УДК 51-77

**Карабаев Е. Е.**

# Анализ выпуска продуктов птицеводства с помощью динамических систем

*Рекомендовано к публикации профессором Крылатовым А. Ю.*

**Введение.** Динамические системы имеют различные применения в экономике и общественных науках. В основном они могут применяться при анализе демографических процессов, как например в [1], или в анализе межотраслевых связей в течение времени, как в [2]. Анализ же отдельных рынков товаров и особенностей их производства с помощью динамических систем редко встречается в современной литературе.

Куриные яйца являются одним из основных продуктов питания и важным источником белка для организма. Они потребляются как отдельный продукт, так и в составе других товаров. Как и другие продукты птицеводства, яйца получаются от производительных птиц. Из-за внешних факторов, эпидемий, природных катастроф и т. д., численность продуктивных птиц может резко сократиться. Это может привести к дефициту яиц.

В этом случае необходимо выяснить, сможет ли численность курнесушек восстановиться до прежних значений и за какой срок. В данной работе предлагаются способы математического моделирования численности производительных птиц с учётом особенностей их разведения.

**Описание процесса производства.** Длительность жизни кур ограничена, а продуктивность (яйценосность) снижается после определённого возраста. Чтобы избежать падения производства яиц, несушки по достижении определённого возраста подлежат отбраковке.

Для поддержания требуемого уровня производства необходимо возмещать ранее выбракованных птиц. С этой целью часть яиц идёт на инкубацию – процесс искусственного или естественного разведения и выращивания птиц.

*Карабаев Егор Евгеньевич* – магистрант, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: eekarabaev@mail.ru, тел.: +7(915)082-80-62

Яйца отправляются в специальные хранилища – инкубаторы, где поддерживаются оптимальные условия для вылупления цыплят. Затем из вылупившихся цыплят отделяют птиц женского пола, примерно половину всех птенцов.

Птенец вылупляется через 3 недели, а продуктивного возраста достигает в 22 недели. Таким образом, от момента выведения яйца до куры-несушки проходит 25 недель.

**Математические модели описания процесса.** В птицеводстве используются различные математические методы. Например, модели производительности кур-несушек описаны в работе [3]. Численность и воспроизводство популяций описываются моделями популяционной динамики.

У птиц между рождением и достижением продуктивного возраста проходит большой промежуток времени. В этом случае можно описать процесс воспроизводства с помощью динамических систем с запаздыванием, которые подробно описаны в [4].

Опишем воспроизводство кур-несушек с помощью динамической системы вида:

$$\dot{n} = an(t) + bn(t - \tau), \tag{1}$$

где $\dot{n} = \frac{dn}{dt}$, первое слагаемое это количество выбывших птиц, второе – поступивших из инкубации. Эти величины должны быть равны, так как необходимо поддерживать постоянную численность кур-несушек.

$$\dot{n} = -(m + r)n(t) + \frac{1}{2}hp \cdot inc \cdot n(t - \tau), \tag{2}$$

где коэффициенты при означают следующее: $m$ – смертность кур, примерно 0,2% в неделю; $r$ – выбраковка кур, примерно 1,3% в неделю; $h$ – выводимость, выводится из яйца и выживает до возраста куры-несушки около 95% цыплят; $\frac{1}{2}$ – доля кур женского пола; $p$ – яйценосность куры, кура яичной породы сносит в среднем 4 яйца в неделю; $inc$ – доля яиц на инкубацию, примерно 0,8%;

Таким образом, система имеет следующий вид:

$$\dot{n} = -0{,}015n(t) + 0{,}015n(t - \tau).$$

Отметим, что все коэффициенты модели, кроме доли яиц на инкубацию $inc$, постоянны. Доля на инкубацию может меняться в зависимости от решений производителей.

**Устойчивость модели.** Проверим, будет ли численность курнесушек n(t) стремиться к прежнему значению при изменении начальной численности и заданных параметрах выбраковки и воспроизводства.

Для этого следует исследовать нашу систему на асимптотическую устойчивость по Ляпунову. Пусть она задана следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{n} = an(t) + bn(t-\tau), \ t > 0, \\ n(0) = N, \end{cases} \tag{3}$$

где $N$ – начальная численность.

**Определение.** Система (3) называется асимптотически устойчивой по Ляпунову, если:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall N_0 : \rho(N, N_0) < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \rho(n(t), n_0(t)) = 0.$$

Чтобы система (3) была асимптотически устойчива, все действительные части корней характеристического уравнения должны иметь отрицательные действительные части. Проверить это можно с помощью теоремы Хейза:

**Теорема** [4]. *Все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда выполняются следующие неравенства:*

1. $a\tau < 1$.
2. $a + b < 0$.
3. $b\tau + \sqrt{(a\tau)^2 + \mu^2} > 0$, *где* $\mu = a\tau \tan\mu$.

В нашем случае $a + b = 0$, что противоречит условию 2 теоремы. Это говорит об асимптотической неустойчивости системы (1). Значит, если количество кур-несушек изменится под воздействием внешних факторов, оно не вернётся к прежнему. Чтобы восстановить прежнюю численность, необходимо изменить параметры системы.

**Учёт инкубационных мощностей.** Как было упомянуто ранее, единственный параметр, который могут изменить производители – это доля яиц, отправляемых на инкубацию. Восстановить численность можно с помощью увеличения доли яиц, отправляемых в инкубаторы.

Однако инкубаторы не могут резко увеличить количество принимаемых яиц. В краткосрочном периоде инкубационные мощности остаются неизменными. Представим максимальное количество кур, которое может выпускать инкубатор, в виде константы $\text{Capacity} = \text{const} > 0$.

Если прежняя численность была равна $N$, то инкубаторы были рассчитаны на выращивание $\text{Capacity} = \frac{1}{2}hp \cdot inc \cdot N = 0,015N$ кур в неделю. При сокращении начальной численности до $\alpha N$, $\alpha < 1$, чтобы заполнить инкубатор, новая доля отложенных яиц должна увеличиться до $\frac{inc}{\alpha} > inc$. Тогда

$$\frac{1}{2}hp\frac{inc}{\alpha}\alpha N = 0{,}015N = \text{Capacity}.$$

Таким образом, можно представить систему (2) в виде:

$$\dot{n} = \text{Capacity} - (m+r)n, \quad n(0) = N.$$

Проверим уравнение (2) на асимптотическую устойчивость. Корень характеристического уравнения

$$\lambda = -(m+r).$$

Так как $m+r > 0$, то $\lambda < 0$. Следовательно, система асимптотически устойчива. Это означает, что при изменении начального поголовья кур-несушек и максимальной загрузке инкубационных мощностей, их количество будет стремиться к прежнему уровню с течением времени.

Найдём функцию численности:

$$\int \dot{n}\,dt = \int (\text{Capacity} - (m+r)n)dt = \frac{\text{Capacity}}{m+r} - \frac{C}{e^{(m+r)t}}.$$

В зависимости от начального решения $n(0)$ константа $C$ будет принимать разные значения. Как показано ранее, инкубационные мощности были рассчитаны на поддержание постоянной численности $N$ и компенсацию выбывших кур, т. е.

$$\frac{\text{Capacity}}{m+r} = \frac{(m+r)N}{m+r} = N.$$

Если же начальная численность $n(0)$ изменилась до $\alpha N$, то при $t = 0$ получим

$$n(0) = N + \frac{C}{e^{(m+r)0}} = \alpha N,$$

$$N + C = \alpha N,$$
$$C = (\alpha - 1)N.$$

Таким образом, численность кур-несушек при максимальной нагрузке инкубационных мощностей, обеспечивающих компенсацию выбывших кур, можно представить следущим образом:

$$n(t) = N - \frac{(1-\alpha)N}{e^{(m+r)t}}.$$

При $t = 0$ имеем $n(0) = \alpha N$. При $t \to \infty$ – $n(t) \to N$.

**Время восстановления численности.** Функция численности стремится к прежней $N$ и никогда её не достигнет. На практике же поголовье на птицефабриках немного выше необходимого (примерно на 5–10%). Выясним, когда численность достигнет 90% от $N$.

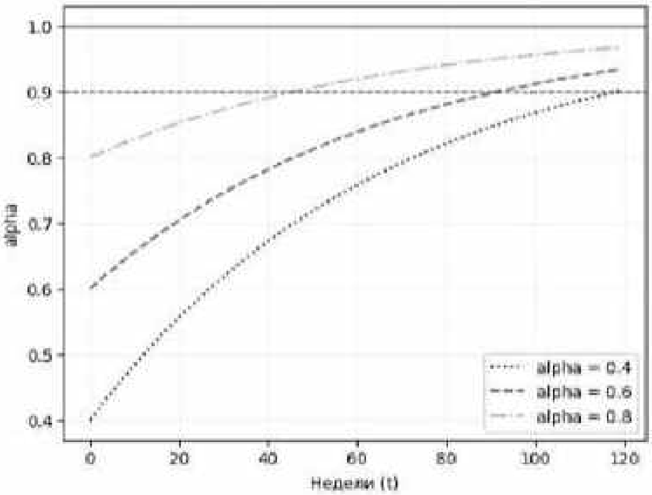


**Рис. 1.** Восстановление численности кур-несушек при изменении численности до 40%, 60% и 80% от прежней

На рис. 1 представлены графики численности кур-несушек для $\alpha = 0{,}4$; 0,6 и 0,8. Рассмотрим, в каких точках графики пересекали прямую необходимой численности.

**Таблица.** Количество недель до восстановления численности

| alpha | Неделя |
|---|---|
| 0,8 | 46 |
| 0,6 | 82 |
| 0,4 | 119 |

Как видно из таблицы, два значения превышают количество недель в году. При таком долгом периоде возможно увеличение инкубационных мощностей и уменьшение срока восстановления. Это делает расчёты нерелевантными.

Рассмотрим, в какой мере может измениться начальная численность, чтобы поголовье восстановилось до необходимого не более, чем за год (52 недели). Сначала найдём $t$

$$N - \frac{(1-\alpha)N}{e^{(m+r)t}} = 0{,}9N, \quad 1 - \frac{(1-\alpha)}{e^{(m+r)t}} = 0{,}9,$$

$$e^{(m+r)t} = 10(1-\alpha), \quad t = \frac{1}{m+r}\ln(10-10\alpha).$$

Подставим показатели смертности и выбраковки, а также ограничим время 52-мя неделями.

$$\frac{1}{0{,}015}\ln(10-10\alpha) \leqslant 52, \quad \ln(10-10\alpha) \leqslant 0{,}78,$$

$$10 - 10\alpha \leqslant e^{0{,}78}, \quad \alpha \geqslant \frac{10-e^{0{,}78}}{10}, \quad \alpha \geqslant 0{,}78.$$

Таким образом, если численность кур-несушек упала не менее чем до 78% от начальной, то поголовье восстановится в пределах года.

**Заключение.** В работе рассмотрена возможность представления производства яиц и воспроизводства кур-несушек в виде динамических систем, в том числе с запаздыванием. Полученные системы проверены на наличие асимптотической устойчивости. Показано, что максимальная загрузка инкубационных мощностей позволяет восстановить численность при потере части кур-несушек от внешних факторов. При падении до 78% от первоначальной численности поголовье может восстановиться до необходимого уровня за срок до года.

## Литература


1. Балыкина Ю. Е., Захаров В. В. Интегральная модель притока и оттока и ее приложения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20. № 2. С. 121–135.

2. Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е., Смирнова М. А., Смирнов М. Н. Разностные динамические модели межотраслевого баланса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. № 1. С. 51–64.

3. Yang N., Wu C., McMillan I. A. N. New mathematical model of poultry egg production // Poultry Science. 1989. Vol. 68. No 4. P. 476–481.

4. Полянин А. Д., Сорокин В. Г., Журов А. И. Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели. М.: Изд-во «ИПМех РАН», 2022. 464 с.