Por lo tanto, en $x=a$ se alcanza el màximo absoluto y en $x=0$, se alcanza el mínimo absoluto:

$$G(0)=\int_0^0 \sqrt{a^2-t^2}\,dt=0$$

$$G(a)=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-t^2}\,dt=2\int_0^a\sqrt{a^2-t^2}\,dt=$$

$$=2\int_0^a\sqrt{a^2\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)}\,dt=2a\int_0^a\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}\,dt\overset{*}{=}$$

$$=2a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(\operatorname{sen} z)^2}\;a\cos z\,dz=2a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 z\,dz=$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2z}{2}\,dz=a^2\left[z+\frac{\operatorname{sen}2z}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=a^2\frac{\pi}{2}$$

$$Im(G)=[G(0),G(a)]=\left[0,\ a^2\frac{\pi}{2}\right]$$

$*$ $\operatorname{sen} z=\dfrac{t}{a}$ $\quad a\cos z\,dz=dt$

si $t=a \Rightarrow \operatorname{sen} z=1 \Rightarrow z=\dfrac{\pi}{2}$

si $t=0 \Rightarrow \operatorname{sen} z=0 \Rightarrow z=0$

(24) Dado $a \in \mathbb{R}^+$, calcular la imagen de la función $G: [0,a] \to \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{a^2 - t^2}\, dt \quad \forall x \in [0,a]$$

Sea

$$f(t) = \sqrt{a^2 - t^2} \quad \forall t \in]-a,a[\;,\; f \in C(]-a,a[)$$

Por el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, $G \in D([0,a])$ y:

$$= \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2} \quad \forall x \in [0,a]$$

Ademas, $G \in C([0,a])$, por el th. de Weierstrass y por el teorema del valor intermedio:

$$G([0,a]) = [\min G(x), \max G(x)]$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{a^2 - x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow x = a \quad \text{de donde:}$$

$$G'(0) = 2a > 0 \Rightarrow G \text{ es estrictamente creciente en } [0,a[$$

Escaneado con CamScanner