Ejercicios del tema y su valor:
1-trapecio compuesta (1p), 2-trapecio compuesta, otro (2p), 3-reglas compuestas (2p),
4- reglas simples (1p), 5-Simpson 1/3 compuesta (3p), 6-ejercicio número seis (3.5p)
Entrega: un ejercicio obligatorio: el núm. 1; un ejercicio optativo: a elegir entre los restantes

Integración numérica.

El objetivo es calcular aproximadamente (*aproximar*) el valor de la integral definida de una función *f(x)* en un intervalo [a,b] a partir del conocimiento de un número finito, n, de pares $x_i, f(x_i)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n) \tag{1}$$

A la ecuación (1) se le llama fórmula de **integración numérica** o de **cuadratura**, a los valores x_i se les llama **nodos de integración** o **nodos de cuadratura** y a los valores a_i, **pesos** de la fórmula.

La deducción de las fórmulas de cuadratura pueden hacerse utilizando un polinomio interpolador $P_n(x)$. Cuando usamos este polinomio para aproximar la función $f(x)$ en *[a,b]*, y luego aproximamos la integral de $f(x)$ por la integral de $P_n(x)$, la fórmula resultante se llama **fórmula de cuadratura de Newton-Cotes**. Si el primer nodo es $x_1 = a$ y el último es $x_n = b$, entonces se dice que la fórmula de Newton-Cotes es *cerrada*.

1. El problema general a abordar es cómo aproximar la integral de una función de la que se conoce su forma analítica.

   Supondremos que los N nodos x_k a utilizar son equidistantes: $x_k = x_1+(k-1)h, \quad k = 1, 2, \cdots n$. Sea $f_k = f(x_k), \quad k = 1, 2, \cdots N$.

   - **regla del trapecio**

     La regla del trapecio (o *del trapecio simple*) aproxima la función $f(x)$ por un polinomio interpolador lineal $P(x)$ que pasa por los nodos x_1 *y* x_2

$$P(x) = f_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

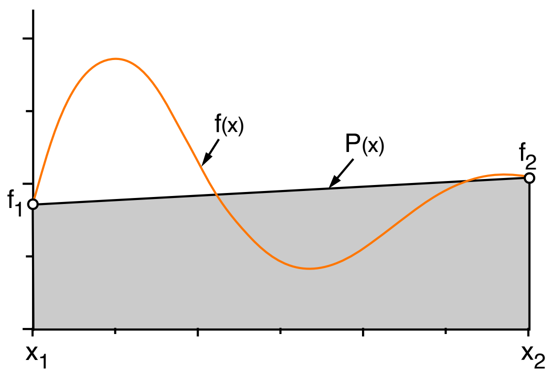

Fig. 1

de forma que la integral en el intervalo [a,b] viene dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_1}^{x_2} P(x)dx = \frac{h}{2}(f_1 + f_2) \tag{3}$$

con $x_1 = a,\ x_2 = b$ y $h = x_2 - x_1$.

- **regla del trapecio compuesta**

Para aproximar la integral de forma más precisa, podemos dividir el intervalo [a,b] en n subintervalos $[x_k,\ x_{k+1}]$ de anchura común h=(b-a)/n y aplicar la regla del trapecio a cada subintervalo (*regla del trapecio compuesta)*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \cdots + \int_{x_n}^{b} f(x)dx \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)dx \\ &= \frac{h}{2}(f_a + f_b) + h\sum_{k=2}^{n} f_k \end{aligned} \tag{4}$$

con $f_1 = f_a,\ f_{n+1} = f_b,\ f_k = f(x_k),\ x_k = a + (k-1)h.$

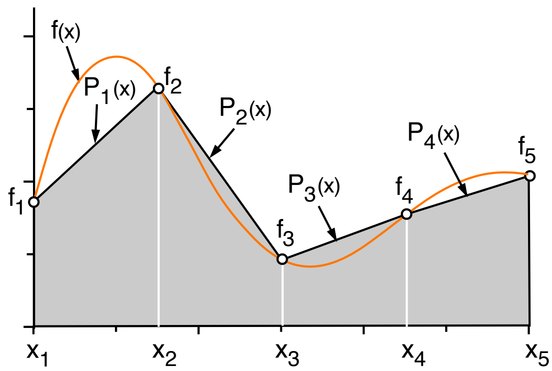

Fig. 2

El número adecuado de subintervalos que deberemos utilizar dependerá de la precisión deseada.

EJERCICIO 1:
Implementar un programa que realice la integral de una función $f(x)$ en un intervalo [a,b], haciendo uso de la regla del trapecio compuesta.
Aplicarlo al caso: $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, a=0 y b=1.35 , precisión: 10^{-5}.

RESULTADO:

```
Regla del trapecio compuesta

Precisión: 1.000000e-05
La integral entre a= 0.000000 y b= 1.350000 es:  1.508750037
```

EJERCICIO 2:
La siguiente tabla muestra diversos valores correspondientes a una cierta función $f = f(x)$.

x	$f(x)$
1.0	1.543
1.1	1.669
1.2	1.811
1.3	1.971
1.4	2.151
1.5	2.352
1.6	2.577
1.7	2.828
1.8	3.107

En el caso de este ejercicio, desconocemos la forma analítica de la función a integrar. Obténgase la integral de f entre a=1.0 y b=1.8 mediante la regla del trapecio compuesta considerando tres casos: subdividiendo el intervalo de integración [a,b] en subintervalos
- de tamaño h=0.1
- de tamaño h=0.2
- de tamaño h=0.4

RESULTADO:

```
Regla del trapecio compuesta

1.92375   con h= 0.1
2.08350   con h= 0.2
2.41180   con h= 0.4
```

- **regla de Simpson 1/3**

En este caso, la función $f(x)$ se aproxima por un polinomio $P(x)$ de segundo grado, que debe ser determinado en tres nodos consecutivos $x_1,\ x_2\ y\ x_3$

$$P(x) = f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \tag{5}$$

La integral en el intervalo [a,b] se calcula por la expresión

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_1}^{x_3} P(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_1 + 4f_2 + f_3\right) \tag{6}$$

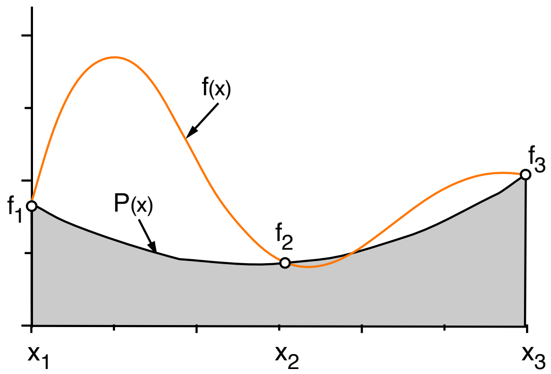

Fig. 3

- **regla de Simpson 1/3 compuesta**

Supongamos que dividimos [a,b] en 2n subintervalos $[x_k,\ x_{k+1}]$ de una misma anchura h=(b-a)/(2n) mediante una partición de nodos equidistantes $x_k = a + (k-1)h$, para $k = 1, 2, \cdots, 2n+1$. La **regla compuesta de Simpson 1/3** se puede expresar por

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_5} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2n-1}}^{b} f(x)dx \\ &\approx \frac{h}{3}\left(f_a + f_b\right) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{n-1} f_{2k+1} + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{n} f_{2k} \end{aligned} \tag{7}$$

EJERCICIO 3:
Implementar un programa que realice la integral de la función $f_1(x)$ en el intervalo $[\,0, 1/2\,]$ y la integral de $f_2(x)$ en el intervalo $[\,1, 3\,]$

$f_1(x) = 1/(1+x^2) \qquad f_2(x) = ln\, x$

haciendo uso de

- la regla del trapecio compuesta, considerando 5 subintervalos
- la regla de Simpson 1/3 compuesta, considerando 8 subintervalos

RESULTADO:

```
Regla del trapecio compuesta (n=5)
el resultado obtenido para la integral I1 es 0.46311
el resultado obtenido para la integral I2 es 1.28701

Regla de Simpson 1/3 compuesta (n=8)
el resultado obtenido para la integral I1 es 0.46365
el resultado obtenido para la integral I2 es 1.29580
```

- **regla de Simpson 3/8**

Se utiliza un polinomio $P(x)$ de tercer grado para aproximar a la función $f(x)$, determinado en cuatro nodos consecutivos $x_1,\ x_2,\ x_3\ y\ x_4$

$$\begin{aligned} P(x) = {} & f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\ & + f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + f_4 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \end{aligned} \tag{8}$$

La integral en el intervalo [a,b] se calcula por la expresión

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_1}^{x_4} P(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4\right) \tag{9}$$

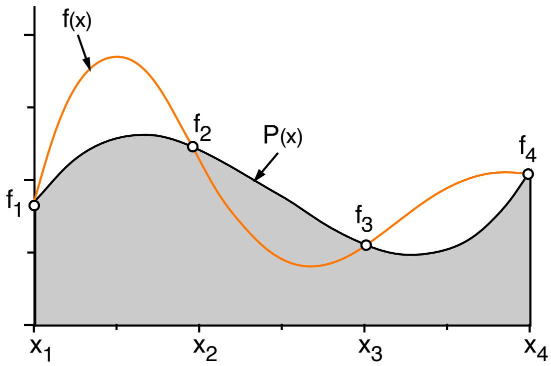

Fig. 4

EJERCICIO 4:
Implementar un programa que realice la integral de una función $f(x)$ en un intervalo [a,b], utilizando las reglas del *trapecio*, *Simpson 1/3* y *Simpson 3/8 simples*.
Aplicarlo al caso: $f(x) = 400x^5 - 900x^4 + 675x^3 - 200x^2 + 25x + 0.2$, a=0 y b=0.8

RESULTADO:

```
Integral entre a= 0.00000 y b= 0.80000,
Regla del trapecio:    0.17280
Regla de Simpson 1/3:  1.36747
Regla de Simpson 3/8:  1.51917
```

EJERCICIO 5:
Implementar un programa que realice la integral de una función $f(x)$ en un intervalo [a,b], utilizando la regla de Simpson 1/3 compuesta.
Aplicarlo al caso: $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, a=0 y b=1.35, precisión: 10^{-8}.

RESULTADO:

```
Regla de Simpson 1/3

Precisión: 1.000000e-08
La integral entre a= 0.000000 y b= 1.350000 es:  1.5087515625
```

EJERCICIO 6:
Implementar un programa que realice la siguiente integral

$$\int_0^1 x^a\, e^x\, dx$$

para los casos: a=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

- utilizando la regla de Simpson 1/3 compuesta, precisión: 10^{-5}
- y también mediante la relación de recurrencia $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$, con $I_0 = e - 1$ (cada término de la secuencia es definido a partir del término anterior).

RESULTADO:
(Simpson 1/3 compuesta no facilitado; el programa deberá mostrar en pantalla los resultados completos)

```
Integral entre a= 0.0000 y b= 1.0000:

                              Simpson 1/3 COMPUESTA      Relación de recurrencia
                              Precisión: 1.0000e-05

a=0; la integral I0 resulta:            ...                      1.71828
a=1; la integral I1 resulta:            ...                      1.00000
a=2; la integral I2 resulta:            ...                      0.71828
a=3; la integral I3 resulta:            ...                      0.56344
a=4; la integral I4 resulta:            ...                      0.46454
a=5; la integral I5 resulta:            ...                      0.39560
a=6; la integral I6 resulta:            ...                      0.34468
```