Ejercicios del tema y su valor:
1-random walk 1D (1p), 2-random walk 2D (1p), 3-integral 1, sin errores (0.5p), 4-integral 2 (1p), 5-área de círculo (2p), 6-volumen de esfera (3p)
Entrega: un ejercicio obligatorio: el núm. 1; un ejercicio optativo: a elegir entre los restantes

Random walk.

Llamamos *camino aleatorio* o *random walk* (RW) a la secuencia de posiciones ocupadas por un móvil que transita aleatoriamente entre ellas.

Comenzando en una cierta posición (la cual puede ser producto del azar o no), sucederá aleatoriamente un primer tránsito o paso a alguno de los lugares permitidos[1]; vendrá a continuación un segundo movimiento desde el nuevo lugar a otro lugar (incluido el de partida), y luego un tercero, y así sucesivamente; continuando este proceso hasta que el recorrido haya alcanzado un *largo* prefijado. Los pasos desde un determinado lugar a otros pueden ser equiprobables, o no.

EJERCICIO 1:
Implementar un programa que simule un RW en una dimensión. Supóngase
- movimiento en el eje Y, partiendo del origen
- pasos permitidos equiprobables y de longitud unidad

El programa mostrará en pantalla la representación gráfica del proceso, siendo éste consistente en 600 pasos.

RESULTADO:
La posición de partida es $y=0$. Paso a paso, el objeto se irá moviendo aleatoriamente una unidad hacia arriba (visualizando el eje Y como vertical) o una unidad hacia abajo, es decir, en cada paso se le sumará o restará 1 al valor de y; siendo igual la probabilidad de que en cada paso se dé una u otra circunstancia. Representando gráficamente posición frente a número de pasos realizados (*steps*), la figura tendrá un aspecto zigzagueante como el mostrado a continuación.

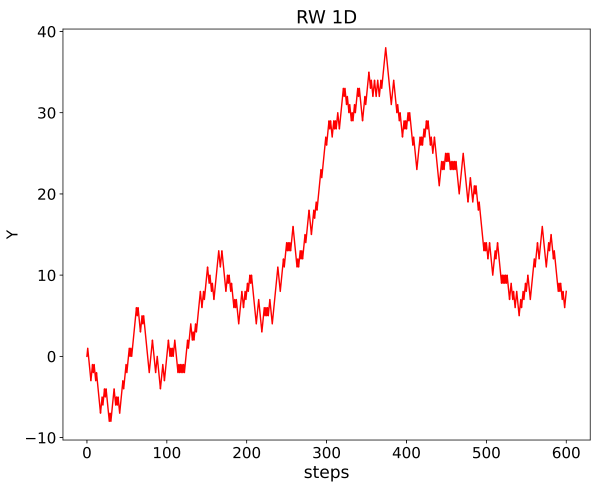

Fig. 1

[1] En un RW estándar serán lugares *vecinos*

EJERCICIO 2:

Implementar un programa que simule un RW en dos dimensiones. Supóngase

- movimiento en el plano XY, partiendo del origen
- pasos permitidos equiprobables, de longitud unidad y siempre paralelos a X o a Y

El programa mostrará gráficamente en pantalla las diversas posiciones (x, y) a lo largo del proceso, que constará de 1200 pasos; debiéndose visualizar claramente el primero y el último de los puntos (empleándose para ello colores verde y rojo, respectivamente).

RESULTADO:

Representando gráficamente las sucesivas posiciones y partiendo del origen, el resultado será de *aspecto* similar al mostrado en la figura 2.

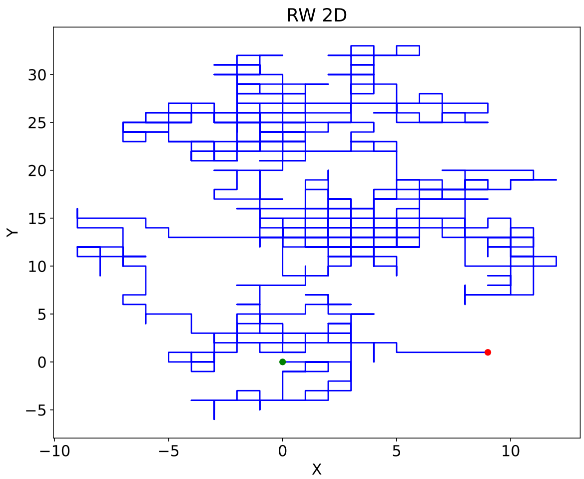

Fig. 2

Números aleatorios y método de Monte Carlo.

Vamos a analizar ahora un método para evaluar integrales definidas utilizando números aleatorios, método que es muy poderoso sobre todo cuando se trata de resolver integrales en múltiples dimensiones.

El teorema básico de Monte Carlo permite estimar integrales definidas multidimensionales de la forma

$$I = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_n = \int_V f(\vec{x}) d^n x \tag{1}$$

mediante la expresión

$$I \approx V \langle f \rangle \pm V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \tag{2}$$

con

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \qquad \langle f^2 \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f^2(x_i) \tag{3}$$

donde V es el *volumen multidimensional* y $f(x_i)$ es el valor de la función en cada uno de los N puntos x_i aleatoriamente distribuidos en V.

El término que aparece después del signo $\pm$ en la expresión (2) representa una estimación del error de la integral.

- **Cálculo de integrales de línea**

  EJERCICIO 3:

  Implementar un programa que calcule la integral[2]

  $$I = \int_0^1 (1 - x^2)^{1.5} dx$$

  mediante el método de Monte Carlo. Utilizar diversas secuencias de N números aleatorios con N=100, 1000, ... , 10^8.

  RESULTADO:

  Obténgase un conjunto N de números aleatorios x_i en el intervalo [0,1] y, de acuerdo con la ecuación (2), aproxímese la integral mediante la expresión

  $$I \approx V \langle f \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \qquad (V = 1 - 0) \tag{4}$$

  En la tabla siguiente se da el valor de la integral obtenido para distintos números N de puntos aleatorios.

[2] No se pide error

N	I	Error
100	0.542766011609	3.15e-02
1,000	0.596106490640	1.04e-02
10,000	0.589884472906	3.29e-03
100,000	0.589156327124	1.05e-03
1,000,000	0.588452115452	3.32e-04
10,000,000	0.588974322757	1.05e-04
100,000,000	0.589047857125	3.32e-05

EJERCICIO 4:

Implementar un programa que calcule la integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x} dx$$

mediante el método de Monte Carlo. Utilizar diversas secuencias de N números aleatorios siendo N=100, 1000, ... , 10^8; acompáñese en todos los casos de una estimación del error[3].

RESULTADO:

Hagamos el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{1}{x+1}$$

con lo que

$$x = \frac{1}{y} - 1, \qquad dx = -\frac{dy}{y^2}$$

y como cuando $x = 0 \Rightarrow y = 1$ y para $x = \infty \Rightarrow y = 0$, nos queda finalmente

$$I = \int_0^\infty e^{-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{y^2} e^{-(\frac{1}{y}-1)} dy$$

Obteniendo un conjunto N de números aleatorios y_i en el intervalo [0,1] podemos aproximar la integral por la ecuación (4). En la siguiente tabla se da la integral para distintos valores N de puntos aleatorios.

N	I	Error
100	0.908366745442	5.57e-02
1,000	0.991364933854	1.59e-02
10,000	1.009085861080	4.93e-03
100,000	0.999059706743	1.58e-03
1,000,000	1.000329142065	5.00e-04
10,000,000	1.000022080063	1.58e-04
100,000,000	1.000005711056	5.00e-05

[3] La solución exacta es $e^{1-\frac{1}{x}}$

- **Cálculo de integrales de superficie**

EJERCICIO 5:

Implementar un programa que calcule, mediante el método de Monte Carlo, el área de un circulo de radio R=1.5 cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas.
Utilícense diversas secuencias de N números aleatorios siendo N=100, 1000, ... , 10^8; en todos los casos se pide una estimación del error.

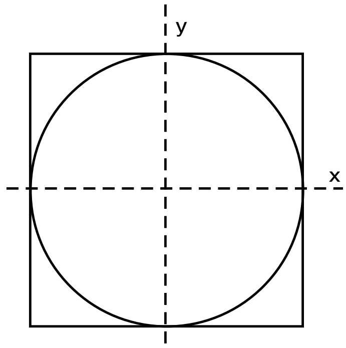

Fig. 3

RESULTADO:
Inscribamos el círculo en un cuadrado de lado 2R como muestra la figura 3. La ecuación (1) adopta la forma

$$I = \int_{-R}^{R} dx \int_{-R}^{R} f(x,y)dy \approx V \langle f \rangle \tag{5}$$

donde $V = (R+R)(R+R) = 4R^2$ representa el área del cuadrado. Definamos *f(x,y)* de tal forma que

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & si\ x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

Se trazan N pares de puntos aleatorios de coordenadas x_i, y_i tales que $-R < x_i < R$ e $-R < y_i < R$ y se obtiene el área del circulo por

$$S_{cir} = 4R^2 \langle f \rangle = \frac{4R^2}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)$$

En la siguiente tabla se da el valor del área del circulo obtenido para las diversas secuencias de números N de puntos aleatorios.

N	S	Error
100	7.200000000000	3.60e-01
1,000	7.110000000000	1.16e-01
10,000	7.049700000000	3.71e-02
100,000	7.061940000000	1.17e-02
1,000,000	7.074495000000	3.69e-03
10,000,000	7.066345500000	1.17e-03
100,000,000	7.068223620000	3.70e-04

valor real: 7.068583470577

- **Cálculo de integrales de volumen**

EJERCICIO 6:

Implementar un programa que calcule, mediante el método de Monte Carlo, el volumen de una esfera de radio R=1.5 cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas. Utilizar diversas secuencias de N números aleatorios (N=100, 1000, ... , 10^8) y obténgase en todos los casos una estimación del error.

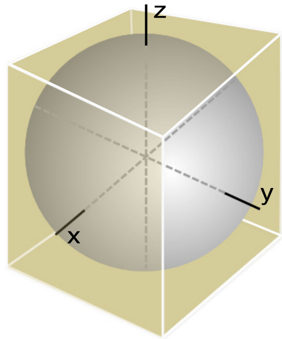

Fig. 4

RESULTADO:
Inscribamos la esfera en un cubo de lado 2R como muestra la figura 4. La ecuación (1) adopta la forma

$$I = \int_{-R}^{R} dx \int_{-R}^{R} dy \int_{-R}^{R} f(x,y,z)dz \approx V_{cub} \langle f \rangle \quad (6)$$

donde V_{cub} representa el volumen del cubo. Definamos *f(x,y,z)* de tal forma que

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & si\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ 0 & si\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases}$$

Si trazamos N pares de puntos aleatorios de coordenadas x_i, y_i, z_i tal que $-R < x_i < R$, $-R < y_i < R$ y $-R < z_i < R$, obteniendo cuantos de ellos, N_{int}, caen dentro de la esfera, resulta que

$$V_{esf} = V_{cub} \langle f \rangle = V_{cub} \frac{N_{int}}{N}$$

En la siguiente tabla se da el valor del volumen de la esfera obtenido para los diferentes números N de puntos aleatorios.

N	V	Error
100	16.470000000000	1.32e+00
1,000	13.878000000000	4.27e-01
10,000	14.253300000000	1.35e-01
100,000	14.135310000000	4.26e-02
1,000,000	14.124915000000	1.35e-02
10,000,000	14.136473700000	4.26e-03
100,000,000	14.137902270000	1.35e-03

valor real: 14.137166941154