不偏ゲームと Grundy 数

以下、主に将来の自分へ向けたメモであり、[1]（石取りゲームの数学、佐藤文広）を参考にしてまとめる。

目次

1. 不偏ゲーム

不偏ゲームとは以下の性質を満たすゲームである。

- 先手と後手の 2 人で交互に手を進める。
- 同一局面で選択できる手は先手と後手で等しい。
- どの局面からも有限回の手数で必ず終了局面に到達する。

有名な不偏ゲームとしては Nim が挙げられ、これは後ほど例として取り上げる。一方で、不偏ゲームではないゲームの例としてオセロが挙げられる。これは、オセロはある局面で打てる手が先手と後手で異なるためである。

2. 不偏ゲームの数学的な定義

定義 2.1 (不偏ゲーム): ([1], p. 22) $\mathcal{P}$ を空でない集合、$\mathcal{R}$ を写像 $\mathcal{R} : \mathcal{P} \to 2^{\mathcal{P}}$ とする。 このとき、組 $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ のことを**不偏ゲーム**という。 さらに、$\mathcal{P}$ の元を **$\mathcal{A}$ の局面**、$\mathcal{R}$ を **$\mathcal{A}$のルール**という。 また、$\mathcal{R}(P)$ の元を**局面 P の後続局面**という。

注意 *2.1*: 2^X は X のべき集合である。

以下、節 2 では $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ を不偏ゲームとする。

さらに、本記事では不偏ゲームには有限回の手で終了するという条件を課す。

定義 2.2 (ゲームの進行): ([1], p. 23) $n > 0$ を自然数とする。$P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}$ が $P_{i+1} \in \mathcal{R}(P_i)$ $(i = 1, ..., n - 1)$ を満たすとき、列 $(P_1, ..., P_n)$ は **P_1 から始まる長さ n のゲーム列**であるという。 一つの局面 P からなる列 (P) も長さ 1 のゲーム列であるとみなす。

定義 2.3 (有限性条件): ([1], p. 23) 次を満たすとき、$\mathcal{A}$ を**有限型の不偏ゲーム**という。

- ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、$\mathcal{A}$ の長さ n_0 以上のゲーム列が存在しない。すなわち、$\mathcal{A}$ のゲーム列の長さは有界である。

以下、本記事では有限型の不偏ゲームのみを扱う。

定義 2.4 (局面の長さ): ([1], p. 23) 局面 $P \in \mathcal{P}$ に対して、$l(P)$ を P から始まるゲーム列の長さの最大値とする。$l(P)$ は不偏ゲームの有限性条件から一意に定まる。$l(P)$ を**局面 P の長さ** という。

定義 2.5 (終了局面): ([1], p.23) 局面 P が $\mathcal{R}(P) = \emptyset$ を満たすとき、P を**終了局面**という。終了局面全体の集合を $\mathcal{E}$ とおく:

$$\mathcal{E} := \{P \in \mathcal{P} \mid \mathcal{R}(P) = \emptyset\}$$

$\mathcal{A}$ の有限性から、$\mathcal{E} \neq \emptyset$ となることが分かる。また、$P \in \mathcal{E}$ に対して $l(P) = 1$ が成り立つ。

3. 不偏ゲームの勝敗

不偏ゲームの勝敗を考える。

定義 3.1 (不偏ゲームの勝敗): ([1], 補題 2.4) $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ を不偏ゲームとする。 再帰的に $\mathcal{G}$ と $\mathcal{S}$ を定義する：

$$\mathcal{G} := \mathcal{E} \cup \{P \in \mathcal{P} \mid \forall Q \in \mathcal{R}(P), Q \in \mathcal{S}\}$$
$$\mathcal{S} := \{P \in \mathcal{P} \mid \exists Q \in \mathcal{R}(P), Q \in \mathcal{G}\}$$

$\mathcal{G}$ の元を**後手必勝局面**、$\mathcal{S}$ の元を**先手必勝局面**という。

　局面の長さが小さい順に考えることで、任意の $P \in \mathcal{P}$ が $P \in \mathcal{G} \cup \mathcal{S}$ となることが分かる。さらに、$\mathcal{P} = \mathcal{G} \sqcup \mathcal{S}$ となることも分かる。

　これちゃんと再帰的に定義できてますかね？

注意 *3.1*: [1] では 定義 3.1 を定義ではなく補題として与えている。

注意 *3.2*: 上の定義で定まる勝敗を考えたゲームを**正規形**の不偏ゲームという。本記事では正規形の不偏ゲームのみを扱う。

不偏ゲームの勝敗を直観的に説明する。

- 不偏ゲームの勝敗は、交互に手を打ってこれ以上手を進められなくなった方の負け、というルールのことである。
- 後手必勝局面とは、その局面で手番のものが負けという意味である。つまり、その局面を渡したものが勝ちである。
- 先手必勝局面とは、その局面で手番のものが勝ちという意味である。つまり、その局面を渡したものが負けである。

後手必勝であるか先手必勝であるかは、以下のように順に定まっていく。

- ($l(P) = 1$) これ以上手が打てない終了局面は後手必勝である。($\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ のこと。)
- ($l(P) = 2$) 後手必勝局面である終了局面に、一手で進められる局面は先手必勝局面である。
- ($l(P) \geq 3$) 後続局面がすべて先手必勝局面であるような局面は後手必勝であり、後続局面に後手必勝局面が存在するような局面は先手必勝である。

すなわち、先手必勝局面からはある手を選び続けることで、

　（先手必勝）→（後手必勝）→（先手必勝）→（後手必勝）→ ... →（先手必勝）→（終了局面）

　となるゲーム列を必ず構成することができる。なぜなら、先手必勝局面からは必ず後手必勝局面を選択でき、 後手必勝局面では先手必勝となる局面しか選択できないからである。

4. 不偏ゲームの例

例 4.1 (一山Nim): n 個の石が積み上げられている山が一つある。このとき、二人で交互に山から好きなだけ石を取り合う。 先に石を取ることができなくなった方の負けである。このゲームを **一山 Nim** という。

一山Nimを不偏ゲームの定義にもとづいて集合論の言葉で述べる。局面全体の集合を $\mathcal{P} = \{0, 1, ..., n\}$ とおき、ルール$\mathcal{R} : \mathcal{P} \to 2^{\mathcal{P}}$ を

$$\mathcal{R}(0) = \emptyset,$$
$$\mathcal{R}(i) = \{0, ..., i-1\} \quad (0 < i \leq n)$$

と定める。このとき、組 $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ は一山 Nim を表す有限型の不偏ゲームである。局面 i は山に i 個の石が残っている局面を表している。

さらに、後手必勝局面全体の集合 $\mathcal{G}$ と先手必勝局面全体の集合 $\mathcal{S}$ は、

$$\mathcal{G} = \{0\}$$
$$\mathcal{S} = \{1, ..., n\}$$

である。なぜなら、定義より終了局面 0 は後手必勝局面であり、任意の局面 $i > 0$ に対して、i からは後手必勝局面 $0 \in \mathcal{R}(i)$ に遷移できるからである。

これを表にすると、

i	0	1	2	3	4	5	6	...
$\mathcal{G}/\mathcal{S}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	...

となる。 上の表で、$\mathcal{G}$ は後手必勝局面、$\mathcal{S}$ は先手必勝局面という意味である。 競技プログラミングでは、このような先後の必勝判定を bool 型の配列で行うことがある。その際には、局面の長さが小さい順に判定を行えばよい。

例 4.2 (制限一山 Nim): 一山 Nim で一度に取ることができる石の数を 3 個以下に制限に制限したものを 制限一山 Nim という。 制限一山 Nim をモデル化する。

局面全体の集合は一山 Nim と変わらず $\mathcal{P} = \{0, 1, ..., n\}$ とおく。ルール $\mathcal{R} : \mathcal{P} \to 2^{\mathcal{P}}$ を

$$\mathcal{R}(i) = \{\max(0, i - j) \mid 1 \leq j \leq 3\} \quad (0 \leq i \leq n)$$

と定める。このとき、組 $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ は制限一山 Nim を表す有限型の不偏ゲームである。

さらに、

$$\mathcal{G} := \{i \in \mathcal{P} \mid i \equiv 0 \pmod 4\}$$
$$\mathcal{S} := \{i \in \mathcal{P} \mid i \not\equiv 0 \pmod 4\}$$

であることが分かる。これは帰納法、つまり以下の表を i が小さい順に埋めることで分かる。

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\mathcal{G}/\mathcal{S}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{S}$	...

例 4.3 (一般化された一山 Nim): 一山 Nim で一度に取ることができる石の数を 2 個 か 3 個のどちらか一方に制限に制限したものを考える。

局面全体の集合は一山 Nim と変わらず $\mathcal{P} = \{0, 1, ..., n\}$ とおく。ルール $\mathcal{R} : \mathcal{P} \to 2^{\mathcal{P}}$ を

$$\mathcal{R}(i) = \{\max(0, i - j) \mid j = 2 \vee j = 3\} \quad (0 \leq i \leq n)$$

と定める。このとき、やはり組 $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ は有限型の不偏ゲームである。終了局面全体の集合は$\mathcal{E} = \{0, 1\}$ であることに注意されたい。

さらに、

$$\mathcal{G} := \{i \in \mathcal{P} \mid i \equiv 0 \pmod 5 \vee i \equiv 1 \pmod 5\}$$
$$\mathcal{S} := \{i \in \mathcal{P} \mid i \equiv 2 \pmod 5 \vee i \equiv 3 \pmod 5 \vee i \equiv 4 \pmod 5\}$$

であることが分かる。これも帰納法、つまり以下の表を i が小さい順に埋めることで分かる。

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mathcal{G}/\mathcal{S}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{G}$	...

5. Grundy 数

不偏ゲームの局面に対して Grundy 数を定義する。

定義 5.1 (Grundy 数): ([1], pp. 34-35) $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ を不偏ゲームとする。 局面 $P \in \mathcal{P}$ の **Grundy 数** $g(P)$ を次で再帰的に定義する。

$$g(P) := \operatorname{mex}\{g(Q) \mid Q \in \mathcal{R}(P)\}$$

ただし、$A \subset \mathbb{N}$ に対して、$\operatorname{mex} A := \min(\mathbb{N} \setminus A)$ である。

特に終了局面 $P \in \mathcal{E}$ に対して、$g(P) = \operatorname{mex} \emptyset = 0$ である。

Grundy 数を用いて不偏ゲームの必勝判定を行うことができる。

定理 5.2 (Grundy 数による必勝判定): ([1], 定理 3.1) 不偏ゲーム $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ の後手必勝局面全体の集合を$\mathcal{G}$、先手必勝局面全体の集合を $\mathcal{S}$ とする。

このとき、

$$\mathcal{G} = \{P \in \mathcal{P} \mid g(P) = 0\}$$
$$\mathcal{S} = \{P \in \mathcal{P} \mid g(P) \neq 0\}$$

が成立する。

証明は mex の性質そのものである。 証明は読まなくて良いです。

証明: $A := \{P \in \mathcal{P} \mid g(P) = 0\}$ 、$B := \{P \in \mathcal{P} \mid g(P) \neq 0\}$ とおく。 $\mathcal{P} = A \sqcup B = \mathcal{G} \sqcup \mathcal{S}$ であるから $A \subset \mathcal{G}$ と $B \subset \mathcal{S}$ を示せばよい。

局面の長さによる帰納法で示す。定義から、

$$\mathcal{G} = \mathcal{E} \cup \{P \in \mathcal{P} \mid \forall Q \in \mathcal{R}(P), Q \in \mathcal{S}\}$$
$$\mathcal{S} = \{P \in \mathcal{P} \mid \exists Q \in \mathcal{R}(P), Q \in \mathcal{G}\}$$

だった。

- $\mathcal{E} \subset A$ について、$\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ となることは良い。
- 長さ k 以下の局面 $P \in \mathcal{P}$ に対して、$P \in A$ ならば $P \in \mathcal{G}$ であり、$P \in B$ ならば $P \in \mathcal{S}$ が成り立つと仮定する。
- このとき、$P \in \mathcal{P}$ を長さ $k+1$ の局面とする。
  - まず、$P \in A$ だったとする。$g(P) = 0$ であるので、P の任意の後続局面 $Q \in \mathcal{R}(P)$ に対して、$g(Q) \neq 0$ をみたす。これは mex の定義から従う。$l(Q) \leq k$ であるので帰納法の仮定から、$Q \in \mathcal{S}$ である。したがって、$P \in \mathcal{G}$ となる。

- 次に、$P \in B$ だったとする。$g(P) \neq 0$ であるので、P のある後続局面 $Q \in \mathcal{R}(P)$ が存在して、 $g(Q) = 0$ をみたす。これも mex の定義による。$l(Q) \leq k$ であるので、帰納法の仮定から、 $Q \in \mathcal{G}$ である。したがって、$P \in \mathcal{S}$ となる。

□

6. Grundy 数の例

不偏ゲームの例としてあげた 3 つのゲームの Grundy 数を計算する。この節で求める Grundy 数の表と 節 4 で計算した表とを比べると、 $\mathcal{G}$ が $g(i) \neq 0$ と、$\mathcal{S}$ が $g(i) = 0$ と、 それぞれ対応していることを確かめられる。

例 6.1 (一山 Nim): 一山 Nim の局面全体の集合は $\mathcal{P} = \{0, 1, ..., n\}$ 、ルール $\mathcal{R} : \mathcal{P} \to 2^{\mathcal{P}}$ は

$$\mathcal{R}(i) = \{j \mid 0 \leq j < i\} \quad (0 \leq i \leq n)$$

だった。

局面の長さが小さい順に、すなわち、i について昇順に Grundy 数を計算して表にすると、

i	0	1	2	3	4	5	6	...
$g(i)$	0	1	2	3	4	5	6	...

となる。 一般に $g(i) = i$ であることが分かる。

例 6.2 (制限一山 Nim): 制限一山 Nim の局面全体の集合は $\mathcal{P} = \{0, 1, ..., n\}$ 、 ルール $\mathcal{R} : \mathcal{P} \to 2^{\mathcal{P}}$ は

$$\mathcal{R}(i) = \{\max(0, i - j) \in \mathcal{P} \mid 1 \leq j \leq 3\} \quad (0 \leq i \leq n)$$

と定めた。

局面の長さが小さい順に、すなわち、i について昇順に Grundy 数を計算して表にすると、

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$g(i)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	...

となる。帰納的に $g(i) = (i \bmod 4)$ であることが分かる。ただし、$i \bmod 4$ は i を 4 で割ったあまりである。

例 6.3 (一般化された一山 Nim): 例 4.3 では一山 Nim で一度に取ることができる石の数を 2 個 か 3 個のどちらか一方に制限に制限したものを考えた。

局面全体の集合 $\mathcal{P} = \{0, 1, ..., n\}$ として、ルール $\mathcal{R} : \mathcal{P} \to 2^{\mathcal{P}}$ は

$$\mathcal{R}(i) = \{\max(0, i - j) \mid j = 2 \vee j = 3\} \quad (0 \leq i \leq n)$$

と定めた。

局面の長さが小さい順にすなわち、 i について昇順に Grundy 数を計算して表にすると、

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
g(i)	0	0	1	1	2	0	0	1	1	2	0	...

となる。このあとの Grundy 数も $0, 0, 1, 1, 2$ と繰り返しになることが帰納的に分かる。すなわち、

$$g(i) = \begin{cases} 0 & (i \equiv 0, 1) \\ 1 & (i \equiv 2, 3) \\ 2 & (i \equiv 4) \end{cases}$$

となる。

一般に、一般化された一山 Nim において、取ることができる石の数の集合が有限集合である場合は、Grundy 数は周期をもつことが分かる([1], 定理 5.3)。

以上の 3 つの例、それぞれを 節 4 で計算した表と比べると、 $\mathcal{G}$ が $g(i) \neq 0$ と、$\mathcal{S}$ が $g(i) = 0$ と、それぞれ対応しているのが分かる。

このことから分かるように、単純なゲームの必勝判定をしたいだけであれば Grundy 数を計算する必要はない。単に 節 4 で行ったように局面が後手必勝であるか先手必勝であるかの二通りで判定していけばよいからである。しかし、Grundy 数は局面の勝敗以上の情報を含んでいる。 節 7 で述べるように、複数のゲームを組み合わせた際にその威力が発揮される。

7. ゲームの和

二つの不偏ゲームを独立に行うゲームを二つの**不偏ゲームの和**という。 このとき、もとの二つのゲームのどちらか一方のみを一手進めることを、ゲームの和の一手として定める。

集合論の言葉でより正確に表現しよう。

定義 7.1 (不偏ゲームの和): ([1], pp. 39-40) $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{R}_1)$ と $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{R}_2)$ をそれぞれ不偏ゲームとする。 このとき、$\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 : \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \to 2^{\mathcal{P}_1} \times 2^{\mathcal{P}_2}$ を $P_1 \in \mathcal{P}_1, P_2 \in \mathcal{P}_2$ に対して、

$$\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2(P_1, P_2) = \{(Q_1, P_2) \mid Q_1 \in \mathcal{R}_1(P_1)\} \cup \{(P_1, Q_2) \mid Q_2 \in \mathcal{R}_2(P_2)\}$$

と定める。このとき、不偏ゲーム $(\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2, \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2)$ のことを、$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ と表して、**$\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ の和**という。

すなわち、ゲームの和 $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ の局面全体の集合は直積 $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ である。また、局面 (P_1, P_2) の後続局面は P_1 か P_2 のどちらか一方を進めた局面である。

不偏ゲームの和について結合法則が成り立つ。 すなわち、$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ を不偏ゲームとすると、

$$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) + \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 + (\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3)$$

が成り立つ。

不偏ゲームの和の Grundy 数はそれぞれの不偏ゲームの排他的論理和で表される、という驚くべき定理が成り立つ。

定理 7.2 (ゲームの和の Grundy 数): ([1], 定理 3.4) $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{R}_1), \mathcal{A}_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{R}_2)$ を不偏ゲームとする。$\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ の Grundy 数をそれぞれ $g_{\mathcal{A}_1}$ と $g_{\mathcal{A}_2}$ で表す。また、和 $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ の Grundy 数を $g_{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2}$ と定める。

このとき、局面 $P_1 \in \mathcal{P}_1, P_2 \in \mathcal{P}_2$ に対して、

$$g_{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2}(P_1, P_2) = g_{\mathcal{A}_1}(P_1) \oplus g_{\mathcal{A}_2}(P_2)$$

が成立する。ただし、$\oplus$ は各ビットごとの排他的論理和である。

証明は [1] に詳しい。

8. ゲームの和の Grundy 数の例

最後に具体的なゲームの和の Grundy 数を求める。

例 8.1: 一山 Nim $\mathcal{A}_1$（例 4.1）と制限一山 Nim $\mathcal{A}_2$（例 4.2）と一般化された一山 Nim $\mathcal{A}_3$（例 4.3）の和 $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$ を考える。それぞれの山の石の数は等しく n 個であるとする。直観的には 3 つの山を並べて、選択可能な一手は「一つの山を選び、その山で許されている数の石をとること」だと考えればよい。

$\mathcal{P}_n = \{0, 1, ..., n\}$ とおく。$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$ の局面全体の集合は $(\mathcal{P}_n)^3 = \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n$ である。さらに、ルール $\mathcal{R} : (\mathcal{P}_n)^3 \to 2^{(\mathcal{P}_n)^3}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(i,j,k) = \{(i', j, k) |\ 0 \le i' < i\} \cup \{(i, \max(0, j - s), k) \mid 1 \le s \le 3\} \\ \cup \{(i, j, \max(0, k - t)) \mid t = 2 \lor t = 3\} \quad \left((i,j,k) \in (\mathcal{P}_n)^3\right) \end{aligned}$$

である。和 $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$ の Grundy 数 $g_{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3}$ は 定理 7.2 と 節 6 の計算から

$$g_{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3}(i,j,k) = i \oplus (j \bmod 4) \oplus a_k$$

となる。ただし、a_k は

$$a_k = \begin{cases} 0 & (k \equiv 0, 1) \\ 1 & (k \equiv 2, 3) \\ 2 & (k \equiv 4) \end{cases}$$

と定める。

競技プログラミングにおいて、非常に大きい自然数 n に対して、n 個のゲームの和を考えることがある。ゲームの和の局面全体の個数はとても大きいので、grundy 数を直接計算するには膨大な計算が必要となる。しかし、定理 7.2 を用いることで小ない計算回数でゲーム和の Grundy 数を求めることができる。すなわち、和をとる前のゲームの grundy 数を計算して、それからゲームの和の grundy 数を求めることができる。

参考文献

[1] 佐藤文広, 石取りゲームの数学 - ゲームと代数の不思議な関係. 数学書房, 2014.