⑦ Sea $f: [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$ una función continua. Calcula:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\tfrac{1}{n}\right) f\left(\tfrac{2}{n}\right) \cdots f\left(\tfrac{n}{n}\right)}.$$

Tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\tfrac{1}{n}\right) f\left(\tfrac{2}{n}\right) \cdots f\left(\tfrac{n}{n}\right)} = L$$

$$\lim_{n\to\infty} \log\left[f\left(\tfrac{1}{n}\right) f\left(\tfrac{2}{n}\right) \cdots f\left(\tfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \log(L)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\left[\log\left(f\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) + \log\left(f\left(\tfrac{2}{n}\right)\right) + \ldots + \log\left(f\left(\tfrac{n}{n}\right)\right)\right] = \log(L)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot \sum_{k=1}^{n} \log\left(f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) = \log(L)$$

Como f es una función continua, entonces es integrable en $[0,1]$. Si consideramos la partición $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$ y tomamos como etiquetas el extremo superior de cada uno de los subintervalos:

$$\int_0^1 \log(f(x))\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(f\left(0 + k\,\frac{1-0}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right)$$

Por tanto:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 \log(f(x))\, dx = \log(L)$$

$$e^{\int_0^1 \log(f(x))\, dx} = L$$

En conclusión:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \log(f(x))\, dx}}$$