

Circuito RC en serie

Laboratorio de electromagnetismo, práctica 2

José Pazos Pérez

DNI - Grupo TM

Índice

I	Introducción	2
1.	Obxetivos	2
2.	O problema de estudo	2
2.1.	Impedancia	2
2.2.	A ecuación do circuito	3
2.2.1.	Sinal cadrada	3
2.2.2.	Sinal sinusoidal	4
2.3.	Os experimentos	4
2.3.1.	Réxime transitorio	4
2.3.2.	Derivador	4
2.3.3.	Integrador	5
3.	Material	6
II	Procedemento experimental	7
1.	Circuito RC como derivador	7
1.1.	Réxime transitorio	7
1.2.	Derivador	8
1.3.	Filtro pasa-altos	9
2.	Circuito RC como integrador	10
2.1.	Réxime transitorio	10
2.2.	Integrador	11
2.3.	Filtro pasa-baixos	12
III	Conclusións	13
	Apéndices	14
A.	Análise de incertidumbres	14
B.	Bibliografía	14

Parte I

Introducción

1. Obxetivos

Estudaremos un circuito RC (consistente nunha resistencia R e nun condensador C) en serie. Ademais de entender o seu comportamento en réxime transitorio, isto é, o proceso polo que se carga e descarga o condensador a través da resistencia, centrarémonos nas súas propiedades como derivador ou integrador dunha función periódica. Tamén veremos que é útil para filtrar baixas ou altas frecuencias.

2. O problema de estudo

2.1. Impedancia

A impedancia Z mide a oposición dun circuito cunha diferenza de potencial V ó paso da corrente. É un concepto similar á resistencia máis tamén abarca circuitos de corrente alterna.

Z é un número complexo cuxa parte real é a resistencia R . Chamamos reactancia X á súa fase, composta dunha parte inductiva X_L e unha capacitiva X_C . No noso caso, ó traballar cun circuito sen inductores, $X_L = 0$.

$$\begin{aligned} X_L = \omega L = 2\pi f L & & X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \\ X = X_L - X_C & & X = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2\pi f C} \end{aligned}$$

Definimos a impedancia como:

$$X = \frac{V}{I} \tag{1}$$

Podémola escribir en forma binomial $Z = R + iX$ ou en forma polar $Z = |Z|e^{i\theta}$. O módulo e a fase da impedancia poden escribirse en función de R e X .

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \tag{2}$$

$$\theta = \arctan \frac{-X}{R} = \arctan \frac{1}{\omega RC} \tag{3}$$

A frecuencia de corte f_c prodúcese onde o arcotangente da fase da impedancia é a unidade. Neste momento a fase é $\pi/4$ (sempre entre $\pm\pi/2$ xa que a resistencia é positiva), e tamén $R = -X$. Calculamos f_c e w_c :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad w_c = 2\pi f_c \quad (4)$$

2.2. A ecuación do circuito

Se observamos o circuito RC exposto na figura seguinte (1), a tensión V é producida por unha fonte de corrente alterna, que xerará distintas funcións periódicas $V(t)$. Esta tensión ten que ser a suma das tensións de R e C por ser un circuito en serie, $V = V_R + V_C$.

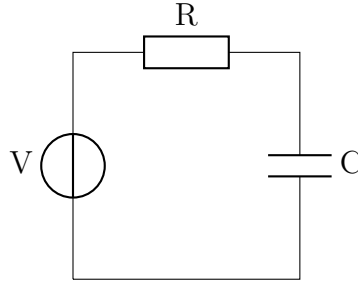


Figura 1: Circuito RC

Conocendo a forma das tensións dunha resistencia e un condensador, que dependen de $I(t)$ e $Q(t)$ respectivamente, con $I = \frac{dQ}{dt}$, podemos substituír e obter unha ecuación diferencial que describa o sistema:

$$V_R = IR \quad V_C = \frac{Q}{C} \quad (5)$$

$$V = IR + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I dt' \quad \frac{dV}{dt} = R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I \quad (6)$$

2.2.1. Sinal cadrada

Para un V constante, como o dunha sinal cadrada, podemos resolver (6) como unha ecuación homoxénea e así calcular V_R e V_C :

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC} \quad V_R = I_0 R e^{-t/RC} \quad V_C = I_0 R (1 - e^{-t/RC})$$

Utilizando que $V_0 = I_0 R$ (5) e considerando o caso no que a carga inicial do condensador Q_0 sexa distinta de cero, finalmente temos:

$$V_R = V_0 e^{-t/RC} \quad V_C = V_0 (1 - e^{-t/RC}) + \frac{Q_0}{C} \quad (7)$$

2.2.2. Sinal sinusoidal

Neste caso temos $V = V_m e^{i(\omega t + \phi)}$, que ten a mesma solución homoxénea máis unha particular:

$$I = I_m e^{i(\omega t + \varphi)} \quad I_m = \frac{V_m}{|Z|} \quad \varphi = \phi - \theta$$

Sustituíndo en (5) podemos obter V_R e V_C .

$$V_R = R I_m e^{i(\omega t + \varphi)} = \frac{V_m R}{|Z|} e^{i(\omega t + \phi - \theta)} \quad V_C = \frac{V_m}{\omega C |Z|} e^{i(\omega t + \phi - \theta + \pi/2)} \quad (8)$$

2.3. Os experimentos

2.3.1. Réxime transitorio

Primeiro trataremos de entender cómo funciona o proceso de carga e descarga do condensador a través da resistencia. Supoñamos que en $t = 0$ o condensador está descargado e lle suministramos un voltaxe V_0 constante. Utilizando (7) podemos calcular a carga do condensador:

$$Q = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/RC}) \quad (9)$$

Podemos definir o tempo de relaxación $\tau = RC$ como aquel que leva o módulo da exponencial a 1. Aplicando isto a (4) obtemos $f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$. Cando o condensador acade a súa carga máxima e a corrente deixe de circular, igualándose $V_C = V_0$, acadaremos a situación de réxime estacionario. Teóricamente este proceso exténdese ata o infinito, máis na práctica nun tempo 5τ o condensador estará cargado a máis do 99 %.

2.3.2. Derivador

Montamos o circuito na configuración indicada na figura (2). Tomamos a tensión da fonte V_1 como valor de entrada e a dos bornes da resistencia V_2 como a saída. Cando introduzamos unha sinal cunha frecuencia baixa o circuito actuará como derivador, $V_2 \propto \frac{dV_1}{dt}$.

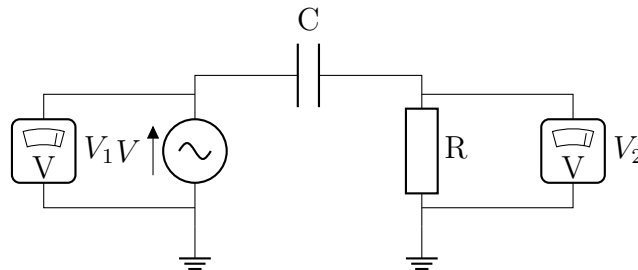


Figura 2: Circuito RC como derivador

Por ser a frecuencia baixa asumimos que o condensador cárgase nun tempo despreziable respecto ó período da sinal, polo que despreziamos a tensión da resistencia, e temos que $V_1 \approx V_C$. Polo tanto, as súas derivadas tamén son aproximadamente iguais $\frac{dV_1}{dt} \approx \frac{dV_2}{dt}$.

Tendo en conta (5) podemos escribir:

$$\frac{dV_1}{dt} \approx \frac{I}{C} \quad \rightarrow \quad I \approx C \frac{dV_1}{dt}$$

E finalmente calculamos a sinal de saída:

$$V_2 = V_R = IR \approx RC \frac{dV_1}{dt} = \tau \frac{dV_1}{dt} \quad (10)$$

2.3.3. Integrador

Nesta ocasión montamos o circuito tomando como sinal de saída V_2 a tensión en bornes do condensador (3). Se a frecuencia da sinal é suficientemente alta entón o circuito funcionará como integrador, $V_2 \propto C + \int_{t_0}^t V_1 dt'$

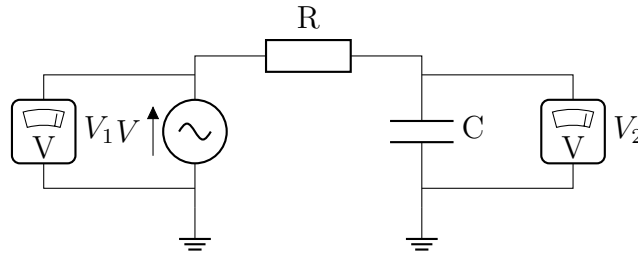


Figura 3: Circuito RC como integrador

Por ser a frecuencia alta o condensador non poderá cargarse e despreziaremos o seu potencial, $V_1 \approx V_R$. Como $V_R = RI$, entón $I \approx \frac{V_1}{R}$.

Agora podemos calcular a sinal de saída:

$$\begin{aligned} V_2 = V_C &= \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \left(Q_0 + \int_{t_0}^t I dt' \right) \\ V_2 &\approx \frac{1}{C} \left(Q_0 + \int_{t_0}^t \frac{V_1}{R} dt' \right) = Q_0 + \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t V_1 dt' \end{aligned} \quad (11)$$

3. Material

Este ano a práctica tivo que realizarse de maneira telemática, polo que o único *material* necesario foi o programa de código aberto [QUCS](#) [1]. QUCS, ou *Quite Universal Circuit Simulator*, é un simulador de circuitos electrónicos gratuito e licenciado baixo GPL [2], dispoñible para Linux, MacOS e Windows. O programa permite construír un circuito mediante componentes coma nun laboratorio, realizar unha simulación completa e logo examinar os resultados mediante gráficas ou taboas.

Ao facerse a través dun ordenador, moitas fontes de incertidumbre desaparecen, como a imprecisión dos aparatos de medida ou a variación das condicións ambientais. Sin embargo, ao ser unha simulación, temos que ter en conta que non vai reflectir exactamente o comportamento do mundo real, e debemos de ter sempre en conta qué precisión pode ter.

Os desarroilladores de QUCS publicaron un *paper* [3] detallando cada aspecto da simulación, as técnicas utilizadas, as probas de converxencia e demais apartados matemáticos. Pese a ter apartados interesantes, o análise exhaustivo e o cálculo de incertidumbres baseados nestes métodos excede o nivel deste curso. Por iso asumiremos que as fontes de incertidumbre internas da simulación son practicamente despreziables e tomaremos os datos que nos dé o programa cunha incerteza de unha unidade na última cifra.

Pese a non utilizar material de laboratorio, procederemos a nomear unha lista dos compoñentes necesarios para facer a simulación:

- **Resistencia:** $R = 21,8 \pm 0,01 k\Omega = 2,18 \cdot 10^4 \pm 10 \Omega$
- **Condensador:** $C = 37,1 \pm 0,01 nF = 3,71 \cdot 10^{-8} \pm 10^{-11} F$
- **Xerador de sinais:** Fonte de corrente alterna, pode variar a frecuencia, a amplitude e a forma da onda (cadrada, sinusoidal, triangular).
- **Osciloscopio:** Neste caso utilizaremos a función gráfica para debuxar as sinais.
- **Polímetro:** Poremos marcadores nos lugares apropiados que logo poderemos ver nas gráficas ou tablas.

Parte II

Procedemento experimental

Antes de empezar, podemos realizar varios cálculos de utilidade no resto da práctica. Nestes aplicaremos o cálculo de incertidumbres descrito no [Apéndice A](#).

Tempo de relaxación:

$$\tau = RC = 8,0878 \cdot 10^{-4} \pm 4,3 \cdot 10^{-7} s \approx 0,81ms \quad (12)$$

Frecuencia de corte (4):

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = 196,78 \pm 0,10Hz \quad (13)$$

Frecuencia angular de corte:

$$w_c = 2 * \pi * f_c = 1236,43 \pm 0,66rad/s \quad (14)$$

1. Circuito RC como derivador

1.1. Réxime transitorio

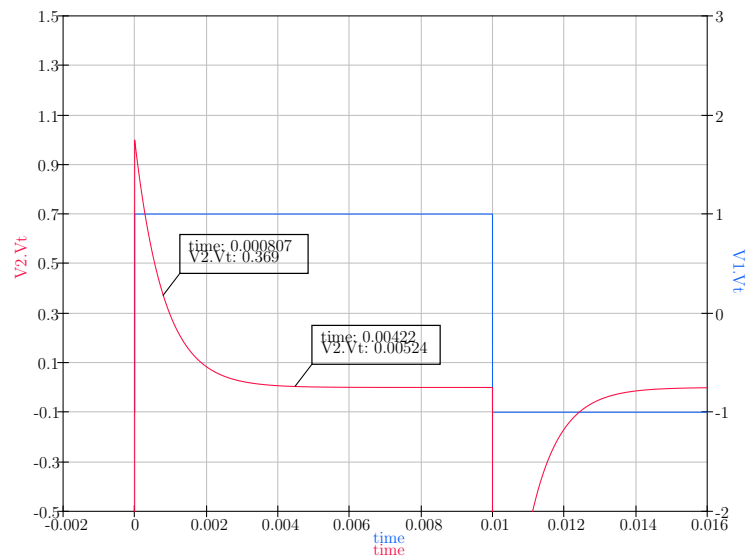
Montamos o circuito como derivador (2). Queremos aproximar cualitativamente o tempo de relaxación do circuito. Para iso aplicaremos unha sinal cadrada (con *offset* e $V_1 = 1V$) e procederemos a simular o circuito.

Observamos que V_2 é unha exponencial decreciente proporcional a V_1 . Tras colocar a gráfica nunha escala apropiada na que se aprecie ben a curva, procederemos a estimar onde se carga por completo o condensador. Como dixemos antes, a carga continuaría ata o infinito, pero faremos unha estimación cualitativa de cando "se fai plana a curva". Polo tanto, tomaremos como

Temos que $V_2(0) = 1,0V$, e podemos calcular $V_2(\tau) = e^{-1}V_2(0) \approx 0,37V$. Agora podemos atopar un valor próximo a $V_2(\tau)$ na gráfica e atopar o tempo de relaxación experimental. Cualitativamente elegimos o punto na gráfica e obtemos un $\tau_e = 8,07 \cdot 10^{-4}s$, moi similar ao τ que calculamos antes (12).

Tamén podemos calcular a frecuencia de corte experimental (4) como $f_{ce} = \frac{1}{2\pi\tau_e} = 197,22Hz$. De novo, practicamente idéntica á teórica (13).

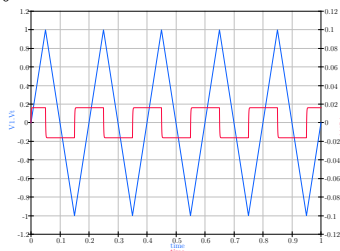
Por último, podemos ver que o tempo de estabilización t_c é aproximadamente igual a 5τ . Se vemos na gráfica, para un $t \approx 0,0042s$, $V_2 < (1 - 0,99)V_1$, polo que podemos dicir que o condensador está descargado a máis do 99 %.



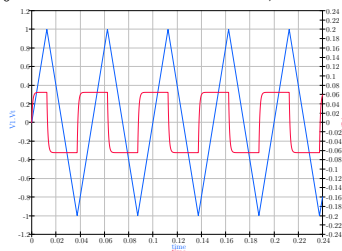
1.2. Derivador

Agora utilizaremos unha sinal triángular, cuxa derivada é unha función cadrada (por ter unha pendente constante que só cambia no signo). Cando a frecuencia sexa o suficiente baixa, a carga do condensador será despreziable fronte ó período e obteremos unha función cadrada. Faremos un análise de distintas frecuencias para atopar a partir de cal podemos dicir que o circuito atúa como derivador.

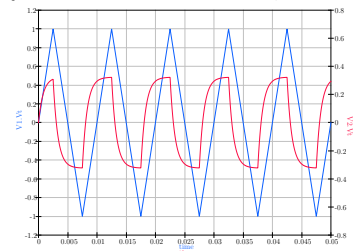
$$f = 5Hz \quad T \approx 50\tau$$



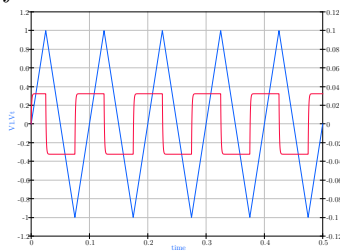
$$f = 20Hz \quad T \approx 12,5\tau$$



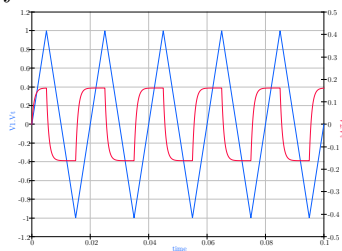
$$f = 100Hz \quad T \approx 2,5\tau$$



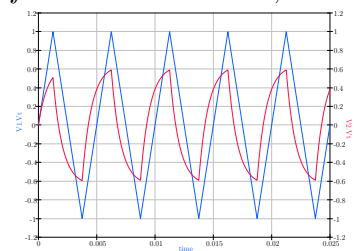
$$f = 10Hz \quad T \approx 25\tau$$



$$f = 50Hz \quad T \approx 5\tau$$



$$f = 200Hz \quad T \approx 1,25\tau$$



Podemos observar que conforme subimos a frecuencia, a gráfica vermella (representando V_2) cada vez ten menos forma de onda cadrada. Como observación subxetiva, eu diría que a partir de entre $20Hz$ e $50Hz$ (Ou entre $12,5\tau$ e 5τ) podemos considerar que o circuito atúa como derivador.

1.3. Filtro pasa-altos

O circuito así montado ten un efecto no desfase das frecuencias. Mentres que aquelas frecuencias $f \gg f_c$ apenas teñen desfase ou atenuación, aquelas máis pequenas teñen máis atenuación e adiántase a saída.

Para cuantificar este fenómeno tomaremos unha sinal sinusoidal e tomaremos as amplitudes pico a pico, así como o desfase, para un amplo rango de frecuencias.

Podemos buscar a frecuencia de corrente como aquela na que o desfase tenda a $\pi/4$, e se observamos o cadro, esta se atopará entre 191 e $200Hz$, coincidindo co cálculo feito previamente en (13).

$f(Hz)$	$V_1(V)$	$V_2(V)$	$\theta(rad)$	$\theta(^{\circ})$	$f(Hz)$	$V_1(V)$	$V_2(V)$	$\theta(rad)$	$\theta(^{\circ})$
1.0	1.0	0.00508	1.57	90.0	200.0	1.0	0.712	0.778	44.6
2.0	1.0	0.0101	1.56	89.4	209.0	1.0	0.728	0.755	43.3
5.0	1.0	0.0255	1.55	88.8	219.0	1.0	0.743	0.733	42.0
10.0	1.0	0.0508	1.52	87.1	240.0	1.0	0.773	0.687	39.4
20.0	1.0	0.101	1.47	84.2	263.0	1.0	0.801	0.642	36.8
50.1	1.0	0.247	1.32	75.6	282.0	1.0	0.820	0.610	35.0
100.0	1.0	0.453	1.10	63.0	302.0	1.0	0.838	0.578	33.1
120.0	1.0	0.521	1.02	58.4	501.0	1.0	0.931	0.374	21.4
141.0	1.0	0.583	0.948	54.3	1000.0	1.0	0.981	0.194	11.1
158.0	1.0	0.627	0.893	51.2	2000.0	1.0	0.995	0.0983	5.6
178.0	1.0	0.670	0.836	47.9	5010.0	1.0	0.999	0.0392	2.2
191.0	1.0	0.696	0.802	46.0	10000.0	1.0	1.0	0.0197	1.1

Cadro 1: Medicións dun circuito RC como derivador para distintas frecuencias

Agora representaremos os diagramas de Bode dos datos anteriores. O primeiro é a representación do desfase fronte a frecuencia (en escala semilogarítmica). Podemos ver perfectamente que na frecuencia de corte o desfase é $\pi/4$. Está axustado a unha función arcotanxente do tipo $\theta = a + b * \arctan(c/f)$, con coeficientes $a = 0,00rad$, $b = 1,00rad$ e $c = 196,43Hz$.

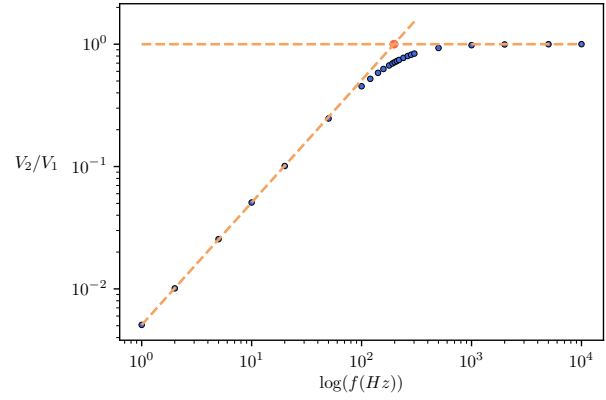
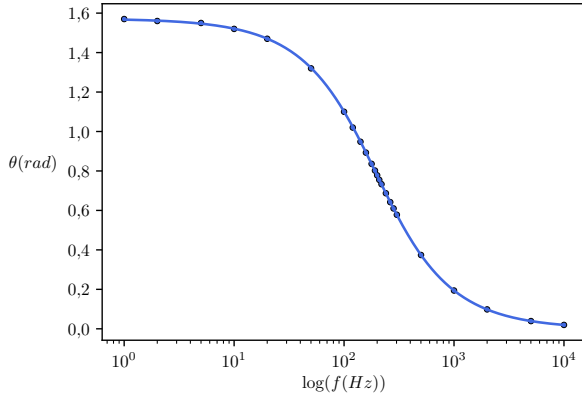


Figura 4: Diagrama de fase derivador Figura 5: Diagrama de magnitude derivador

Na segunda gráfica vemos que as tanxentes da curva córtanse nun punto moi próximo á frecuencia de corte f_c , validando todavía máis os nosos datos.

2. Circuito RC como integrador

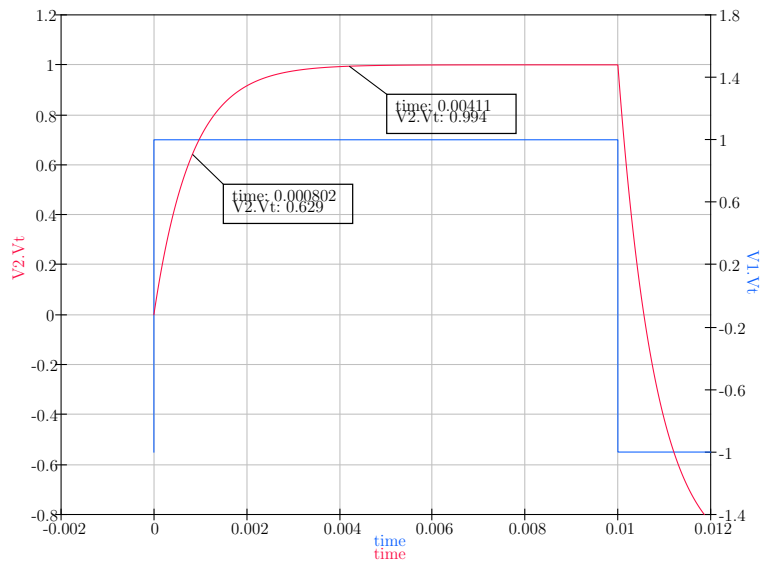
2.1. Réxime transitorio

Nesta ocasión montaremos o circuito como integrador (3). Vamos a simular a carga e descarga do condensador, así que elexiremos unha sinal cadrada.

Para estimar o que tarda en cargar o condensador, primeiro estimaremos o voltaxe tras un tempo de relaxación τ . $V_2(0) = 0$ e $V_2(\tau) = (1 - e^{-1})V_1$, aplicando que $V_1 = 1V$, $V_2(\tau) \approx 0,63V$. Agora miramos na gráfica o punto no que acada aproximadamente ese voltaxe, e obtemos un tempo de relaxación experimental $\tau_e = 8,02 \cdot 10^{-4}s$, de novo, practicamente idéntico ao τ calculado anteriormente (12).

Calcularemos tamén a frecuencia de corte experimental (4) e obtemos $f_{ce} = 198,45Hz$, moi similar a que xa obtéramos (13).

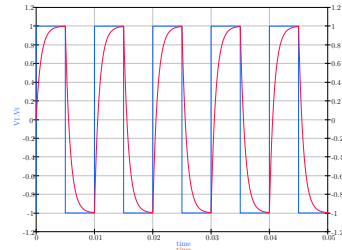
Finalmente podemos observar que o tempo de carga t_c é aproximadamente 5τ . Para un $t \approx 0,0041s$ vemos na gráfica que $V_2 > 0,99V_1$, e diremos que o condensador acadou o estado estable por estar cargado a máis do 99%.



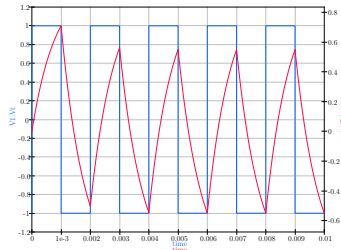
2.2. Integrador

Queremos comprobar as propiedades do circuito como integrador. Sabemos que a integral dunha sinal cadrada é unha función triángular, así que configuraremos o dispositivo para producir unha sinal cadrada. Cando a frecuencia sexa moi alta, o condensador non conseguirá cargarse e os efectos da exponencial serán despreziables, polo que obteremos a función triángular. Queda por determinar a partir de qué frecuencia se pode considerar ó circuito como integrador.

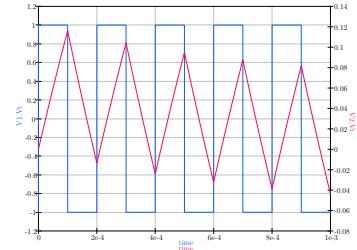
$$f = 100\text{Hz} \quad T \approx 2,5\tau$$



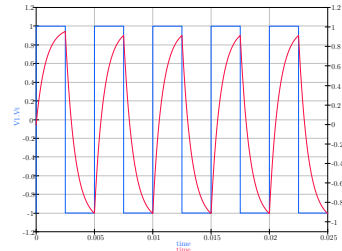
$$f = 500\text{Hz} \quad T \approx 0,5\tau$$



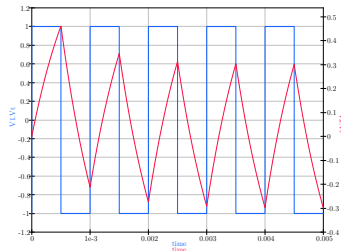
$$f = 5\text{kHz} \quad T \approx 0,05\tau$$



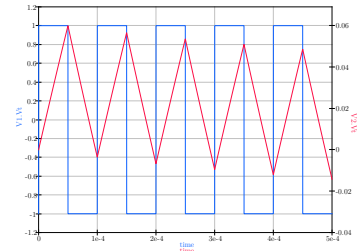
$$f = 200\text{Hz} \quad T \approx 1,25\tau$$



$$f = 1\text{kHz} \quad T \approx 0,25\tau$$



$$f = 10\text{kHz} \quad T \approx 0,025\tau$$



Baseandonos nas gráficas, podemos dicir que ao subir a frecuencia, a gráfica de V_2 (vermella) cada vez tende máis a unha onda triángular. Na miña opinión, o circuito atúa como

integrador a partir dun punto entre 1 e $5kHz$, e en todas as frecuencias superiores, aínda que de novo, esta é unha apreciación subxetiva.

2.3. Filtro pasa-baixos

Nesta ocasión o circuito integrador atúa como pasa-baixos. As frecuencias $f \ll f_c$ teñen un desfase que tende a 0 e apenas atenuación, mentres que as máis grandes terán máis atenuación e un desfase que tenderá a $-\pi/2$.

Agora tomaremos valores da amplitude de V_1 e V_2 , así como do desfase θ para un gran abanico de frecuencias e as representaremos no seguinte cadro.

Na frecuencia de corte o desfase será de $-\pi/4$, e observando o cadro vemos que se atopa entre 188 e $200Hz$, coincidindo co cálculo teórico.

$f(Hz)$	$V_1(V)$	$V_2(V)$	$\theta(rad)$	$\theta(^{\circ})$	$f(Hz)$	$V_1(V)$	$V_2(V)$	$\theta(rad)$	$\theta(^{\circ})$
1.0	1.0	1.0	-0.00508	-0.3	218.0	1.0	0.671	-0.835	-47.8
2.0	1.0	1.0	-0.0101	-0.6	237.0	1.0	0.639	-0.878	-50.3
5.01	1.0	1.0	-0.0255	-1.5	259.0	1.0	0.606	-0.920	-52.7
10.0	1.0	0.999	-0.0508	-2.9	282.0	1.0	0.572	-0.961	-55.1
20.0	1.0	0.995	-0.101	-5.8	299.0	1.0	0.550	-0.988	-56.6
50.1	1.0	0.969	-0.249	-14.3	501.0	1.0	0.365	-1.21	-69.3
100.0	1.0	0.891	-0.470	-26.9	1000.0	1.0	0.193	-1.38	-79.1
119.0	1.0	0.856	-0.543	-31.1	2000.0	1.0	0.0981	-1.47	-84.2
141.0	1.0	0.812	-0.623	-35.7	5010.0	1.0	0.0392	-1.53	-87.7
158.0	1.0	0.779	-0.678	-38.8	10000.0	1.0	0.0197	-1.55	-88.8
178.0	1.0	0.742	-0.735	-42.1	20000.0	1.0	0.00986	-1.56	-89.4
188.0	1.0	0.722	-0.764	-43.8	50100.0	1.0	0.00393	-1.57	-90.0
200.0	1.0	0.702	-0.792	-45.4	100000.0	1.0	0.00197	-1.57	-90.0
211.0	1.0	0.681	-0.821	-47.0					

Cadro 2: Medicións dun circuito RC como integrador para distintas frecuencias

Finalmente podemos representar os diagramas de Bode do pasabaixos. O axuste do primeiro o fixemos coa mesma función arcotanxente que no apartado anterior e os parámetros de axuste son $a = -1,57rad$, $b = 1,00rad$ e $c = 196,65Hz$.

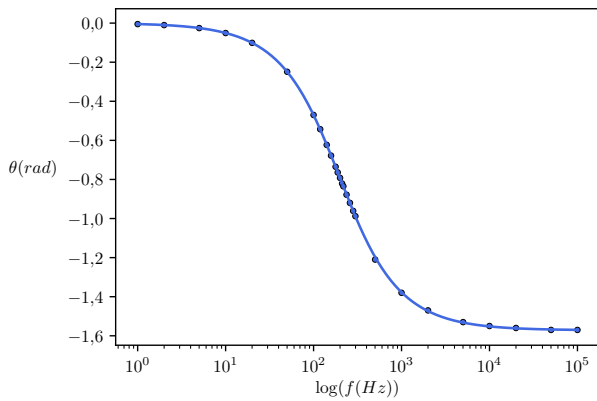


Figura 6: Diagrama de fase integrador

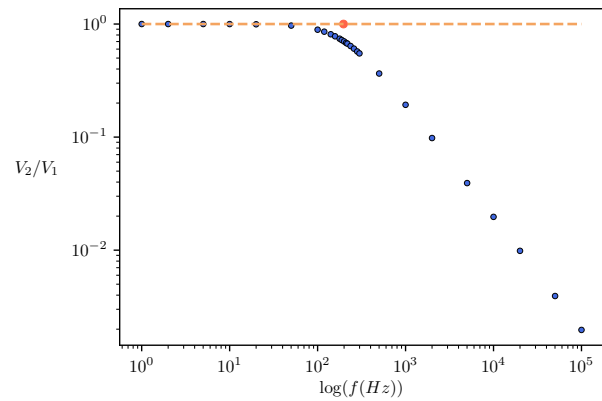


Figura 7: Diagrama de magnitude integr.

Parte III

Conclusións

Nesta práctica estudamos o uso dos circuitos RC como integradores e derivadores de sinais, así como de pasaaltos e pasabaixos.

Verificamos en todos os pasos que a frecuencia de corte $f_c \approx 197\text{Hz}$ mantíñase constante e dentro dos límites de incertidumbre, así como a corrección do tempo de relaxación teórico. Que todos os datos experimentais deran tan axustados aos datos teóricos sen dúbida débese ó uso dunha simulación por software que foi creada por científicos experimentados. A falta de factores externos fixo que os resultados se adecuaran moi ben ós fenómenos de estudo.

Mediante os diagramas de Bode podemos ver os efectos dos pasaaltos e pasabaixos, e como a atenuación das sinais os converte en excelentes filtros. As escalas logarítmicas destas gráficas son esenciais para visualizar ben os fenómenos que as ocupan, xa que a contribución da frecuencia ou do cociente V_2/V_1 aumentan exponencialmente.

Tamén gustaríame destacar que, ademáis de comprobar as leis físicas e realizar os experimentos correspondentes, a familiarización co uso de ferramentas informáticas paréceme realmente importante tendo en conta os avances na computación física e de cara ó futuro.

Apéndices

A. Análise de incertidumbres

Para o análise de incertidumbres utilizaremos os métodos descritos tanto en "Análisis de Incertidumbres" de Alfredo Amigo [4] e "Tratamento de datos físicos" [5].

A propagación de incerteza calcúlase coa seguinte fórmula:

$$s(y) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 s^2(x_i)} \quad (15)$$

As magnitudes x_i son aquelas medidas experimentalmente das que depende a magnitude indirecta y . Todas as magnitudes x_i han de ser independentes entre si.

Nesta práctica todos os datos veñen dados por un simulador, e non buscamos a precisión dos datos, se non un análise cualitativo destes. Por iso non faremos especial mención ao tratamento de incertidumbres xa que escapa do obxectivo da práctica cuantificar exactamente a precisión do simulador.

B. Bibliografía

- [1] G. B. Torri, M. Brinson, R. Crozier, B. Roucaries, F. Schreuder, C. Novak, V. Kuznetsov, M. Margraf, S. Jahn, J. Flucke, R. Jacob, V. Habchi, T. Ishikawa, G. Krishna, H. Parrutte, G. Kraut, and A. Zonca, "Qucs project." <http://qucs.sourceforge.net/>, Jan 2017.
- [2] "Gnu general public license." <http://www.gnu.org/licenses/gpl.html>.
- [3] S. Jahn, M. Margraf, V. Habchi, and R. Jacob, "Technical papers: Qucs." <http://qucs.sourceforge.net/tech/>, Dec 2017.
- [4] A. Amigo, *Análisis de incertidumbres*. Facultade de Física, 2019.
- [5] L. M. Varela Cabo, F. Gómez Rodríguez, and J. Carrete Montaña, *Tratamiento de datos físicos*. USC, 2010.