1 时空与事件

物理学中的事件概念实则现实事件的模型化，甚至可以不具备现实意义：一次爆炸，一声雷响也可以称为事件。所以在空间的一点和时间的一瞬间结合可以称为**事件（event）**。

如果两件事件同时同地发生，则称为**同一事件**。

在相对论中，时间与空间不在分离，而是结合成为**时空（spacetime）**作为物质运动的背景。由此，一件事件在时空中就是一个**时空点（spacetime point）**。

建立时空坐标系：以O为原点建立惯性坐标系$K\{t,x,y,z\}$, 设某一个事件为p发生在t时刻、A地,，则在时空中可表示为：

$$p = (t, x_A, y_A, z_A) \tag{1.1}$$

拓展阅读：牛顿运动定律，惯性系

2 相对性原理 伽利略变换

相对性原理(principle of relativity)：所有惯性系平权，任何物理定律（不仅仅限于力学定律，也包括电磁学定律）在所有惯性系的数学表达形式都具有相同形式

设一列火车在地面上匀速运动，则火车也是惯性系，也可在火车上建立惯性坐标系，不妨设地面惯性坐标系为$K\{t,x,y,z\}$， 火车惯性坐标系为$K'\{t',x',y',z'\}$。则对同一事件p，不同坐标系测量可得到不同的结果

$$p = (t, x, y, z) \tag{2.1}$$

$$p = (t', x', y', z') \tag{2.2}$$

同一事件的两组坐标应当存在某种关系，称为坐标变换式。在牛顿力学框架下，其坐标变换式为**伽利略变换**:

$$t' = t \tag{2.3}$$

$$x' = x - vt \tag{2.4}$$

$$y' = y \tag{2.5}$$

$$z' = z \tag{2.6}$$

3 光速不变原理

真空中的光速沿任何方向，对任何惯性系都是c，并与光源的运动无关。

4 闵氏时空 线元

5 洛伦兹变换

结论:

在相对论中，由于光速不变原理，原来的坐标关系式伽利略变换不再适用。两个惯性系$K\{t,x,y,z\}$ 与$K'\{t',x',y',z'\}$的坐标变换式为洛伦兹变换：

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{5.1}$$

$$y' = y \tag{5.2}$$

$$z' = z \tag{5.3}$$

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \tag{5.4}$$

其中$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$称为**洛伦兹因子**。

推导：

XXX

洛伦兹速度变换：

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \tag{5.5}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{v_x u}{c^2})} \tag{5.6}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{v_x u}{c^2})} \tag{5.7}$$

推导：

对洛伦兹变换进行微分运算可得：

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \tag{5.8}$$

$$dy' = dy \tag{5.9}$$

$$dz' = dz \tag{5.10}$$

$$dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx) \tag{5.11}$$

所以可得：

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{(dx - vdt)}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \tag{5.12}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{v_x u}{c^2})} \tag{5.13}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{v_x u}{c^2})} \tag{5.14}$$

6 时空图

7 尺缩效应、动钟变慢

时空图说明：

XXX

洛伦兹变换推导：

为了简化，设二维闵氏时空中有两个事件p_1、p_2，在K系（地面坐标系）测得的时空坐标为：

$$p_1(t_1.x_1) \tag{7.1}$$

$$p_2(t_2,x_2) \tag{7.2}$$

在K'系（火车坐标系，与K系的相对速度为v）中测得的时空坐标为：

$$p_1(t_1',x_1') \tag{7.3}$$

$$p_2(t_2',x_2') \tag{7.4}$$

7.1 尺缩效应

现在把事件具体化：

我们测量一个物体的长度，在地面上测量的时候，先用标准尺零刻度对准物体的一端,测出坐标值x_1，**同时地**，用标准尺对准物体的另一端，读出坐标值x_2，相减得到物体的长度$l=x_2-x_1$。

所以两个事件（测量尺子的行为）**同时不同地**，可抽象地写成：

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0 \tag{7.5}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = l \tag{7.6}$$

当采用洛伦兹变换把测量结果变换到K'系时，可得：

$$\begin{aligned}
l' &= x_2' - x_1' && (7.7)\\
&= \gamma[x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)] && (7.8)\\
&= \gamma l && (7.9)\\
\Delta t' &= t_2' - t_1' && (7.10)\\
&= \gamma[t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)] && (7.11)\\
&= -\gamma\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) && (7.12)\\
&\neq 0 && (7.13)
\end{aligned}$$

其中$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。

从上式可以看出，在K系看来，K'系的长度测量结果比自身参考系的长度测量结果要短，其原因为：

在K系中同时事件在K'系中不是同时事件，所以并没有十分强的可比性。

7.2 钟慢效应

我们现在测量一个时钟的快慢。先设所测时钟与标准钟走时率一致；在地面上测量的时候，先用标准钟零点对准时钟的零点（对钟），这个时刻设为t_1，过一段时间后，再用标准钟在**在同一地点（同地）**测量时钟的时刻t_2，相减得到时间差$\Delta t=t_2-t_1$

所以两个事件（测量时钟的行为）**同地不同时**，可抽象地写成：

$$\Delta t=t_2-t_1 \tag{7.14}$$

$$\Delta x=x_2-x_1=0 \tag{7.15}$$

当采用洛伦兹变换把测量结果变换到K'系时，可得：

$$\begin{aligned}
\Delta t' &= t_2'-t_1' && (7.16)\\
&= \gamma[t_2-t_1-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)] && (7.17)\\
&= \gamma\Delta t && (7.18)\\
\Delta x' &= x_2'-x_1' && (7.19)\\
&= \gamma[x_2-x_1-v(t_2-t_1)] && (7.20)\\
&= -\gamma v(t_2-t_1) && (7.21)\\
&\neq 0 && (7.22)
\end{aligned}$$

其中$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。

从上式可以看出，在K系看来，K'系的时钟测量结果比自身参考系的时钟结果要长，称之为**钟慢效应**。其原因为：

在K系中同地事件在K'系中不是同地事件，所以并没有十分强的可比性。

8 双生子佯谬

9 相对论力学

在相对论中，物体的质量与其运动速度有关，其关系为：

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{9.1}$$

推导：

XXX

10 质能关系

10.1 动能

在相对论中，若质点的静止质量为m_0,在速度为v时质量为m,则物体的动能为

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \tag{10.1}$$

推导：由相对论质量关系：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10.2}$$

可得：

$$m_0^2c^2 = m^2c^2 - v^2m^2 \tag{10.3}$$

对上式微分、移项可得：

$$c^2dm = v^2dm + mvdv \tag{10.4}$$

由质点动能的定义可得：

$$\begin{aligned}
dE_k &= \vec{F}\cdot d\vec{s} && (10.5)\\
&= \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v}dt && (10.6)\\
&= d(m\vec{v})\cdot\vec{v} && (10.7)\\
&= m\vec{v}\cdot d\vec{v} + v^2dm && (10.8)\\
&= mvdv + v^2dm && (10.9)\\
&= c^2dm && (10.10)
\end{aligned}$$

当物体从速度为0加速运动，当速度为v时，其质量从m_0增至m,所以物体动能为

$$E_k = \int_{m_0}^{m} c^2dm = mc^2 - m_0c^2 \tag{10.11}$$

其中m_0c^2为物体的静质能，为物体的固有能量。

当$v \ll c$时，

$$
\begin{aligned}
E_k &= mc^2 - m_0c^2 && (10.12)\\
&= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 && (10.13)\\
&\approx m_0c^2(1+\frac{v^2}{2c^2}+\cdots) - m_0c^2 && (10.14)\\
&= \frac{1}{2}mv^2 && (10.15)
\end{aligned}
$$

恰好回到了牛顿力学的动能形式，也从侧面证明了牛顿力学是相对论的低速近似。