Ejercicios del tema y su valor:
1-primeras derivadas numéricas (1p), 2-diferencias centradas: tabla (2p), 3-más diferencias centradas (1p), 4-diferencias hacia adelante (3p), 5-más derivadas numéricas (3p)
Entrega: un ejercicio obligatorio: el núm. 1; un ejercicio optativo: a elegir entre los restantes

Derivación numérica.

1. Cómo aproximar la **derivada** de una función, de la que se conoce su forma analítica, en un punto cualquiera x_0.

   - **diferencias hacia adelante**

     El desarrollo de Taylor de $f(x_0 + h)$ en el entorno de x_0 puede escribirse en la forma

     $$f(x_o + h) = f(x_0) + hf^{(1)}(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \cdots \tag{1}$$

     y despejando de la ecuación anterior $f^{(1)}(x_0)$ resulta

     $$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_o + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f^{(2)}(x_0) - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(x_0) - \frac{h^3}{24}f^{(4)}(x_0) - \cdots \tag{2}$$

     Si en (2) despreciamos los términos en que h aparece elevado a potencias iguales a o mayores que dos, resulta que la aproximación de la primera derivada puede llevarse a cabo por

     $$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_o + h) - f(x_0)}{h} + E(h) \tag{3}$$

     donde *E(h)* es el *error de truncamiento* y viene dado por

     $$E(h) \approx -\frac{h}{2}f^{(2)}(x_0) \tag{4}$$

   - **diferencias hacia atrás**

     Procediendo de forma análoga para $f(x_0 - h)$, resulta

     $$f(x_o - h) = f(x_0) - hf^{(1)}(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \cdots \tag{5}$$

     por lo tanto,

     $$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_o - h)}{h} + \frac{h}{2}f^{(2)}(x_0) - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^3}{24}f^{(4)}(x_0) - \cdots \tag{6}$$

     despreciando en (6) los *términos* h^2 y superiores, nos queda

     $$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_o - h)}{h} + E(h) \tag{7}$$

con un error de truncamiento

$$E(h) \approx \frac{h}{2} f^{(2)}(x_0) \tag{8}$$

- **diferencias centradas**

Si a la ecuación (1) le restamos la ecuación (5), obtenemos

$$f(x_o + h) - f(x_o - h) = 2hf^{(1)}(x_0) + \frac{2h^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \cdots \tag{9}$$

con lo que

$$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_o + h) - f(x_o - h)}{2h} + E(h^2) \tag{10}$$

donde el error de truncamiento es

$$E(h) \approx \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x_0) \tag{11}$$

EJERCICIO 1:
Implementar un programa que realice la derivación numérica de la función
$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$
en $x_0 = 0.5$, con $h = 0.25$ y haciendo uso de las ecs. (3), (7) y (10), obteniéndose asimismo los correspondientes errores[1].

RESULTADO:

```
ec. 3:   -1.1547   error 0.2422
ec. 7:   -0.7141   error 0.1984
ec. 10:  -0.9344   error 0.0219
```

Las expresiones (3), (7) y (10) proporcionan el valor de la derivada $f^{(1)}(x_0)$ calculando la función en dos puntos. Sin embargo, a medida que h decrece, el error de truncamiento es menor en la fórmula centrada: dentro de las fórmulas del mismo número puntos, la mayor precisión en los resultados corresponde al proporcionado por las fórmulas centradas.

Es posible deducir expresiones de $f^{(1)}(x_0)$ con un error de truncamiento menor que el indicado en (11). Procedamos para ello como sigue, considerando:

$$f(x_o + 2h) = f(x_0) + 2hf^{(1)}(x_0) + \frac{4h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \frac{8h^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \frac{16h^4}{4!} f^{(4)}(x_0) + \cdots \tag{12}$$

$$f(x_o - 2h) = f(x_0) - 2hf^{(1)}(x_0) + \frac{4h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) - \frac{8h^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \frac{16h^4}{4!} f^{(4)}(x_0) + \cdots \tag{13}$$

[1] Valor *exacto* de la derivada: -0.9125

de forma que al restar las dos ecuaciones anteriores, se llega a que

$$f(x_o + 2h) - f(x_o - 2h) = 4hf^{(1)}(x_0) + \frac{16h^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \frac{64h^5}{5!} f^{(5)}(x_0) + \cdots \quad (14)$$

Ahora, si la ecuación (9) la multiplicamos por 8 y al resultado obtenido le restamos la ecuación (14), nos queda

$$-f(x_o+2h)+8f(x_o+h)-8f(x_o-h)+f(x_o-2h) = 12hf^{(1)}(x_0) - \frac{48h^5}{120} f^{(5)}(x_0) + \cdots \quad (15)$$

Ello finalmente nos conduce a

$$f^{(1)}(x_0) = \frac{-f(x_o + 2h) + 8f(x_o + h) - 8f(x_o - h) + f(x_o - 2h)}{12h} + E(h^4) \quad (16)$$

siendo ahora el error de truncamiento

$$E(h^4) \approx \frac{h^4}{30} f^{(5)}(x_0) \quad (17)$$

Tanto la expresión (10) como la (16) proporcionan el valor de $f^{(1)}(x_0)$; sin embargo, el valor obtenido por esta última converge más rápidamente a la solución, como puede verse en la tabla 1.

h	ecuación (10)	ecuación (16)
1.0000000000	-2.88000000	-3.88000000
0.1000000000	-3.87000000	-3.88000000
0.0100000000	-3.87990000	-3.88000000
0.0010000000	-3.87999900	-3.88000000
0.0001000000	-3.87999999	-3.88000000
0.0000100000	-3.87999999	-3.88000000
0.0000010000	-3.87999999	-3.87999999
0.0000001000	-3.87999999	-3.87999999
0.0000000100	-3.88000001	-3.88000000
0.0000000010	-3.88000032	-3.88000054
0.0000000001	-3.87999854	-3.87999780

Tab. 1: Comparación de los resultados de $f^{(1)}$ obtenidos mediante las ecuaciones (10) y (16)

EJERCICIO 2:
Implementar un programa que realice la derivación numérica de la función
$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
en el punto $x_0 = 1.2$ mediante las ecs. (10) y (16) y muestre los resultados obtenidos por ambos métodos (ver tab. 1). Los resultados serán mostrados en pantalla de modo ordenado y claro.

2. Cómo aproximar la **derivada de orden k** de una función, de la que se conoce su forma analítica, en un punto cualquiera x_0.

   El mismo procedimiento que se ha seguido al deducir fórmulas para calcular numéricamente las derivadas primeras puede usarse para construir derivadas de orden superior partiendo del desarrollo de Taylor y eliminando las derivadas primeras. Por ejemplo, para la segunda derivada podríamos obtener

   con *tres puntos*:

$$f^{(2)}(x_0) = \frac{f(x_o+h) - 2f(x_o) + f(x_o-h)}{h^2} \tag{18}$$

   con *cinco puntos*:

$$f^{(2)}(x_0) = \frac{-f(x_o+2h) + 16f(x_o+h) - 30f(x_o) + 16f(x_o-h) - f(x_o-2h)}{12h^2} \tag{19}$$

EJERCICIO 3:
La siguiente tabla corresponde a una función desconocida $\varphi = \varphi(x)$.

$x_1 = 0.6$	$\varphi(x_1) = 1.24110$
$x_2 = 0.7$	$\varphi(x_2) = 1.40917$
$x_3 = 0.8$	$\varphi(x_3) = 1.66863$
$x_4 = 0.9$	$\varphi(x_4) = 2.07301$
$x_5 = 1.0$	$\varphi(x_5) = 2.71828$

Aproxímese la derivada $\varphi'(x)$ en $x = 0.8$ usando la fórmula de derivación centrada de dos puntos, ec. (10), y usando los únicos dos valores de h posibles si **solo se dispone** de la información recogida en dicha tabla.

Usando esa misma información de la función, aproxímese también dicha derivada usando la fórmula (16) de derivación centrada de cuatro puntos.

RESULTADO:

```
ec.10, h=0.2:  3.69295
ec.10, h=0.1:  3.31919
ec.16, h=0.1:  3.19460
```

EJERCICIO 4:

Sea la función $f(x) = x\,\sqrt{9 - x^2} + 9\ arc\,sen\,\frac{x}{3}$.

Considérese $h = 0.15$ para obtener su derivada hacia adelante, ec. (3), en $x = x_0$ y siendo $x_0 \in \{-2.5, -2.0, -1.5, -1.0\}$.

Obténgase el error cometido en cada caso.

Represéntense gráficamente los cuatro puntos encontrados, junto a (compartiendo unos *mismos ejes* X e Y) la gráfica de la función derivada exacta en el intervalo comprendido entre -2.75 y 2.75.

EJERCICIO 5:

Aproximar la derivada de la función $f(x) = x^5 - 3x^4 - 11x^3 + 19x^2 + 10x - 24$ mediante la fórmula (10) de derivación centrada de dos puntos y también mediante las fórmulas (3) y (7), considerándose siempre $h = 0.1$: se mostrará en pantalla la gráfica de la función f (atención: *efe*), acompañándose de la representación gráfica de las tres derivadas numéricas indicadas (combinándolas en los *mismos ejes* X e Y). Pedimos tres figuras separadas:

- en el intervalo de extremos -2.5, 2.5 ("figura a")

- en el intervalo de extremos -1.5, 1.5 ("figura b")

- en el intervalo de extremos -1.0, 1.0 ("figura c")