Ejercicios del tema y su valor:
1-primeras derivadas numéricas (1p), 2-diferencias centradas (2p), ...
Entrega: un ejercicio obligatorio: el núm. 1; un ejercicio optativo: a elegir entre los restantes

Derivación numérica.

1. Cómo aproximar la **derivada** de una función, de la que se conoce su forma analítica, en un punto cualquiera x_0.

   - **diferencias hacia adelante**

     El desarrollo de Taylor de $f(x_0+h)$ en el entorno de x_0 puede escribirse en la forma

     $$f(x_o+h) = f(x_0) + hf^{(1)}(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \cdots \tag{1}$$

     y despejando de la ecuación anterior $f^{(1)}(x_0)$ resulta

     $$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_o+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f^{(2)}(x_0) - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(x_0) - \frac{h^3}{24}f^{(4)}(x_0) - \cdots \tag{2}$$

     Si en (2) despreciamos los términos en que aparece h elevado a potencias ≥ 2, resulta que la aproximación de la primera derivada puede llevarse a cabo por

     $$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_o+h) - f(x_0)}{h} + E(h) \tag{3}$$

     donde *E(h)* es el *error de truncamiento* y viene dado por

     $$E(h) \approx -\frac{h}{2}f^{(2)}(x_0) \tag{4}$$

   - **diferencias hacia atrás**

     Procediendo de forma análoga para $f(x_0-h)$, resulta

     $$f(x_o-h) = f(x_0) - hf^{(1)}(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \cdots \tag{5}$$

     por lo tanto

     $$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_o-h)}{h} + \frac{h}{2}f^{(2)}(x_0) - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^3}{24}f^{(4)}(x_0) - \cdots \tag{6}$$

     despreciando en (6) los términos igual o superiores a h^2, nos queda

     $$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_o-h)}{h} + E(h) \tag{7}$$

     con el error de truncamiento

     $$E(h) \approx \frac{h}{2}f^{(2)}(x_0) \tag{8}$$

- **diferencias centradas**

Si a la ecuación (1) le restamos la ecuación (5), se obtiene

$$f(x_o+h) - f(x_o-h) = 2hf^{(1)}(x_0) + \frac{2h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \cdots \tag{9}$$

con lo que

$$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_o+h) - f(x_o-h)}{2h} + E(h^2) \tag{10}$$

donde el error de truncamiento es

$$E(h) \approx \frac{h^2}{6}f^{(3)}(x_0) \tag{11}$$

EJERCICIO 1:
Implementar un programa que realice la derivación numérica de la función
$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$
en el punto $x_0 = 0.5$, con $h = 0.25$ y haciendo uso de las ecuaciones (3), (7) y (10), obteniéndose asimismo los correspondientes errores[1].

RESULTADO:

```
ec. 3:   -1.1547   error 0.2422
ec. 7:   -0.7141   error 0.1984
ec. 10:  -0.9344   error 0.0219
```

Las expresiones (3), (7) y (10) proporcionan el valor de la primera derivada $f^{(1)}(x_0)$ calculando la función en dos puntos. Sin embargo a medida que h decrece, el error de truncamiento es menor en la fórmula centrada. Por ello, dentro de las fórmulas del mismo número puntos, la mayor precisión en los resultados corresponde al proporcionado por las fórmulas centradas.

Es posible deducir expresiones de $f^{(1)}(x_0)$ con un error de truncamiento menor que el obtenido en (11). Para ello, procedamos como sigue

$$f(x_o+2h) = f(x_0) + 2hf^{(1)}(x_0) + \frac{4h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \frac{8h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{16h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \cdots \tag{12}$$

y

$$f(x_o-2h) = f(x_0) - 2hf^{(1)}(x_0) + \frac{4h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) - \frac{8h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{16h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \cdots \tag{13}$$

[1] Valor *exacto* de la derivada: -0.9125

de forma que al restar las dos ecuaciones anteriores, se llega a que

$$f(x_o+2h)-f(x_o-2h)=4hf^{(1)}(x_0)+\frac{16h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\frac{64h^5}{5!}f^{(5)}(x_0)+\cdots \quad (14)$$

Ahora, si a la ecuación (9) la multiplicamos por 8 y al resultado obtenido le restamos la ecuación (14), nos queda

$$-f(x_o+2h)+8f(x_o+h)-8f(x_o-h)+f(x_o-2h)=12hf^{(1)}(x_0)-\frac{48h^5}{120}f^{(5)}(x_0)+\cdots \quad (15)$$

lo que finalmente nos conduce a

$$f^{(1)}(x_0)=\frac{-f(x_o+2h)+8f(x_o+h)-8f(x_o-h)+f(x_o-2h)}{12h}+E(h^4) \quad (16)$$

siendo el error de truncamiento

$$E(h^4)\approx\frac{h^4}{30}f^{(5)}(x_0) \quad (17)$$

Tanto la expresión (10) como la (16) proporcionan el valor de $f^{(1)}(x_0)$, sin embargo el valor obtenido por esta última converge más rápidamente a la solución, como puede verse en la tabla 1.

h	ecuación (10)	ecuación (16)
1.0000000000	-2.88000000	-3.88000000
0.1000000000	-3.87000000	-3.88000000
0.0100000000	-3.87990000	-3.88000000
0.0010000000	-3.87999900	-3.88000000
0.0001000000	-3.87999999	-3.88000000
0.0000100000	-3.87999999	-3.88000000
0.0000010000	-3.87999999	-3.87999999
0.0000001000	-3.87999999	-3.87999999
0.0000000100	-3.88000001	-3.88000000
0.0000000010	-3.88000032	-3.88000054
0.0000000001	-3.87999854	-3.87999780

Tab. 1: Comparación de los resultados obtenidos de $f^{(1)}$ mediante las ecuaciones (10) y (16)

EJERCICIO 2:
Implementar un programa que realice la derivación numérica de la función
$f(x)=x^3-3x^2-x+3$
en el punto $x_0=1.2$ mediante las ecuaciones (10) y (16) y muestre los resultados obtenidos por ambos métodos[2] (ver tabla 1). Los resultados serán mostrados en pantalla de modo ordenado y claro.

[2] Con objeto de compararlos