### 全同粒子 对称/反对称子空间

2016/12/10

对于可区分粒子, 在六维空间中, 但若是全同粒子, 则必须满足条件, 正号为费米子, 负号为玻色子. 所有满足该条件的态矢构成六维空间的两个子空间. 这个空间可以想象成置换算符本征值为的两个本征矢空间. 系统的所有运算和测量也将在同一个子空间讨论.

现在来看该空间允许什么样的算符, 即什么算符在这两个子空间是闭合的. 闭合是指算符作用完后仍然落在同一空间, 即 , 即所有满足的算符.

首先, 同一个单粒子算符对所有粒子作用之和满足该条件, 例如总动能

. 满足. 又例如外势能（非相互作用势能）

. 不允许单独出现单粒子算符, 例如, 因为



同理, 不允许出现不同的算符分别作用于两粒子 .

从物理意义上来说, 就是不允许出现任何可以区分两个全同粒子的算符. 因为全同粒子绝对不可区分，所以任何作用(算符)不可能对两个全同粒子具有不同的形式.

另一类允许的算符是多粒子算符, 例如两粒子间的相互作用 (是一个一元函数) 这个算符显然也满足



在该空间中, 薛定谔方程仍然为



其中哈密顿量为



**可分离哈密顿**

在这样的子空间中, 如果总哈密顿量可以写成各个粒子的哈密顿量之和

, (注意对每个粒子的形式必须一样), 则可先计算单个粒子的本征方程 (对任何形式都一样), 总能量为, 总波函数为Slater行列式(费米子)以及Slater正号行列式(玻色子), 双粒子系统中即.

双粒子系统的证明: 是单粒子薛定谔方程的波函数, 可区分双粒子的完备基底为, 但这些基底中只有落在玻色子子空间, 剩下的基底都不是的本征值. 为了构建对称和反对称子空间, 先把所有的基底分为成对的, 把每一对分别相加和相减再归一化得到许多对新的基底 (显然这么做不失完备性), 不难看出, 所有含加号的基底张成完备的双波色子空间, 所有含减号的基底张成完备的双费米子空间. 这说明在双粒子系统中, 全空间等于对称子空间和反对称子空间的直和 (即两个子空间的基底一起张成全空间). 然而对多粒子系统, 这并不成立, 但用Slater行列式和“反Slater行列式”得到的两组基底仍然是完备的. 继续双粒子的情况, 现在证明上面得到的两个子空间的基底已经是总哈密顿量的本征矢了



证毕.

多维的情况可以用对称和反对称算符的运算证明, (详见Bransden).

**可分离态的时间演变**

从物理意义上来看, 可分离变量意味着粒子间没有相互作用, 例如项.

那么没有相互作用的两个粒子是否需要对称化/反对称化呢? 如果需要, 那么原则上我们将要把全宇宙所有的全同粒子(反)对称化! 这是一定要的, 因为量子力学对全同粒子的基本假设就是态矢只能落在对称空间或反对称空间, 这两个空间之外的所有态矢不可能存在, 它们违反了全同粒子假设! 另外, ,这些角标只是符号工具, 二次量子化中将彻底抛弃角标.

根据所有全同粒子对称化的原理, 看两个粒子的波函数, 如果与相距很远, 波函数完全没有重合, 时刻在的附近测到一个粒子, 然后时刻在范围测到一个粒子, 能不能说这是刚才的粒子呢? 不能! 只能说全宇宙有个这种粒子, 的时候其中一个在附近, 的时候其中一个在附近.