⑥ Sea $f:[0,1] \to [0,1]$ una función continua verificando que:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt$$

para cualquier $x \in [0,1]$. Demuestra que $f(x)=0$ $\forall x \in [0,1]$

Definimos una función $g: [0,1] \to [0,1]$.

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_x^1 f(t)\,dt = 0.$$

Vamos a calcular $g'(x)$ haciendo uso del teorema fundamental del cálculo $\Rightarrow$ f

si tenemos:

$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow H'(x) = f(x) \quad \text{(Teorema 15.2.1)}$$

$$K(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = K'(x) = f(1)\cdot 0 - f(x)\cdot 1 = -f(x)$$

(Corolario)

Luego

$$g'(x) = f(x) - (-f(x)) = 2f(x). \quad \forall x \in]0,1[.$$

$$g'(x) = 0 \iff f(x) = 0$$

Como $x \in]0,1[$ sabemos que $f|_{]0,1[}(x) = 0$ (siendo x arbitrario) por tanto al ser f continua concluimos que $f(x)=0$ $\forall x \in [0,1]$.

Escaneado con CamScanner