

$$3) \quad X_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

$$X_n = \sum_{K=1}^n \frac{1}{n+K} = \frac{1}{n} \sum_{K=1}^n \frac{1}{1+\frac{K}{n}}$$

Consideremos $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in [0,1]$$

Por la ~~regla de Barrow~~

Como f es continua, entonces es integrable, y por la regla de Barrow:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x| \Big|_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Por último, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{K=1}^n f\left(\frac{K}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{K=1}^n \frac{1}{1+\frac{K}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \boxed{\ln(2)} \end{aligned}$$