**厄米矩阵**

2014/12/15

**定理4的证明** (若一个本征值是本征行列式的*k*重根, 那么这个本征值对应的所有本征矢可以组成一个*k*维子空间)

行列式展开后得到关于的*N*阶负系数多项式. 在复数域内, *N*阶负系数多项式在复数域内有*N*个解(包括重根)(厄米矩阵的神奇性质让这*N*个解都成了实数)

如果是重根, 那么矩阵的秩就会是(这是证明中最关键的一步, 可惜超纲了, 所以证明略). 而本征矢满足



由高斯消元法可知

当时, 方程的通解是的形式, *c*是任意常数. 这可以看成一维矢量空间.

当时, 方程的通解是*k*个线性无关矢量的任意线性组合(*k*个任意常数). 为了以后使用方便, 通常把施密特正交归一化(链接未完成). 由子空间的定义可知, 方程的解集是一个维矢量空间.

证毕.

**推论的证明** (*N*阶厄米矩阵一定存在*N*个正交归一的本征矢)

设矩阵不同的本征值为. 若其中是重根(满足), 则存在个正交归一本征矢(子空间的正交归一基底)对应. 又因为不同对应的本征矢正交, 所以把所有子空间的正交归一基底组成一个*N*个矢量的集合, 集合中的矢量同样满足归一正交的性质.

**定理5的证明** (归一后的本征矢组成的幺正矩阵可以把该厄米矩阵对角化)

根据上述推论的结论, 集合中的*N*个正交归一的矢量都是厄米矩阵*M*的本征矢, 第*i*个记为. 其中有个对应本征值, 个对应本征值,等等. 把这个本征矢表示成列矢量并横向组成一个矩阵(命名为), 即



由于的所有列互相正交归一, 根据定义, 是一个幺正矩阵(链接未完成), 其逆矩阵(未完成, 需要在幺正矩阵词条中补充该性质, 但这里不需要链接).

令 (其中是第*n*列的本征矢), 得



(等于对的每一列作用, 而的每一列都是的本征矢, 所以相当于把每一列乘以对应的本征值, 而这等于).