Blatt 1

Aufgabe 1 (0,5 + 0,5 Kreuze)

Entscheiden Sie (mit Begründung), ob es sich bei den folgenden Verteilungen um Exponentialfamilien handelt.

1. Exponential-Verteilungen $(\mathrm{Exp}(\lambda))_{\lambda>0}$ mit Dichte $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$.
2. Cauchy-Verteilungen $(\mathrm{Cauchy}(\mu))_{\mu\in\mathbb{R}}$ mit Dichte $f_\mu(x) = \pi^{-1}(1 + (x - \mu)^2)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (1 Kreuz)

Die Verteilung von Y gehöre zur Exponentialfamilie mit einer Dichte

$$f_\theta(y) = \exp\left(\frac{1}{\tau^2}(y\theta + a(y, \tau) - b(\theta))\right).$$

Es gelte $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ und $b : \Theta \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar mit $b''(\theta) > 0$ für alle $\theta \in \Theta$. Aus der Vorlesung wissen Sie bereits, dass in diesem Fall $\mathbb{E}Y = b'(\theta)$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Var}(Y) = \tau^2 b''(\theta).$$

Aufgabe 3 (Teile 1+2: 0,5 Kreuze; Teile 3+4: 0,5 Kreuze)

Bei einer Untersuchung zur Wirksamkeit eines Schädlingsbekämpfungsmittels wurde in mehreren Experimenten jeweils eine Anzahl von Käfern einer Giftdosis ausgesetzt. Im Datensatz `beetles` (auf der Vorlesungshomepage) finden Sie die Informationen zur Dosis, der Anzahl der jeweils am Experiment beteiligten Käfer und der getöteten Käfer.

1. Plotten Sie den Anteil der getöteten Käfer gegen die verwendete Giftdosis.
2. Passen Sie ein logistisches Regressionsmodell an die Daten an und ergänzen Sie im Plot die zugehörige geschätzte S-förmige Kurve.
3. Verwenden Sie nun als Linkfunktion die Quantilfunktion der Normalverteilung und ergänzen Sie wiederum die zugehörige geschätzte S-förmige Kurve.
4. Wie würde sich nach dem angepassten logistischen Regressionsmodell eine Erhöhung der Dosis um $0,1$ auf die Sterbewahrscheinlichkeit der Käfer auswirken?

Hinweise: Machen Sie sich zunächst mit den Definitionen und Aussagen von Abschnitt 2.2 im Skript vertraut. Die Funktion `glm` in `R` oder entsprechende Funktionen im `Python`-Paket `statsmodels` könnten hilfreich sein.