNIVERSAL(M,w) a esta propiedad. Supongamos (M, w) una MT y su entrada construimos M' de la siguiente forma (se supone que tiene una entrada x en la primera cinta):

- M' tiene dos cintas. En la segunda coloca a w y empieza trabajando sobre esta cinta con las mismas transiciones de M. Si termina y no acepta, entonces M' no acepta.
- Si M termina y acepta con w, entonces empieza a funcionar como M_L sobre la entrada x en la primera cinta y tiene la misma salida que M_L.

Está claro que si M acepta w, entonces el lenguaje de M' es L y verifica la propiedad. Si M no acepta w, entonces el lenguaje de M' es vacío y no verifica la propiedad. Con esto se acaba la reducción y la propiedad no es decidible.
Si el lenguaje vacío acepta la propiedad se haría la misma transformación con la propiedad complementaria, demostrando que no es decidible y, por lo tanto, la propiedad original tampoco lo es.

Teorema de Rice. Gráfica de la Reducción

Dada una entrada para el problema universal (M, w) se construye la siguiente MT M'



Está claro UNIVERSAL(M,w) tiene respuesta 'SI', entonces M acepta w, entonces M' acepta L y la respuesta de NOTRIVIAL(M') es también 'SI'.
Si UNIVERSAL(M,w) tiene respuesta 'NO', entonces M no acepta w, y esta máquina M' acepta $\emptyset$ y la respuesta de NOTRIVIAL(M') es también 'NO'.
Como UNIVERSAL(M,w) no es decidible, UNIVERSAL(M,w) tampoco lo es.

Otros Problemas Indecidibles

El Problema de las Correspondencias de Post (POST(A1,A2))

Tenemos un alfabeto de referencia A, y dos listas con la misma longitud $B_1 = w_1, \ldots, w_k$, $B_2 = u_1, \ldots, u_k$ de palabras sobre A. El problema es determinar si existe una secuencia no vacía de enteros $i_1, \ldots, i_m$ tales que $w_{i_1} \ldots w_{i_m} = u_{i_1} \ldots u_{i_m}$.

Podemos pensar en cada pareja (w_i, u_i) como un bloque de construcción:

w_i
u_i

.

La especificación del problema nos da un conjunto de bloques disponibles. Por ejemplo:

abb
a

b
abb

a
bb

Otros Problemas Indecidibles

El Problema de las Correspondencias de Post (POST(A1,A2))

Tenemos un alfabeto de referencia A, y dos listas con la misma longitud $B_1 = w_1, \ldots, w_k$, $B_2 = u_1, \ldots, u_k$ de palabras sobre A. El problema es determinar si existe una secuencia no vacía de enteros $i_1, \ldots, i_m$ tales que $w_{i_1} \ldots w_{i_m} = u_{i_1} \ldots u_{i_m}$.

Podemos pensar en cada pareja (w_i, u_i) como un bloque de construcción:

w_i
u_i

.

La especificación del problema nos da un conjunto de bloques disponibles. Por ejemplo:

abb	b	a
a	abb	bb

En este caso, la respuesta es afirmativa. Secuencia: $1,3,1,1,3,2,2$

abb	a	abb	abb	a	b	b	$\rightarrow$	$abbaabbabbabb$
a	bb	a	a	bb	abb	abb		$abbaabbabbabb$

El Problema de las Correspondencias de Post Modificado (POSTM(A1,A2))

PCP Modificado

Tenemos un alfabeto de referencia A, y dos listas con la misma longitud $B_1 = w_1, \ldots, w_k$, $B_2 = u_1, \ldots, u_k$ de palabras sobre A tales que $u_i, w_j \neq \varepsilon$ y un entero i. El problema es determinar si existe una secuencia no vacía de enteros $i_1, \ldots, i_m$ tales que $i_1 = i$ y $w_{i_1} \ldots w_{i_m} = u_{i_1} \ldots u_{i_m}$.

La única diferencia es que ahora nos dicen el bloque por el que necesariamente hay que comenzar y que las palabras son no vacías.

El Problema de las Correspondencias de Post Modificado

Teorema

El problema de las correspondencias de Post modificado es indecidible si A tiene al menos 2 símbolos.

Si A tiene dos símbolos, podemos codificar palabras de cualquier alfabeto, de manera que sea un homomorfismo.
Vamos a reducir el lenguaje universal a este problema.
Vamos a suponer una MT M y una palabra w. La pregunta es si $w \in L(M)$. Vamos a construir un problema de correspondencias de Post modificado con la misma solución.
El alfabeto que vamos a considerar para el alfabeto del problema de las correspondencias es el alfabeto de la MT, más el conjunto de estados, más un separador que no esté en los conjuntos anteriores $*$
Si $w = a_1 \dots a_n$

Introducimos el bloque

$*$
$*q_0 a_1 \dots a_n *$

Demostración (Cont.)

Si $w = a_1 \dots a_n$

Introducimos el bloque $\begin{array}{|c|}\hline * \\ \hline *q_0 a_1 \dots a_n * \\ \hline \end{array}$, que será el bloque de comienzo.

Por cada transición $\delta(q, a) = (q', b, D)$, introducimos el bloque $\begin{array}{|c|}\hline qa \\ \hline bq' \\ \hline \end{array}$

Por cada transición $\delta(q, a) = (q', b, I)$, introducimos el bloque $\begin{array}{|c|}\hline cqa \\ \hline q'cb \\ \hline \end{array}$ para cada c del alfabeto de la MT

Para cada símbolo a de la MT y $*$ introducir $\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline a \\ \hline \end{array}$

Los bloques $\begin{array}{|c|}\hline * \\ \hline \#* \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|}\hline * \\ \hline *\# \\ \hline \end{array}$

Demostración (Cont.)

Para cada $q \in F$, añade los bloques $\begin{array}{|c|}\hline aq \\ \hline q \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|}\hline qa \\ \hline q \\ \hline \end{array}$,

y el bloque $\begin{array}{|c|}\hline q** \\ \hline * \\ \hline \end{array}$.

La idea de la reducción es representar en los bloques el cálculo que realiza la MT para la palabra de entrada w escribiendo el historial de sus configuraciones.

Cada configuración (q, u, v) se representa por la cadena uqv y las distintas configuraciones se separan por $*$.

En la parte de abajo se lleva una configuración de ventaja respecto a la parte de arriba.

Cuando llegamos a un estado de aceptación, la parte de abajo empieza a disminuir símbolo a símbolo paso a paso y compiándose arriba, hasta que quede abajo $\ldots * q *$ y arriba $\ldots * qa *$ ó $\ldots * aq *$ donde q es el estado final. Entonces podemos completar con el último bloque aceptación.

El PCP es indecidible

Teorema

El problema de las correspondencias de Post es indecidible

Se reduce el problema de las correspondencias de Post modificado al problema de las correspondencias de Post.

Supongamos que nos dan un conjunto de bloques $\boxed{\begin{matrix}u_1\\v_1\end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix}u_2\\v_2\end{matrix}}, \dots, \boxed{\begin{matrix}u_n\\v_n\end{matrix}}$ y que el primero necesariamente es el bloque 1 (no hay ninguna pérdida de generalidad al suponer que el obligatorio para comenzar va primero).
Construimos el siguiente problema de Post con dos símbolos nuevos: $\blacklozenge, \blacksquare$ y con los bloques:

$$\boxed{\begin{matrix}\blacklozenge u_1\\ \blacklozenge v_1 \blacklozenge\end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix}\blacklozenge u_1\\ v_1 \blacklozenge\end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix}\blacklozenge u_2\\ v_2 \blacklozenge\end{matrix}}, \dots, \boxed{\begin{matrix}\blacklozenge u_n\\ v_n \blacklozenge\end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix}\blacklozenge \blacksquare\\ \blacksquare\end{matrix}}$$

Donde, si $u = a_1 a_2 \dots a_n$, se entiende que

$$\blacklozenge u = \blacklozenge a_1 \blacklozenge a_2 \dots \blacklozenge a_n, \quad u\blacklozenge = a_1 \blacklozenge a_2 \dots \blacklozenge a_n \blacklozenge, \quad \blacklozenge u \blacklozenge = \blacklozenge a_1 \blacklozenge a_2 \dots \blacklozenge a_n \blacklozenge$$

Es fácil comprobar que los dos problemas son equivalentes.

Problemas sobre Gramáticas

Suponemos que G, G_1 y G_2 son gramáticas independientes del contexto dadas y R es un lenguaje regular.

- Saber si $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$.
- Determinar si $L(G) = T^*$, donde T es el conjunto de símbolos terminales.
- Comprobar si $L(G_1) = L(G_2)$.
- Determinar si $L(G_1) \subseteq L(G_2)$.
- Determinar si $L(G_1) = R$.
- Comprobar si $L(G)$ es regular.
- Determinar si G es ambigua.
- Conocer si $L(G)$ es inherentemente ambiguo.
- Comprobar si $L(G)$ es determinista.

Reducción: ambigüedad

Teorema

Saber si una gramática independiente del contexto es ambigua (AMBIGUA(G)) es indecidible.

Se reduce el problema de las correspondencias de Post. Supongamos el alfabeto A y los bloques $\boxed{\begin{array}{c}u_1\\v_1\end{array}}, \cdots, \boxed{\begin{array}{c}u_k\\v_k\end{array}}$.

Sea $B = A \cup \{b_1, \ldots, b_k\}$ donde $b_i \notin A$ y construimos la siguiente gramática:

$S \to C|D$

$C \to u_i C b_i | u_i b_i, \quad i = 1, \ldots, k$

$D \to v_i D b_i | v_i b_i, \quad i = 1, \ldots, k$

La solución al problema de las correspondencias de Post es equivalente a que la gramática sea ambigua.

Demostración

Supongamos el alfabeto A y los bloques $\boxed{\begin{array}{c}u_1\\ v_1\end{array}}, \cdots, \boxed{\begin{array}{c}u_k\\ v_k\end{array}}$.

Sea $B = A \cup \{b_1, \ldots, b_k\}$ donde $b_i \notin A$ y construimos la siguiente gramática:
$S \to C|D, \quad C \to u_i C b_i | u_i b_i, \quad i = 1, \ldots, k, \quad D \to v_i D b_i | v_i b_i, \quad i = 1, \ldots, k,$
Se basa en lo siguiente:

- Las palabras generadas por la gramática son las generadas a partir de C más las generadas a partir de D
- Las palabras generadas a partir de C son de la forma $u_{i_1} \ldots u_{i_l} b_{i_l} \ldots b_{i_1}$, donde $i_j \in \{1, \ldots, k\}$. Sólo hay una forma de generar una de estas palabras a partir de C.
- Las palabras generadas a partir de D son de la forma $v_{i_1} \ldots v_{i_l} b_{i_l} \ldots b_{i_1}$, donde $i_j \in \{1, \ldots, k\}$. Sólo hay una forma de generar una de estas palabras a partir de D.
- La gramática es ambigua cuando una misma palabra u es generada a partir de C y a partir de D, es decir cuando $u = u_{i_1} \ldots u_{i_l} b_{i_l} \ldots b_{i_1} = v_{i'_1} \ldots v_{i'_{l'}} b_{i'_{l'}} \ldots b_{i'_1}$.
  Esto solo ocurre si $l' = l$ e $i_j = i'_j, \forall j$. Es decir cuando existen $(i_1, \ldots, i_l)$ tal que $u_{i_1} \ldots u_{i_l} = v_{i_1} \ldots v_{i_l}$, es decir cuando el PCP tiene solución.