Ejercicios del tema y su valor:
1-sin pivoteo (1p), 2-dos sistemas 2x2 (1p), 3-pivoteo parcial 3x3 (2p),
4-pivoteo parcial NxN, N cualquiera (3p)
Entrega: un ejercicio obligatorio: el núm. 1, un ejercicio optativo: a elegir entre los restantes

Sistema de ecuaciones lineales.

A un conjunto de N ecuaciones con N incógnitas del tipo

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \cdots + a_{NN}x_N = b_N \end{gathered} \tag{1}$$

se le conoce como *sistema de ecuaciones lineales*, donde $a_{i,j}$ son los coeficientes, x_i las incógnitas y b_j los términos independientes. En notación compacta el sistema (1) se expresa en la forma

$$Ax = b \tag{2}$$

donde A es la matriz de coeficientes, x el vector solución y b el vector de términos independientes.

Existen dos grandes familias de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales: *directos* e *iterativos*. En los primeros la solución se obtiene al cabo de un número finito de operaciones, perteneciendo a esta primera familia los métodos considerados a continuación. En los métodos iterativos la solución es obtenida tras sucesivas aproximaciones y en ellos, además del error de redondeo, está presente el error de truncamiento.

Algunos métodos de resolución:

- **Eliminación gaussiana sin pivoteo**
  El objetivo de este método es construir un sistema triangular superior equivalente.[1]

  EJEMPLO 1: Utilizando el método de eliminación gaussiana *sin pivoteo*, resolver el sistema de ecuaciones lineales (3)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned} \tag{3}$$

  Construimos la matriz ampliada formada por la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \tag{4}$$

  y a continuación realizaremos sobre ella una serie de operaciones que no cambian el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineal.

[1] Dos sistemas de orden NxN se dicen *equivalentes* si tienen el mismo conjunto de soluciones

En primer lugar, utilizamos la primera fila para eliminar los elementos de la primera columna por debajo de la diagonal principal. En este paso, esta primera fila es la *fila pivote* y su elemento a_{11} es el *elemento pivote*. El proceso es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{a la segunda fila se le resta el producto de } \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \\ \text{a la tercera fila se le resta el producto de } \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0.5 & 2.5 & 8.5 \\ 0 & 2.5 & -1.5 & 0.5 \end{array}\right) \tag{5}$$

A continuación, usamos la segunda fila (*fila pivote*) para eliminar los elementos de la segunda columna. Teniendo en cuenta que a_{22} es ahora el *elemento pivote*,

$$\begin{cases} \text{a la tercera fila se le resta el producto de } \frac{a_{32}}{a_{22}} \text{ por la segunda fila} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{crr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0.5 & 2.5 & 8.5 \\ 0 & 0 & -14 & -42 \end{array}\right) \tag{6}$$

La ecuación (6) representa el sistema triangular superior.

Para obtener la solución de (6), realizamos una sustitución regresiva

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{a_{34}}{a_{33}} = \frac{-42}{-14} = 3 \\ x_2 &= \frac{a_{24} - a_{23}x_3}{a_{22}} = \frac{8.5 - 2.5 \cdot 3}{0.5} = 2 \\ x_1 &= \frac{a_{14} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} = \frac{3 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3}{2} = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

EJERCICIO 1:

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

por el método de eliminación de Gauss sin pivoteo y cálculo de las soluciones por sustitución regresiva.

RESULTADO:

```
Matriz triangular superior Ab

Ab =

    2.0000   -1.0000    1.0000    3.0000
         0    0.5000    2.5000    8.5000
```

```
        0         0  -14.0000  -42.0000

solución: sustitución regresiva
x(1)= 1.000000
x(2)= 2.000000
x(3)= 3.000000
```

El problema de la elección de pivote

Cuando se efectúa cálculo numérico, en general, se producen errores de redondeo y es por ello que la elección del *pivote*, cada uno de los $a_{ii} \neq 0$ utilizados para dividir en las fórmulas (7), es una cuestión de importancia.

EJERCICIO 2:
Implementar un programa que resuelva los siguientes dos sistemas A y B por el método de eliminación de Gauss sin pivoteo y cálculo de las soluciones mediante algoritmo *de subida* (por sustitución regresiva). Considérese $\beta = 10^{-20}$.

$$\begin{aligned} \beta x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ \beta x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

RESULTADO:

```
caso A
eliminación de Gauss por pivote a(1,1)
    1.e-20     1.e+00     1.e+00
    0.e+00    -1.e-20    -1.e-20

solución: sustitución regresiva
x(1)= 0.000000
x(2)= 1.000000

caso B
eliminación de Gauss por pivote a(1,1)
    1.e-20     1.e+00     1.e+00
    0.e+00    -1.e-20    -1.e-20

solución: sustitución regresiva
x(1)= 1.000000
x(2)= 1.000000
```

- **Eliminación gaussiana con pivoteo parcial**

Para evitar situaciones como la del ejemplo precedente, es usual seguir alguna estrategia en la elección del pivote.

La estrategia de ***pivoteo parcial*** consiste en que antes de proceder a la eliminación gaussiana por el elemento de la diagonal principal a_{kk}, busquemos el elemento a_{jk} de mayor valor absoluto situado en la misma columna y por debajo de él ($|a_{jk}| > |a_{kk}|$). Si existe, procedemos al intercambio de la fila j por la fila k.

EJEMPLO 2: Utilicemos el método de eliminación gaussiana con pivoteo parcial para resolver el sistema de ecuaciones lineales (8)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned} \tag{8}$$

Construimos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 3 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \tag{9}$$

y comenzamos con $a_{1,1}$. El elemento de mayor valor absoluto de la columna 1 por debajo de la fila 1 es $a_{3,1} = 3$, por lo tanto intercambiamos la fila 1 con la fila 3.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \tag{10}$$

Ahora procedemos a la eliminación de Gauss por el pivote $a_{1,1}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} & \frac{85}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{array}\right) \tag{11}$$

Continuamos ahora con el elemento $a_{2,2}$. Buscamos el elemento $a_{k,2}$ de mayor valor absoluto por debajo de $a_{2,2}$ y como no lo hay, procedemos a la eliminación de Gauss por el elemento $a_{2,2}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} & \frac{85}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{21}{2} \end{array}\right) \tag{12}$$

Resolviendo mediante sustitución regresiva, resulta

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{\frac{21}{2}}{\frac{7}{2}} = 3 \\
x_2 &= \frac{\frac{85}{3} - 3 \cdot \frac{19}{3}}{\frac{14}{3}} = 2 \\
x_1 &= \frac{-5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{3} = 1
\end{aligned}
\tag{13}
$$

EJERCICIO 3:

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\
3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5
\end{aligned}
$$

por el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial y cálculo de las soluciones por sustitución regresiva.

RESULTADO:

```
Método eliminación de Gauss con pivoteo parcial y sustitución regresiva

matriz ampliada inicial
     1     2    -1     2
     2     4     5    25
     3    -1    -2    -5

intercambio filas 1 y 3
     3    -1    -2    -5
     2     4     5    25
     1     2    -1     2

eliminación de Gauss por pivote a(1,1)
    3.0000   -1.0000   -2.0000   -5.0000
         0    4.6667    6.3333   28.3333
         0    2.3333   -0.3333    3.6667

eliminación de Gauss por pivote a(2,2)
    3.0000   -1.0000   -2.0000   -5.0000
         0    4.6667    6.3333   28.3333
         0         0   -3.5000  -10.5000

Matriz triangular superior Ab

Ab =
```

```
    3.0000   -1.0000   -2.0000   -5.0000
         0    4.6667    6.3333   28.3333
         0         0   -3.5000  -10.5000

solución: sustitución regresiva
x(1)= 1.000000
x(2)= 2.000000
x(3)= 3.000000
```

EJERCICIO 4:

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales NxN para cualquier N, en particular:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -2.5 \\ -3x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 7 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2.5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= -10.5 \end{aligned}$$

por el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial y cálculo de las soluciones por sustitución regresiva. Se irá mostrando en pantalla cada una de las matrices ampliadas de los sucesivos sistemas equivalentes obtenidos y se mostrará el resultado final con dos cifras decimales.

RESULTADO FINAL:

```
Método eliminación de Gauss con pivoteo parcial y sustitución regresiva:

x(1)= -1.00
x(2)= -2.00
x(3)= -1.00
x(4)=  0.50
```

- **Eliminación gaussiana con pivoteo total**

El ***pivoteo total*** consiste en el intercambio de filas y columnas con el propósito de usar como pivote el elemento de mayor magnitud (en valor absoluto) y, una vez colocado en la diagonal principal, usarlo para eliminar los restantes elementos de su columna que están por debajo de él.

En general, las estrategias de cambio de pivote tienen la ventaja de producir menores errores de redondeo al utilizarse el méodo de Gauss pero, al exigir efectuar comparaciones en cada etapa para determinar el nuevo pivote, los tiempos de cálculo aumentan apreciablemente.