Ejercicios del tema:
1-raíces en intervalos (1p), 2-gráfica (1p), 3-bisección (1p), 4-regula falsi (1p)
Entrega: un ejercicio obligatorio: el núm. 1, un ejercicio optativo: a elegir entre los restantes

Resolución de ecuaciones no lineales.

Problema: Encontrar las raíces reales de $f(x) = 0$ en un intervalo (x_{min}, x_{max}) dado.

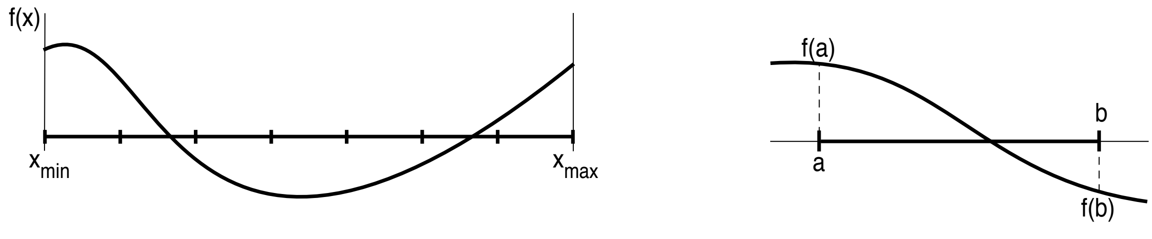
En este tema estudiaremos la resolución de ecuaciones no lineales, esto es, el cálculo de sus soluciones o *raíces*. Nos centraremos en el caso de una única ecuación con una incógnita y tendremos en cuenta que toda ecuación podrá ser escrita en la forma $f(x) = 0$. Así, el cálculo de raíces de una ecuación es equivalente al cálculo de los ceros de una determinada función. Consideraremos funciones $f(x)$ reales de variable real, no siendo en general posible despejar x salvo en casos muy concretos.

Un primer problema que nos encontramos en relación con una ecuación dada es conocer el número de raíces de la misma y *dónde* están situadas. Muchos de los métodos que se utilizan para el cálculo de raíces precisan de la localización previa de la raíz en un intervalo (a,b) que la contenga. Se dice que las raíces de una ecuación están *separadas* si conocemos intervalos cerrados tales que cada uno de ellos contiene a una sola raíz de la ecuación.

No existe una técnica general efectiva para *separar* las raíces de una ecuación. A tal efecto, es habitual utilizar los Teoremas de Bolzano y Rolle (en aquellas regiones donde la función sea continua y derivable). La existencia de un intervalo cerrado donde $f(x)$ sea continua y en cuyos extremos $f(x)$ tenga signos contrarios garantiza, por el Teorema de Bolzano, la presencia en él de al menos una raíz real. Si además $f(x)$ es derivable en el correspondiente abierto y se verifica $f'(x) \neq 0$ en todo punto de dicho abierto, puede concluirse que la raíz existente en dicho intervalo es única.

Localización de raíces

Supongamos que deseamos obtener las raíces de la función $f(x) = 0$ en el intervalo $x_{min} \leq x \leq x_{max}$.



(a) (b)

Fig. 1

El procedimiento a seguir consiste en dividir el intervalo inicial (x_{min}, x_{max}) en un número n de intervalos más pequeños (figura 1a). A continuación se analiza cada uno de estos subintervalos (a, b), examinando (figura 1b) el signo de la función en los extremos del mismo para determinar si la función $f(x)$ tiene una raíz en él,

$$Si \begin{cases} signo\ f(a) \neq signo\ f(b) & \text{hay solución en el intervalo (a,b)} \\ signo\ f(a) = signo\ f(b) & \text{no hay solución en el intervalo (a,b)} \end{cases} \tag{1}$$

EJERCICIO 1:

Dada la función $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$, analizar la existencia de raíces en el intervalo $-2 \leq x \leq 4$ (figura 2).

Dividir el intervalo inicial en 20 subintervalos de igual tamaño y determinar en cuáles de ellos se encuentran sus raíces.

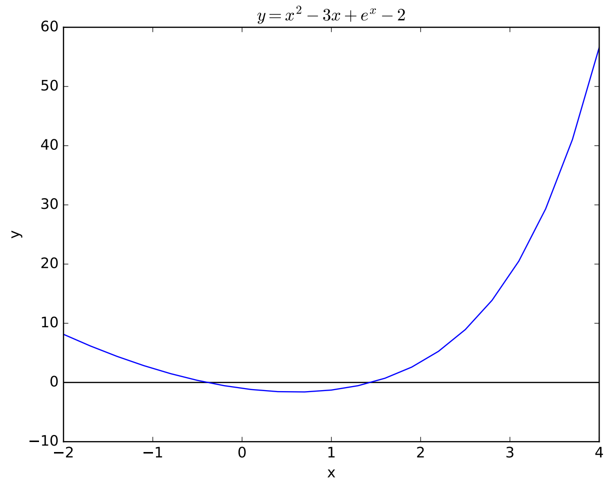


Fig. 2

RESULTADO:

```
La primera raíz se encuentra en el subintervalo  -0.5 ≤ x ≤ -0.2
y una segunda raíz, en el subintervalo  1.3 ≤ x ≤ 1.6
```

EJERCICIO 2:

Se pide la construcción de una gráfica similar a la mostrada en la figura 2.

Bisección

Supongamos que la raíz que deseamos calcular está contenida en el intervalo (a,b).

Se obtiene el punto medio del intervalo

$$c = \frac{a+b}{2} \qquad (2)$$

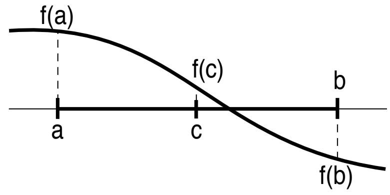


Fig. 3

y se calcula f(c). Si f(c)=0 (o f(c)≤ precisión deseada) significa que c es la raíz buscada. En caso contrario, se comprueba

$$Si \begin{cases} signo\ f(c) = signo\ f(a) & \text{hay una raíz en el intervalo (c,b)} \\ signo\ f(c) = signo\ f(b) & \text{hay una raíz en el intervalo (a,c)} \end{cases}$$

A continuación se toma el nuevo intervalo y se vuelve a dividir a la mitad, procediendo de esta manera hasta alcanzar la solución con la precisión buscada.

EJERCICIO 3:

Calcular, por el método de la bisección y en el intervalo $-0.5 \leq x \leq -0.2$, una raíz de la función $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$.

RESULTADO:

```
Método de la bisección
Solución en el intervalo (-0.500000,-0.200000)
x=-0.390272   f(x)=0.000000
```

Regula falsi

Supongamos que la raíz que deseamos calcular está contenida en el intervalo (a,b).

La ecuación de la recta que une los puntos [a,f(a)] y [b,f(b)] es

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) \qquad (3)$$

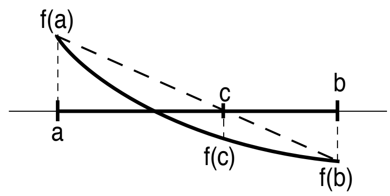


Fig. 4

Dicha recta corta al eje f(x)=0 en el punto c, dado por

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b) - f(a)} \qquad (4)$$

Si f(c)=0 (o f(c)≤ precisión deseada) significa que c es la raíz buscada. En caso contrario, se comprueba

$$Si \begin{cases} signo\ f(c) = signo\ f(a) & \text{hay una raíz en el intervalo (c,b)} \\ signo\ f(c) = signo\ f(b) & \text{hay una raíz en el intervalo (a,c)} \end{cases}$$

se toma el nuevo intervalo y se repite el proceso hasta alcanzar la solución.

EJERCICIO 4:

Calcular, por el método de la regula falsi, las raíces de la función $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$, en el intervalo $-2 \leq x \leq 4$.

RESULTADO:

```
Método de la regula falsi
Soluciones en el intervalo (-2.000000,4.000000)
x1= -0.390274   f(x1)= 0.000008
x2= 1.446237   f(x2)= -0.000008
```