Análisis Matemático II

Tema 3: Construcción de la medida de Lebesgue

16, 22 y 23 de marzo

El conjunto ordenado $[0, \infty]$

El conjunto $[0, \infty]$ y su relación de orden

$$[0, \infty] = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

Extendemos el orden usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x \leqslant \infty \qquad \forall x \in [0,\infty]$$

De esta forma, $[0, \infty]$ es un conjunto totalmente ordenado con

$$\min\,[0, \infty] = 0 \qquad \text{y} \qquad \max\,[0, \infty] = \infty$$

Supremos e ínfimos

Todo subconjunto no vacío de $[0, \infty]$

tiene supremo e ínfimo

Observación

Para un conjunto no vacío $A \subset [0, \infty]$ se tiene $\sup A < \infty$ si, y sólo si,

$\infty \notin A$ y A está mayorado en $\mathbb{R}$

El espacio topológico $[0, \infty]$

La topología de $[0, \infty]$

La topología usual de $[0, \infty]$ es la que tiene como abiertos las uniones arbitrarias de intervalos abiertos, que pueden ser de tres tipos:

$$]\alpha, \beta[= \{x \in [0, \infty] \, : \, \alpha < x < \beta\}$$

$$[0, \beta[= \{x \in [0, \infty] \, : \, x < \beta\}$$

$$]\alpha, \infty] = \{x \in [0, \infty] \, : \, \alpha < x\} \qquad (\text{con } \alpha, \beta \in [0, \infty])$$

Propiedades inmediatas

- $\{]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, : \, \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \, \varepsilon < x \}$ es base de entornos de cada $x \in \mathbb{R}^+$
- $\{ [0, \varepsilon[\, : \, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \}$ es base de entornos de 0
- $[0, \infty]$ induce en $\mathbb{R}_0^+$ la misma topología que $\mathbb{R}$
- $\{]\alpha, \infty] \, : \, \alpha \in \mathbb{R}^+ \}$ es base de entornos de ∞
- Si $x_n \in [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\{x_n\} \to \infty \iff \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \ \exists \, m \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant m \ \Rightarrow \ \alpha < x_n$$

Relación entre el orden y la topología de $[0, \infty]$

La mejor descripción de ambos

La función $f : [0,1] \to [0,\infty]$ definida por:

$$f(t) = \frac{t}{1-t} \quad \forall t \in [0,1[\quad \text{y} \quad f(1) = \infty$$

es un homeomorfismo creciente, luego identifica $[0,1]$ y $[0,\infty]$

como espacios topológicos y como conjuntos ordenados

Vemos por ejemplo que $[0,\infty]$ es metrizable, compacto y conexo

Compatibilidad de la topología con el orden

Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes en $[0,\infty]$, entonces:

$$x_n \leqslant y_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n$$

Sucesiones monótonas, límites superior e inferior

Convergencia de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona $\{x_n\}$, de elementos de $[0, \infty]$, es convergente

- $\{x_n\}$ creciente $\implies \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  en cuyo caso escribimos $\{x_n\} \nearrow x$ donde $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

- $\{x_n\}$ decreciente $\implies \lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

  y entonces escribimos $\{x_n\} \searrow x$ donde $x = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Límites superior e inferior

Toda sucesión $\{x_n\}$ en $[0, \infty]$

tiene un límite superior y un límite inferior, dados por:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup\{x_k : k \geqslant n\}\Big) \quad \text{y} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\inf\{x_k : k \geqslant n\}\Big)$$

Es claro que $\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n$, y para $x \in [0, \infty]$ se tiene:

$$\{x_n\} \to x \iff \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$$

La suma en $[0,\infty]$

Definición de suma

Extendemos la suma usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x+\infty=\infty+x=\infty \qquad \forall x\in[0,\infty]$$

Propiedades de la suma

- Asociativa y conmutativa, con 0 como elemento neutro
- No verifica la ley de cancelación: para $x,y,z\in[0,\infty]$,
  de $x+z=y+z$ sólo se deduce que $x=y$ cuando $z\neq\infty$
- Compatible con el orden: para $x,y,z\in[0,\infty]$ se tiene:
  $$x\leqslant y \quad\Longrightarrow\quad x+z\leqslant y+z$$
  lo que permite sumar miembro a miembro dos desigualdades
- Continua: si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes en $[0,\infty]$,
  entonces: $$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n$$

Sumas de series en $[0,\infty]$

Existencia de la suma de una serie

Si $x_n \in [0,\infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siempre tiene sentido escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Asociatividad y conmutatividad de las sumas de series

Para toda función $\alpha : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to [0,\infty]$

y toda biyección $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha(n,m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha\big(\tau(k)\big) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n,m)$$

El producto en $[0, \infty]$

Definición del producto

Extendemos el producto usual de $\mathbb{R}_0^+$ definiendo:

$$x\,\infty = \infty\,x = \infty \quad \forall x \in]0, \infty], \qquad 0\,\infty = \infty\,0 = 0$$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma
- Compatible con el orden: para $x, y, z, t \in [0, \infty]$ se tiene:
$$x \leqslant y, \quad z \leqslant t \quad \Longrightarrow \quad x\,z \leqslant y\,t$$
- Para $x, y \in [0, \infty]$, el producto es continuo
en el punto (x, y) si, y sólo si, $\{x, y\} \neq \{0, \infty\}$
- Si $x_n, y_n \in [0, \infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $x, y \in [0, \infty]$, entonces:
$$\{x_n\} \nearrow x, \quad \{y_n\} \nearrow y \quad \Longrightarrow \quad \{x_n\,y_n\} \nearrow x\,y$$
- y en particular: $\displaystyle \alpha \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\,y_n \quad \forall \alpha \in [0, \infty]$

Medida elemental de los intervalos acotados

Notación para todo lo que sigue

N será siempre un número natural fijo y

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$

Escribiremos: $\quad \Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Para $k \in \Delta_N$ llamamos $\pi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a la k-ésima proyección coordenada,

es decir: $\quad \pi_k(x) = x(k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Intervalos acotados y su medida

Un intervalo en $\mathbb{R}^N$ es un producto cartesiano de intervalos en $\mathbb{R}$

y $\mathcal{J}$ será el conjunto de todos los intervalos acotados en $\mathbb{R}^N$

La medida elemental de los intervalos acotados

es la función $M : \mathcal{J} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $M(\emptyset) = 0$ y

$$M(I) = \prod_{k=1}^{N} \Big(\sup \pi_k(I) - \inf \pi_k(I) \Big) \qquad \forall I \in \mathcal{J} \setminus \{\emptyset\}$$

Para $I \in \mathcal{J}$ se dice que $M(I)$ es la medida elemental de I

Definición de la medida de Lebesgue

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

La medida exterior de Lebesgue es la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$ dada por

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(I_n) : I_n \in \mathcal{J} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Para cada $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, se dice que $\lambda^*(E)$ es la medida exterior de E

Un conjunto $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es medible cuando

$$\lambda^*(W) = \lambda^*(W \cap E) + \lambda^*(W \setminus E) \qquad \forall\, W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Denotaremos por $\mathcal{M}$ a la familia de todos los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es la restricción de λ^* a $\mathcal{M}$, es decir,

la función $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dada por: $\quad \lambda(E) = \lambda^*(E) \qquad \forall\, E \in \mathcal{M}$

Para cada $E \in \mathcal{M}$ se dice que $\lambda(E)$ es la medida de E

Propiedades de la medida exterior de Lebesgue

Crecimiento

La medida exterior de Lebesgue es una función creciente, es decir:

$$E \subset F \subset \mathbb{R}^N \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(F)$$

La propiedad más importante

Para toda sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, se tiene:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

Esto se expresa diciendo que λ^* es σ-subaditiva

En particular λ^* es finitamente subaditiva, esto es:

$$n \in \mathbb{N}, \quad E_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \;\; \forall k \in \Delta_n \quad \Longrightarrow \quad \lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(E_k)$$

Por tanto: $\quad \lambda^*(E \cup F) \leqslant \lambda^*(E) + \lambda^*(F) \quad \forall E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Una consecuencia de la subaditividad finita

Abundancia de conjuntos medibles

Todo conjunto con medida exterior nula es medible, es decir:

$$E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N), \quad \lambda^*(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{M}, \quad \lambda(E) = 0$$

En particular, si $E \subset \mathbb{R}^N$ es numerable, entonces E es medible con $\lambda(E) = 0$

Notación

Ω conjunto no vacío, $\mathcal{P}(\Omega)$ familia de todos los subconjuntos de Ω

Para $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ escribimos $C = A \uplus B$

para indicar que $C = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $k \in \Delta_n$, escribimos $A = \biguplus_{k=1}^{n} A_k$

para indicar que $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ y $A_k \cap A_j = \emptyset$ para $k \neq j$

Si $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, escribimos $A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$

para indicar que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$

Primer resultado fundamental sobre la medida de Lebesgue

Teorema

La familia $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles verifica:

(a) $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$

(b) $E \in \mathcal{M} \implies \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{M}$

(c) $E_n \in \mathcal{M} \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \;\; \Rightarrow \;\; E \in \mathcal{M}$

Estas tres propiedades se resumen diciendo que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra

A su vez, la medida de Lebesgue $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ verifica:

$$E_n \in \mathcal{M} \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

Se alude a esta propiedad diciendo que λ es σ-aditiva

Consecuencias del teorema anterior (I)

Estabilidad de los conjuntos medibles

- $n \in \mathbb{N}, \ \ E_k \in \mathcal{M} \ \ \forall k \in \Delta_n \implies \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}, \ \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$
- $E_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$
- $E, F \in \mathcal{M} \implies E \setminus F \in \mathcal{M}$

Abstracción de estas propiedades

Una σ-álgebra en un conjunto no vacío Ω

es una familia de conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

estable por uniones numerables y complementos, con $\Omega \in \mathcal{A}$

Entonces $\mathcal{A}$ es estable por intersecciones numerables y diferencias

Consecuencias del teorema anterior (II)

Propiedades relacionadas con la σ-aditividad

La medida de Lebesgue es:

- finitamente aditiva, esto es:

$$n \in \mathbb{N} \quad E_k \in \mathcal{M} \ \forall k \in \Delta_n\,, \quad E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)$$

- creciente: $E, F \in \mathcal{M}\,, \quad E \subset F \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E) \leqslant \lambda(F)$
- σ-subaditiva: $E_n \in \mathcal{M} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$
- finitamente subaditiva:

$$n \in \mathbb{N} \quad E_k \in \mathcal{M} \ \forall k \in \Delta_n\,, \quad \Longrightarrow \quad \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)$$

Continuidad de la medida de Lebesgue

Sucesiones monótonas de conjuntos

Sea Ω un conjunto no vacío y $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Si la sucesión $\{A_n\}$ es creciente, es decir, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \nearrow A$ donde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Si $\{A_n\}$ es decreciente, es decir, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

escribimos $\{A_n\} \searrow A$ donde $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Propiedades de continuidad de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue es crecientemente continua, es decir:

$$E_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{E_n\} \nearrow E \quad \Longrightarrow \quad \big\{\lambda(E_n)\big\} \nearrow \lambda(E)$$

También es decrecientemente continua, en el siguiente sentido:

$$E_n \in \mathcal{M} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{E_n\} \searrow E, \ \ \lambda(E_1) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \big\{\lambda(E_n)\big\} \searrow \lambda(E)$$

Abstracción de los resultados anteriores

Concepto general de medida

Una medida, en un conjunto no vacío Ω,

es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, definida en una σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$,

que verifica $\mu(\emptyset) = 0$ y es σ-aditiva, es decir,

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Con esta nomenclatura, el teorema principal nos asegura que

la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es, efectivamente, una medida en $\mathbb{R}^N$

Todas las consecuencias obtenidas para la medida de Lebesgue

son válidas para cualquier medida

Ejemplo, muy sencillo, de medida en cualquier conjunto $\Omega \neq \emptyset$

Para cada $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ sea $\mu(E)$ el número de elementos de E,

entendiendo que $\mu(E) = \infty$ cuando el conjunto E es infinito

Entonces $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ es una medida: el número de elementos en Ω

Intervalos acotados y figuras elementales

Intersección y diferencia de intervalos acotados

Para cualesquiera $I, J \in \mathcal{J}$ se tiene que $I \cap J \in \mathcal{J}$ y que

$$I \setminus J = \biguplus_{k=1}^{n} H_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; H_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Figuras elementales

Un conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es una figura elemental, cuando

$$A = \biguplus_{k=1}^{n} I_k \quad \text{donde} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; I_k \in \mathcal{J} \;\; \forall k \in \Delta_n$$

Denotamos por $\mathcal{E}$ a la familia de todas las figuras elementales en $\mathbb{R}^N$

Estabilidad de las figuras elementales

La familia $\mathcal{E}$ de las figuras elementales es estable por

intersecciones finitas, diferencias y uniones finitas

Medida elemental de los intervalos acotados

Aditividad finita

$$I \in \mathcal{J}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad I_j \in \mathcal{J} \quad \forall j \in \Delta_n\,, \quad I = \biguplus_{j=1}^{n} I_j \quad \Longrightarrow \quad M(I) = \sum_{j=1}^{n} M(I_j)$$

Extensión a las figuras elementales

Existe una función $\widetilde{M} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_0^+$

verificando que $\widetilde{M}(I) = M(I)$ para todo $I \in \mathcal{J}$

que es finitamente aditiva, es decir,

$$n \in \mathbb{N}\,, \quad A_k \in \mathcal{E} \quad \forall k \in \Delta_n\,, \quad A = \biguplus_{k=1}^{n} A_k \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{M}(A) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}(A_k)$$

La propiedad clave de la función M

$$I \in \mathcal{J}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad I_k \in \mathcal{J} \quad \forall k \in \Delta_n\,, \quad I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k \quad \Longrightarrow \quad M(I) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M(I_k)$$

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

Aproximación por intervalos compactos o abiertos

Para cada $I \in \mathcal{J}$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $K, J \in \mathcal{J}$, tales que

$$\overline{K} = K \subset I \subset J = J^\circ, \quad M(I) < M(K) + \varepsilon, \quad M(J) < M(I) + \varepsilon$$

Cálculo de la medida exterior

Para todo $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ se tiene:

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(J_n) \ : \ J_n^\circ = J_n \in \mathcal{J} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right\}$$

Una propiedad básica de la medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue extiende a la elemental de los intervalos acotados:

$$\mathcal{J} \subset \mathcal{M} \qquad \text{y} \qquad \lambda(I) = M(I) \ \ \forall I \in \mathcal{J}$$