Completitud. Tª Punto Fijo de Banach

Sea (E,d) un espacio métrico, una sucesión $\{x_n\} \in E$ es de Cauchy si verifica

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : p,q \geq m \Longrightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy de puntos de E converge en E.

Un espacio normado y completo para la métrica asociada a la norma es un espacio de Banach.

Sea (F, ρ) otro espacio métrico, $f : E \to F$ una aplicación, f es contractiva si

$$\exists\, 0 \leq M < 1 : \rho(f(x), f(y)) \leq M d(x,y) \quad , \forall x,y \in E$$

· Tª pto fijo:

Sea (E,d) un espacio métrico completo no vacío. Si $f : E \to E$ es una aplicación contractiva, entonces f tiene un único pto fijo.

Es decir, $\exists!\, x \in E : f(x) = x$.

Dem

Dem

Probamos que como máximo hay un punto fijo. Sea $\alpha < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y), \quad \forall x, y \in E$$

Supongamos $x, y \in E$: $f(x) = x$ y $f(y) = y$. Entonces

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y), \text{ como } \alpha < 1 \Rightarrow d(x,y) = 0,$$

Con lo que $x = y$. Probamos ahora que ~~exige~~ existe un punto fijo

Como $E \neq \emptyset$, cogemos $x_0 \in E$. Definimos $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Por ser f contractiva, $d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha d(x_1, x_0)$

Suponiendo que $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$, lo cual es cierto para $n=1$

Tenemos $d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq \alpha d(x_{n+1}, x_n) \leq$

$$\alpha \alpha^n d(x_1, x_0) = \alpha^{n+1} d(x_1, x_0), \text{ por tanto}$$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Probemos que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Si $n, m \in \mathbb{N}$ por (1) tenemos

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k \leq \alpha^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

Como $0 \leq \alpha < 1$, la serie converge. Como $\{\alpha^n\} \to 0$, de la desigual anterior tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en E.

Como (E,d) es completo, $\{x_n\}$ converge. Sea $x = \lim\{x_n\}$. Por ser f contractiva, es continua, por tanto $\{f(x_n)\} \to f(x)$

Dado que $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tomando límites tenemos $x = f(x) \Rightarrow$ f tiene un punto fijo. De $d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ para n fijo obtenemos $d(x, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ cuando $m \to \infty$, por ser la dist. continua

Teorema del Valor medio. Consecuencias

• Tª Valor Medio

Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$ y sea I el intervalo cerrado de extremos a y b. Si $f: I \to \mathbb{R}$ es continua en I y derivable en $\mathring{I}$, $\exists c \in \mathring{I}: \; f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

• Tª Valor Medio para campos escalares.

Sean $a,b \in \mathbb{R}^N$ con $a \neq b$ y $[a,b] \subset A \subset \mathbb{R}^N$. Si $f: A \to \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$ entonces $\exists\, c \in]a,b[: f(b)-f(a) = \langle \nabla f(c), b-a \rangle = Df(c)(b-a)$, donde $]a,b[= [a,b] \setminus \{a,b\}$

Dem

Aplicamos el TVM a $\sigma: [0,1] \to \mathbb{R}$, $\sigma(t) = f(a+t(b-a))$,
Como σ es la composición de f y la función $\gamma: [0,1] \to A$ definida por $t \mapsto a+t(b-a)$, tenemos que σ es continua en $[0,1]$ por composición de funciones continuas. Sabemos que γ es derivable y $\gamma'(t) = b-a$, $\forall t \in [0,1]$. Usando la regla de la cadena obtenemos que σ es derivable en $]0,1[$ y
$\sigma'(t) = D\sigma(t)(1) = D(f \circ \gamma)(t)(1) = Df(\gamma(t))(D\gamma(t)(1)) =$
$= Df(a+t(b-a))(\gamma'(t)) = \langle \nabla f(a+t(b-a)), b-a \rangle$.
Como σ cumple las hipótesis del TVM, $\exists t_0 \in]0,1[$ tal que $f(b)-f(a) = \sigma(1)-\sigma(0) = \langle \nabla f(a+t_0(b-a)), b-a \rangle$. Basta llamar $c = a+t_0(b-a)$ $\square$

Tenemos dos consecuencias importantes del TVM para campos escalares:

- Sea A un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y f un campo escalar diferenciable en A. Si $\exists M: \|Df(x)\| \leq M \; \forall x \in A$, entonces f es lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que M.
- Sea A un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ y f un campo escalar diferenciable en A. Si Df es constantemente igual a cero, f es constante.

Dem

$A \neq \emptyset$. Sea $a \in A$. Definimos $B \subset A$, $B = \{x \in A : f(x) = f(a)\}$

Como $a \in B$, $B \neq \emptyset$. Como f es diferenciable, es continua, luego B es un cerrado en la topología inducida en A.

Sea $b \in B$. Por ser A abierto, $\exists r > 0 : B(b,r) \subset A$. Por ser $B(b,r)$ un abierto convexo y $Df = 0$ en $B(b,r)$, f es constante en la bola. Por tanto $f(x) = f(b) = f(a) \; \forall x \in B(b,r)$

Luego $B(b,r) \subset B$ y tenemos que B es abierto en A. Como A es conexo y B es un subconjunto no vacío, abierto y cerrado en A, entonces $B = A$. Por tanto f es constante. $\square$

Teorema del Valor Medio. Consecuencias

Lema

Si $x \in \mathbb{R}^M$, $\exists y \in \mathbb{R}^M : \|y\|_2 = 1$ y $\langle x, y \rangle = \|x\|_2$

Dem

Si $x = 0$ es trivial.

Para $x \neq 0$ tomamos $y = \dfrac{x}{\|x\|_2}$. Es claro que $\|y\|_2 = 1$ y

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \frac{x}{\|x\|_2} \rangle = \frac{1}{\|x\|_2} \langle x, x \rangle = \frac{1}{\|x\|_2} \|x\|_2^2 = \|x\|_2$$

$\square$

· T^a Valor Medio para campos vectoriales

Sean $a, b \in \mathbb{R}^N$ con $a \neq b$ y $[a,b] \subset A \subset \mathbb{R}^N$ y $]a,b[\subset \mathring{A}$.
Si $f: A \to \mathbb{R}^M$ es un campo vectorial continuo en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, entonces $\|f(b) - f(a)\| \leq \|b-a\| \sup\{\|Df(x)\| : x \in]a,b[\}$.

Dem

Por el lema anterior $\exists y_0 \in \mathbb{R}^M : \|y_0\|_2 = 1$, verificando

$\langle f(b) - f(a), y_0 \rangle = \| f(b) - f(a) \|_2$ (1)

Si $L : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ viene dada por $L(y) = \langle y, y_0 \rangle$, $(y \in \mathbb{R}^M)$

L es lineal y $\|L\| = \|y_0\|_2 = 1$, con la norma euclídea en $\mathbb{R}^M$.

Por ser L lineal y continua, es diferenciable y $DL = L$.

El campo escalar $g : A \to \mathbb{R}$ dado por $g(x) = (L \circ f)(x) = \langle f(x), y_0 \rangle$ $(x \in A)$
verifica las hipótesis del TVM en $[a,b]$ gracias a la regla de la cadena, luego $\exists c \in]a,b[: g(b) - g(a) = Dg(c)(b-a)$ (2)

Usando la regla de la cadena, $Dg(c)(b-a) = D(L\circ f)(c)(b-a) =$

$= (DL(f(c)) \circ Df(c))(b-a) = L(Df(c)(b-a)) = \langle Df(c)(b-a), y_0 \rangle$

Sustituyendo (1) en (2) tenemos

$$\|f(b)-f(a)\|_2 = \langle f(b)-f(a), y_0 \rangle = \langle Df(c)(b-a), y_0 \rangle$$

Acotando, como $\|y_0\|_2 = 1$, obtenemos

$$\|f(b)-f(a)\|_2 \leq \|Df(c)(b-a)\|_2 \leq \|Df(c)\| \, \|b-a\| \leq$$

$$\|b-a\| \sup\{\|Df(x)\| : x \in]a,b[\}$$

Compacidad. Caracterización en $\mathbb{R}^N$. Tª Conservación compacidad

En todo lo que sigue, (E,d) espacio métrico.

Sea $A\subset E$. Un recubrimiento por abiertos de A es una familia $\{O_i : i\in I\}$ de subconjuntos abiertos de E tal que $A\subset \bigcup_{i\in I} O_i$

Dados dos recubrimientos por abiertos de A, $\{O_i : i\in I\}$ y $\{G_j : j\in J\}$, $\{O_i : i\in I\}$ es un subrecubrimiento de $\{G_j : j\in J\}$ si $O_i\in\{G_j : j\in J\}$ para cada $i\in I$.

A es compacto si de todo recubriento por abiertos de A puede extraerse un subrecubrimiento finito de A.

Por el Tª de Heine-Borel, un espacio métrico es compacto sii toda sucesión de elementos del espacio métrico admite una subsucesión convergente a un elemento del espacio métrico

Tª Bolzano-Weierstrass: Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^N$ admite una subsucesión convergente.

Dem

Probamos por inducción, para $N=1$ es cierto (Tª en $\mathbb{R}$). Suponemos que es cierto para N y lo probamos para $N+1$.

Sea $\{x_k\}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}^{N+1}$. Sea $x_k=(y_k,z_k)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$ para cada $k\in\mathbb{N}$. Por hipótesis $\{y_k\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^N$, por tanto existe una subsucesión $\{y_{\sigma(k)}\}\to y\in\mathbb{R}^N$. Como $\{z_k\}$ está acotada en $\mathbb{R}$, también lo estará $\{z_{\sigma(k)}\}$. Por el Tª Bolzano-Weierstrass $\exists\ \{z_{\sigma(\tau(k))}\}\to z\in\mathbb{R}$. Como $\{y_{\sigma(k)}\}\to y$ entonces $\{y_{\sigma(\tau(k))}\}\to y\in\mathbb{R}^N$.

Por tanto $\{x_{\sigma(\tau(k))}\} = \{(y_{\sigma(\tau(k))}, z_{\sigma(\tau(k))})\} \to (y, z) \in \mathbb{R}^{N+1}$ $\square$

Sea $K \subset \mathbb{R}^N$. Equivalen:

a) K es compacto (recubrimientos)

b) Toda sucesión de puntos de K admite una subsucesión que converge a un punto de K

c) K es cerrado y acotado.

Dem

a) <=> b)) Por el Tª de Heine-Borel-Lebesgue

a) => c)) Se cumple para espacios métricos

c) => b)) Suponemos K cerrado y acotado. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en K. Como K es acotado, por el Tª Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in \mathbb{R}^N$. Usando la caracterización secuencial de la adherencia tenemos que $x \in \overline{K}$. Como K es cerrado, entonces $x \in K$ y queda probado b). $\square$

Tª Conservación de la compacidad

Sea E, F espacios métricos, K un subconjunto compacto de E y $f: K \to F$ continua. Entonces $f(K)$ es compacto

Dem

Sea $\{y_n\} \in f(K)$, $\exists \{x_n\} \in K : f(x_n) = y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por ser K compacto (Tª Heine-Borel) $\exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in K$. Por ser f continua $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, es decir $\{y_{\sigma(n)}\} \to f(x) \in f(K)$, por tanto $f(K)$ es compacto

Conexión. Caracterización y conservación por func. continuas

Sea (X,d) un espacio métrico, $C \subset X$ es conexo si la única partición de C en dos abiertos relativos es la trivial.

Un espacio métrico es conexo si los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados son el total y el vacío.

• 1ª conservación de conexos por aplicaciones continuas

Sean X, Y dos espacios métricos, $C \subset X$ conexo y $f: C \to Y$ continua. Entonces $f(C)$ es conexo.

__Dem__

Como la conexión depende de la topología inducida, suponemos f sobreyectiva con $f(C) = Y$.

Sean U y V abiertos disjuntos de Y tal que $f(C) = U \cup V$.
Como f es continua, entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en C tales que $C = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Además $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son disjuntos.

Por ser C conexo tenemos que $f^{-1}(U) = \emptyset$ o $f^{-1}(V) = \emptyset$.
Como f es sobreyectiva, entonces $U = f(f^{-1}(U)) = f(\emptyset) = \emptyset$ ó $V = f(f^{-1}(V)) = f(\emptyset) = \emptyset$. Por tanto C es conexo. $\square$

Sea $(\mathfrak{X}, d)$ un espacio métrico y $\emptyset \neq C \subset \mathfrak{X}$. Equivalen:

a) C es conexo

b) Toda función continua $f: C \to \mathbb{R}$ verifica que $f(C)$ es un intervalo

c) Toda función continua de C en $\{0,1\}$ es constante.

Dem

a⇒b) Consecuencia de la conservación de la conexión por aplicaciones continuas.

b⇒c) Trivial

c⇒a) Si C no es conexo existe $\{U, V\}$ partición no trivial de C en abiertos relativos. Definimos la función $f: C \to \{0,1\}$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & \text{si } x \in V \end{cases}$$

que es continua por el caracter local de la continuidad, y $f(C) = \{0,1\}$. Por tanto c no es cierta ($c \Rightarrow a \Leftrightarrow \neg a \Rightarrow \neg c$)

Escaneado con CamScanner

Tª Función implícita

· Tª de diferenciación de la inversa

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \mathring{A}$ y $f: A \to \mathbb{R}^N$ inyectiva, diferenciable en a y $f(a) \in \mathring{f(A)}$. Equivalen:

1) $f^{-1}: f(A) \to A$ es diferenciable en $f(a)$

2) $f^{-1}: f(A) \to A$ es continua en $f(a)$ y $(Jf(a)) \neq 0$

Si se verifican las condiciones anteriores, entonces $Jf^{-1}(f(a)) = Jf(a)^{-1}$, equivalentemente, $Df^{-1}(f(a)) = Df(a)^{-1}$

Sean A, B abiertos en $\mathbb{R}^N$. Se dice que $f: A \to B$ es un difeomorfismo si f es biyectiva, diferenciable y f^{-1} es diferenciable

· Tª función inversa versión local

Sea $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f: A \to \mathbb{R}^N$ un campo vectorial diferenciable. Supongamos que Df es continua en $a \in A$ y que $Df(a)$ es biyectiva. Entonces existe un entorno abierto U de a, $U \subset A$ tal que $V := f(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^N$, f es un difeomorfismo de U sobre V y $f^{-1}: V \to U$ es una función de clase C^1 en $f(a)$. Además,

$$D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}, \forall x \in U.$$

Equivalentemente

$$J(f^{-1})(f(x)) = (Jf(x))^{-1}, \forall x \in U$$

Tª función implícita

Dem

Por hipótesis $f \in C^1$ en $a \in \mathring{A}$ y $\det(Jf(a)) \neq 0$. Por tanto $T = Df(a)$ es biyectiva. Componemos f con difeomorfismos de forma que se consiga la hipótesis de $a = f(a) = 0$ y $Df(a) = Df(0) = I$ donde sabemos que el Tª es cierto.

Sea $\tau_a : A - a \to A$, $f : A \to \mathbb{R}^n$, $\tau_{-f(a)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde $\tau_a(x) = x + a$, $\tau_{-f(a)}(x) = x - f(a)$

$A - a$ es un abierto que contiene a 0 y τ_a, $\tau_{-f(a)}$ y T^{-1} son de clase C^1 en sus dominios. $D\tau_a = I = D\tau_{-f(a)}$, $DT^{-1} = T^{-1}$.

Luego $g = T^{-1} \circ \tau_{-f(a)} \circ f \circ \tau_a$ es diferenciable por la regla de la cadena.

Se tiene que $Dg(x) = T^{-1} \circ I \circ Df(a+x) \circ I = T^{-1} \circ Df(a+x)$, $\forall x \in A - a$

Como Df es continua en a, Dg es continua en 0.

Además $\tau_a(0) = a$, $\tau_{-f(a)}(f(a)) = 0$ y $T^{-1}(0) = 0$, luego $g(0) = 0$ y $Dg(0) = T^{-1} \circ Df(a) = I$.

Por tanto existen abiertos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al cero O_1 y O_2 tal que g es un difeomorfismo de O_1 y O_2 y $O_1 \subset A - a$. Tomando $U = O_1 + a$ y $V = f(U)$, como $g = T^{-1} \circ \tau_{-f(a)} \circ f \circ \tau_a$ es un difeomorfismo de O_1 y O_2 y la composición de difeomorfismos es cerrada, entonces $f = \tau_{f(a)} \circ T \circ g \circ \tau_{-a}$ es un difeomorfismo de U en V, que es un abierto de $\mathbb{R}^n$ por ser la imagen de un abierto por un ~~difeomorfismo~~ homeomorfismo. Por el Tª de diferenciación de la inversa tenemos $Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$, $\forall x \in U$. Como Df es continua en a y la inversión de operadores también, Df^{-1} es continua en $f(a)$. □

Escaneado con CamScanner

• Tª función inversa (global)

Sea $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f: A \to \mathbb{R}^N$ un campo vectorial de clase C^1. Si f es inyectiva y $\det(Jf(x)) \neq 0 \ \forall x \in A$, entonces $f(A)$ es un abierto de $\mathbb{R}^N$ y f es un difeomorfismo de clase C^1 de A en $f(A)$. Si $f \in C^K(A)$, f es un difeomorfismo de clase C^K.

• Tª función implícita

Sean $G \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ un cjto abierto y $f: G \to \mathbb{R}^M$ un campo vectorial de clase C^1. Suponemos que $\exists (a,b) \in G : f(a,b) = 0$ y que

$$\det \begin{pmatrix} D_{N+1} f_1(a,b) & \cdots & D_{N+M} f_1(a,b) \\ \vdots & & \\ D_{N+1} f_M(a,b) & & D_{N+M} f_M(a,b) \end{pmatrix} \neq 0$$

Entonces $\exists \Omega$ entorno abierto de (a,b), $\Omega \subset G$, un entorno abierto U de a y una función $\varphi: U \to \mathbb{R}^M$ de clase C^1 tal que

$$\{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}$$

Se tiene que $\forall x \in U$ se verifica

$$\det \begin{pmatrix} D_{N+1} f_1(x,\varphi(x)) & \cdots & D_{N+M} f_1(x,\varphi(x)) \\ & \ddots & \\ D_{N+1} f_M(x,\varphi(x)) & & D_{N+M} f_M(x,\varphi(x)) \end{pmatrix} \neq 0$$

<u>Dem</u>

Primero comprobamos que $\{(x, \varphi(x)) : x \in U\} \subset \{(x,y) \subset \Omega : f(x,y) = 0\}$ usando la versión local del Tª de la función inversa con $F(x,y) = (x, f(x,y))$, $G \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$. Comprobamos la otra parte de la inclusión que

Luego usamos que F es un difeomorfismo para definir el $\det(D(x, \varphi(x)))$

Teorema de Taylor para campos escalares. Aplicaciones

Sea $n \in \mathbb{N}$, $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f: A \to \mathbb{R}$ un campo escalar que tiene derivadas parciales de orden n en un punto $a \in A$. Notaremos:

$$d^k(f,a,x) = \left(\sum_{i=1}^{N} D_i f(a) x_i \right)^k, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

- $k=1$, $d^1(f,a,x) = Df(a)(x) = \langle \nabla f(a), x \rangle = \sum_{i=1}^{N} D_i f(a) x_i$, $x \in \mathbb{R}^N$
- $k=2$, $d^2(f,a,x) = \sum_{i,j=1}^{N} D_{ij} f(a) x_i x_j$, $x \in \mathbb{R}^N$
- $k=3$, $d^3(f,a,x) = \sum_{i,j,l=1}^{N} D_{ijl} f(a) x_i x_j x_l$, $x \in \mathbb{R}^N$

- Tª Taylor

Sea $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f: A \to \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $f \in C^{k+1}(A)$ y $a, x \in \mathbb{R}^N$ con x tq $[a, a+x] \subset A$. Entonces existe $c \in]a, a+x[$ tal que
$$f(a+x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} d^i(f,a,x) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1}(f,c,x)$$

<u>Dem</u>

Tenemos $[a, a+x] = \{a + tx : 0 \leq t \leq 1\} \subset A$. Como $\{t \in \mathbb{R} : a+tx \in A\}$ es abierto por ser la imagen inversa de A por la función continua $t \mapsto a+tx$, y contiene al intervalo $[0,1]$, $\exists I \supset [0,1]$ abierto tal que $a+tx \in A$ $\forall t \in I$. Definimos $\gamma: I \to \mathbb{R}^N$ por $\gamma(t) = a+tx$.
Consideramos $h: I \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$.
Sabemos que es derivable y su derivada viene dada por:
$$h'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \sum_{j=1}^{n} D_j f(\gamma(t)) x_j = d^1(f, \gamma(t), x)$$

Como las funciones $D_j f$ tienen derivadas parciales continuas son diferenciables. Podemos calcular la derivada de la función $t \mapsto ((D_j f)\circ\gamma)(t)$, ~~~~ igual que hemos hecho con h.

$$((D_j f)\circ\gamma)'(t) = \langle \nabla(D_j f)(\gamma(t)), x \rangle = \sum_{k=1}^{n} D_k(D_j f)(\gamma(t))\, x_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} D_{kj} f(\gamma(t))\, x_k$$

Por tanto:

$$h''(t) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} D_{kj} f(\gamma(t))\, x_k\right) x_j = \sum_{j,k=1}^{n} D_{kj} f(\gamma(t))\, x_k x_j = d^2(f, \gamma(t), x)$$

Análogamente comprobamos $h'''(t) = d^3(f, \gamma(t), x)$. En general, tenemos $h^{(j)}(t) = d^j(f, \gamma(t), x)$. Como las derivadas de orden k tienen derivadas parciales continuas son diferenciables, esto nos dice que h es $k+1$ veces derivable en I con derivada de orden $k+1$ continua en I. Aplicamos el Tª de Taylor a h para obtener que $\exists \lambda \in [0,1]$ tal que:

$$h(1) = h(0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} h^{(j)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} h^{(k+1)}(\lambda)$$

Como $h(1) = f(a+x)$, $h(0) = f(a)$, $h^{(j)}(0) = d^j(f, a, x)$ y $h^{(k+1)}(\lambda) = d^{k+1}(f, a+\lambda x, x)$

Nos queda que:

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} d^j(f, a, x) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1}(f, c, x)$$

Con $c = a + \lambda x \in [a, x]$ $\square$

Fª de Taylor para campos escalares. Aplicaciones

· Fª de Taylor-Young

Sea $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^N$ y $f: A \to \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $f \in C^K(A)$, $a \in A$, $r > 0$: $B(a,r) \subset A$. Entonces existe $\varphi: B(0,r) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{i!} d^i(f,a,x) + \|x\|^K \varphi(x), \quad \forall x \in B(0,r)$$

Además $\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 0$.

Dem

Usamos el Tº de Taylor en $x+a$. Y añadimos al final de la expresión $\frac{1}{K!} d^K(f,a,x) - \frac{1}{K!} d^K(f,a,x)$.

Tenemos que probar que $\lim_{x \to 0} \frac{d^K(f,c,x) - d^K(f,a,x)}{\|x\|^K} = 0$

Usando la continuidad de las derivadas parciales de orden K en a, y que el numerador anterior es una suma finita de términos, obtenemos que el numerador está acotado por un $\varepsilon > 0$.

□

Def

Si f tiene derivadas parciales de segundo orden en a, llamamos hessiano de f en a a la matriz de las derivadas parciales de segundo orden de f en a,

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} D_{11} f(a) & D_{12} f(a) & \cdots & D_{1N} f(a) \\ D_{21} f(a) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ D_{N1} f(a) & \cdots & & D_{NN} f(a) \end{pmatrix}$$

Escaneado con CamScanner

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, $A = \mathring{A}$ y $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$ y $\nabla f(a) = 0$. Sea Q la forma cuadrática asociada a $Hf(a)$

- Si Q es definida positiva, f tiene mínimo relativo en a
- Si Q es def. negativa, f tiene máximo relativo en a
- Si f tiene máximo relativo en a, entonces Q es semidefinida negativa
- Si f tiene mínimo relativo en a, entonces Q es semidefinida positiva.
- Si Q es indefinida, entonces f no tiene ningún extremo relativo en a.

Vamos a probar que si f tiene mínimo relativo en a, Q es semidefinida positiva.

Como f tiene mín. rel. en a, $\exists r > 0 : B(a, r) \subset A$ y $f(x) \geq f(a)$ si $x \in B(a, r)$. Por tanto

$$\frac{f(a+x) - f(a)}{\|x\|^2} \geq 0 \quad \forall x \in B(0, r), \ x \neq 0$$

Por el Tª de Taylor-Young, sabemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(a+x) - f(a) - \frac{1}{2} Q(x)}{\|x\|^2} = 0$$

Sea $v \in \mathbb{R}^N : \|v\| = 1$, tenemos que

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - \frac{1}{2} Q(tv)}{t^2}$$

Como $\frac{Q(tv)}{t^2} = Q(v)$, para cada real t, entonces

$$\frac{1}{2} Q(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t^2} \geq 0$$

Tema 4 Diferenciabilidad, deriv direcc y deriv parc. Relación ....

• Aplicación diferenciable:

Sean X, Y esp. normados, $A \subset X$, $a \in \mathring{A}$ y $f: A \to Y$ una aplicación.

f es diferenciable en a si $\exists T \in L(X,Y)$ tq

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

• Si $Y = \mathbb{R}$ entonces f es un campo escalar y $T(x-a) = \langle \nabla f(a), x \rangle$

• Si $Y = \mathbb{R}^N$ $N \geq 2$, f es un campo vectorial y $T(x-a) = (J_f(a) x^t)^t$

• Derivadas direccionales:

Sean X, Y esp. norm, $A \subset X$, $a \in A$, $v \in X \setminus \{0\}$. $0 \in \{t \in \mathbb{R} : a + tv \in A\}'$

$f: A \to Y$. f tiene derivada direccional en a según v si

$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t \cdot v) - f(a)}{t} := f'(a; v)$$

• Derivadas parciales:

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \mathring{A}$, $f: A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. La derivada parcial de f en a respecto de la variable i-ésima viene dado por

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t \cdot e_i) - f(a)}{t} \quad (1 \leq i \leq N)$$

y se denota por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ o $D_i f(a)$

• **Prop:** Sean X, Y esp. normados, $A = \mathring{A} \subset X$ y $f: A \to Y$.

Si f es diferenciable en a entonces f tiene derivadas direccionales en a y $f'(a;v) = Df(a)(v) \quad \forall v \in X \setminus \{0\}$

<u>Dem</u>

Sea $T = Df(a)$. Por hipótesis $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$

Sea $v \in X \setminus \{0\}$, si $t \in \mathbb{R}^*$, tomamos $x = a + tv$. Si $t \to 0$, entonces $x \to a$, luego $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tv) - f(a) - T(tv)}{\|tv\|} = 0$.

Usando la homogeneidad de la norma y multiplicando por $\|v\|$ se tiene

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - T(tv)}{|t|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{|t|} = T(v) \implies \exists\, f'(a;v) = T(v) = Df(a)(v)$$

Diferenciabilidad, deriv direcc...

• **Prop** Sea $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \mathring{A}$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Suponemos que ∇f existe en un entorno de a y que es continuo en a. Entonces f es diferenciable en a.

Dem

Para $N = 2$, Suponemos que $\exists \nabla f$ en un entorno de (a,b) y es continuo. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis, $\exists\, \delta > 0$ tq

$$\|(x,y)-(a,b)\|_\infty < \delta \Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in A \\ \exists \nabla f(x,y) \\ |D_i f(x,y) - D_i f(a,b)| \leq \varepsilon, \quad i = 1,2 \end{cases}$$

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ verifica que $0 < \|(x,y)-(a,b)\|_\infty < \delta$ entonces

$$f(x,y) - f(a,b) - \langle \nabla f(a,b), (x-a, y-b) \rangle =$$

$$\big(f(x,y) - f(a,y) - D_1 f(a,b)(x-a) \big) + \big(f(a,y) - f(a,b) - D_2 f(a,b)(y-b) \big)$$

Si $x = a$ tenemos $|f(x,y) - f(a,y) - D_1 f(a,b)(x-a)| = 0 \leq \varepsilon |x-a|$ (1)

Suponemos $x \neq a$ y fijamos $y \in]b-\delta, b+\delta[$.

Tª Hausdorf

Sea X un esp. vectorial real, una norma X es una función $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_0^+$ que verifica:

i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall x \in X$

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \; \forall x, y \in X$

El par $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

Dos normas $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ en un mismo espacio vectorial X son equivalentes si $\exists\, m, M > 0$ tal que

$$m\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\|, \; \forall x \in X$$

~~Luego~~ Tenemos también que dos normas en el mismo espacio vectorial son equivalentes sii generan la misma topología.

- Tª de Hausdorf

En $\mathbb{R}^n$ dos normas cualquiera son equivalentes.