不偏ゲームと Grundy 数

eoeo

以下、将来の自分のためのメモであり、「石取りゲームの数学、佐藤文広」を参考にしてまとめる。

不偏ゲームの定義

不偏ゲームとは以下の性質を満たすゲームである。

- 先手と後手の 2 人で交互に手を進める。
- ある局面で打てる手は先手と後手で同じである。
- ゲームの終了局面が与えられている。
- どの局面からも有限回の手数で必ず終了局面に到達する。

有名な不偏ゲームとしては Nim が挙げられる。一方で、不偏ゲームではないゲームの例としてオセロが挙げられる。 これは、オセロはある局面で打てる手が先手と後手で異なるためである。

不偏ゲームの数学的な定義

定義 (不偏ゲーム): $\mathcal{P}$ を集合、$\mathcal{R}$ を写像 $\mathcal{R} : \mathcal{P} \to 2^{\mathcal{P}}$ とする。 このとき、組 $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ のことを**不偏ゲーム**という。 さらに、$\mathcal{P}$ の元を **$\mathcal{A}$ の局面**、$\mathcal{R}$ を **$\mathcal{A}$のルール**という。 また、$\mathcal{R}(P)$ の元を**局面 P の後続局面**という。

注意: 2^X は X のべき集合である。

以下、本記事では $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$ を不偏ゲームとする。

さらに、本記事では不偏ゲームには有限回の手で終了するという条件を課す。

定義 (ゲームの進行): $n > 0$ を自然数とする。$P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}$ が $P_{i+1} \in \mathcal{R}(P_i)$ $(i = 1, ..., n-1)$ を満たすとき、列 $(P_1, ..., P_n)$ は **P_1 から始まる長さ n のゲーム列**であるという。 一つの局面 P からなる列 (P) も長さ 1 のゲーム列であるとみなす。

定義 (有限性条件): 次を満たすとき、$\mathcal{A}$ を**有限型の不偏ゲーム**という。
- ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、$\mathcal{A}$ の長さ n_0 以上のゲーム列が存在しない。

以下、本記事では有限型の不偏ゲームのみを扱う。

定義 (局面の長さ): 局面 $P \in \mathcal{P}$ に対して、$l(P)$ を P から始まるゲーム列の長さの最大値とする。 $l(P)$ は不偏ゲームの有限性条件から一意に定まる。$l(P)$ を**局面 $\boldsymbol{P}$ の長さ** という。

定義 (終了局面): 局面 P が $\mathcal{R}(P) = \emptyset$ を満たすとき、P を**終了局面**という。終了局面全体の集合を $\mathcal{E}$ とおく：

$$\mathcal{E} := \{P \in \mathcal{P} \mid \mathcal{R}(P) = \emptyset\}$$

$\mathcal{A}$ の有限性から、$\mathcal{E} \neq \emptyset$ となることが分かる。また、$P \in \mathcal{E}$ に対して $l(P) = 1$ が成り立つ。

不偏ゲームの勝敗

不偏ゲームの勝敗を考える。

定義 (不偏ゲームの勝敗): このとき、以下のように再帰的に $\mathcal{G}$ と $\mathcal{S}$ を定義する。

- $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ とする。
- $P \in \mathcal{P}$ に対して、任意の後続局面 $Q \in \mathcal{R}(P)$ が $Q \in \mathcal{S}$ を満たすなら、$P \in \mathcal{G}$ とする。
- $P \in \mathcal{P}$ に対して、ある後続局面 $Q \in \mathcal{R}(P)$ が存在して、$Q \in \mathcal{G}$ を満たすなら、$P \in \mathcal{S}$ とする。

$\mathcal{G}$ の元を**後手必勝局面**、$\mathcal{S}$ の元を**先手必勝局面**という。

局面の長さが小さい順に考えることで、任意の $P \in \mathcal{P}$ が $P \in \mathcal{G} \cup \mathcal{S}$ となることが分かる。さらに、$\mathcal{P} = \mathcal{G} \sqcup \mathcal{S}$ となることも分かる。

不偏ゲームの例

例 (一山 Nim): 石が n 個つまれている山が一つある。このとき、二人で交互に好きなだけ石を取り合う。

Grundy 数