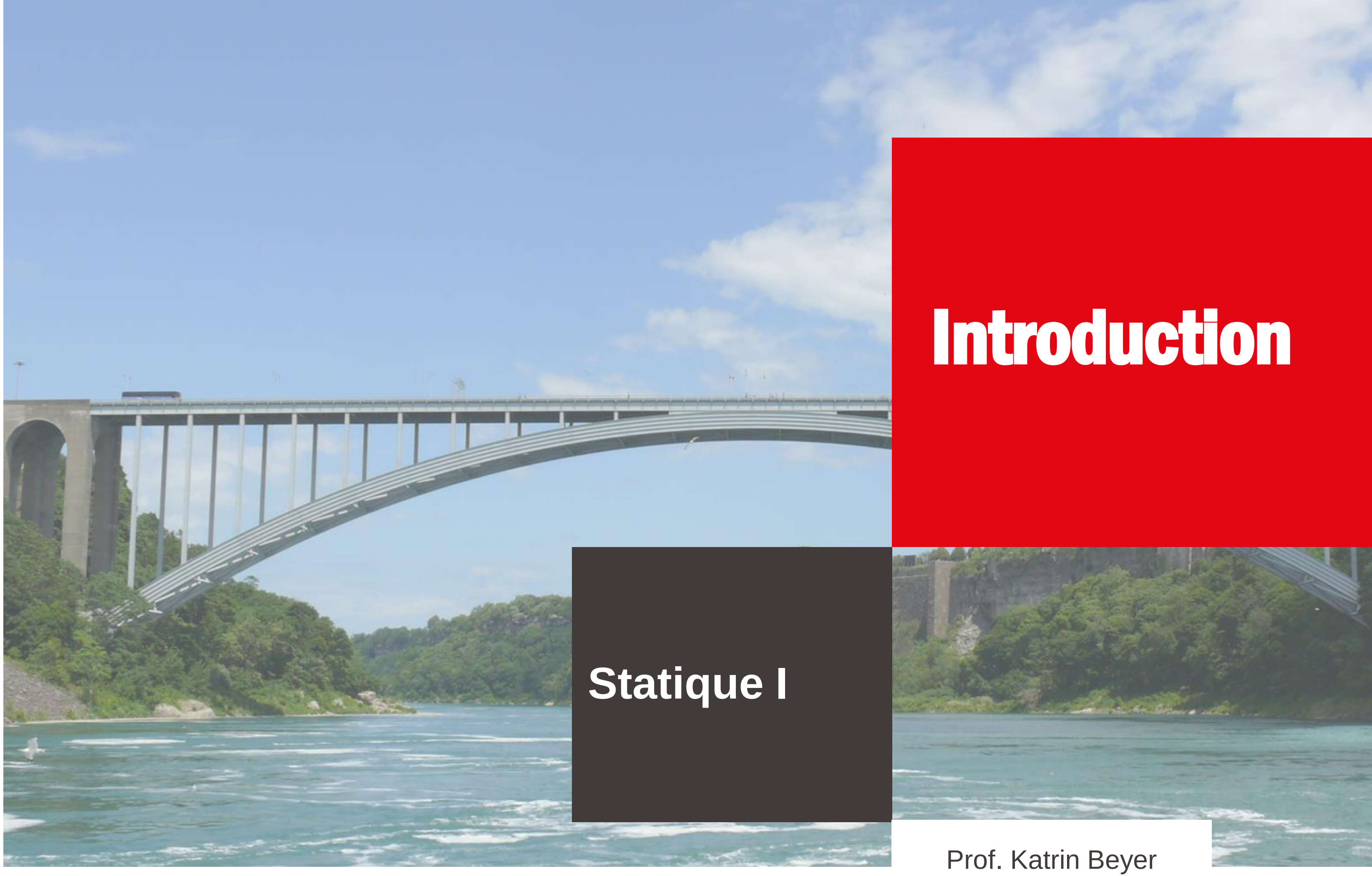
EPFL



Introduction

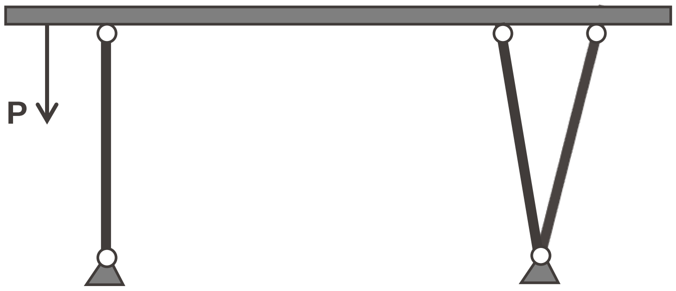
Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectifs du cours

- Modéliser les **structures réelles** avec des **éléments de la statique** appropriés (barres, poutres, câbles)
- Analyser par l'**équilibre** les forces de réactions et celles à l'intérieur des structures
- Trouver la position d'une **charge mobile** qui maximise la sollicitation de la structure (ligne d'influence)



Objectifs du cours

- Buts des calculs statiques à la main :
  - Développer un «feeling» des efforts à l'intérieur des éléments structuraux
  - Savoir contrôler les calculs effectués par des programmes basés sur les éléments finis

Sleipner A: Platforme pétrolière qui s'est abîmée à cause des erreurs dans les calculs avec des éléments finis

(*voir* http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/sleipner.html)

EPFL

Contexte du cours

Année propédeutique		Bachelor Année 1		Bachelor Année 2		Master
Sem 1	Sem 2	Sem 3	Sem 4	Sem 5	Sem 6	Sem 7
Analysis I	Analysis II	Analysis III	Introduction to ML for engineers	Analyse numérique	Analyse IV	
Algèbre linéaire	Géométrie	Probabilités et statistiques				
Physique générale I (Mécanique)	Physique générale II	Physique générale III				
		Introduction to computational thinking				
Information, Calcul, Communication	Statique I	Mécanique des structures II	Statique II		Modélisation numériques des solides et structures	Dynamique des structures
Structure I	Structure II	Mécanique des milieux continus				
Chimie générale	Matériaux	Sécurité et fiabilité	Structures en métal	Structures en béton	Ouvrages géotechniques	
			Mécanique des sols et écoulements souterrains	Construction en bois	Conception des ponts	
			Mécanique des fluides	Rock mechanics and tunnel engineering	Ouvrages et aménag. hydrauliques I	
			Semaine ENAC	Systèmes énergétiques	Project GC Unité d'enseignement	
				Transportation systems engineering	Conception des infrastructures de transport	
				Cours à options	Cours à options	

Contexte du cours

Structures simples
Equilibre

Structures complexes
Déformations

Année propédeutique		Bachelor Année 1		Bachelor Année 2		Master
Sem 1	**Sem 2**	**Sem 3**	**Sem 4**	**Sem 5**	**Sem 6**	**Sem 7**
	Statique I	Mécanique des structures II	Statique II		Modélisation numériques des solides et structures	Dynamique des structures
Structure I	Structure II	Mécanique des milieux continus				
	Matériaux	Sécurité et fiabilité	Structures en métal	Structures en béton	Ouvrages géotechniques	
			Mécanique des sols et écoulements souterrains	Construction en bois	Conception des ponts	
			Mécanique des fluides	Rock mechanics and tunnel engineering	Ouvrages et aménag. hydrauliques I	

Statique graphique

Contenu et programme

Sem.	Date	Cours	Exercices
1	21.2.2023	Introduction; Forces et moments	En groupes
2	28.2.2023	Réduction et équilibre	En groupes
3	7.3.2023	Coupe et forces internes	En groupes
4	14.3.2023	Modélisation, appuis et organes de liaison	En groupes
5	21.3.2023	Théorème des déplacements virtuels	En groupes
6	28.3.2023	Treillis	En groupes
7	4.4.2023	Poutres – Equations différentielles d’équilibre	Examen 1
	11.4.2023	Vacances	
8	18.4.2023	Poutres – Construction et calcul des MVN diagrammes	En groupes
9	25.4.2023	Poutres: Déformée; Poutres cantilever et portiques	En groupes
10	2.5.2023	Poutres à plan moyen	En groupes
11	9.5.2023	Poutres en espace, isostaticité des structures	Examen 2
12	16.5.2023	Lignes d’influences	En groupes
13	23.5.2023	Lignes d’influences	En groupes
14	30.5.2023	Câbles, récapitulation	En groupes

Organisation

- Organisation du cours
  - 2 h de cours par semaine
  - 2 h d'exercices par semaine
- Moodle
  - Présentation sur Moodle: **lundi après-midi**
  - Exercices sur Moodle: **lundi après-midi**
  - Corrigés des exercices sur Moodle: **jeudi soir**
- Présentations
  - Il y a des trous à remplir et des petits exercices à faire
- Vidéos du cours
  - Vidéo platforme Kaltura

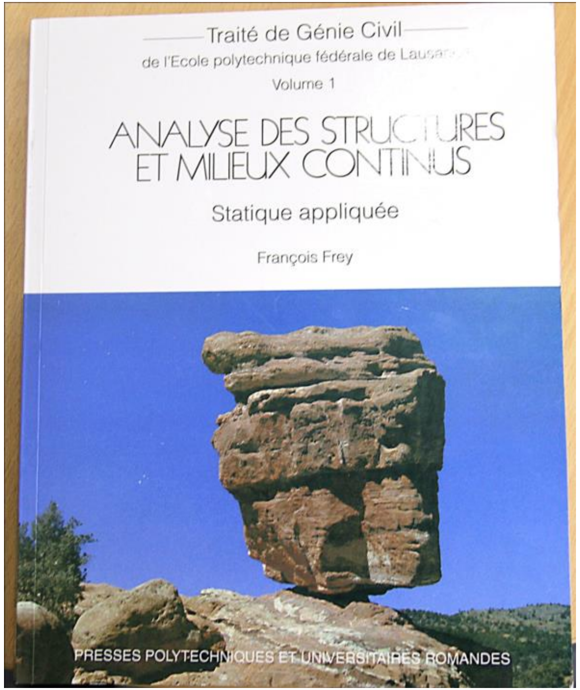
Organisation

- Exercices
  - Les exercices se font en groupes de ~15 étudiants avec un:e assistant:e étudiant:e par groupe
  - Inscription aux groupes via Moodle
  - Responsable des exercices : **Qianqing Wang** (qianqing.wang@epfl.ch)

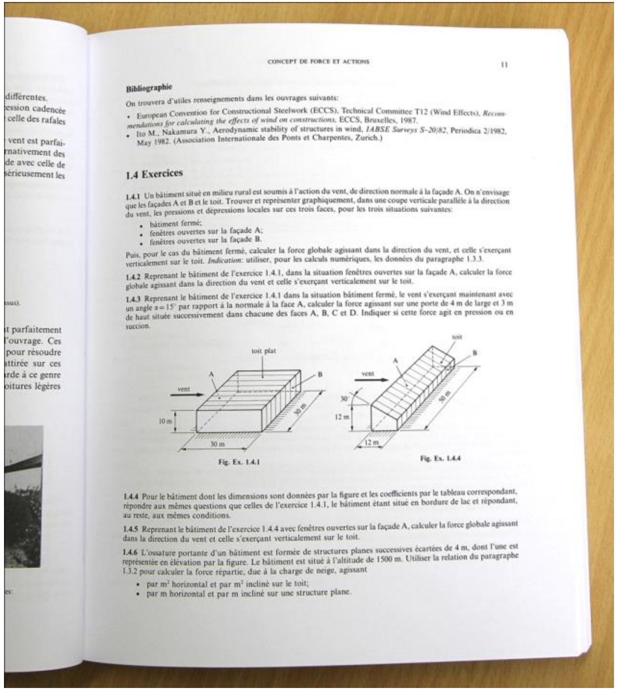
Groupe	Assistant étudiant	Salle
1	Andreas Ammann	GRA330
2	Kalil Bouhardra	GRA332
3	Noémie Dufour	GRB330
4	Diego Houtart	GRA331

Documentation

- Livre : « Statique appliquée (TGC Volume 1) – Analyse des structures et milieux continus » de François Frey



Exercices



CONCEPT DE FORCE ET ACTIONS 11

Bibliographie

On trouvera d'utiles renseignements dans les ouvrages suivants:

- European Convention for Constructional Steelwork (ECCS), Technical Committee T12 (Wind Effects), *Recommendations for calculating the effects of wind on constructions*, ECCS, Bruxelles, 1987.
- Ito M., Nakamura Y., Aerodynamic stability of structures in wind, *IABSE Surveys S-20/82*, Periodica 2/1982, May 1982. (Association Internationale des Ponts et Charpentes, Zurich.)

1.4 Exercices

1.4.1 Un bâtiment situé en milieu rural est soumis à l'action du vent, de direction normale à la façade A. On n'envisage que les façades A et B et le toit. Trouver et représenter graphiquement, dans une coupe verticale parallèle à la direction du vent, les pressions et dépressions locales sur ces trois faces, pour les trois situations suivantes:

- bâtiment fermé;
- fenêtres ouvertes sur la façade A;
- fenêtres ouvertes sur la façade B.

Puis, pour le cas du bâtiment fermé, calculer la force globale agissant dans la direction du vent, et celle s'exerçant verticalement sur le toit. *Indication*: utiliser, pour les calculs numériques, les données du paragraphe 1.3.3.

1.4.2 Reprenant le bâtiment de l'exercice 1.4.1, dans la situation fenêtres ouvertes sur la façade A, calculer la force globale agissant dans la direction du vent et celle s'exerçant verticalement sur le toit.

1.4.3 Reprenant le bâtiment de l'exercice 1.4.1 dans la situation bâtiment fermé, le vent s'exerçant maintenant avec un angle $\alpha = 15°$ par rapport à la normale à la face A, calculer la force agissant sur une porte de 4 m de large et 3 m de haut située successivement dans chacune des faces A, B, C et D. Indiquer si cette force agit en pression ou en succion.

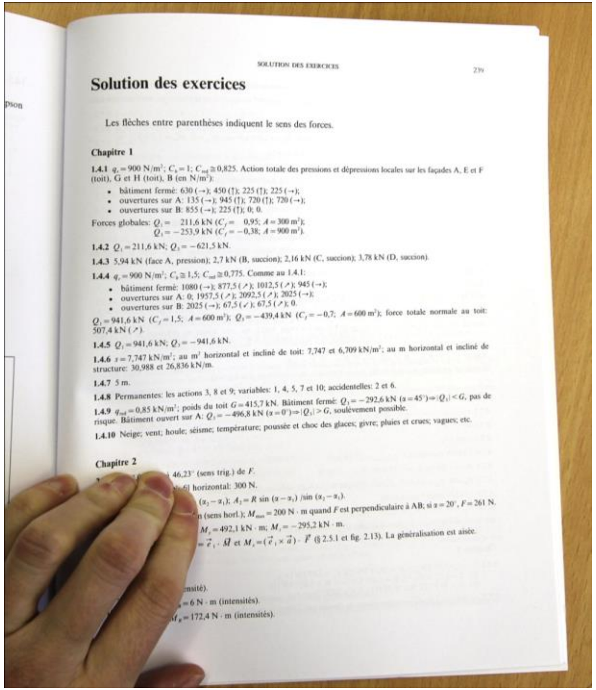
Fig. Ex. 1.4.1 Fig. Ex. 1.4.4

1.4.4 Pour le bâtiment dont les dimensions sont données par la figure et les coefficients par le tableau correspondant, répondre aux mêmes questions que celles de l'exercice 1.4.1, le bâtiment étant situé en bordure de lac et répondant, au reste, aux mêmes conditions.

1.4.5 Reprenant le bâtiment de l'exercice 1.4.4 avec fenêtres ouvertes sur la façade A, calculer la force globale agissant dans la direction du vent et celle s'exerçant verticalement sur le toit.

1.4.6 L'ossature portante d'un bâtiment est formée de structures planes successives écartées de 4 m, dont l'une est représentée en élévation par la figure. Le bâtiment est situé à l'altitude de 1500 m. Utiliser la relation du paragraphe 1.3.2 pour calculer la force répartie, due à la charge de neige, agissant

- par m² horizontal et par m² incliné sur le toit;
- par m horizontal et par m incliné sur une structure plane.



SOLUTION DES EXERCICES 239

Solution des exercices

Les flèches entre parenthèses indiquent le sens des forces.

Chapitre 1

1.4.1 $q_r = 900$ N/m²; $C_h = 1$; $C_{ref} \cong 0{,}825$. Action totale des pressions et dépressions locales sur les façades A, E et F (toit), G et H (toit), B (en N/m²):

- bâtiment fermé: 630 (→); 450 (↑); 225 (↑); 225 (→);
- ouvertures sur A: 135 (→); 945 (↑); 720 (↑); 720 (→);
- ouvertures sur B: 855 (→); 225 (↑); 0; 0.

Forces globales: $Q_1 = 211{,}6$ kN ($C_f = 0{,}95$; $A = 300$ m²); $Q_3 = -253{,}9$ kN ($C_f = -0{,}38$; $A = 900$ m²).

1.4.2 $Q_1 = 211{,}6$ kN; $Q_3 = -621{,}5$ kN.

1.4.3 5,94 kN (face A, pression); 2,7 kN (B, succion); 2,16 kN (C, succion); 3,78 kN (D, succion).

1.4.4 $q_r = 900$ N/m²; $C_h \cong 1{,}5$; $C_{ref} \cong 0{,}775$. Comme au 1.4.1:

- bâtiment fermé: 1080 (→); 877,5 (↗); 1012,5 (↗); 945 (→);
- ouvertures sur A: 0; 1957,5 (↗); 2092,5 (↗); 2025 (→);
- ouvertures sur B: 2025 (→); 67,5 (↙); 67,5 (↗); 0.

$Q_1 = 941{,}6$ kN ($C_f = 1{,}5$; $A = 600$ m²); $Q_3 = -439{,}4$ kN ($C_f = -0{,}7$; $A = 600$ m²); force totale normale au toit: 507,4 kN (↗).

1.4.5 $Q_1 = 941{,}6$ kN; $Q_3 = -941{,}6$ kN.

1.4.6 $s = 7{,}747$ kN/m²; au m² horizontal et incliné de toit: 7,747 et 6,709 kN/m²; au m horizontal et incliné de structure: 30,988 et 26,836 kN/m.

1.4.7 5 m.

1.4.8 Permanentes: les actions 3, 8 et 9; variables: 1, 4, 5, 7 et 10; accidentelles: 2 et 6.

1.4.9 $q_{ref} = 0{,}85$ kN/m²; poids du toit $G = 415{,}7$ kN. Bâtiment fermé: $Q_3 = -292{,}6$ kN ($\alpha = 45°$) ⇒ $|Q_3| < G$, pas de risque. Bâtiment ouvert sur A: $Q_3 = -496{,}8$ kN ($\alpha = 0°$) ⇒ $|Q_3| > G$, soulèvement possible.

1.4.10 Neige; vent; houle; séisme; température; poussée et choc des glaces; givre; pluies et crues; vagues; etc.

Chapitre 2

- Vous trouvez les pages scannées avec les exercices et leur solutions sur moodle.

Prof. Katrin Beyer

Examens

- Examens pendant le semestre
  - 1er «examen»: facultatif, ne compte pas, durée 1h
  - 2ème «examen»: obligatoire, compte 25% vers la note finale, durée 1h
- Examen pendant la session d'examens
  - Obligatoire
  - Durée: 3 h
- Ressources
  - Tous les examens sont des épreuves à livre fermé mais des formulaires manuscrits sont permis :
    - Pour le 1er examen : 1 page
    - Pour le 2ème examen : 2 pages (1 page recto-verso)
    - Pour l'examen final : 2 pages
  - Des formulaires photocopiés ou imprimés **ne sont pas permis**
  - Calculatrice non-programmée

Le secret de la réussite pour ce cours

- Suivre activement le cours (prendre des notes, demander des questions, répondre aux questions, résoudre les exercices);
- Faire les exercices chaque semaine (la première tentative sans regarder la solution);
- Ecrire les solutions des exercices avec soin pour faciliter la répétition avant les examens;
- Préparer soigneusement les formulaires, vous en bénéficierez pendant toutes vos études.

EPFL

Forces et moments

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

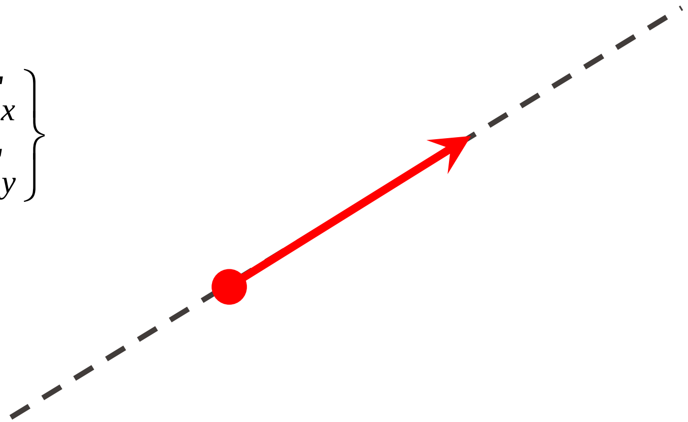
- Comment sont caractérisés une force et un moment
- Comment calculer le moment provoqué par une force autour d’un axe
- Ce qu’est l’équivalence statique
- Remplacer une force répartie par une force concentrée tel que la force concentrée est statiquement équivalente à la force répartie

Contenu du cours

1. Forces
   - Caractéristiques d’une force
   - Association force-translation
   - Notation des forces dans la statique appliquée
   - Forces réparties sur des lignes
2. Moments de forces
   - Le moment d’un couple
   - Association moment-rotation
   - Le moment d’un force par rapport à un axe (cas plan/cas 3D)
   - Le moment d’une force par rapport à un point
3. Notion d’ «équivalence statique»

Forces

- Les caractéristiques d’une force sont:
  - Le point d’application
  - La ligne d’action ou le support)
  - Le sens
  - La grandeur ou l’intensité
- La force a le caractère d’un vecteur: $\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$



Force et translation

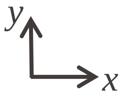
- Une force est associée a une translation (même si la translation ne se produit pas).
- Une force provoque un changement
  - De la vitesse de la translation du solide
  - De la direction du mouvement du solide

Unités d'une force

- Unité de la force : le Newton
  - $1\,N = 1\,kg \cdot {}^{m}/_{s^2}$
  - $1\,kN = 1000\,N$
  - $1\,MN = 1000\,kN = 1 \cdot 10^6\,N$
- Forces réparties
  - Sur une ligne : ${}^{N}/_{m}$; ${}^{kN}/_{m}$; ${}^{MN}/_{m}$
  - Sur une surface : ${}^{N}/_{m^2} = Pa$; ${}^{kN}/_{m^2} = kPa$; ${}^{MN}/_{m^2} = {}^{N}/_{mm^2} = MPa$
  - Sur un volume (poids) : ${}^{N}/_{m^3}$; ${}^{kN}/_{m^3}$; ${}^{MN}/_{m^3}$

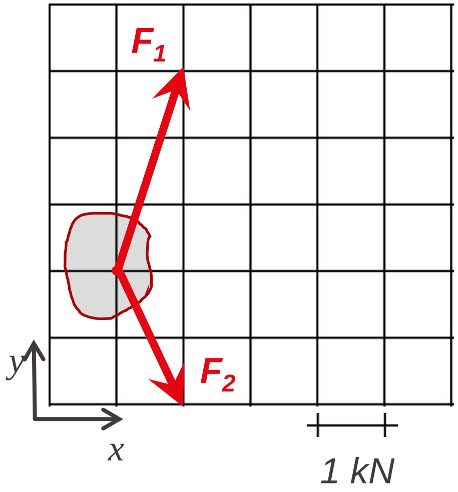
Forces dans la statique appliquée

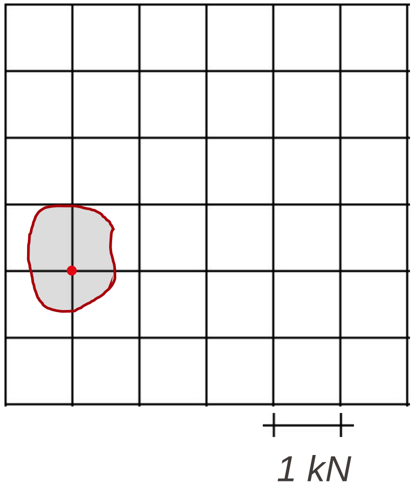
- Convention dans la statique appliquée
  - Lettre **majuscule** pour une force **concentrée**
  - Lettre **minuscule** pour une force **distribuée**

 y x	Vecteur	Intensité	Composante (Intensité + Signe)
 ***F***			
 ***Q***			

Résultante de forces

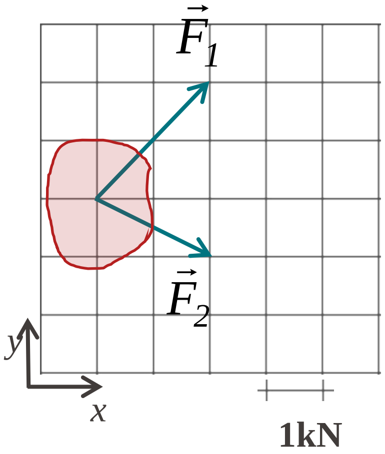
- Trouver la résultante R des deux forces F_1 et F_2



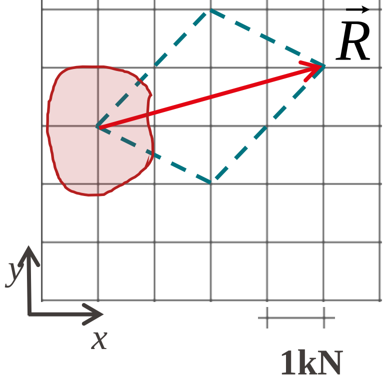


Equivalence statique

- Définition d' «équivalence statique»
  - Deux groupes des forces sont **statiquement équivalents** s'ils ont le même effet global sur un solide du point de vue de la statique et en particulier de l'équilibre
- Exemple: principe du parallélogramme
  - *Le principe du parallélogramme s'applique tant aux forces qu'aux moments*



Statiquement équivalent à
$(\vec{F}_1, \vec{F}_2 \sim \vec{R})$



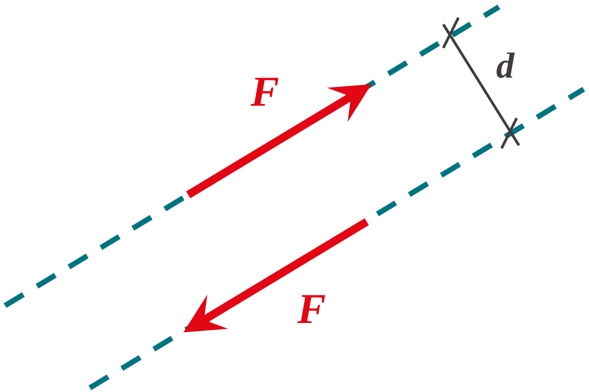
Les moments des forces

Moment et rotation

- Un moment est associé à une rotation (même si la rotation ne se produit pas)
- Un moment provoque un changement
  - De la vitesse de rotation du solide
  - De l'orientation de l'axe de rotation du solide

Le moment d'un couple

- Couple: 2 forces égales et opposées
  - *d* = bras de levier du couple
- Unité du moment (force · longueur): Nm ; kNm ; MNm
- Notation graphique d'un moment:
  - Flèche tournante
  - Double-flèche

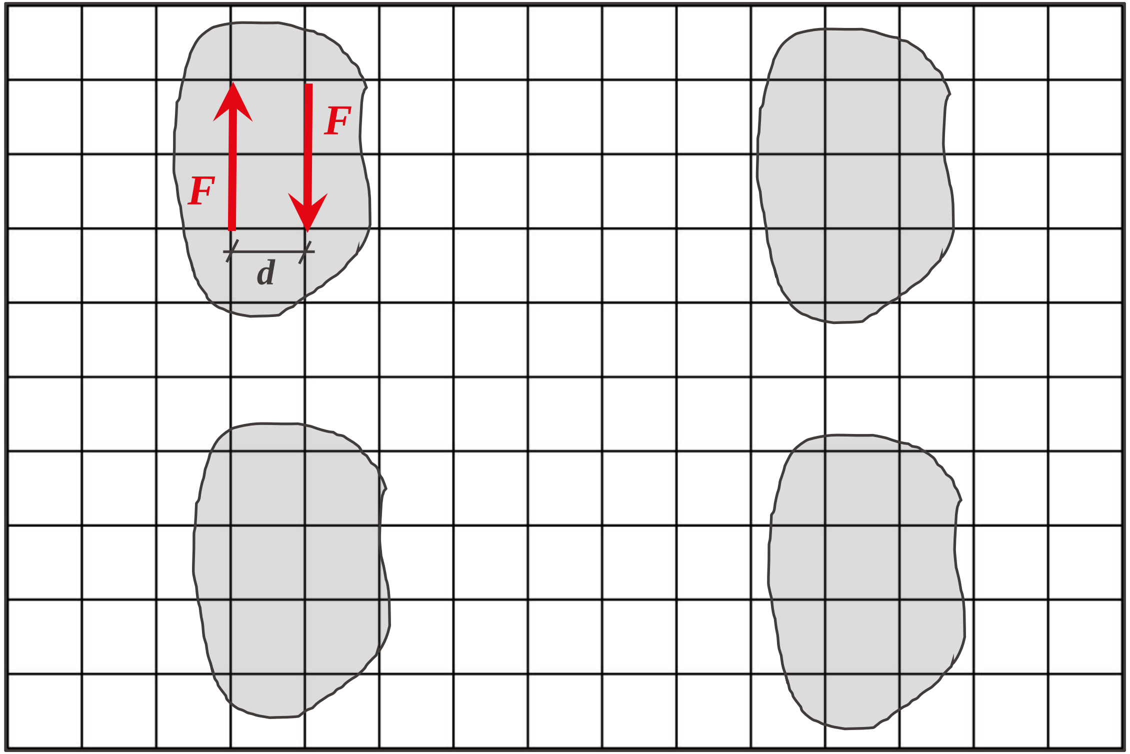


Statiquement équivalent à

$$M_c = F \cdot d$$

Exemple

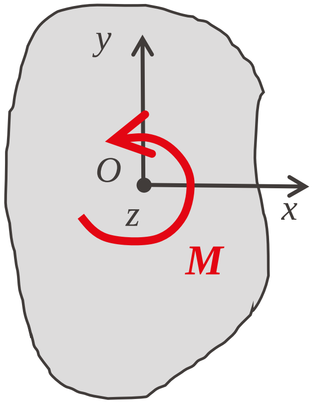
- Groupes de forces statiquement équivalents

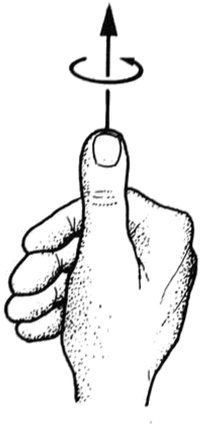


Signe d'un moment

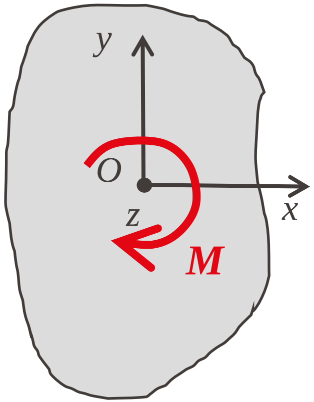
- Le **moment est positif** autour de l'axe z, si le moment tourne dans la même direction que les quatre doigts quand la pouce pointe dans la direction **positive** de l'axe z.

- Le **moment est négatif** autour de l'axe z, si le moment tourne dans la même direction que les quatre doigts quand la pouce pointe dans la direction **négative** de l'axe z.





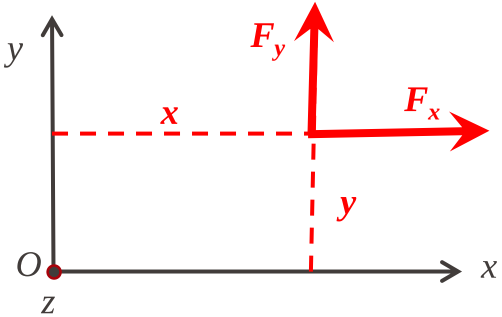
M > 0



Moment d'une force par rapport à un axe

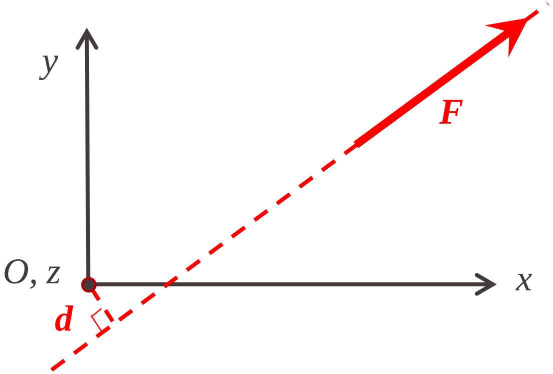
- Le cas plan
  - Via les composantes

$$M_{O,z} = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$



  - Via la résultante

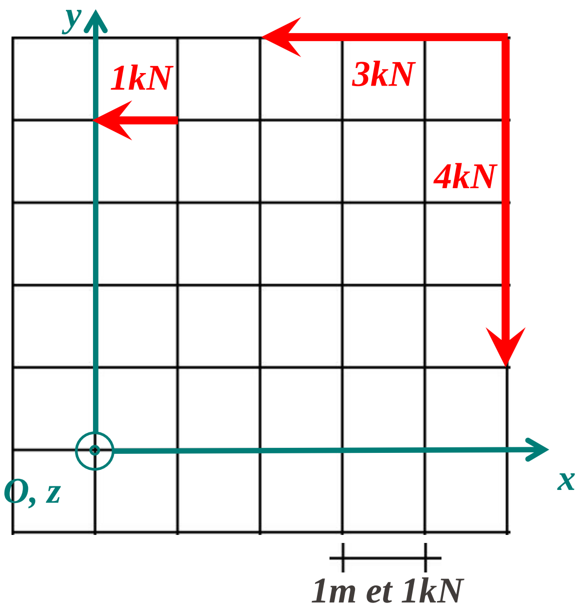
$$M_{O,z} = d \cdot F$$



Prof. Katrin Beyer

Exemple

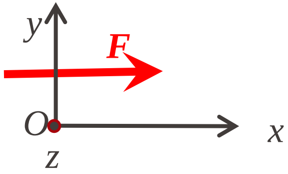
- Calculer le moment M_{Oz} des 3 forces par rapport à l'axe z



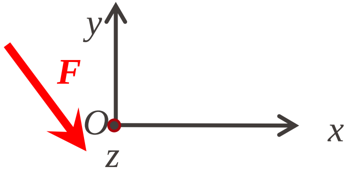
A votre tour!

Le moment provoqué par F autour de l'axe z est:

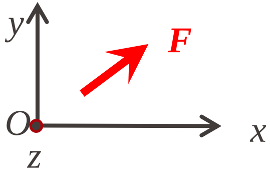
- $M_{Oz} > 0$ le moment autour de l'axe z est positif
- $M_{Oz} < 0$ le moment autour de l'axe z est négatif
- $M_{Oz} = 0$ le moment autour de l'axe z est nul



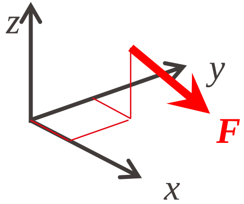
$M_{O,z}$ 0



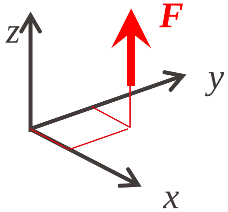
$M_{O,z}$ 0



$M_{O,z}$ 0



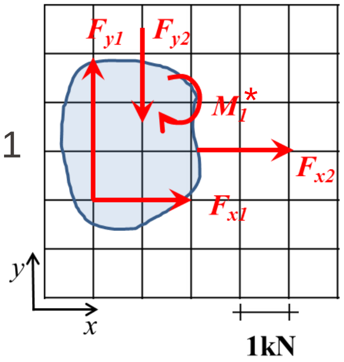
$M_{O,z}$ 0



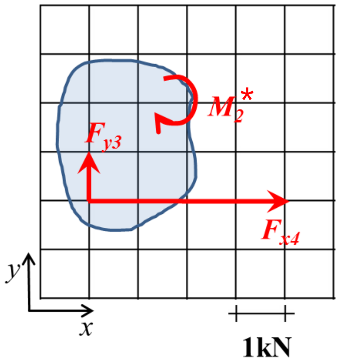
$M_{O,z}$ 0

Equivalence statique

G1



Statiquement équivalent à



G2

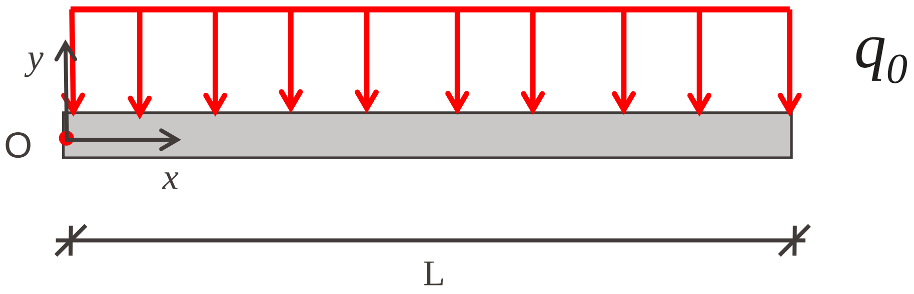
- **En termes mathématiques**, 2 groupes de forces G1 et G2 sont statiquement équivalents si :

  (cas plan : toutes les forces agissent dans le plan x-y)

Prof. Katrin Beyer

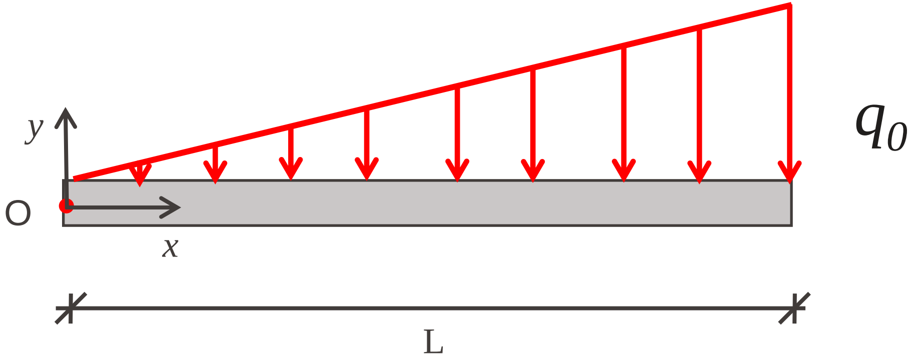
Charge uniforme/uniformément répartie

- Remplacer $q(x)=q_0$ par une force concentrée statiquement équivalente à $q(x)$



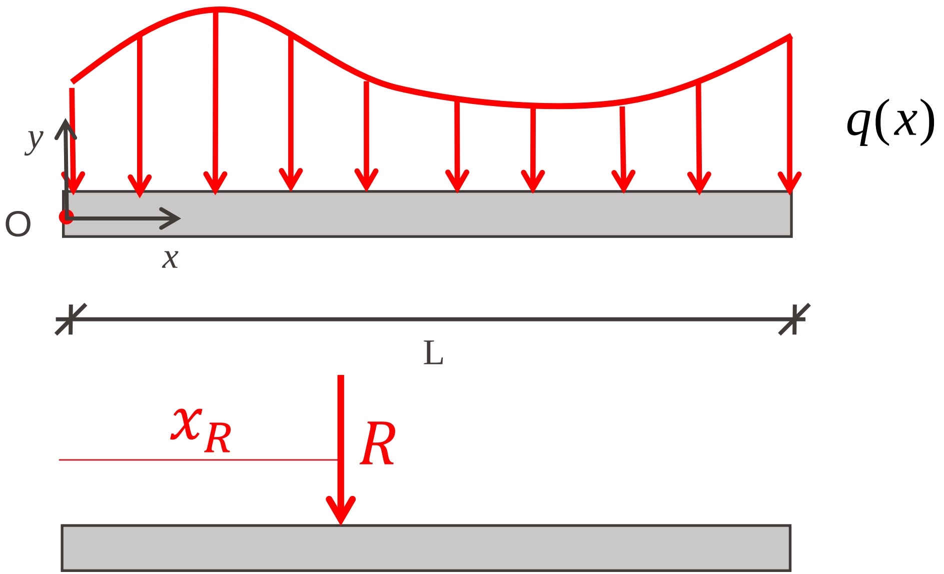
Charge triangulaire

- Remplacer *q(x)* par une force concentrée statiquement équivalente à *q(x)*



Forces réparties sur une ligne

- Remplacer *q(x)* par une seule force statiquement équivalente à *q(x)*

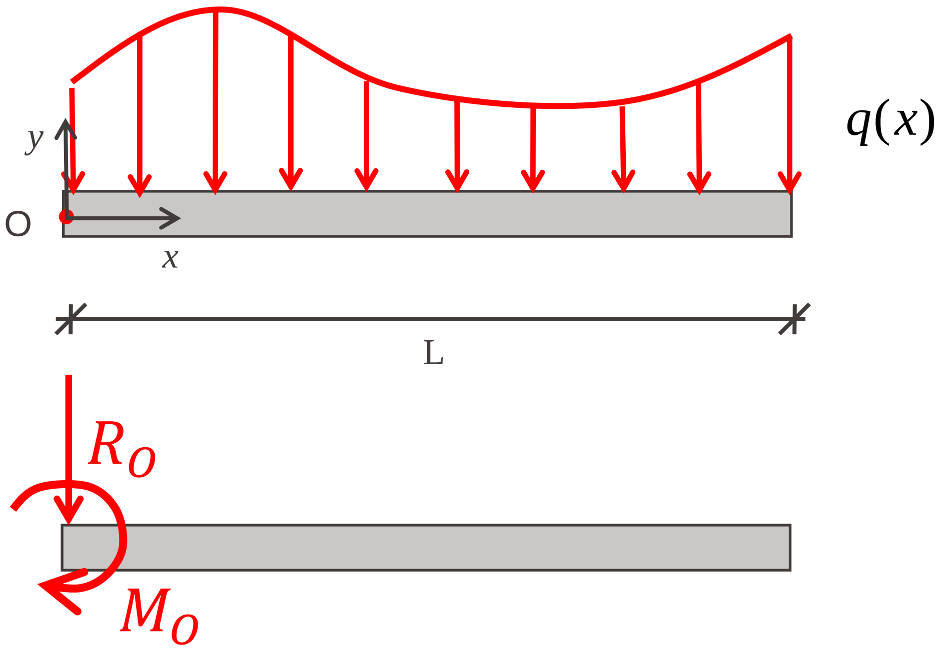


$$R = \int_0^L q(x)dx$$

$$x_R = \frac{\int_0^L q(x) \cdot x \cdot dx}{R}$$

Forces réparties sur une ligne

- Remplacer *q(x)* par une force en *O* et un moment en *O* qui sont statiquement équivalents à *q(x)*



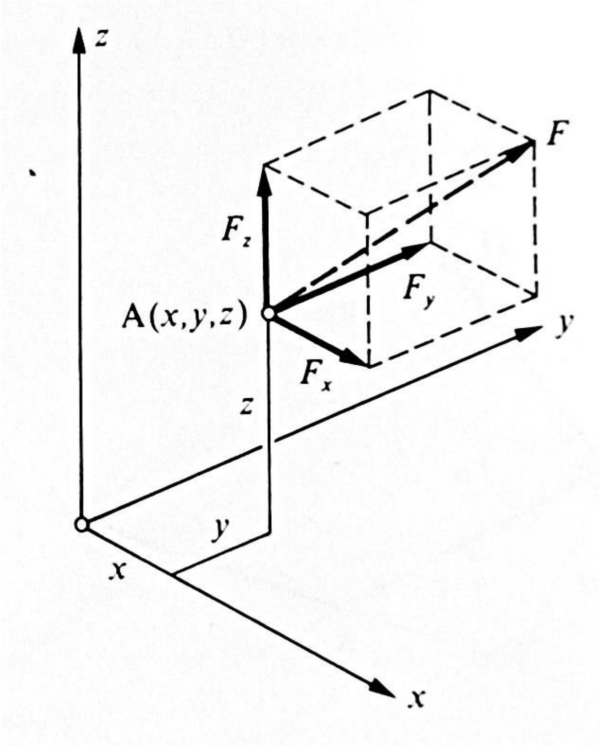
$$R_O = \int_0^L q(x)dx$$

$$M_O = \int_0^L q(x) \cdot x \cdot dx$$

Le cas 3D

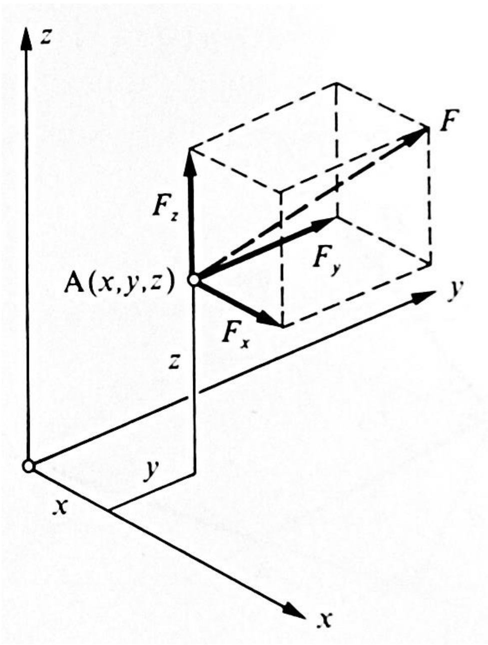
- Composantes cartésiennes d'une force:

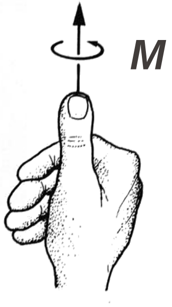
$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$$



Prof. Katrin Beyer

Moments autour des axes x, y, z





Règle de la main **droite**

- Le moment de la force $\vec{F}$ autour de l'axe x:

$$M_x = -z \cdot F_y + y \cdot F_z$$

- Le moment de la force $\vec{F}$ autour de l'axe y:

$$M_y = z \cdot F_x - x \cdot F_z$$

- Le moment de la force $\vec{F}$ autour de l'axe z:

$$M_z = -y \cdot F_x + x \cdot F_y$$

Moment nul

Le moment d’une force par rapport à un axe est **nul** si la force et l’axe sont coplanaires, soit:

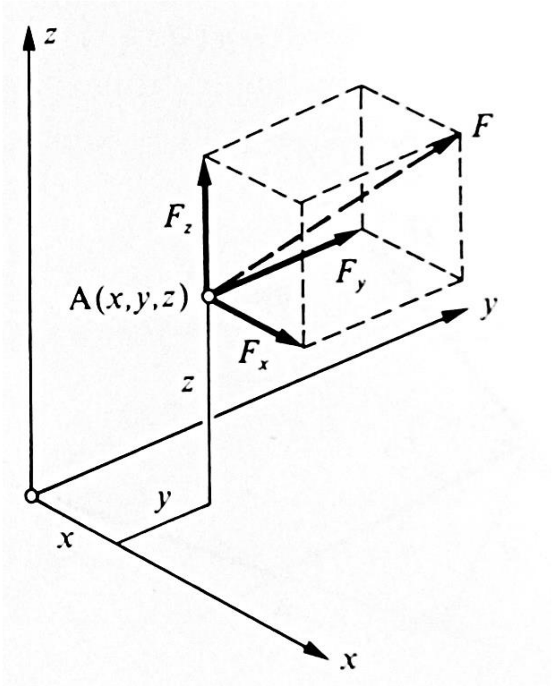
- Si la ligne d’action de la force **coupe** l’axe
- Si la ligne d’action de la force et l’axe sont **parallèles**.

Moment d'une force par rapport à un point

- Force $\vec{F}$ avec point d'application $A(x, y, z)$: $\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$

- Moment de $\vec{F}$ par rapport au point O ($\vec{a} = \overrightarrow{OA}$):

$$\vec{M}_O = \vec{a} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$



Important

- Le moment par rapport à un **axe** a le caractère d'une **composante**

- Le moment par rapport à un **point** a le caractère d'un **vecteur**. Les composantes de ce vecteur correspondent aux moments autour des axes

Chapitres à étudier dans le TGC 1

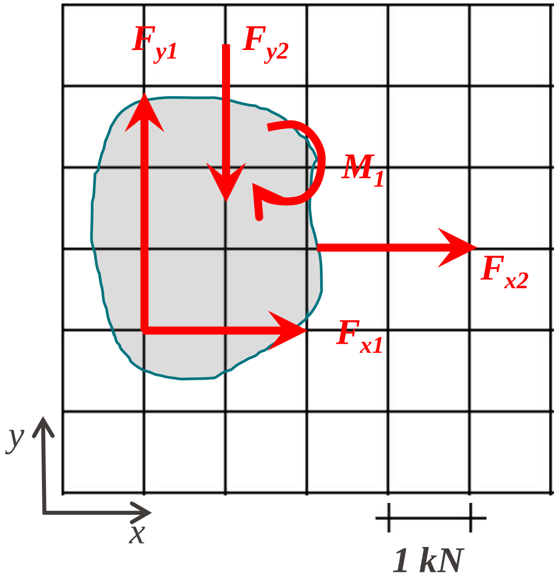
- **Chapitre 1:** Concept de force et actions 1.1 à 1.5
  - *répétitions du cours Structures I*

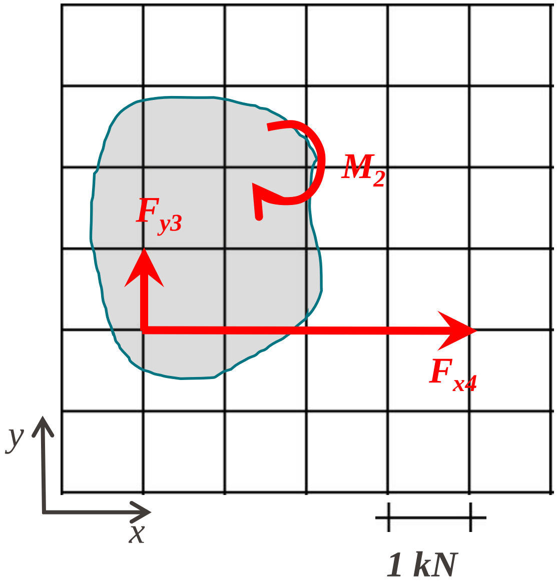
- **Chapitre 2:** Forces, moments et principes 2.1, 2.2, 2.4, 2.5 et 2.6

Références

Références des illustrations par ordre d'apparition

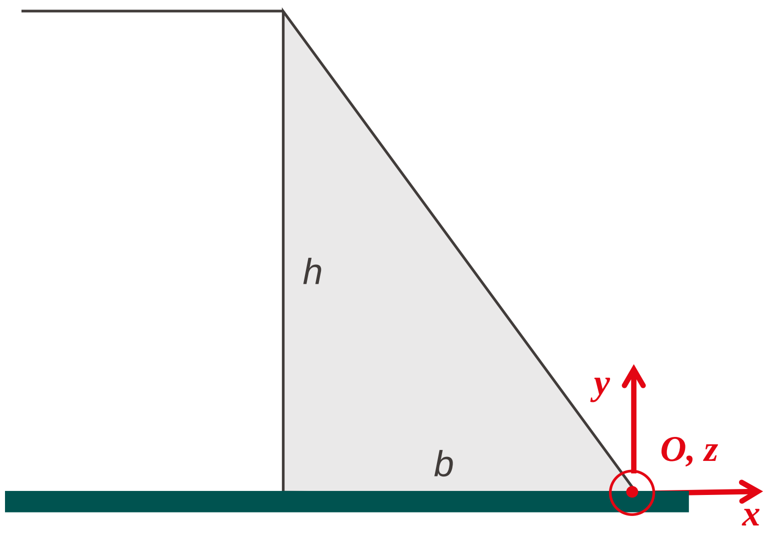
- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Grue portique © Dkzavod, CC BY-SA 4.0
- [3] Platforme Sleipner A © Aftenposten, CC BY-NC-SA 4.0
- [4] Volant © Alessandro Suraci, CC BY 3.0
- [5] Tire-bouchon © Slicon, CC BY 3.0
- [6] Règle de la main droite: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.
- [7] Composantes d'une force dans l'espace: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.
- [8] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0


F_{y1}
F_{y2}
M_1
F_{x2}
F_{x1}
y
x
1 kN


M_2
F_{y3}
F_{x4}
y
x
1 kN

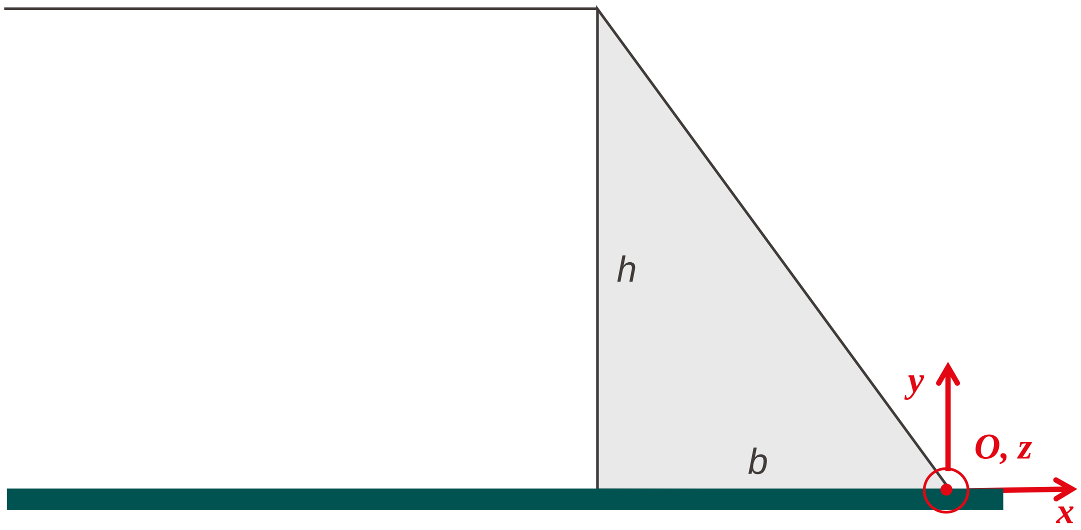
Exemple: Barrage poids

- Calculer l'épaisseur minimum *b* pour laquelle le barrage ne renverse pas à cause de la pression hydrostatique ($M_{Oz}=0$).
- Notion:
  - Masse volumique de l'eau: ρ_e
  - Masse volumique du béton: ρ_b
  - $\rho_b \approx 2.5 \cdot \rho_b$
- Trouver la pression hydrostatique qui agit sur le barrage
- Montrer toutes les forces qui agissent sur le barrage (corps libre) et formuler l'équilibre autour du point *O*

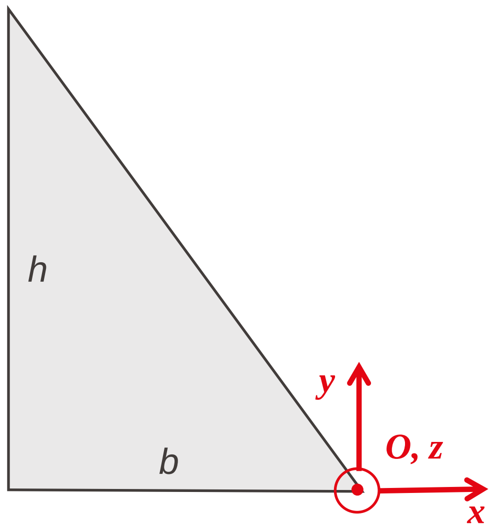


Exemple: Barrage poids

Pression hydrostatique



Exemple: Barrage poids

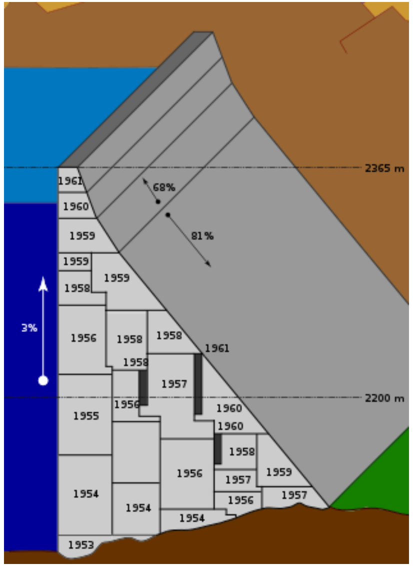


Barrage de la Grande Dixence

- Le calcul presenté est fortement simplifié

  pour le dimensionnement correct d'un barrage:
  cours «Ouvrages hydrauliques» (semester 6)

- H = 285 m
- B = 200 m
- B ≈ 0.7 H



Références

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [8] Construction Grande Dixence © Nanoxyde, CC BY-SA 3.0
- [9] Barrage de la Grande-Dixence © Jérémy Toma, CC BY-SA 4.0

EPFL

Réduction et équilibre

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Réduire forces et moments en un point quelconque
- Faire le schéma statique d'un corps isolé
- Formuler et résoudre les équations d'équilibre d'un corps
- Choisir judicieusement la forme des équations d'équilibre

Contenu du cours

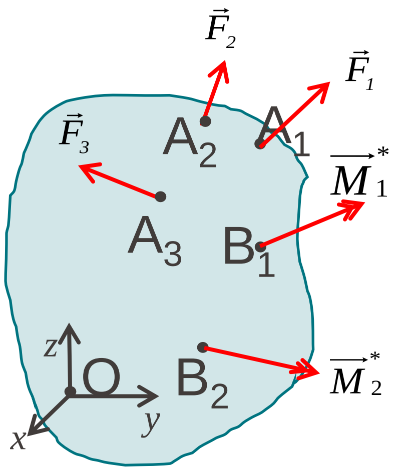
1. Réduction
   - L’idée
   - Concept d’ «équivalence statique»
   - Réduction d’une force
   - Réduction d’un moment
   - Réduction d’un système des forces et des moments
2. Equilibre
   - Action et réaction
   - Corps isolé
   - Equations d’équilibre dans l’espace
   - Equations d’équilibre dans le plan

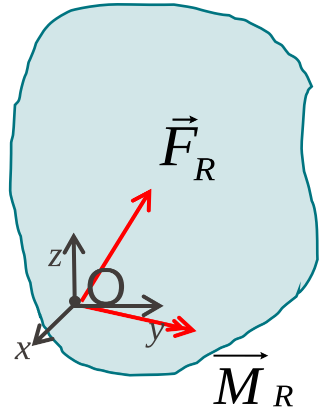
L'idée de la réduction

- Remplacer un système de forces et moments par un autre qui est **statiquement équivalent**
- Le nouveau système de forces et moments doit être **plus simple et doit faciliter les calculs ultérieurs**

La réduction d'un système de forces et moments en un point

- Système de forces et moments:
  - $\overrightarrow{F_i}$ $i = 1, 2, \dots, k$ avec points d'application A_i
  - $\overrightarrow{M_i^*}$ $j = 1, 2, \dots, m$ avec points d'application B_j
- Réduction en O:
  - Calculer un système de forces et moments $(\overrightarrow{F_R}, \overrightarrow{M_R})$ statiquement équivalent
  - La force résultante $\overrightarrow{F_R}$ a comme point d'application le point O
  - Le moment résultant est $\overrightarrow{M_R}$





Prof. Katrin Beyer

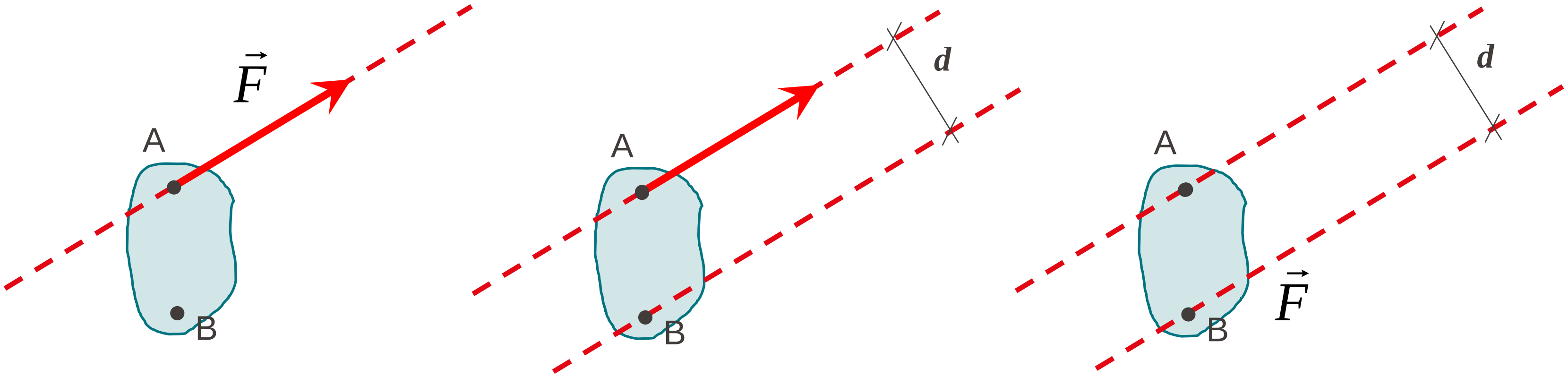
Réduction

- Table des cas étudiés
  - **Cas 1:** Réduire la force F du point A au point B
  - **Cas 2:** Réduire la force F du point A au point B quand B est sur la ligne d'action de F
  - **Cas 3:** Réduire le moment M du point O au point P
  - **Cas général 2D:** La réduction en plan
  - **Cas général 3D:** La réduction dans l'espace
  - **Exemples**

Cas 1: Réduire la force F du point A au point B

Prof. Katrin Beyer

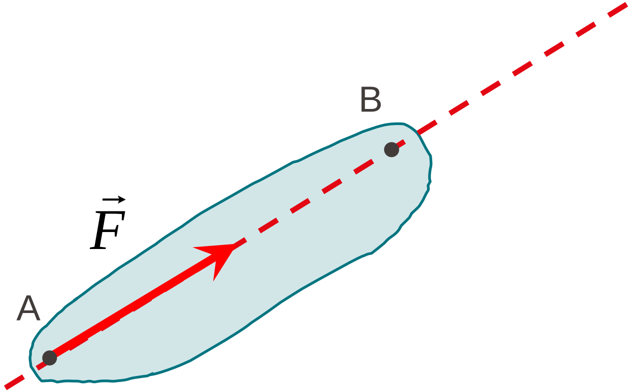
- Une force F en A est statiquement équivalente à une force F en B et un moment $\vec{M} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$
  - Les systèmes 1, 2 et 3 sont statiquement équivalents .

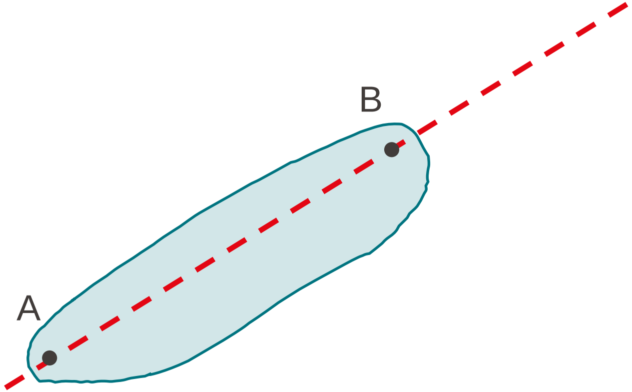


Système 1 *Système 2* *Système 3*

Cas 2: Réduire la force F du point A au point B quand B est sur la ligne d'action de F

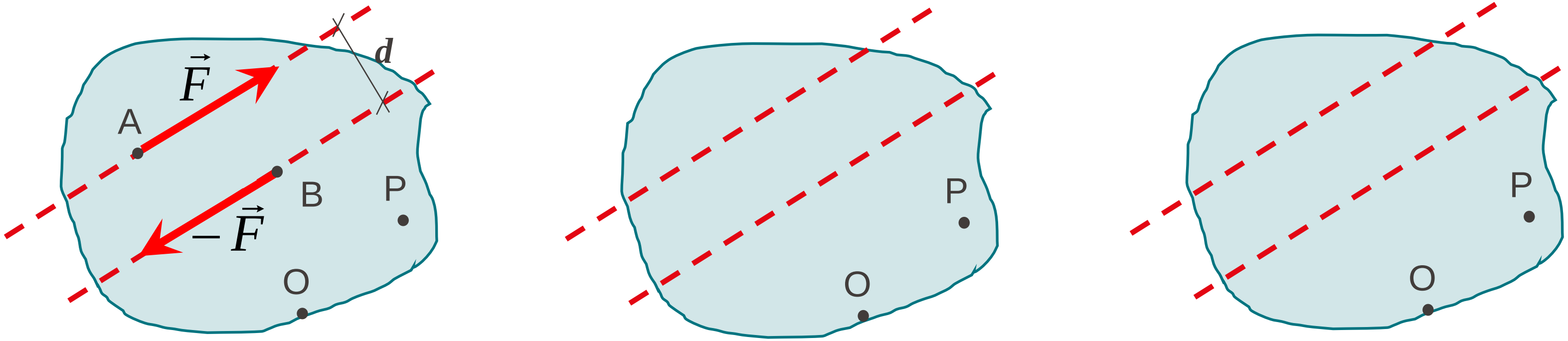
- Une force F en A est statiquement équivalente à une force F en B si B est sur la ligne d'action de la force F
  - Les forces ont le caractère de vecteurs **glissants** du point de vue statique





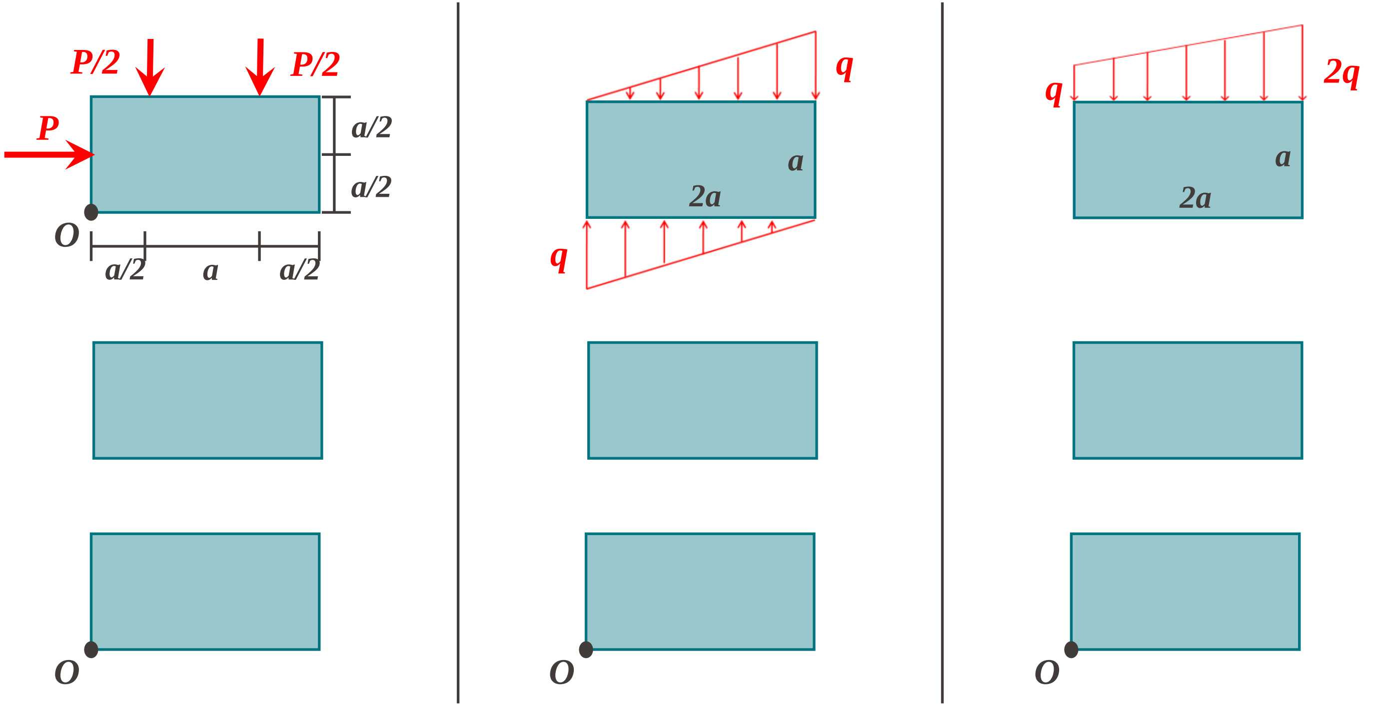
Cas 3: Réduire le moment M du point O au point P

- Le vecteur moment est indépendant du choix de point d'application O: C'est un vecteur **libre**.
- Un moment M au point O est statiquement équivalent à un moment M au point P (O et P sont des points quelconques)



A votre tour!

1. Remplacer les charges par deux forces concentrées statiquement équivalentes (infinité de solutions)
2. Calculer les éléments de réduction au point O (solution unique)



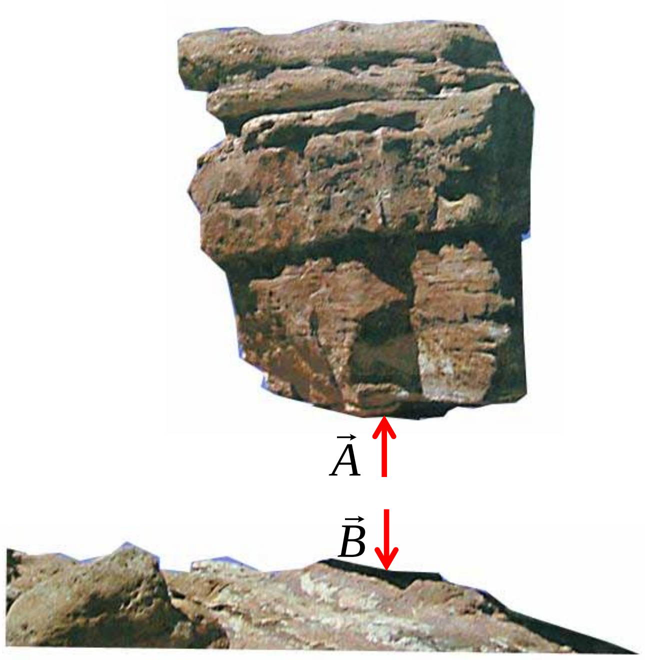
Equilibre

Table des matières:

Principe de l'action et de la réaction

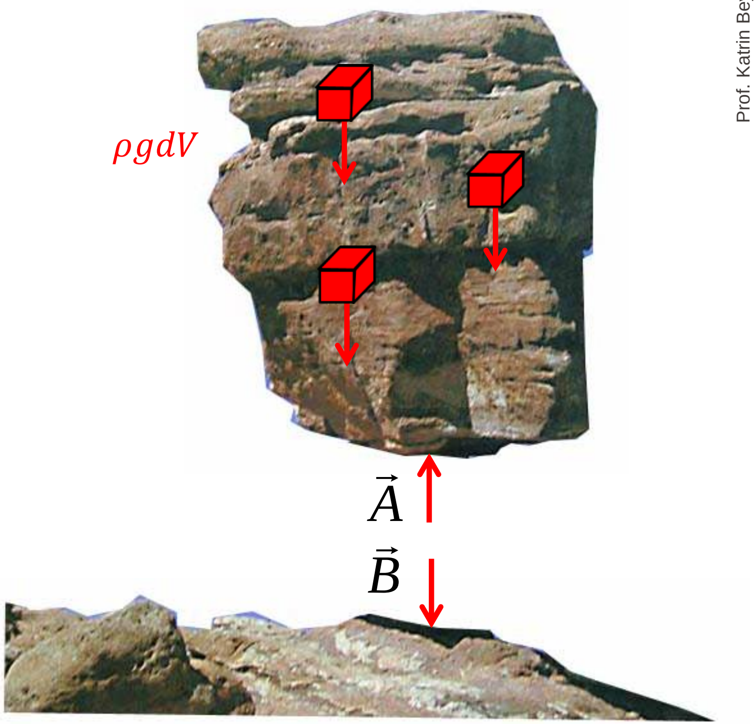
- Un solide qui exerce une action sur un autre solide reçoit de celui-ci une réaction qui a la même grandeur, la même ligne d'action mais un sens opposé à l'action.
  - Ce principe s'applique tant aux forces qu'aux moments.

- **Action et réaction sont égales, ont la même ligne d'action et sont directement opposées:** $\vec{A} = -\vec{B}$



Le principe du corps isolé

- Pour analyser une structure (le rocher), il faut d'abord décider clairement quelle structure ou quelle partie de la structure on désire traiter
  - Isoler la structure de son entourage à l'aide de coupes
  - Introduire **toutes** les forces et **tous les** moments qui agissent sur le corps
  - Ceci s'appelle le schéma statique du corps isolé



Charge volumique (poids propre total): $\rho g V$

- ρ *=densité de la pierre*
- g *= acc. de la pesanteur*
- V *= volume de la pierre*

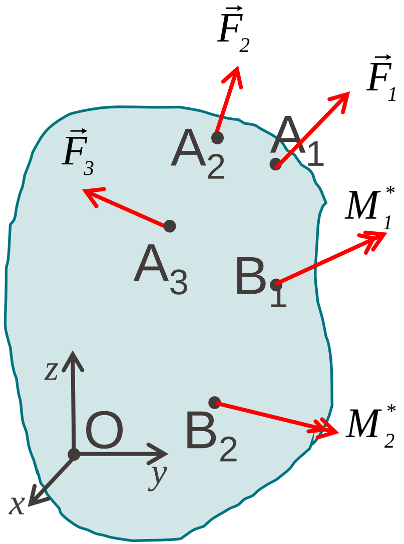
Définition de l'équilibre

- Un système de forces et moments en équilibre est statiquement équivalent à zéro.
- Equations d'équilibre:
  - $$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i = \vec{0}$$

    $i = 1, \dots, k$ *toutes les forces qui agissent sur le corps*

  - $$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j^* = \vec{0}$$

    $\mathrm{j} = 1, \dots, m$ *touts les moments qui agissent sur le corps*



Formes principales des équations d'équilibre

- Equilibre dans l'espace (6 degrés de liberté)
  - Equilibre en translation
  - Equilibre en rotation

$$\sum_{tout} F_x = 0 \qquad \sum_{tout}\left(yF_z - zF_y\right) + \sum_{tout} M_x^* = 0$$

$$\sum_{tout} F_y = 0 \qquad \sum_{tout}\left(zF_x - xF_z\right) + \sum_{tout} M_y^* = 0$$

$$\sum_{tout} F_z = 0 \qquad \sum_{tout}\left(xF_y - yF_x\right) + \sum_{tout} M_z^* = 0$$

- Equilibre dans le plan (3 degrés de liberté)

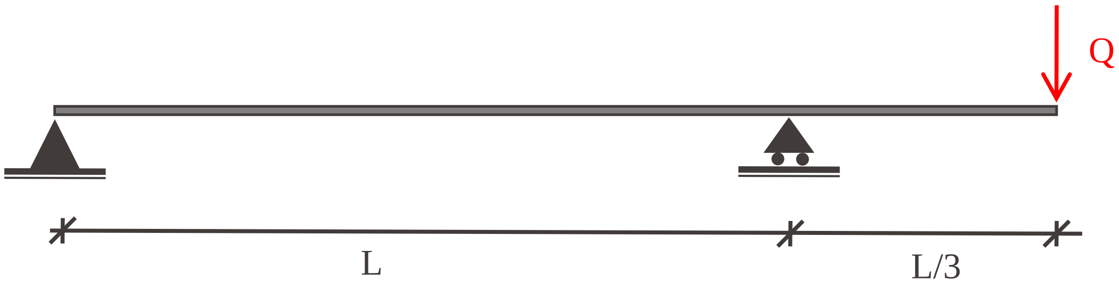
$$\sum_{tout} F_x = 0$$

$$\sum_{tout}\left(xF_y - yF_x\right) + \sum_{tout} M_z^* = 0$$

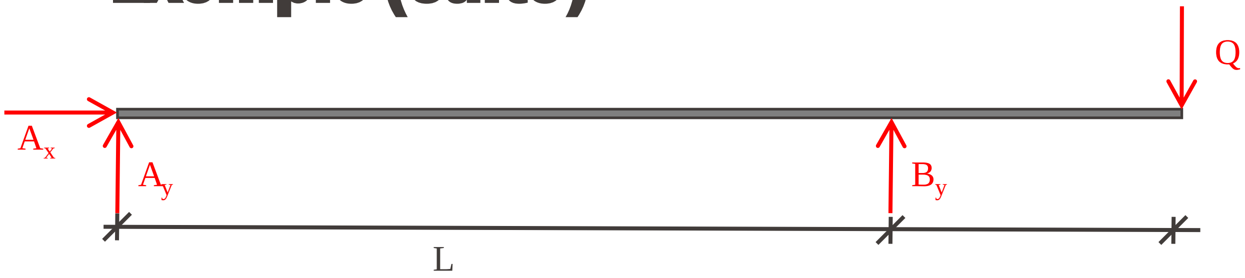
$$\sum_{tout} F_y = 0$$

Exemple: Poutre simple avec porte-à-faux

Corps isolé → Extérioriser les réactions



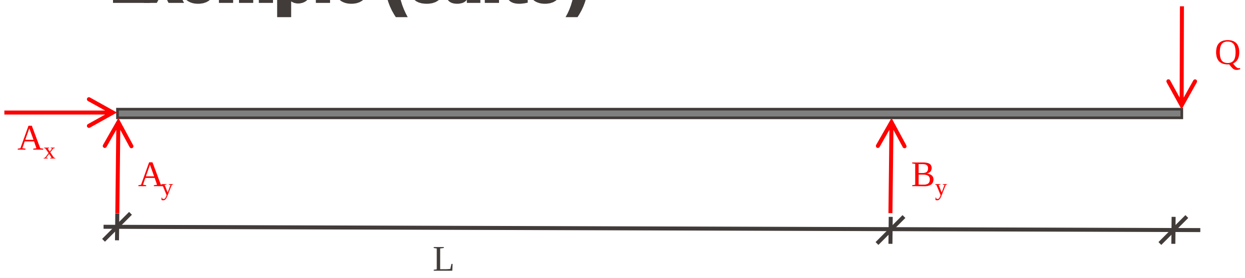
Exemple (suite)



Equations d'équilibre forme 1:

- 2 translations
- 1 rotation

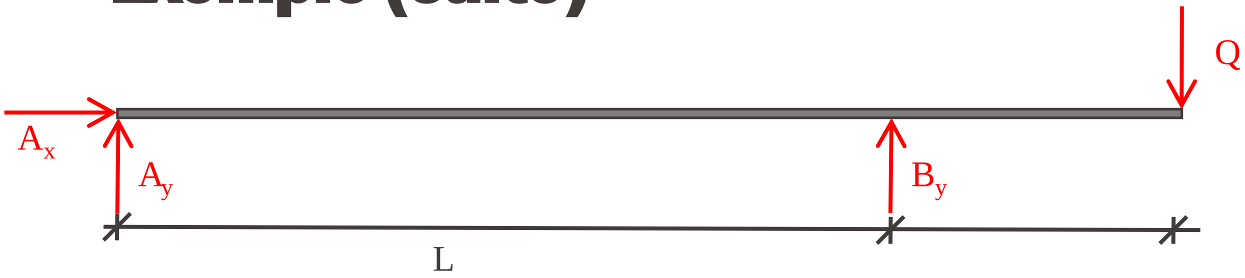
Exemple (suite)



Equations d'équilibre forme 2:

- 1 translation
- 2 rotations

Exemple (suite)



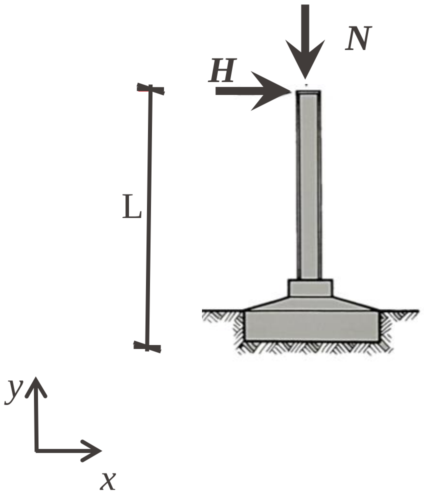
Equations d'équilibre forme 3:

- 0 translation
- 3 rotations

Remarque sur le signe dans les calculs d'équilibre

- Les forces et moments connus sont dessinés avec leur sens réel
- Les forces et moments inconnus sont dessinés avec un sens arbitraire
- Une valeur négative pour une force ou un moment inconnu signifie que la force ou le moment agit en sens inverse à celui dessiné
- **Il ne faut jamais changer le sens des vecteurs dans le schéma original**

Les solutions obtenues pour les deux systèmes statique sont complètement équivalentes:



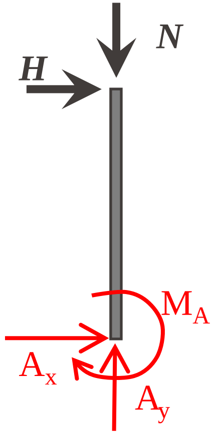


Schéma statique 1
Solution:

- $A_x = -H$
- $A_y = N$
- $M_A = -H \cdot L$

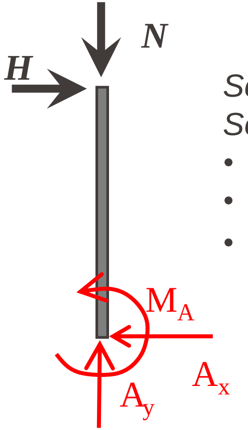
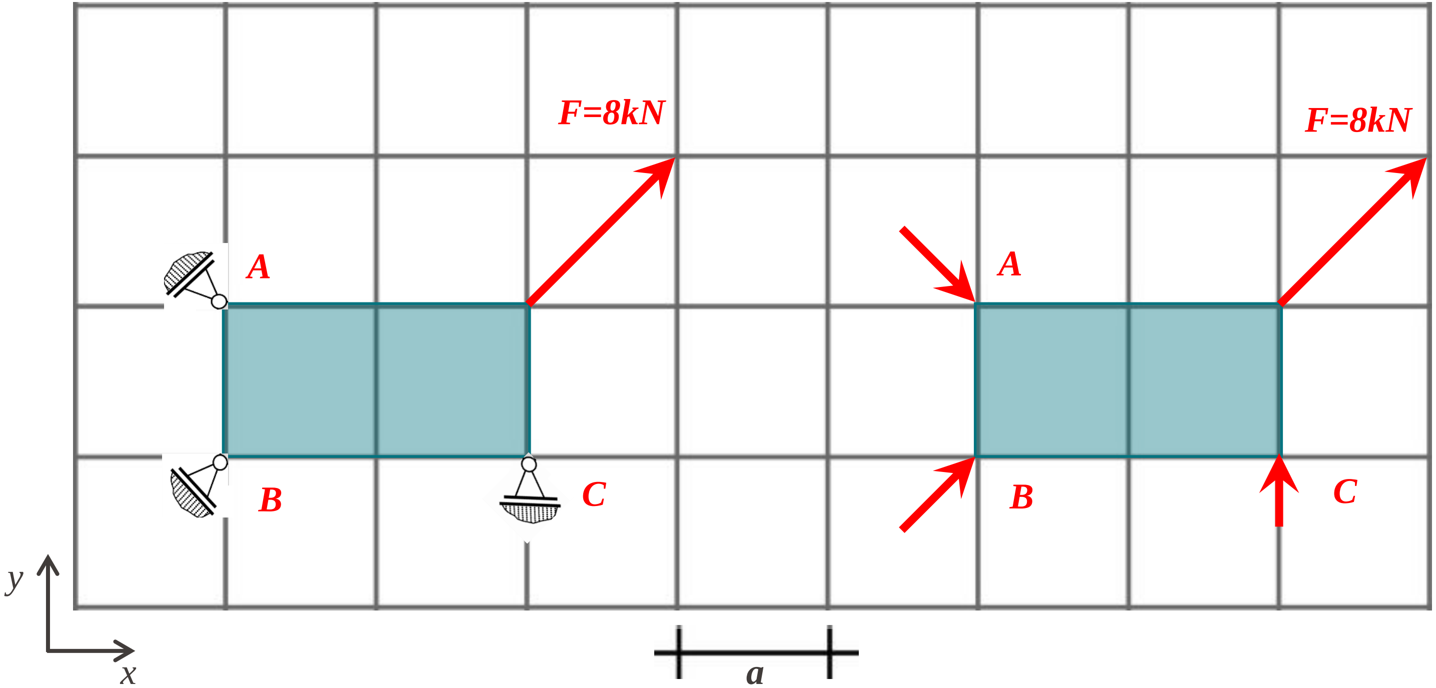


Schéma statique 2
Solution:

- $A_x = H$
- $A_y = N$
- $M_A = H \cdot L$

A votre tour!

Autour de quels points doit-on formuler l'équilibre en rotation pour que chaque équation ne contienne qu'une seule inconnue?



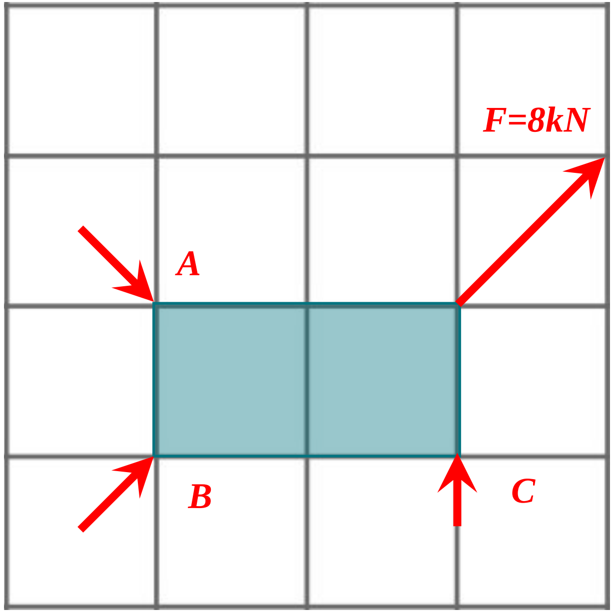
Prof. Katrin Beyer

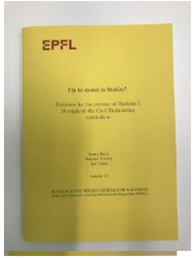
A votre tour!

Résultats:

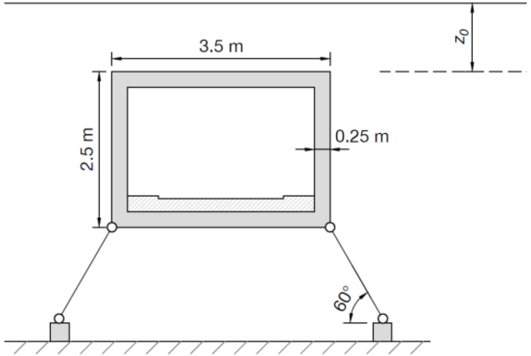
- $A = -2.67\ kN$
- $B = -5.33\ kN$
- $C = -3.77\ kN$

Contrôle:





Statique booklet

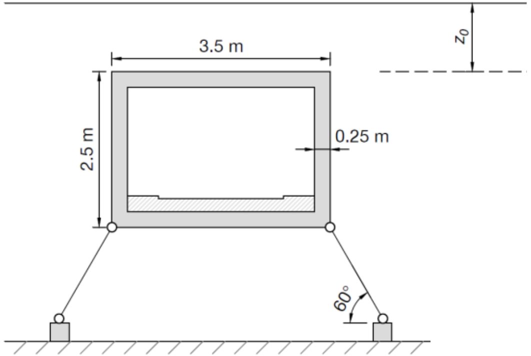


Un tunnel rectangulaire est immergé dans l'eau (eau: γ_e=10 kN/m^3, béton: γ_b=10 kN/m^3). Il est ancré au sol par des paires de câbles disposés tous les 6 m. La surcharge admise dans les tunnels est de 10 kN/m'.

- Dessiner la distribution de la poussée hydrostatique appliquée sur le tunnel.
- Déterminer l'orientation et la valeur de la résultante de la poussée hydrostatique qui s'applique sur le tunnel. Cette force est aussi appelée "Poussée d'Archimède".
- Représenter dans un schéma toutes les forces qui agissent sur le tunnel (schéma de corps libre). Calculer la force reprise par chaque câble.

https://github.com/eesd-epfl/Statique_I

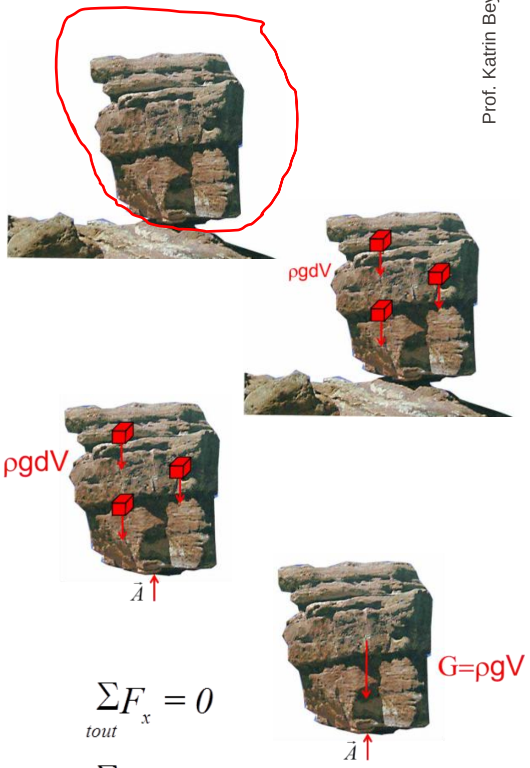
Statique booklet



Démarche pour formuler les équations d'équilibre d'un solide

- Décider clairement quelle structure ou quelle partie de la structure on désire traiter
- Introduire toutes les forces et moments qui agissent sur la structure
- Isoler la structure de son entourage à l'aide de coupes («corps isolé») et extérioriser les réactions
- Réduire des forces si cela facilite les calculs (par exemple les charges distribuées)
- Formuler l'équilibre avec 3 équations (2D) ou 6 équations (3D) d'équilibre indépendantes (choisir judicieusement)
- Contrôler les calculs avec 1 ou 2 autres équations

  par exemple $\sum M_B = 0$



$$\sum_{tout} F_x = 0$$

$$\sum_{tout} F_y = 0$$

$$\sum_{tout} M_A = 0$$

Formes principales et formes équivalentes des équations d'équilibres

- Nombre d'équations d'équilibre indépendantes:
  - Cas plan: 3 degrés de liberté 3 équations
  - Cas 3D: 6 degrés de liberté 6 équations

- Cas plan
  - Forme principale des équations d'équilibre (l'équilibre est calculé avec):
    - 2 équations d'équilibre de translation
    - 1 équation d'équilibre en rotation
  - Mais souvent, un autre choix d'équations est plus judicieux

$$\sum_{tout} F_x = 0$$

$$\sum_{tout} F_y = 0$$

$$\sum_{tout} M_A = 0$$

3 formes équivalentes des équations d'équilibre dans le plan

- **Forme principale**
  - EdE Forme 1
    - 2 translations
    - 1 rotation

$$\sum_{tout} F_x = 0 \qquad \sum_{tout} F_y = 0 \qquad \sum_{tout} M_A = 0$$

- **Formes équivalentes**
  - EdE Forme 2
    - 1 translation
    - 2 rotations
    - l'axe x n'est pas normal à $\overrightarrow{AB}$

$$\sum_{tout} F_{\bar{x}} = 0 \qquad \sum_{tout} M_A = 0 \qquad \sum_{tout} M_B = 0$$

  - EdE Forme 3
    - 0 translation
    - 3 rotations
    - les points A, B et C ne sont pas sur le même axe

$$\sum_{tout} M_A = 0 \qquad \sum_{tout} M_B = 0 \qquad \sum_{tout} M_C = 0$$

Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 2:** Forces, moments et principes 2.3
- **Chapitre 3:** Réduction et équilibre (en entier)

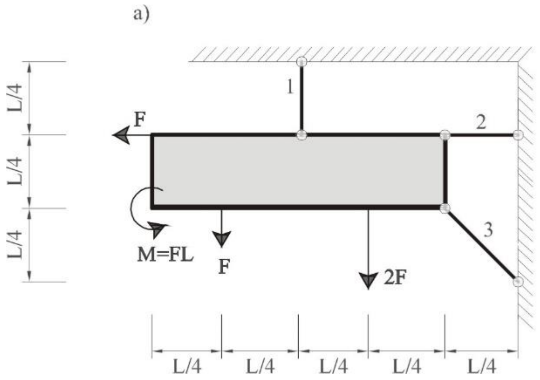
Références

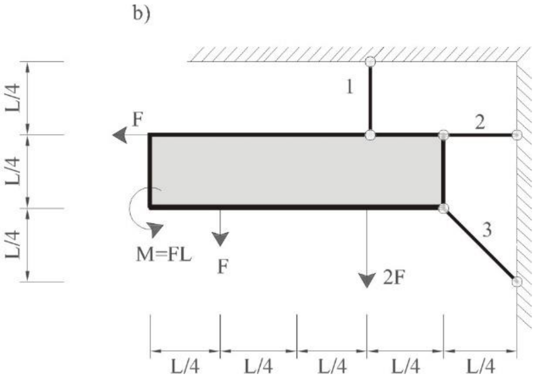
Références des illustrations par ordre d’apparition

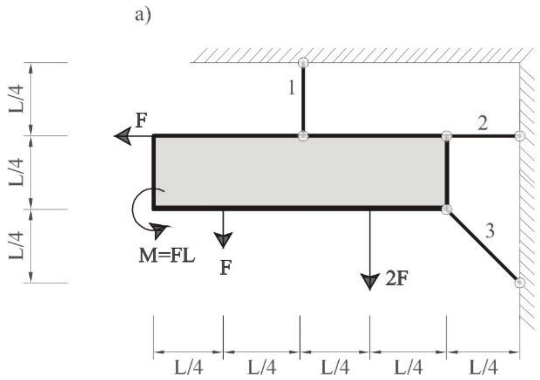
- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0
- [3] Rocher: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.

Exercice

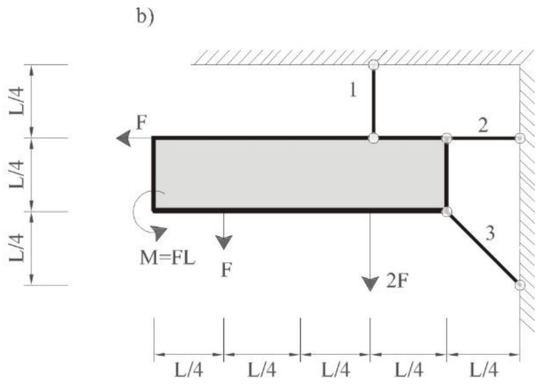
- Les rectangles de la figure 2a et b s'appuient sur trois barres. Pour chacune des structures en a) et b) :
- Déterminer si cette structure est isostatique quant à ses appuis.
- Si elle est isostatique, calculer l'effort normal dans les trois barres, mentionner lesquelles de ces trois barres sont comprimées et lesquelles sont tendues.







a)
1
2
3
F
M=FL
F
2F
L/4
L/4
L/4
L/4
L/4
L/4
L/4
L/4


b)
L/4
L/4
L/4
F
1
2
3
M=FL
F
2F
L/4
L/4
L/4
L/4
L/4

Comparaison: Réduction et équilibre

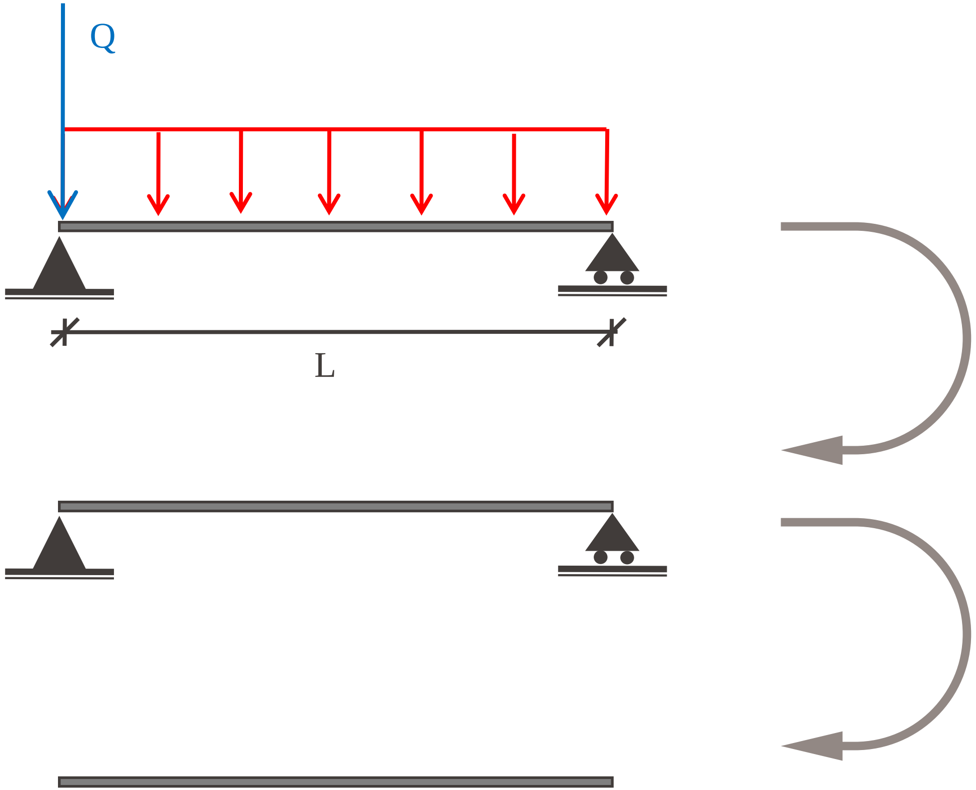
Réduction

- **Remplacer** un système de forces et moments par un autre système **statiquement équivalent**
- Le nouveau système de forces et moments devrait être **plus simple** et faciliter les calculs ultérieurs
- Il est permis de ne réduire que **quelques forces et moments** qui agissent sur le solide

Equilibre

- Un système de forces et moments est dit en équilibre si il ne modifie pas l’état de repos ou de mouvement du solide auquel il est appliqué
- Un système de forces et moments en équilibre est **statiquement équivalent à zéro**
- Pour l’équilibre, il faut considérer **toutes les forces et tous les moments** qui agissent sur le corps isolé

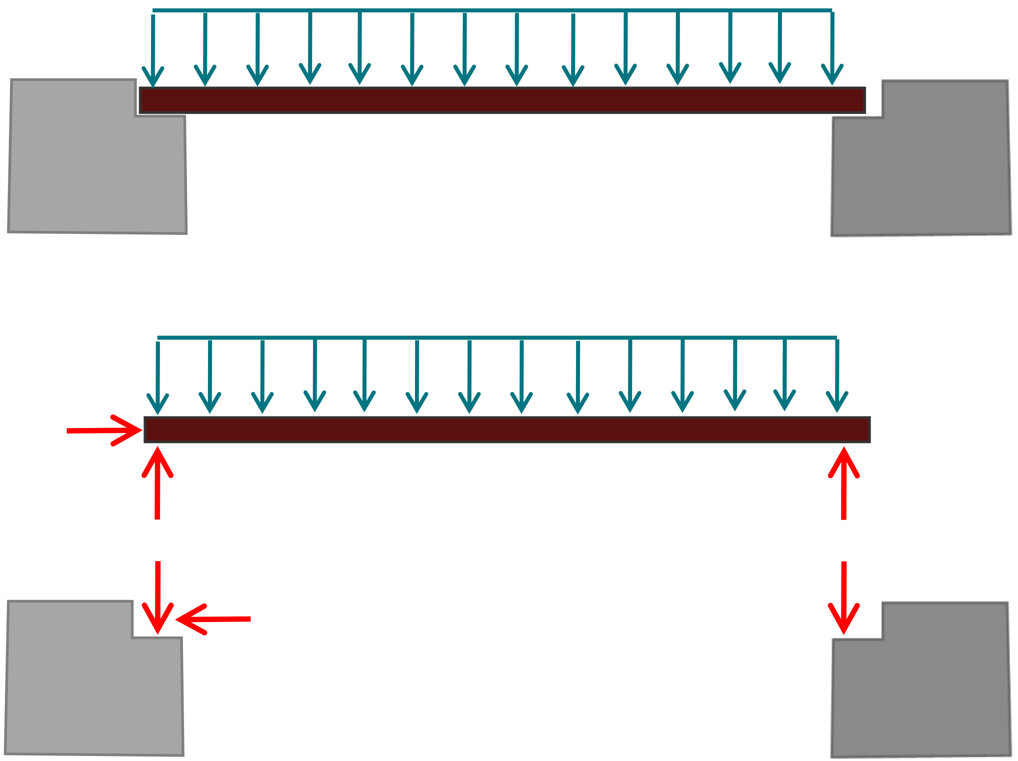
Comparaison: Réduction et équilibre



Réduction de la charge distribuée

Corps libre avec un système de forces plus simple. On peut formuler l'équilibre plus facilement

Action et réaction: Forces de réaction sur la poutre et sur la fondation



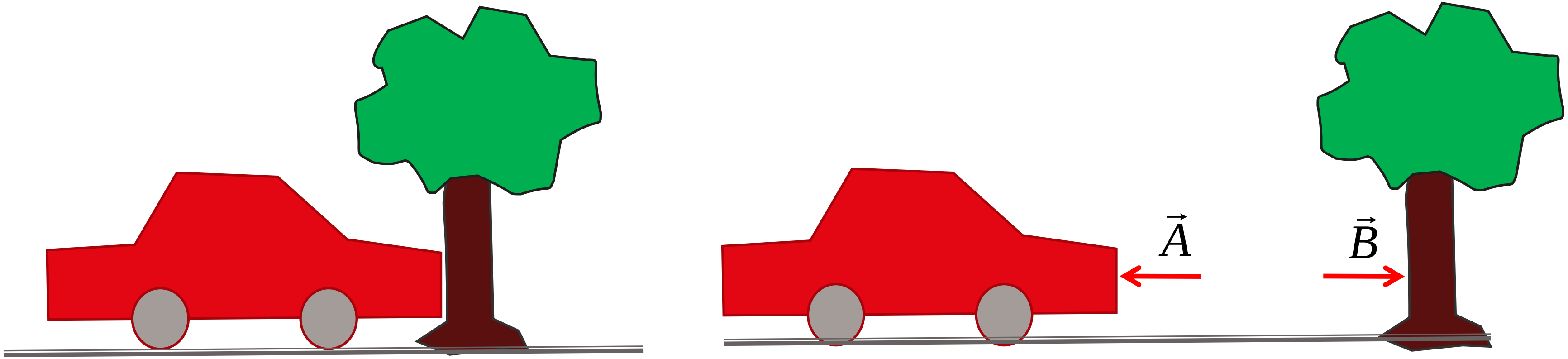
Formuler les équations d'équilibre d'un solide

- Décider clairement quelle structure ou quelle partie de la structure on désire traiter
- Introduire toutes les forces et moments qui agissent sur la structure
- Isoler la structure de son entourage à l'aide de coupes («corps isolé») et extérioriser les réactions
- Réduire des forces si cela facilite les calculs (par exemple les charges distribuées)
- Formuler l'équilibre avec 3 équations (2D) ou 6 équations (3D) d'équilibre indépendantes (choisir judicieusement)
- Contrôler les calculs avec 1 ou 2 autres équations

Principe de l'action et de la réaction

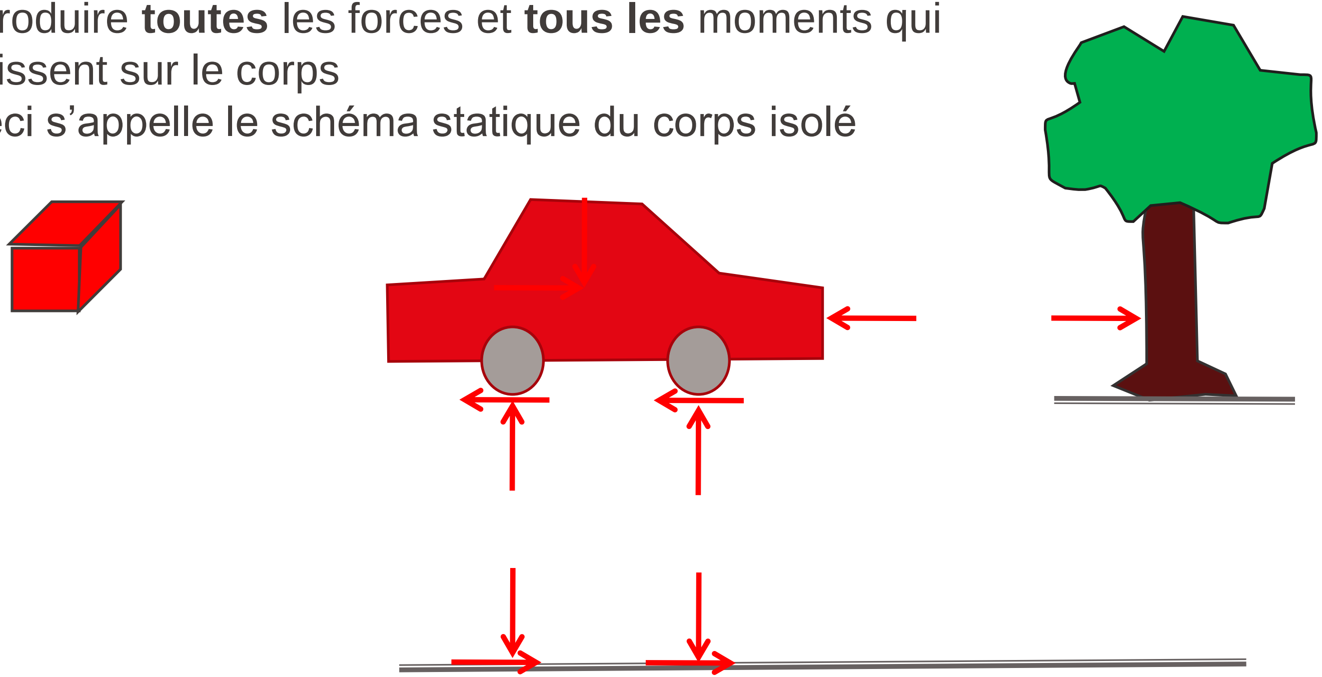
- Un solide qui exerce une action sur un autre solide reçoit de celui-ci une réaction qui a la même grandeur, la même ligne d'action mais un sens opposé à l'action.
  - Ce principe applique tant aux forces qu'aux moments.

- **Action et réaction sont égales, ont la même ligne d'action et sont directement opposées:** $\vec{A} = -\vec{B}$



Le principe du corps isolé

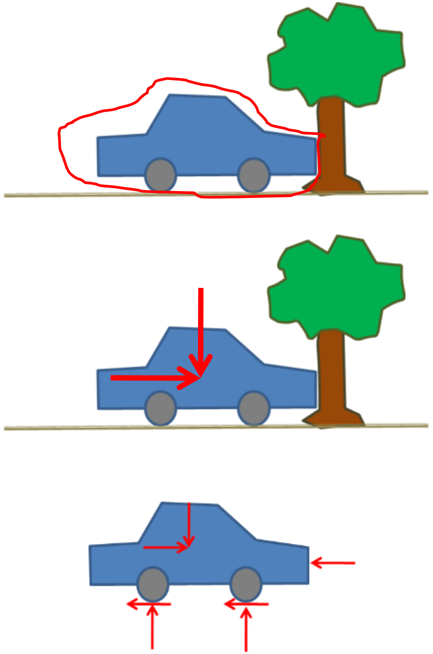
- Pour analyser une structure (la voiture), il faut d’abord décider clairement quelle structure ou quelle partie de la structure on désire traiter
  - Isoler la structure de son entourage à l’aide de coupes
  - Introduire **toutes** les forces et **tous les** moments qui agissent sur le corps
  - Ceci s’appelle le schéma statique du corps isolé



Démarche pour formuler les équations d'équilibre d'un solide

- Décider clairement quelle structure ou quelle partie de la structure on désire traiter
- Introduire toutes les forces et moments qui agissent sur la structure
- Isoler la structure de son entourage à l'aide de coupes («corps isolé») et extérioriser les réactions
- Réduire des forces si cela facilite les calculs (par exemple les charges distribuées)
- Formuler l'équilibre avec 3 équations (2D) ou 6 équations (3D) d'équilibre indépendantes (choisir judicieusement)
- Contrôler les calculs avec 1 ou 2 autres équations

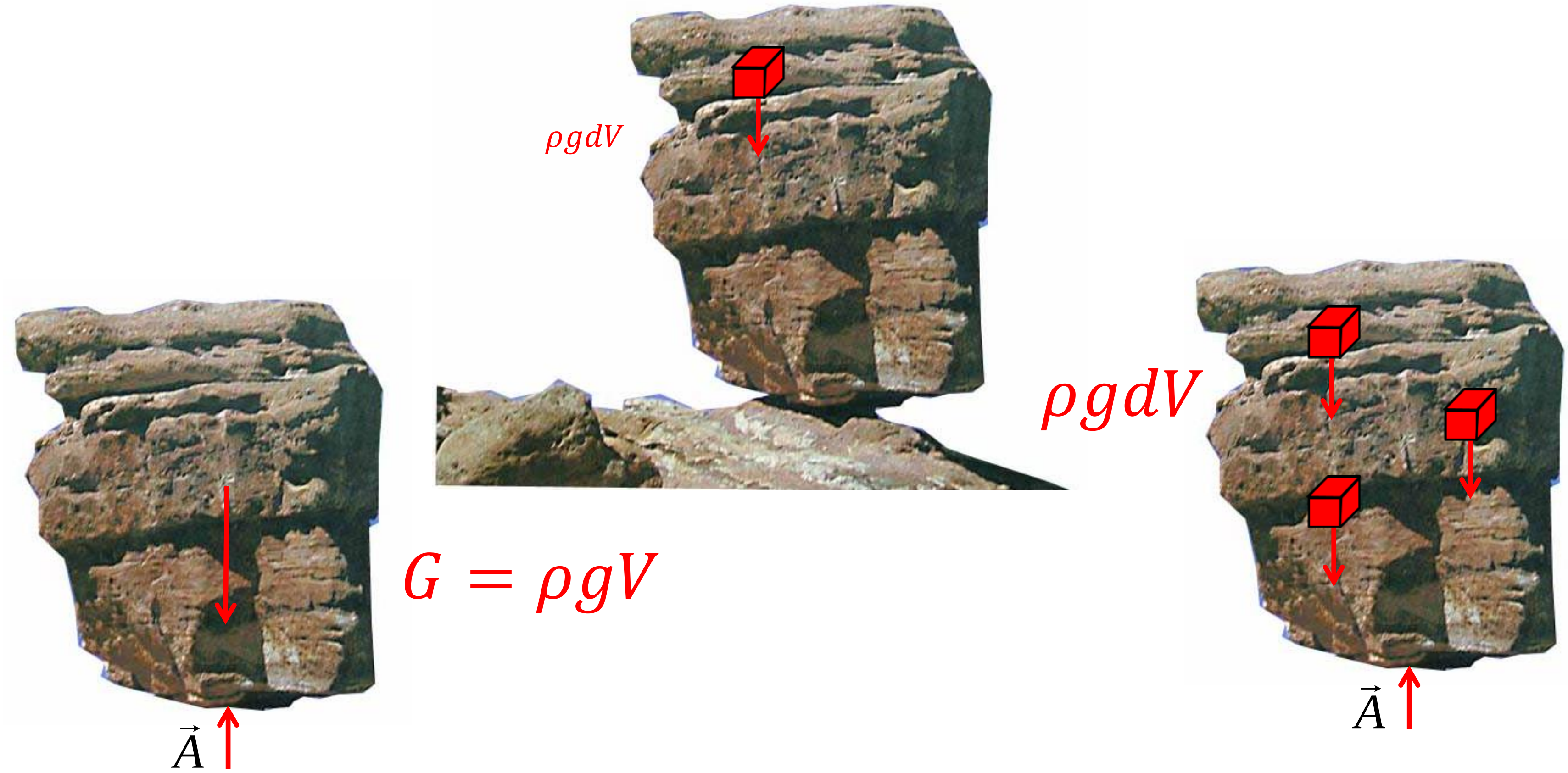
  par exemple $\sum M_B = 0$



$$\sum_{tout} F_x = 0$$

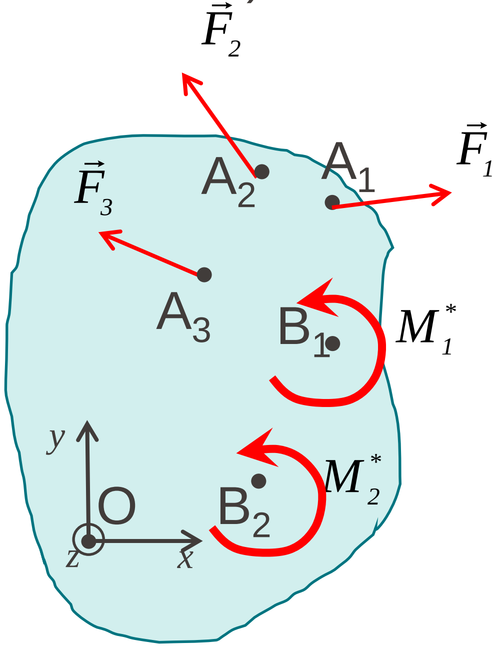
$$\sum_{tout} F_y = 0$$

$$\sum_{tout} M_A = 0$$


$\rho g dV$
$G = \rho g V$
$\vec{A}$
$\rho g dV$
$\vec{A}$

Définition de l'équivalence statique

- Deux groupes de forces et moments sont statiquement équivalents s'ils ont le même effet sur un solide (valable pour les corps peu déformables)

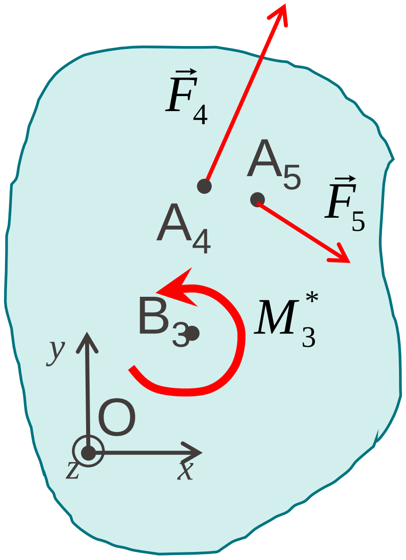


Groupe de forces G1

$$\sum_{G2} F_x = \sum_{G1} F_x$$

$$\sum_{G2} F_y = \sum_{G1} F_y$$

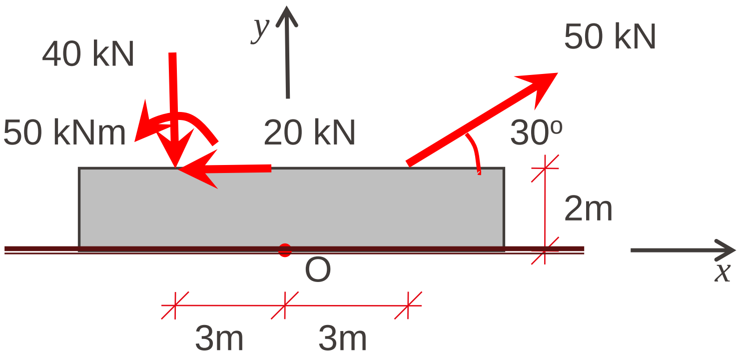
$$\sum_{G1}\left(xF_y - yF_x\right) + \sum_{G1} M_z^* = \sum_{G2}\left(xF_y - yF_x\right) + \sum_{G2} M_z^*$$



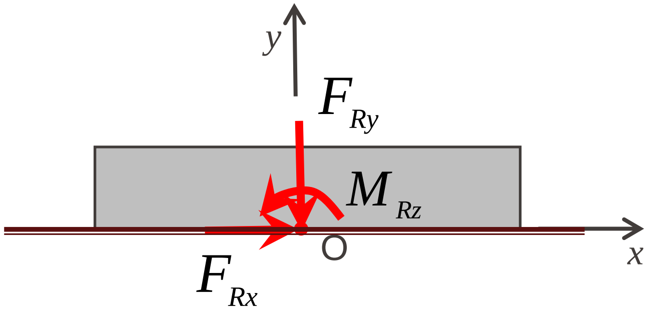
Groupe de forces G2

Prof. Katrin Beyer

Exemple: Réduire touts les forces et moments agissants sur la fondation au point O

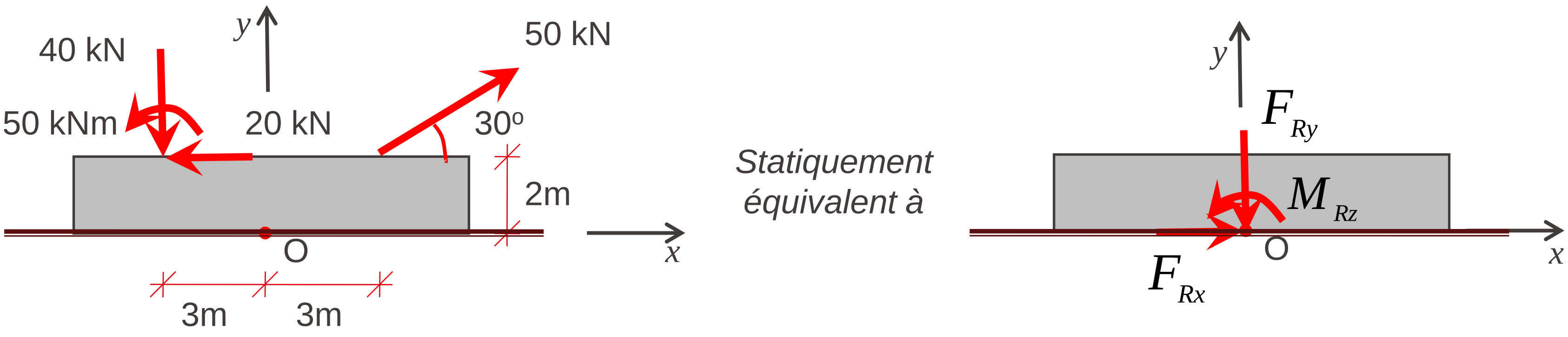


Statiquement équivalent à



$$F_{Rx} = \sum_k F_x \qquad F_{Ry} = \sum_k F_y \qquad M_{Rz} = \sum_k \left(xF_y - yF_x\right) + \sum_m M_z^*$$

Exemple (suite)

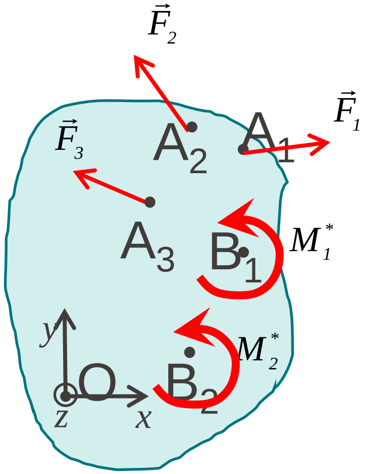


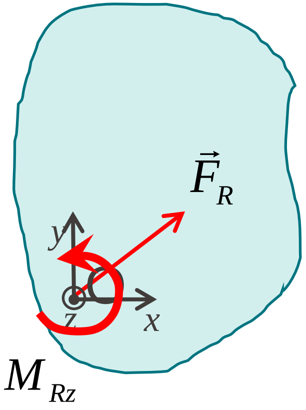
$$F_{Rx} = \sum_k F_x \qquad F_{Ry} = \sum_k F_y \qquad M_{Rz} = \sum_k \left(xF_y - yF_x\right) + \sum_m M_z^*$$

Prof. Katrin Beyer

Cas général 2D: La réduction en plan

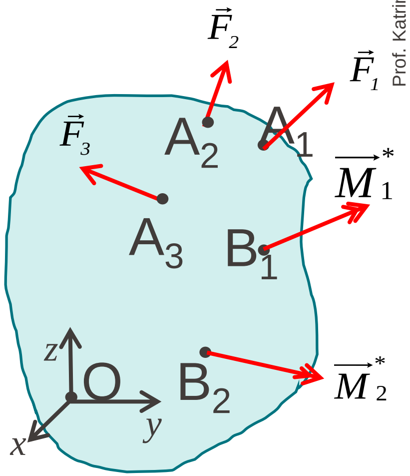
- Les composantes des éléments de réduction:
  - Force résultante en direction x: $F_{Rx} = \sum_k F_x$
  - Force résultante en direction y: $F_{Ry} = \sum_k F_y$
  - Moment résultant autour de l'axe z: $M_{Rz} = \sum_k \left(xF_y - yF_x\right) + \sum_m M_z^*$





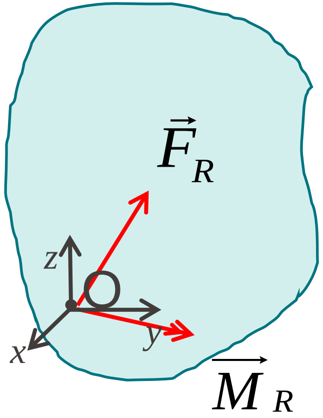
Cas général 3D: La réduction dans l'espace

Prof. Katrin Beyer



- **Composantes des éléments de réduction**
  - Composantes de rotation:
    - $M_{Rx} = \sum_k (yF_z - zF_y) + \sum_m M_x^*$
    - $M_{Ry} = \sum_k (zF_x - xF_z) + \sum_m M_y^*$
    - $M_{Rz} = \sum_k (xF_y - yF_x) + \sum_m M_z^*$
  - Composantes de translation:
    - $F_{Rx} = \sum_k F_x$
    - $F_{Ry} = \sum_k F_y$
    - $F_{Rz} = \sum_k F_z$

- **Eléments de réduction (écriture vectorielle)**
  - $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i$
  - $\vec{M}_R = \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j^*$



Déplacement, coupes et barres

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Ce qu’est le principe de superposition des effets statiques

- Comment couper un solide et calculer les forces internes
- Comment identifier les forces internes non-nulles à partir des déplacements empêchés

- Quels sont les différents types d’éléments structuraux
- Les bases du fonctionnement structural d’une barre

Contenu du cours

5 grands principes de la statique:

- Principe de l'action/réaction ✓
- Principe du parallélogramme ✓
- Principe de l'équilibre ✓
- Principe de la superposition
- Principe de la coupe

Cours 3:

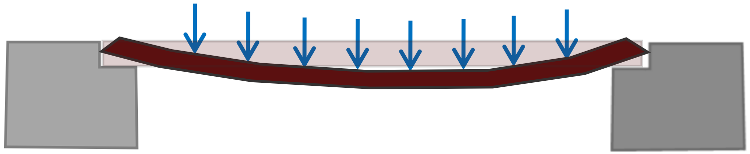
- Déplacements des structures
- Principe de la superposition
- Concept de coupe

Contenu du cours

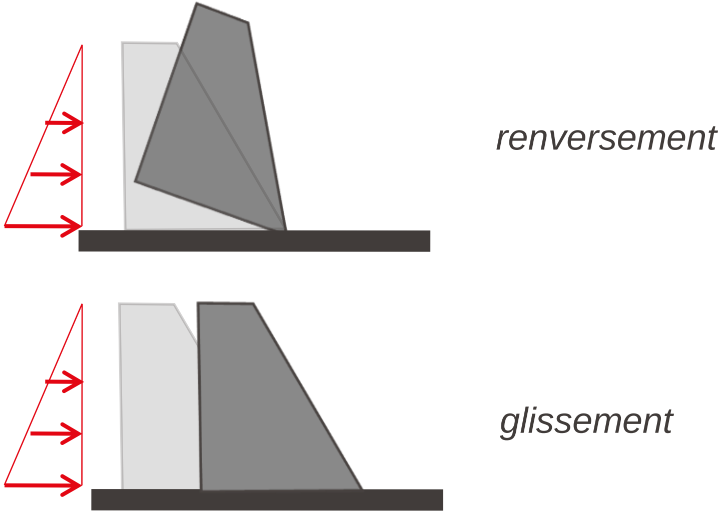
1. Hypothèse sur les déplacements
2. Principe de la superposition
3. Coupes et forces internes
   - Concept de coupe
   - Calcul des forces internes par équilibre
   - Nature des forces internes
   - Association déplacement–force pour les 6 degrés de liberté
4. Barre
   - 3 classes d’éléments structuraux
   - Définition d’une barre
   - Comparaison corde/câble/chaîne
   - Liaisons bilatérales et unilatérales

Déplacements d'une structure

- Déformabilité naturelle de la matière



- Déplacement rigide de la structure entière



Déplacements d’une structure

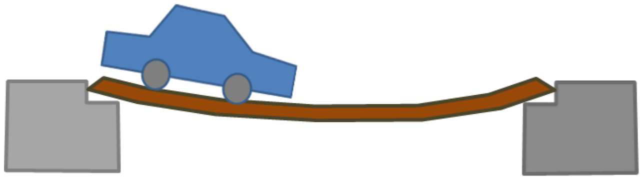
Génie civil: Seulement les très petites déformations sont acceptables (sauf dans des cas exceptionnels)

La configuration d’un corps est l’ensemble des positions occupées par les points matériels le composant (appelé aussi la géométrie du corps)

Configuration initiale

Application des charges (poids propre inclus)

Configuration déformée

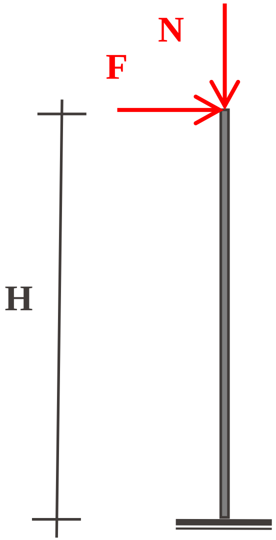


Hypothèses sur les déplacements

- Les déplacements d‘une structure sont très petits.
  - La configuration déformée est ~ égale à la configuration initiale
- On peut effectuer l‘analyse de la structure sur la base de la géométrie initiale connue.
  - On peut appliquer la théorie du premier ordre (équations linéaires)

Exemple: colonne encastrée

Calculer les réactions pour la configuration initiale (théorie 1er ordre) et pour la configuration déformée (théorie 2ème ordre)



Théorie 1er ordre:
Formuler l'équilibre pour la configuration initiale.

Théorie 2ème ordre:
Formuler l'équilibre pour la configuration déformée.

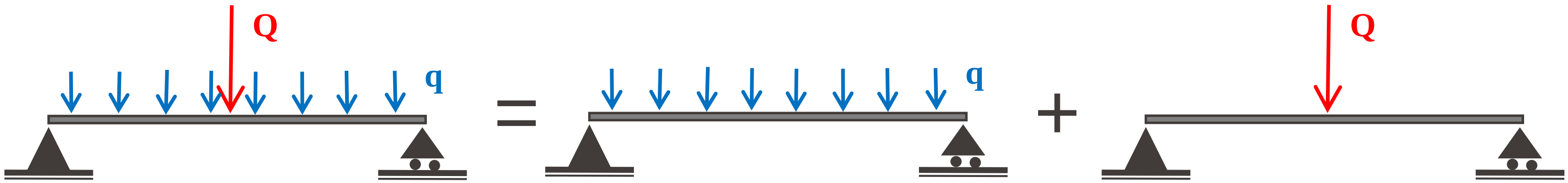
Exception à l'hypothèse des petites déformations

Prof. Katrin Beyer

- Exception à l'hypothèse des petites déformations:
  - Câbles
  - Structures soumises aux charges exceptionnelles (p. ex. séisme)

Principe de la superposition des effets statiques

Si les déformations sont petites, l'effet statique engendré par un système de forces est égal à la somme algébrique des effets engendrés par chacune des forces prises séparément



Contenu du cours

5 grands principes de la statique:

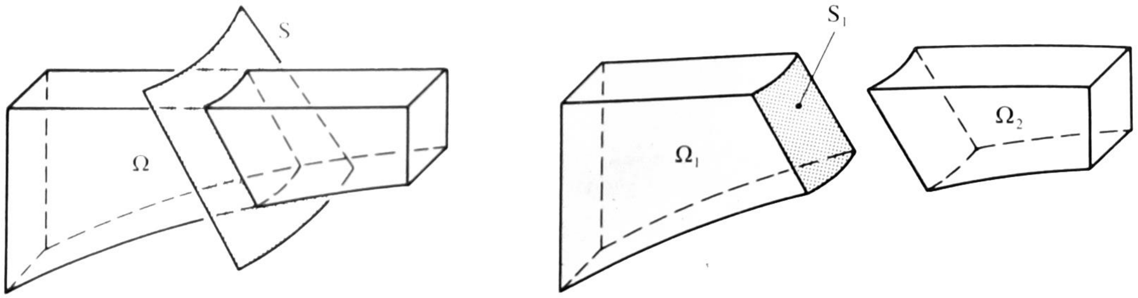
- Principe de l'action/réaction ✓
- Principe du parallélogramme ✓
- Principe de l'équilibre ✓
- Principe de la superposition ✓
- **Principe de la coupe**

Concept de coupe

Pour analyser ce qu'il se passe à l'intérieur d'un corps, on utilise le concept de la coupe

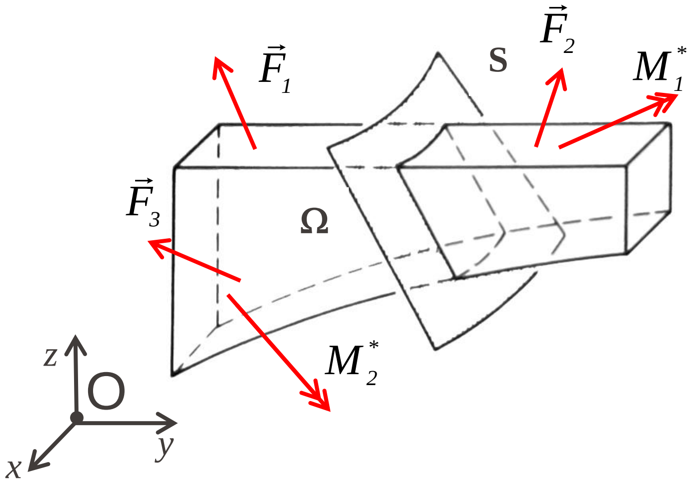
- On coupe et disloque un solide Ω en deux solides Ω_1 et Ω_2
- La coupe est une opération abstraite

Si S est les surface utilisée pour la coupe, les deux faces S_1 et S_2 générées sont exactement superposables

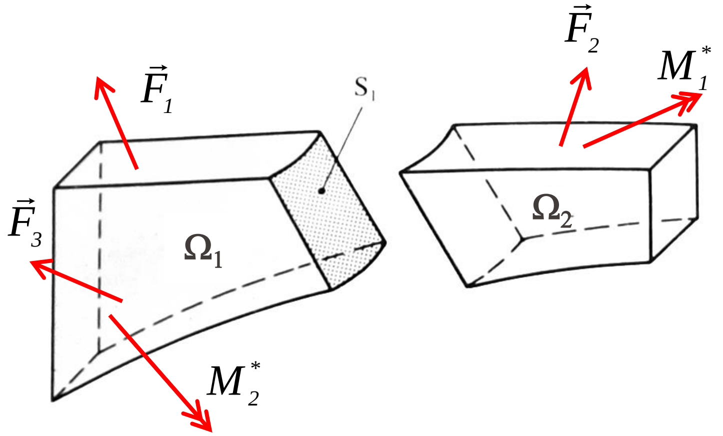


Concept de coupe

- Si on fragmente un solide Ω en équilibre, tout fragment est en équilibre.
  - $\overrightarrow{F_i}$ et $\overrightarrow{M_i^*}$ sont des forces et moments externes qui agissent sur Ω.



Ω est en équilibre

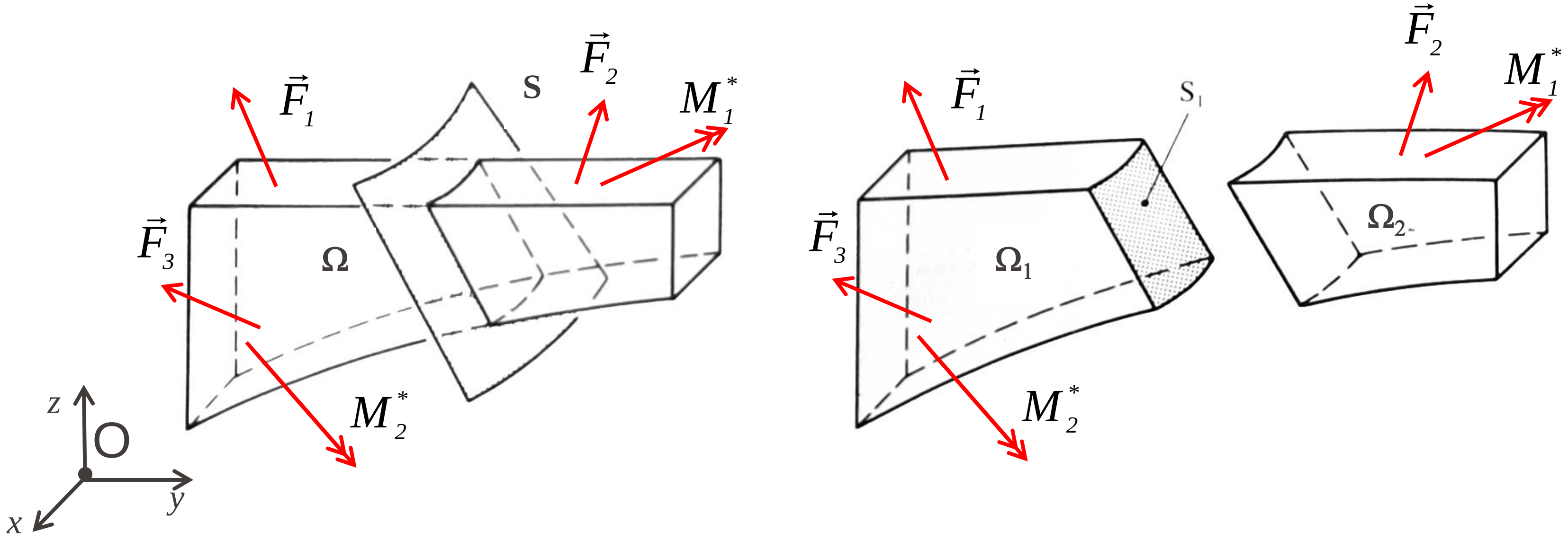


Ω_1 et Ω_2 ne sont pas encore en équilibre

Concept de coupe

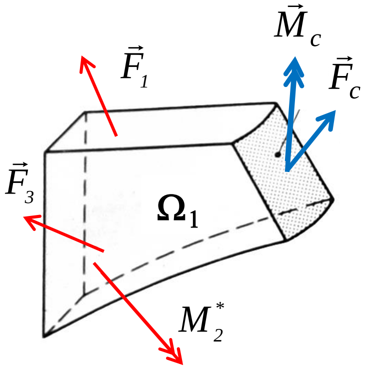
- Pour que les fragments soient en équilibre, on doit introduire des forces internes $\overrightarrow{F_C}$ et $\overrightarrow{M_C}$ sur la surface de coupe
  - Les forces internes sur les faces S_1 et S_2 sont égales et directement opposées (action = réaction)

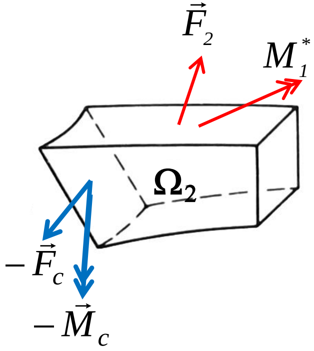
  C est le centre des faces S_1 et S_2



Calculer les forces internes

- Pour calculer les forces internes $\overrightarrow{F_C}$ et $\overrightarrow{M_C}$, on formule l'équilibre de Ω_1 ou de Ω_2
  - Les systèmes de forces sur Ω_1 et Ω_2 sont différents
  - Choisir le fragment avec le système de forces le plus simple pour formuler l'équilibre





$$\sum_{\Omega_1} \vec{F}_i + \vec{F}_C = \vec{0}$$

$$\sum_{\Omega_1} \overline{CA}_i \times \vec{F}_i + \sum_{\Omega_1} \vec{M}_i^* + \vec{M}_C = \vec{0}$$

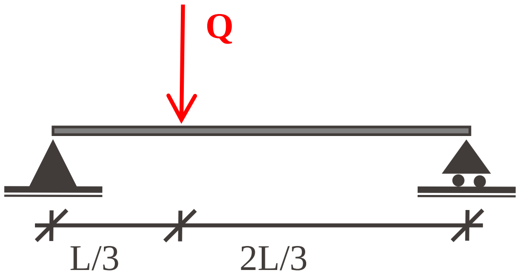
$$\sum_{\Omega_2} \vec{F}_i - \vec{F}_C = \vec{0}$$

$$\sum_{\Omega_2} \overline{CA}_i \times \vec{F}_i + \sum_{\Omega_2} \vec{M}_i^* - \vec{M}_C = \vec{0}$$

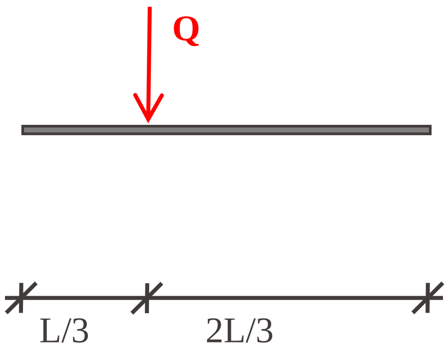
Exemple: Poutre simple avec une force concentrée

Calculer les forces internes au milieu de la poutre:

- Etape 1: Calculer les forces de réactions
- Etape 2: Couper au milieu, introduire les forces internes qui naissent (N: force axiale, V: effort tranchant, M: moment) puis formuler l'équilibre pour un des 2 fragments.



Exemple (suite)



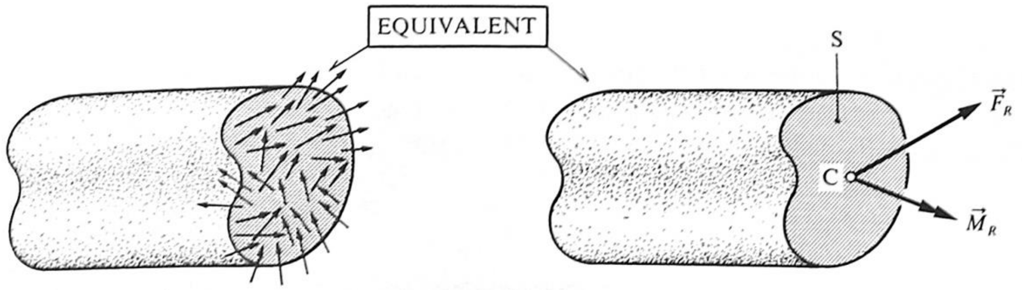
Synthèse: Coupe d'un solide en équilibre

- Si on fragmente un solide en équilibre:
  - Tout fragment est en équilibre
  - Des forces internes naissent sur les deux faces de coupe
  - Les forces internes sur les deux faces sont égales et directement opposées (action–réaction)
  - Pour calculer les forces internes on peut formuler l'équilibre d'un des deux fragments
- Les forces sont **invisibles** dans le solide non coupé:

- *«Forces internes» ou «Efforts» est utilisé pour désigner les forces et les moments internes*

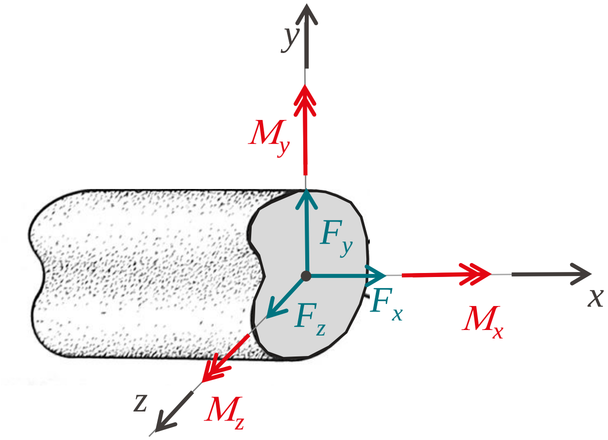
Nature des forces internes

- **Contraintes:** forces internes réparties sur la face. Il s'agit d'une force par unité d'aire avec unité N/m^2 (voir le cours «Mécanique des structures»)
- **Forces internes:** réduction des contraintes (on appelle les forces internes aussi «résultantes internes»)
  - On utilise les résultantes internes parce que pour beaucoup d'éléments structuraux il y a des relations simples entre les contraintes et les résultantes internes



Résultantes internes

- Cas général en espace: 6 composantes de forces internes
  - 3 forces: F_x, F_y, F_z
  - 3 moments: M_x, M_y, M_z

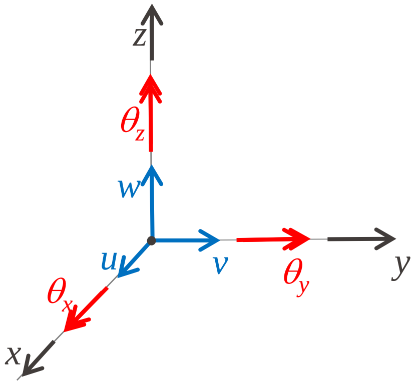


- Si la matière empêche un déplacement relatif entre les deux fragments, la force interne correspondante existe. Sinon, elle est nulle

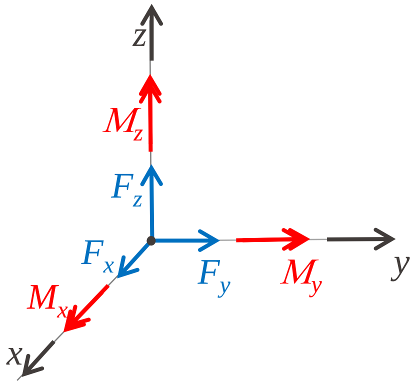
Association force–déplacement (en 3D)

Prof. Katrin Beyer

- Le déplacement relatif des deux fragments a 6 composantes (6 degrés de liberté): 3 déplacements et 3 rotations
- Quand un degré de liberté ne peut se produire, il y a une liaison entre les fragments
- **Toute liaison fait naître une force associée**



- Exemples:
  - Si le déplacement relatif u est empêché entre les deux fragments, il y a une liaison qui fait naître la force F_x
  - Si la rotation θ_x n'est pas empêchée, $M_x=0$



Association force–déplacement

- Dans l'espace

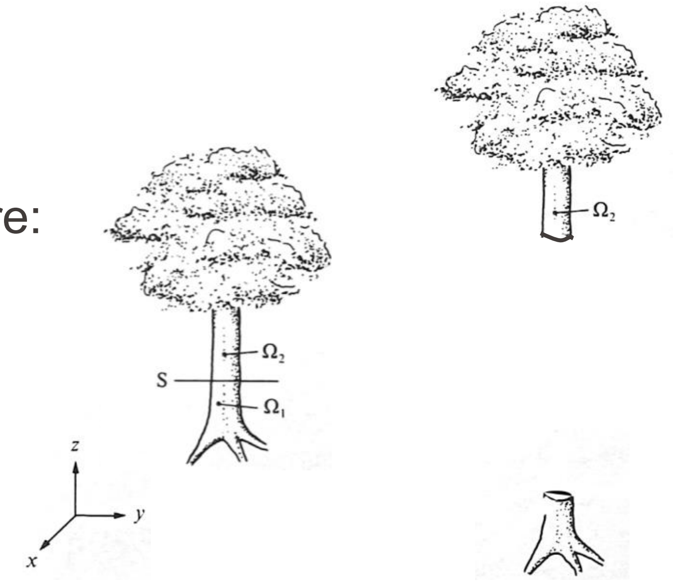
	Composantes de translation			Composantes de rotation		
Statique (force, moment)	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
Cinématique (déplacement, rotation)	u	v	w	θ_x	θ_y	θ_z

- En plan

	Composantes de translation		Composantes de rotation
Statique (force, moment)	F_x	F_y	M_x
Cinématique (déplacement, rotation)	u	v	θ_z

Exemple

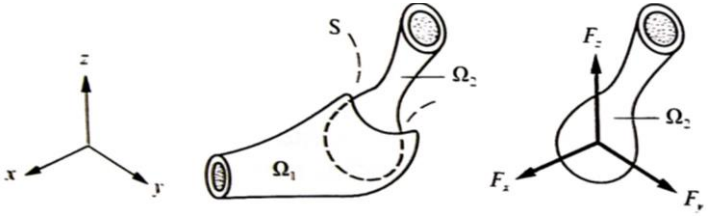
- Tronc d'arbre:



- Chaîne:

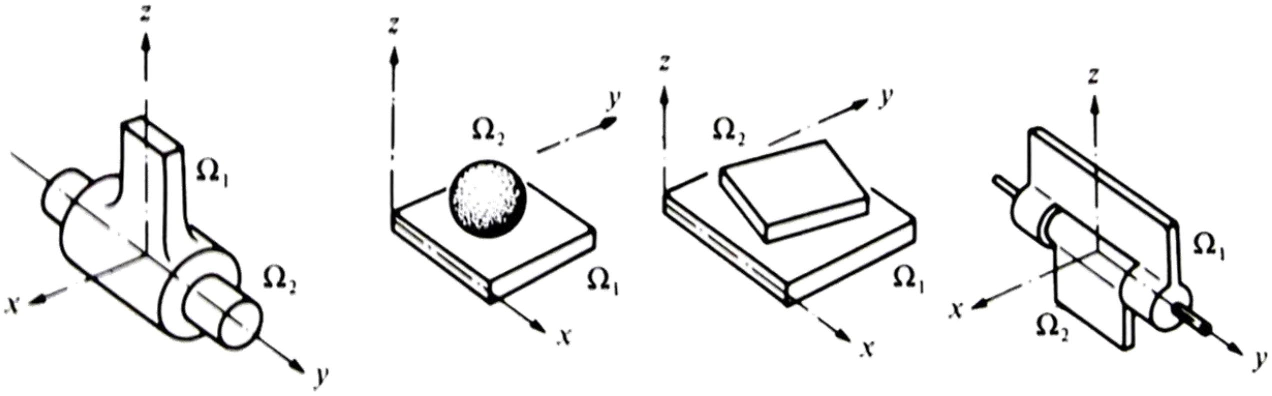
Exemple (suite)

- Articulation:



A votre tour!

Quelles sont les composantes internes que les mécanismes suivants peuvent transmettre



Les 3 classes d'éléments structuraux

- Deux dimensions beaucoup plus petites que le troisième
  - Exemples: barres, câbles, poutres

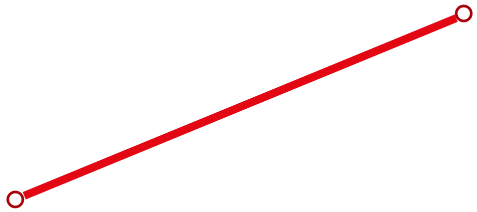
- Une dimension beaucoup plus petite que les deux autres
  - Exemples: parois, plaques, coques

- Les trois dimensions sont du même ordre de grandeur
  - Exemples: barrages poids

Barres

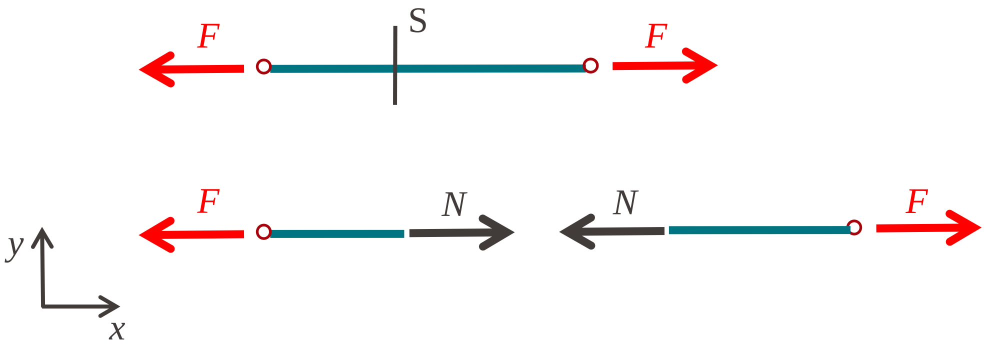
Barre

- La barre est un élément structural:
  - rectiligne
  - muni d‘articulations à ses deux extrémités
  - les charges ne sont appliquées qu’aux articulations (aucune charge ne peut agir entre les articulations. Par exemple, le poids propre est ignoré ou concentré aux articulations))
- L’objectif de la modélisation est de rechercher la fonction structurale principale
  - La barre est utilisée pour modéliser les éléments structuraux dont les moments sont très petits
  - **La barre est un élément structural qui n’existe pas en réalité**



Barre (suite)

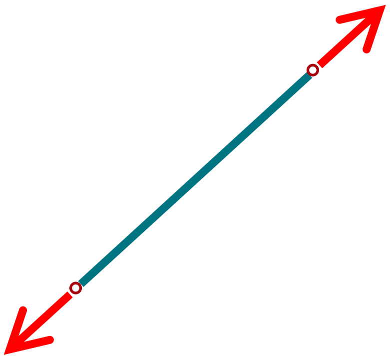
- Du fait des articulations aux extrémités de la barre:
  - aucun moment ne peut agir aux extrémités
  - seulement des forces dont la ligne d'action est l'axe de la barre peuvent être reprises
- La composante interne N s'appelle l'effort normal

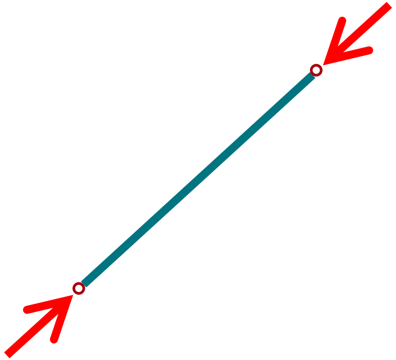


$$\sum F_x = -F + N = 0$$

Barre (suite)

	Cas 1	Cas 2
La barre est ...	tendue	comprimée
Signe de l'effort normal	+	-
Effort normal de …	traction	compression





Comparaison Barre – Corde/câble/chaîne

	Barre	Corde/câble/chaine
Composante interne	Effort normal	
Signe de l'effort normal	+ / - traction/compression	+ traction
Liaison	bilatérale	unilatérale

Les liens de zoom

- Cours: https://epfl.zoom.us/j/83504565511, Mardi 8:15-10:00
- Exercices: Mardi 10:15-12:00

Groupe	Assistant étudiant	Salle
1	Joachim Bastian Droz	https://epfl.zoom.us/j/85665940256
2	Norman Clément Gros	https://epfl.zoom.us/j/89964774622
3	Rosa Schnebli	https://epfl.zoom.us/j/86499821323
4	Florian Till Jermann	https://epfl.zoom.us/j/83748579334

Séance de questions / réponses avec Igor Tomic et Katrin Beyer, mardi:

- Igor Tomic: https://epfl.zoom.us/j/6965071488 11:00-12:00
- Prof. Dr Katrin Beyer: https://epfl.zoom.us/j/83504565511 11:00-11:40

Heures de présence:

- Igor Tomic: Jeudi 12:00-13:00, https://epfl.zoom.us/j/6965071488
- Norman Clement Gross: Mardi 13:15-15:00, https://epfl.zoom.us/j/81235782758

Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 4:** Déplacement, coupe et barre (en entier)

Références

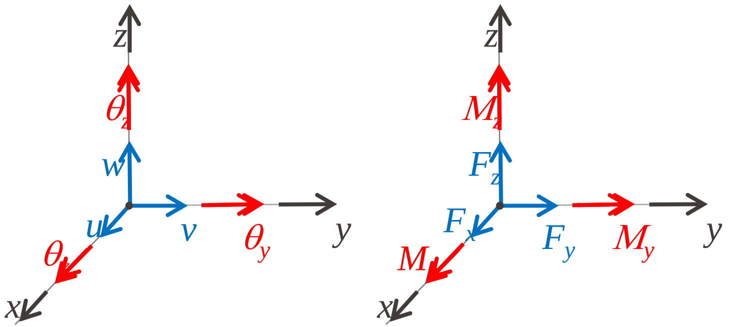
Références des illustrations par ordre d'apparition

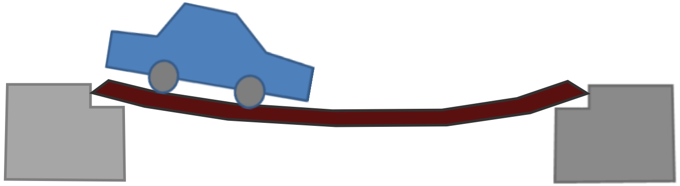
- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] (a) Olympiastadion München © Arad Mojtahedi; (b) Photo by P. Lestuzzi; 1999 Izmit earthquake
- [3] Coupe d'un solide: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [4] Contraintes et Résultantes internes: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [5] Arbre: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [6] Articulation: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [7] Mécanismes: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [8] Tour Eiffel © Annish33, CC BY-SA 3.0
- [9] Railway Bridge Over Loch Awe © Bernard Blanc, © Richard Cooke, CC BY-SA 2.0
- [10] Charpente en acier © Ross, CC BY-NC-ND 2.0
- [11] Arc en bois © Chris Light, CC BY-SA 3.0
- [12] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0

Association force–déplacement (en 3D)

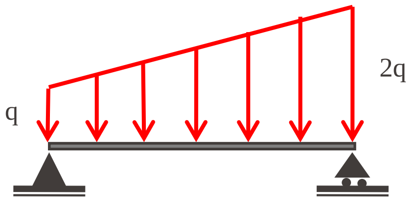
- Le déplacement relatif des deux fragments a 6 composantes (6 degrés de libertés).
  - Quand un degré de liberté ne peut se produire, il y a une liaison entre les fragments
  - Si un degré de liberté est empêche, il est associé avec une force ou un moment interne

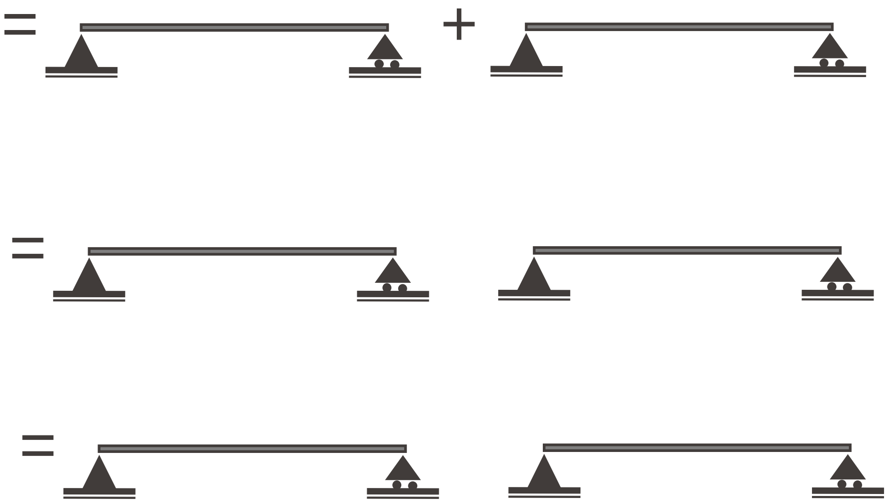
	Composantes de translation			Composantes de rotation		
Statique (force, moment)	F_x	F_y	F_z	M_x	M_y	M_z
Cinématique (déplacement, rotation)	u	v	w	θ_x	θ_y	θ_z





Exemples: Superpostion





Modélisation, appuis et organes de liaison

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

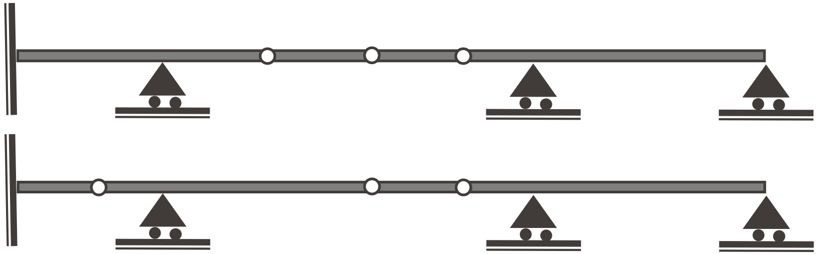
Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Quels sont les différents types d'appuis et les composantes qu'ils reprennent
- Distinguer si un système simple ou composé est isostatique, hyperstatique ou un mécanisme
- Calculer les forces de liaison à une articulation

Semaine 1-3

Aujourd'hui

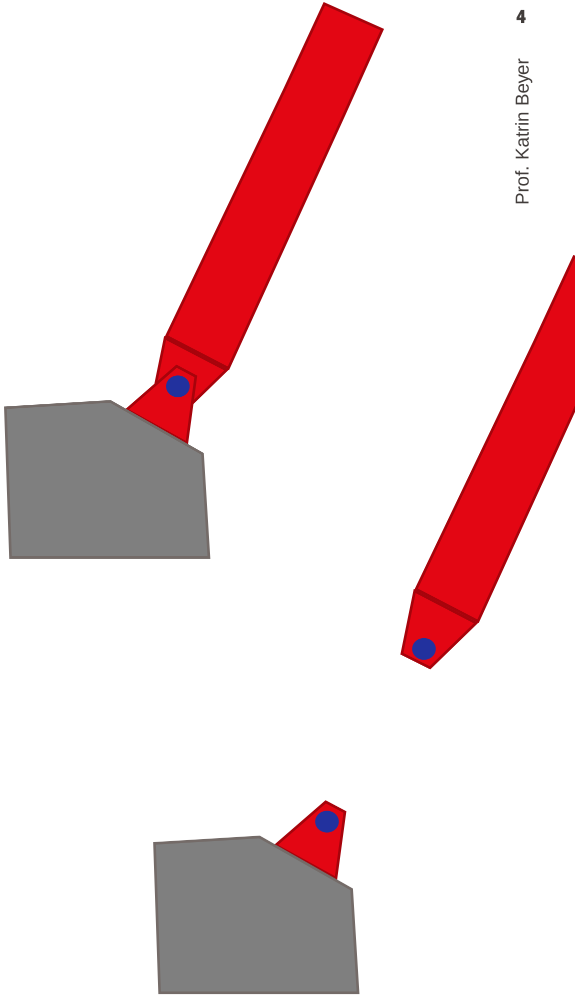


Contenu du cours

1. **Appuis**
   - **Définition**
   - **Appuis usuels:**
     - **Appuis à rouleau**
     - **Articulation**
     - **Encastrement**
   - **Résumé des appuis usuels (en plan)**
2. Conditions d'appui
3. Organes de liaison et structures composées

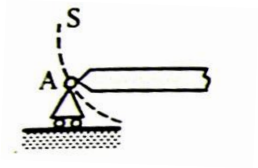
Appuis

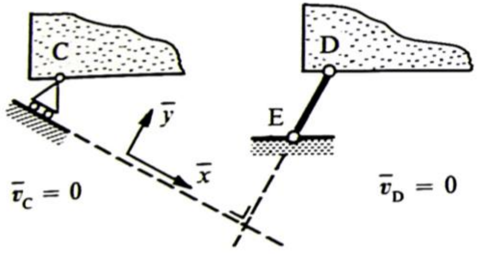
- Organes de liaison de la structure avec la fondation
- Au droit d'un appui, certaines composantes du déplacement relatif à la fondation (ou degrés de liberté) sont bloquées
- Les liaisons imposées par les appuis font naître des réactions d'appuis
- Pour les faire apparaître
  - Couper la structure au droit de ses appuis
  - Disloquer les appuis et la structure
  - Les réactions d'appuis apparaissent comme action et réaction

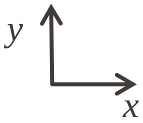


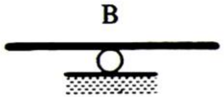
Appui à rouleau

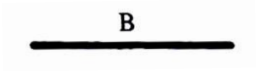
- Impose **un seul blocage de translation** (les autres DDL sont libres)
  - La ligne d'action de la réaction d'appui est définie. Elle est **orthogonale** au plan d'appui
  - Seulement la composante de la réaction d'appui est inconnues
  - 1 inconnue
- Symboles graphiques:

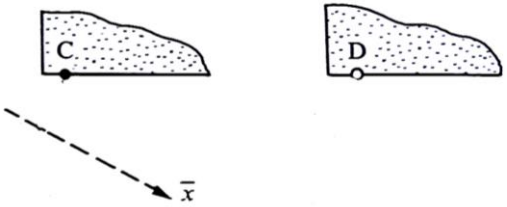




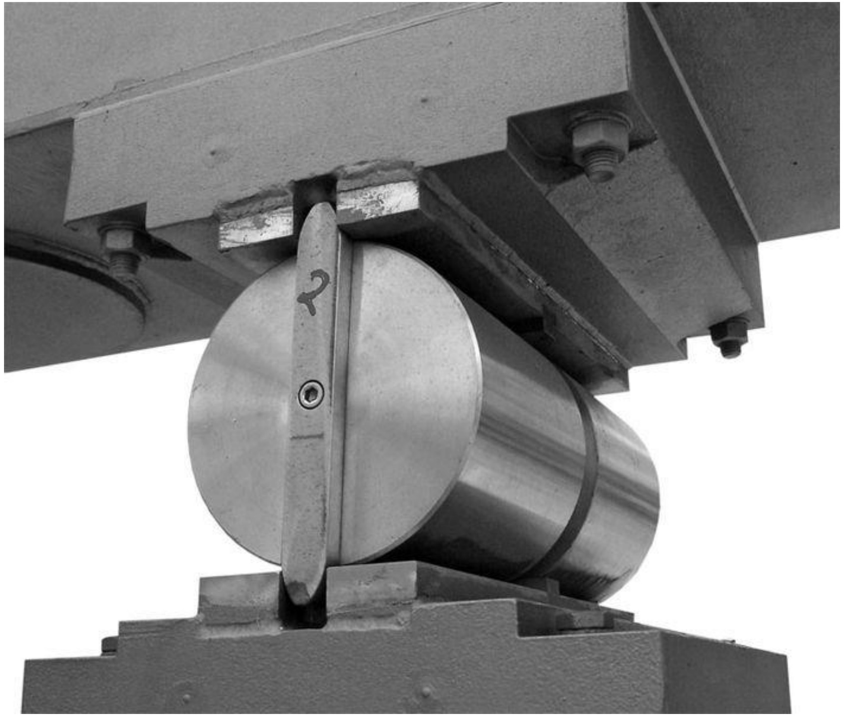






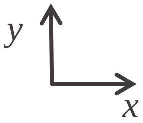


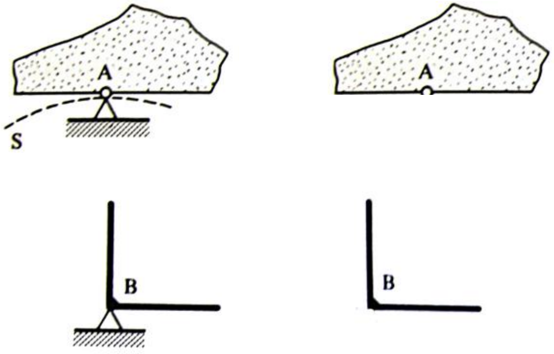
Appui à rouleau

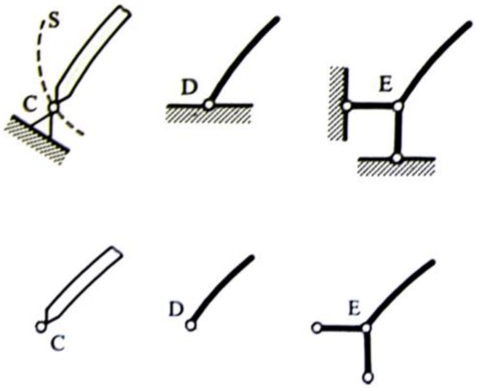


Articulation

- S‘oppose à **toutes translation** du point d‘appui mais laisse libre les rotations autour de ce point
  - La ligne d‘action de la réaction d‘appui n‘est pas définie
  - Dans le plan: 2 inconnues
  - Dans l‘espace: 3 inconnues
- D’autre termes équivalents: rotule, appui articulé
- Symboles graphiques:

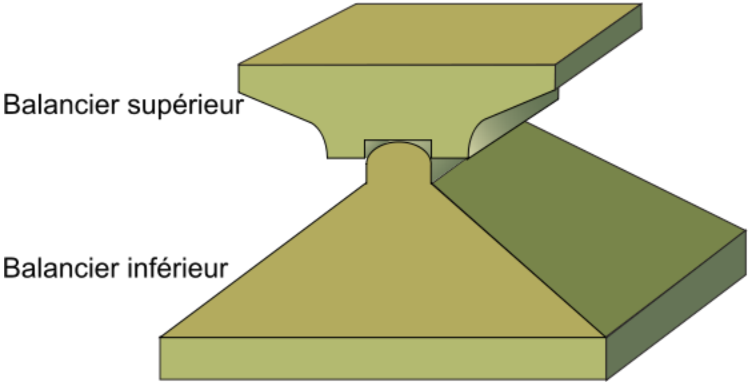






Articulations

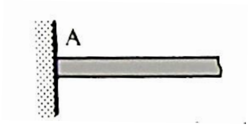
- Appui à balanciers à contact linéaire

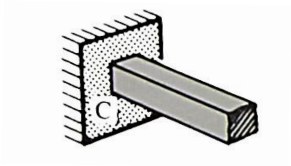


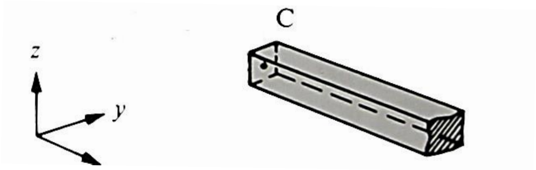
- Articulation

Encastrement

- S‘oppose à **toute translation et toute rotation** du point d‘appui
  - Dans le plan: 3 inconnues
  - Dans l‘espace: 6 inconnues
- Symboles graphiques:

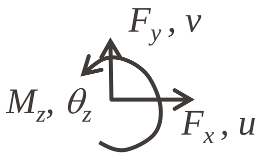
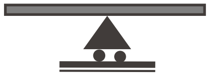






Encastrement

Résumé des appuis usuels (en plan)

	Rouleau			Articulation			Encastrement		
									
Grandeur cinématique	$u \neq 0$	$v = 0$	$\theta_z \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta_z \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta_z \neq 0$
Grandeur statique	$A_x = 0$	$A_y \neq 0$	$M_{Az} = 0$	$A_x \neq 0$	$A_y \neq 0$	$M_{Az} = 0$	$A_x \neq 0$	$A_y \neq 0$	$M_{Az} \neq 0$

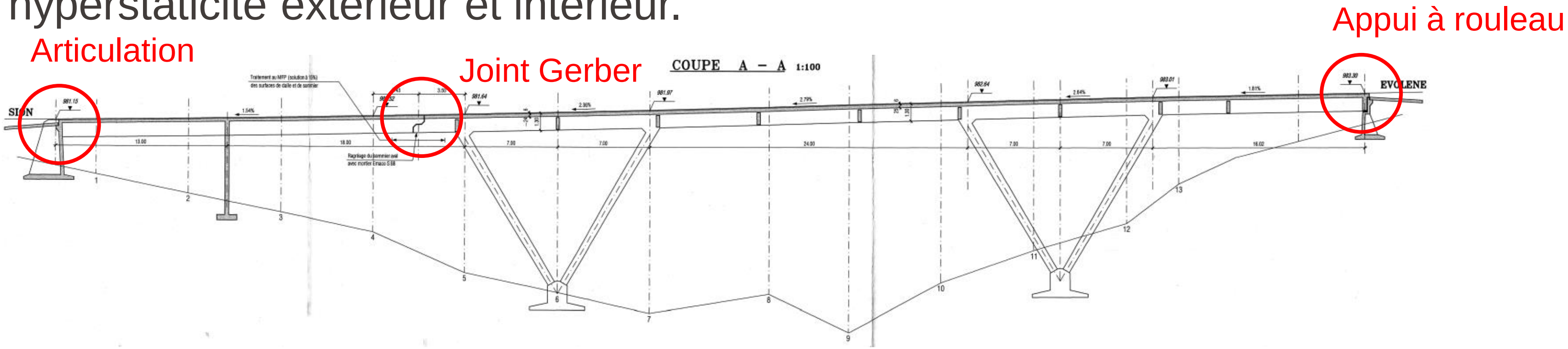
L'appui réel a toujours des imperfections:

- Frottement qui gêne le roulement des rouleaux
- Frottement qui gêne la rotation des articulations
- Du jeu qui empêche de faire un encastrement parfait

→ L'ingénieur doit juger comment on peut modéliser l'appui (c'est-à-dire trouver sa fonction principale)

Statique booklet
Pont de la Luette

Proposer un système statique pour ce pont et déterminer son dégrées d'hyperstaticité extérieur et intérieur.



Contenu du cours

1. Appuis
2. **Conditions d'appui**
   - **Définition**
   - **3 conditions d'appuis:**
     - **Isostaticité des appuis**
     - **Hyperstaticité des appuis**
     - **Mécanisme**
   - **Résumé des appuis usuels (en plan)**
3. Organes de liaison et structures composées

Conditions d'appuis

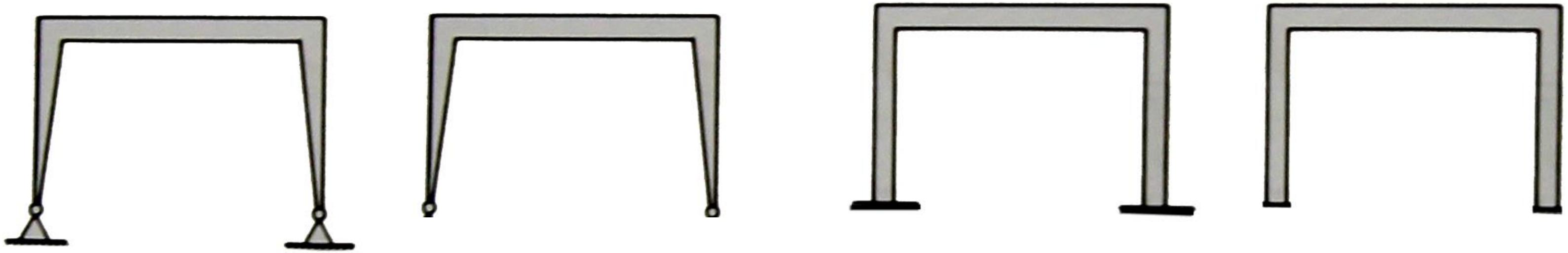
- **L'ensemble des appuis d'une structure (ou conditions d'appui) doit empêcher tout déplacement rigide de cette structure**
- Nombre de degrés de liberté (DDL) d'un solide:
  - Dans le plan: 3 DDL
  - Dans l'espace: 6 DDL
  - Il faut au moins 3 ou 6 blocages pour immobiliser le solide complètement
- On distingue 3 conditions d'appuis:
  - Isostaticité des appuis
  - Hyperstaticité des appuis
  - Mécanisme

Isostaticité des appuis

- Les conditions d’appui sont **isostatiques/statiquement déterminées** si les réactions d’appui d’un solide (soumis à un groupe d’actions quelconques) peuvent être calculées par les seules équations d’équilibre
- Exemple de conditions d’appui isostatiques:

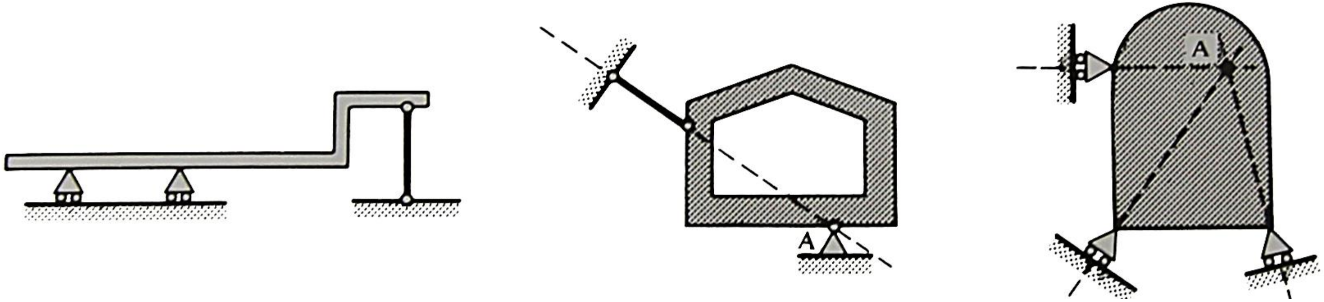
Hyperstaticité des appuis

- Lorsque, dans une structure qui n’est pas un mécanisme, le nombre des blocages est supérieur au nombre strictement nécessaire, les conditions d’appui sont **hyperstatiques** ou **statiquement indéterminées**
- Exemples de conditions d’appui hyperstatiques:



Mécanisme

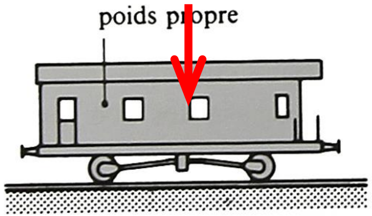
- Une structure qui n’est pas complètement immobilisée par ses appuis est un **mécanisme**
- Exemples de mécanismes:

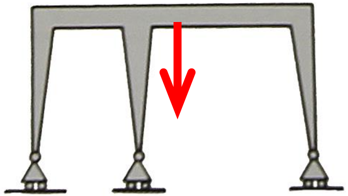


Mécanisme, cas particuliers

- Si les charges laisse la structure immobile, on peut calculer les réactions d'appuis pour les degrés de liberté qui sont bloqués
- Pour les degrés de liberté qui ne sont pas bloqués on obtient une équation indéterminée du type $0 = 0$
- Pour une structure qui n'est pas complètement immobilisée mais qui est immobile sous certaines charges, on distingue entre:

  - Mécanisme plan isostatique
  - Mécanisme plan hyperstatique

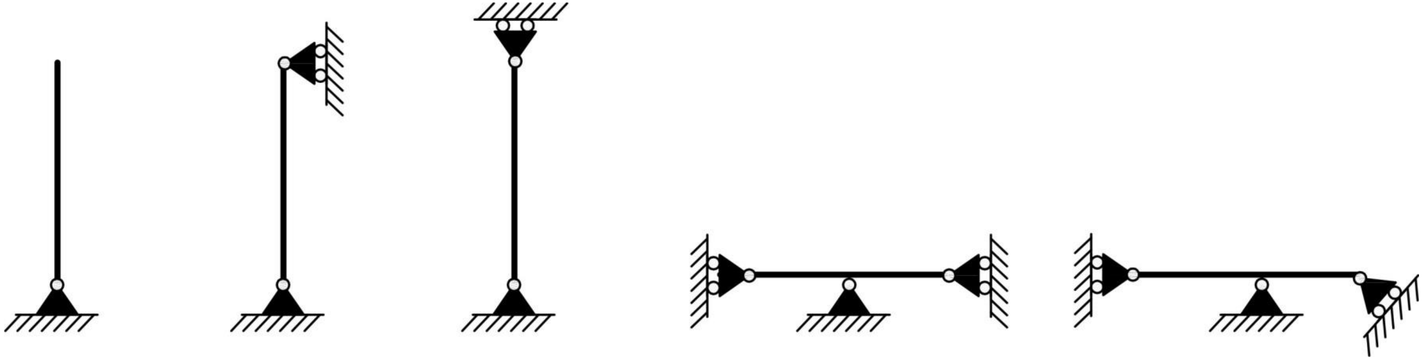




A votre tour!

Les conditions d'appui des structures sont-elles:

- isostatique (I)
- hyperstatique (H)
- forment un mécanisme (M)

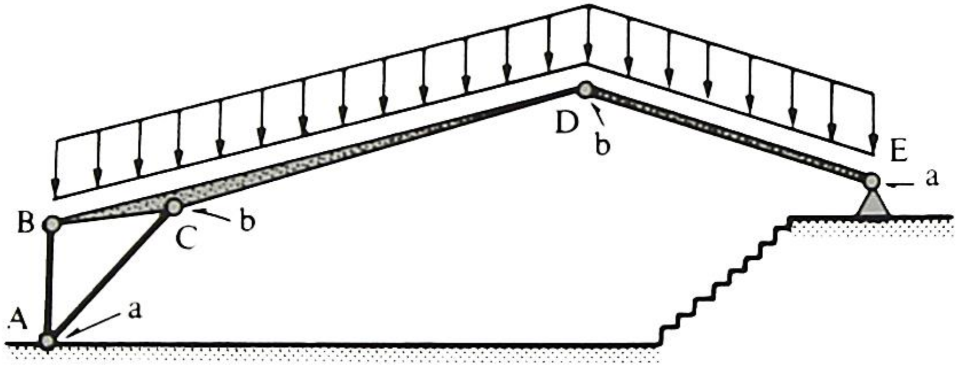


Contenu du cours

1. Appuis
2. Conditions d'appui
3. **Organes de liaison et structures composées**
   - **Organes de liaison:**
     - **Définitions**
     - **Types des organes de liaison**
   - **Calculer les forces de liaison**
   - **Isostaticité des appuis et liaisons**

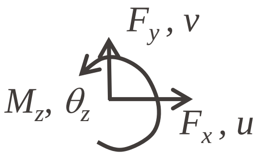
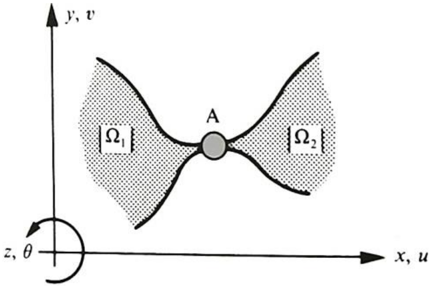
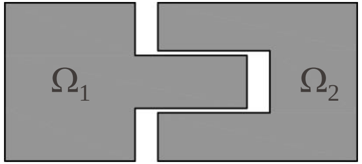
Organes de liaison et structures composées

- **Organes de liaison:** Dispositifs semblables aux appuis qui relient deux éléments structuraux (appui: un élément structural avec la fondation)
  Les organes de liaison **bloquent certains degrés de liberté d'un élément par rapport à l'autre**
- **Structures composées:** Un ensemble d'éléments structuraux assemblés par des organes de liaison



a: appui, b: organe de liaison

Types d’organes de liaison

<table>
<tr><td rowspan="2">
</td><th colspan="3">Articulation</th><th colspan="3">Articulation axiale</th></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Grandeur cinématique</td><td>$u = 0$</td><td>$v = 0$</td><td>$\theta_z \neq 0$</td><td>$u \neq 0$</td><td>$v = 0$</td><td>$\theta_z \neq 0$</td></tr>
<tr><td>Grandeur statique</td><td>$A_x \neq 0$</td><td>$A_y \neq 0$</td><td>$M_{Az} = 0$</td><td>$A_x = 0$</td><td>$A_y \neq 0$</td><td>$M_{Az} \neq 0$</td></tr>
</table>

L’articulation est l’organe de liaison le plus usuel

Exemples d'articulations

- Articulation

- Joint Gerber (considéré comme une articulation)

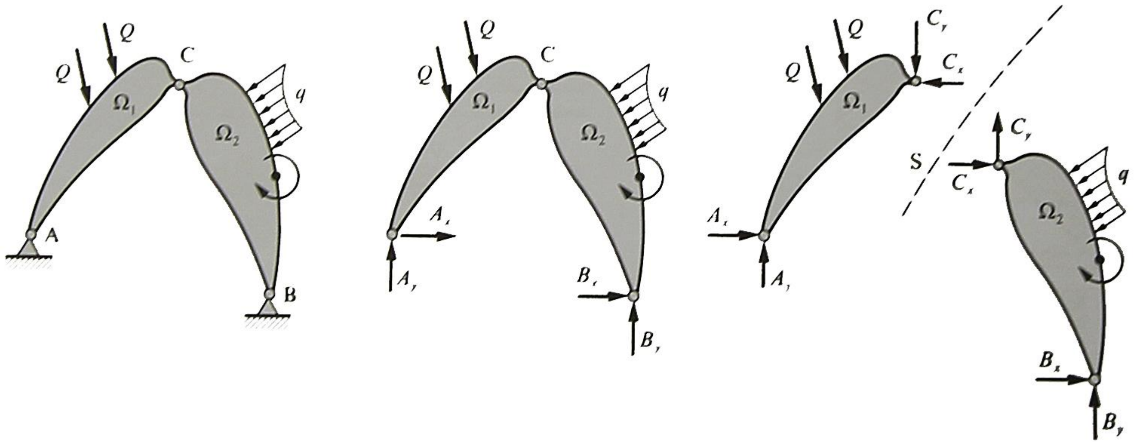
Prof. Katrin Beyer

Calculer les forces de liaison

Méthode de résolution:

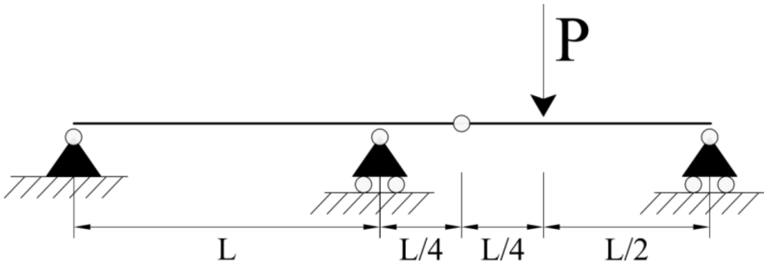
1. Couper et disloquer
2. Aux coupes: pour chaque liaison coupée on doit introduire une force/un moment
3. Pour calculer les forces de liaison, on formule l'équilibre de Ω_1 ou de Ω_2

→ Exactement la même procedure que pour les forces internes



Exemple

- Montrer que le système est isostatique
- Calculer les forces de réaction et de liaison



Exemple (suite)

Isostaticité des appuis et liaisons

Couper - Disloquer

m fragments

e équations d'équilibre

r réactions d'appuis
l forces de liaison

- La structure est isostatique dans ses appuis et liaisons si les réactions d'appui et les forces de liaison peuvent être calculées par les seules équations d'équilibre.
- Critères mathématiques:
  1. La structure est isostatiques dans ses appuis et liaisons si $e = l + r$
  2. La structure est hyperstatique dans ses appuis et liaisons si $e < l + r$
  3. La structure est un mécanisme si $e > l + r$
- **Attention: Les critères 1 et 2 ne sont pas suffisants. On doit aussi contrôler que la structure ne forme pas un mécanisme.**

Isostaticité des appuis et liaisons

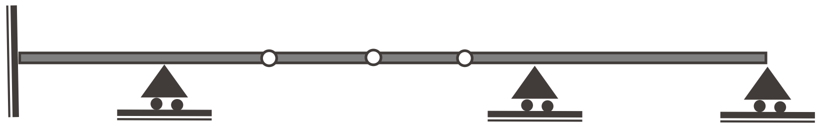
Dans le cours Statique I:

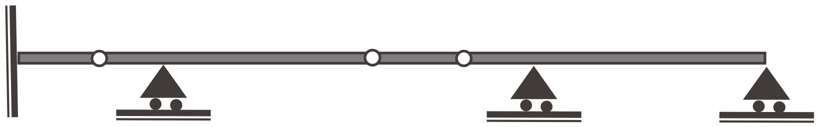
- Analyse des structures isostatiques
- Première étape de toutes les analyses: contrôler si les conditions d'appui et liaison sont isostatiques

Deux étapes pour déterminer l'isostaticité

- Vérifier et constater que la structure ne forme pas un mécanisme
- Compter le nombre des réactions d'appui et forces de liaison inconnues et le comparer au nombre d'équations linéairement indépendantes (pas un critère suffisant)

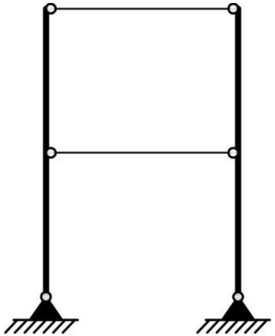
Exemples

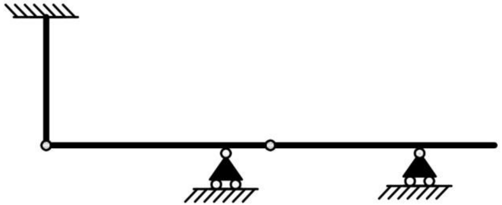


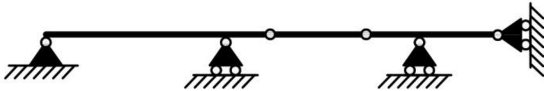


A votre tour!

Déterminer si les structures planes suivantes sont des mécanismes (M), isostatiques (I) ou hyper-statiques (H) quant à leurs appuis et à leurs liaisons







Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 5:** Appuis et modélisation 5.1 à 5.5
- **Chapitre 6:** Organes de liaison et structures composées (en entier)

Références

Références des illustrations par ordre d’apparition

- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Symboles des appuis à rouleau: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [3] Appui à rouleau © KMJ, CC BY-SA 3.0
- [4] Symboles des articulations: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [5] Appuis à balanciers © Roulex_45, CC BY-SA 3.0
- [6] Articulation du pont d'Henrious © Sébastien Thébault, CC BY-SA 3.0
- [7] Symboles des encastrements: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [8] Stuttgarter Fernsehturm © Taxiarchos228, FAL
- [9] With the authorisation of Jacques Rudaz © Etat du Valais, DMTE-INFRA cellule ouvrage d’art.
- [10] Exemples de conditions d’appui isostatique: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [11] Exemples de conditions d’appuis hyperstatiques: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005

Références (suite)

- [12] Exemples de mécanismes: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [13] Exemples de cas particuliers de mécanismes: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [14] Exemple de structure composée: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [15] Viaduc du Viaur © Хрюша, CC BY 3.0
- [16] Gerber beam Bridge © Katorisi, CC BY-SA 3.0
- [17] Calcul des forces du liaison: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [18] Structures exercies “A votre tour”: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [19] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0

Les liens de zoom

- Cours: https://epfl.zoom.us/j/83504565511, Mardi 8:15-10:00
- Exercices: Mardi 10:15-12:00

Groupe	Assistant étudiant	Salle
1	Joachim Bastian Droz	https://epfl.zoom.us/j/85665940256
2	Norman Clément Gros	https://epfl.zoom.us/j/89964774622
3	Rosa Schnebli	https://epfl.zoom.us/j/86499821323
4	Florian Till Jermann	https://epfl.zoom.us/j/83748579334

Séance de questions / réponses avec Igor Tomic et Katrin Beyer, mardi:

- Igor Tomic: https://epfl.zoom.us/j/6965071488 11:00-12:00
- Prof. Dr Katrin Beyer: https://epfl.zoom.us/j/83504565511 11:00-11:40

Heures de présence:

- Igor Tomic: Jeudi 12:00-13:00, https://epfl.zoom.us/j/6965071488
- Joaching Bastian Droz: Mardi 13:15-15:00, https://epfl.zoom.us/j/81235782758

Contenu du cours

1. Appuis
2. Conditions d’appui
3. Organes de liaison et structures composées
4. **Modélisation**
   - **Etapes de la modélisation et l’analyse d’une structure**
   - **Exemple**

Modélisation

Modélisation et analyse d'une structure

Isoler la partie de la structure qu'on veut analyser par des coupes
Faire le schéma statique du corps isolé (= modèle de calcul) par

1. Modélisation de la structure
→rechercher la fonction principale des éléments d'une structure et les approximer par des éléments connus de la statique.
   - Eléments structuraux: Barre, poutre, chaîne, …
   - Appuis: Appui à rouleau, articulation, encastrement, …
   - Organes de liaison: Articulation, …

2. Introduire les forces et moments
   - connus (charges données)
   - inconnus (aux coupes → pour chaque liaison coupée on doit introduire une force / un moment)

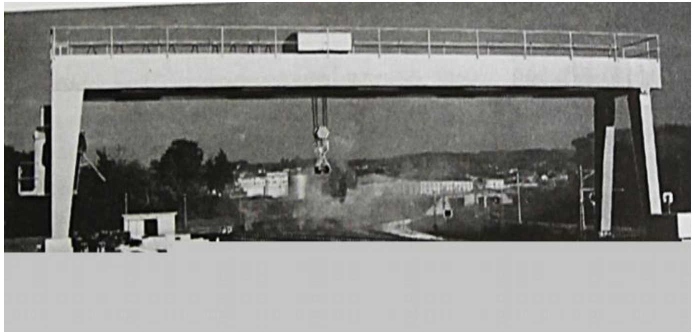
1. MODELISATION

Calculer les réactions d'appuis et les forces internes en exprimer l'équilibre

2. CALCULER

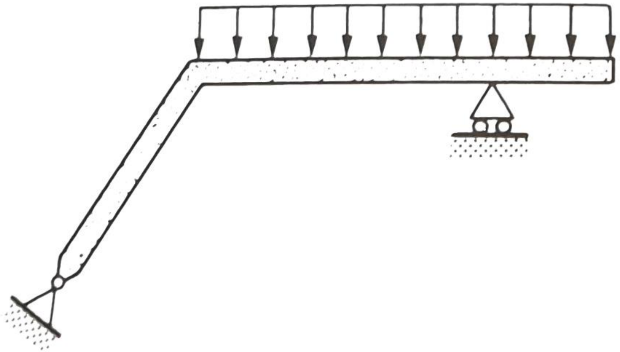
Modélisation

Exemple: Portique roulant



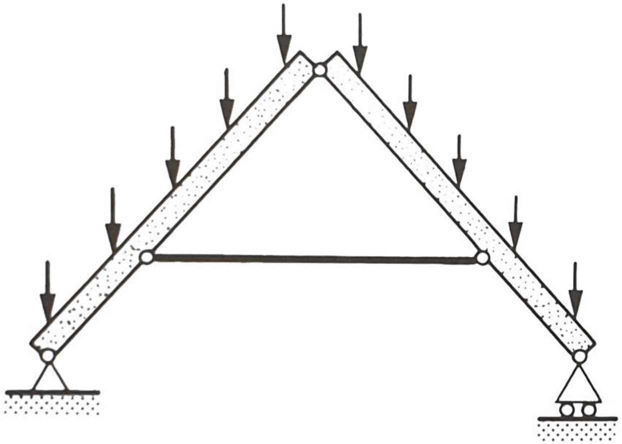
A votre tour!

Prêt pour un jeu? Connectez-vous à http://kahoot.com/



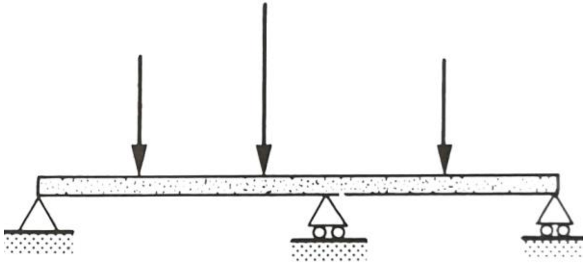
A votre tour!

Prêt pour un jeu? Connectez-vous à http://kahoot.com/



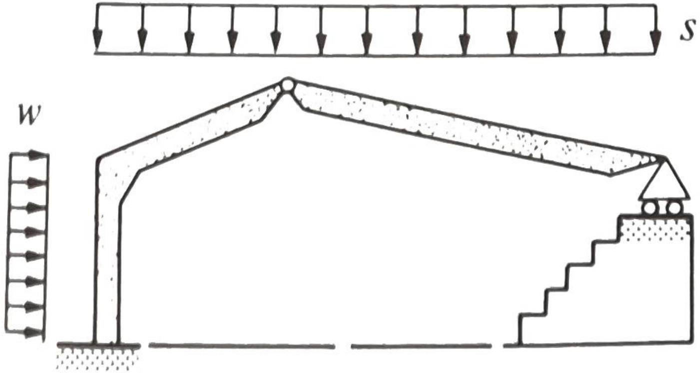
A votre tour!

Prêt pour un jeu? Connectez-vous à http://kahoot.com/



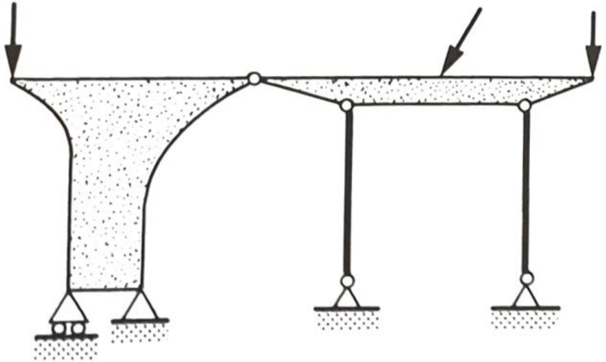
A votre tour!

Prêt pour un jeu? Connectez-vous à http://kahoot.com/



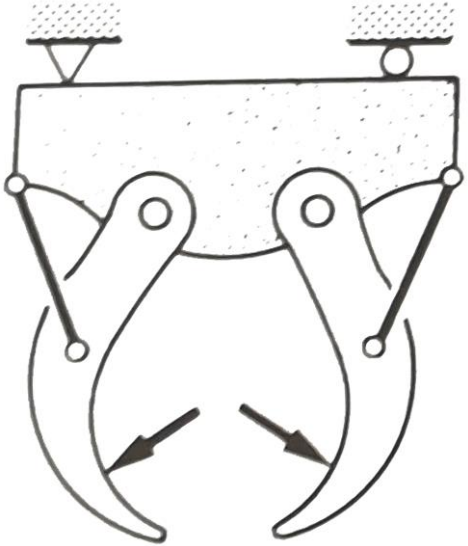
A votre tour!

Prêt pour un jeu? Connectez-vous à http://kahoot.com/



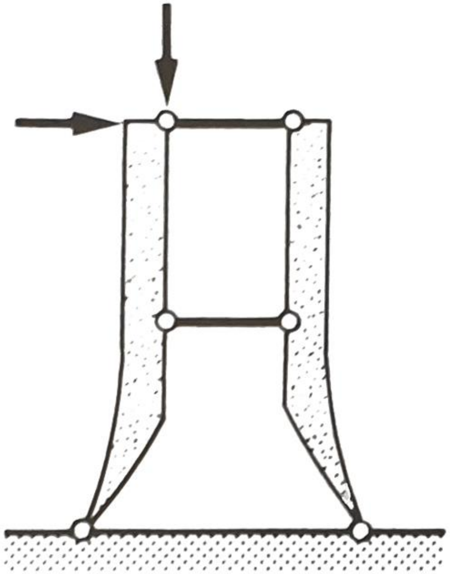
A votre tour!

Prêt pour un jeu? Connectez-vous à http://kahoot.com/



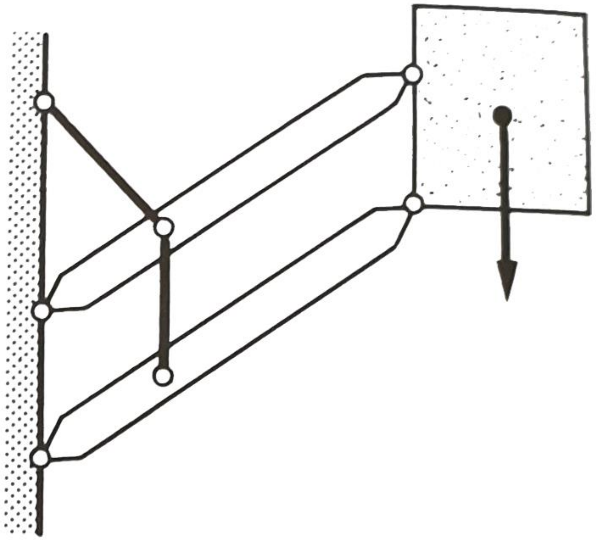
A votre tour!

Prêt pour un jeu? Connectez-vous à http://kahoot.com/



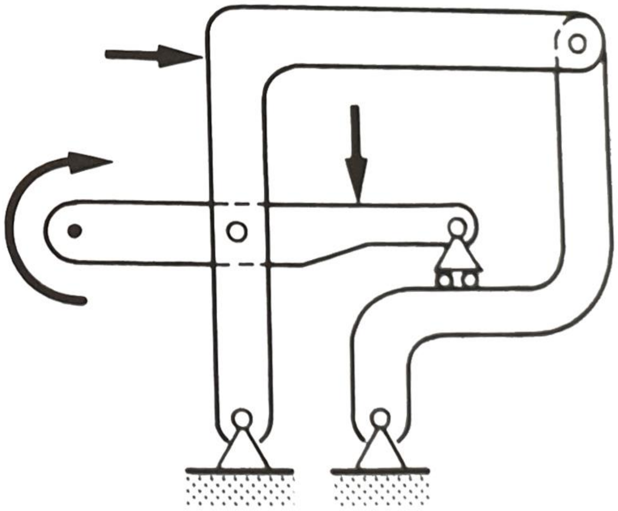
A votre tour!

Prêt pour un jeu? Connectez-vous à http://kahoot.com/



A votre tour!

Prêt pour un jeu? Connectez-vous à http://kahoot.com/



EPFL

Théorème des déplacements virtuels

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Ce qu'est le travail d'une force ou d'un moment
- Ce qu'est un déplacement virtuel
- Comment effectuer une coupure simple
- Comment utiliser le Théorème des Déplacements Virtuels pour calculer des forces de réaction ou de liaison
- Comment déterminer le degré d'hyperstaticité d'une structure

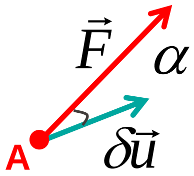
Contenu du cours

1. Travail d'une force et travail d'un moment
2. Théorème des déplacements virtuels
3. Coupure simple
   - Forces de réaction
   - Forces de liaison

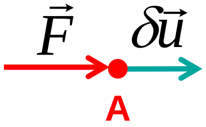
- Motivation pour étudier le théorème des déplacements virtuels
  - Très puissant pour l'analyse des structures composées
  - La base des éléments finis
  - La base des systèmes hyperstatiques (Statique II)

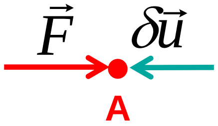
Travail d'une force $\overrightarrow{F}$

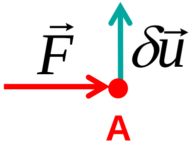
- Travail δW d'une force $\vec{F}$ dont le point d'application A se déplace de $\delta\vec{u}$
  - $\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{u}$
  - $\delta W = \vec{F} \cdot \delta u \cdot \cos(\alpha)$
  - $\delta W = F_x \cdot \delta u_x + F_y \cdot \delta u_y$



- Cas particuliers:





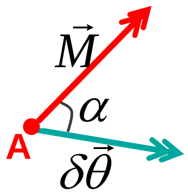


$\delta W =$ $\qquad$ $\delta W =$ $\qquad$ $\delta W =$

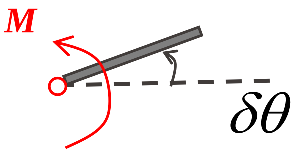
Prof. Katrin Beyer

Travail d'un moment $\vec{M}$

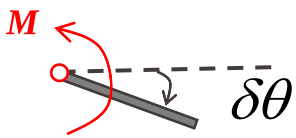
- Travail δW d'une force $\vec{M}$ dont le point d'application A se déplace de $\delta\vec{\theta}$
  - $\delta W = \vec{M} \cdot \delta\vec{\theta}$
  - $\delta W = M \cdot \delta\theta \cdot \cos(\alpha)$



- Cas plan:



$\delta W = \delta\theta \cdot M$

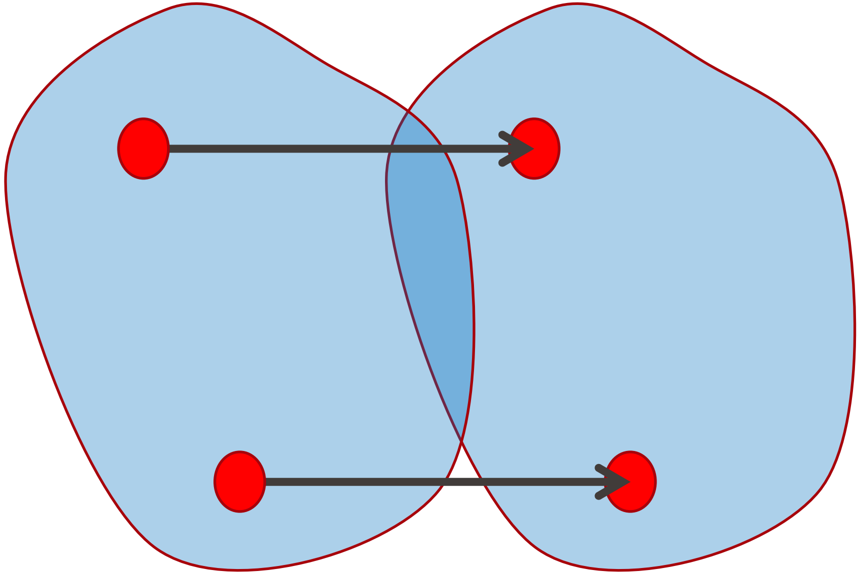


$\delta W = -\delta\theta \cdot M$

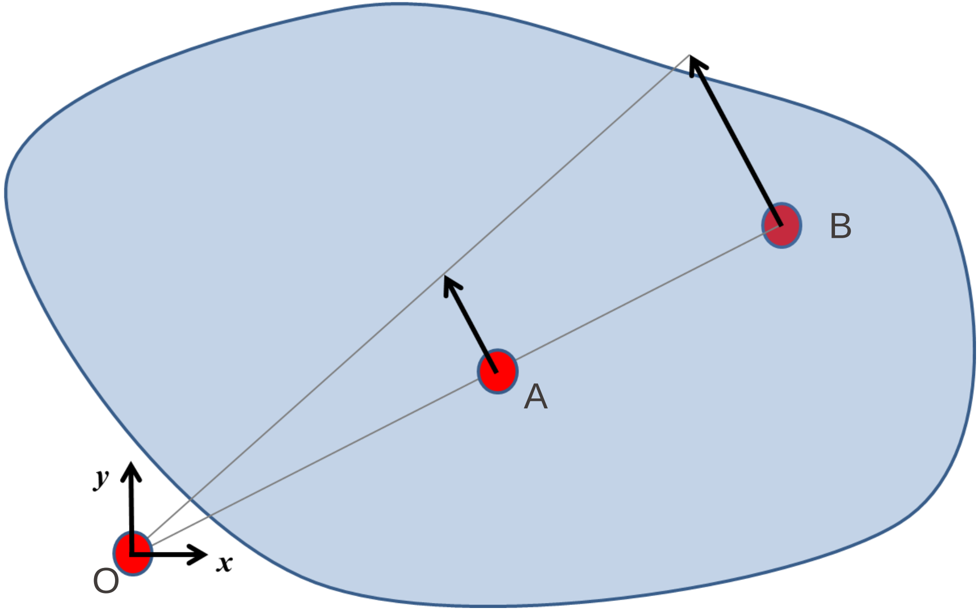
Déplacements virtuels des structures

- Petits déplacements virtuels des corps rigides
- «Virtuels» : déplacements hypothétiques qui respectent les appuis et les organes de liaison
- «Corps rigide» : La distance entre 2 points quelconques du corps reste constante
- «Petits déplacements» : linéarisation géométrique
  - $\cos(\delta\varphi) \sim 1$
  - $\sin(\delta\varphi) \sim \delta\varphi$

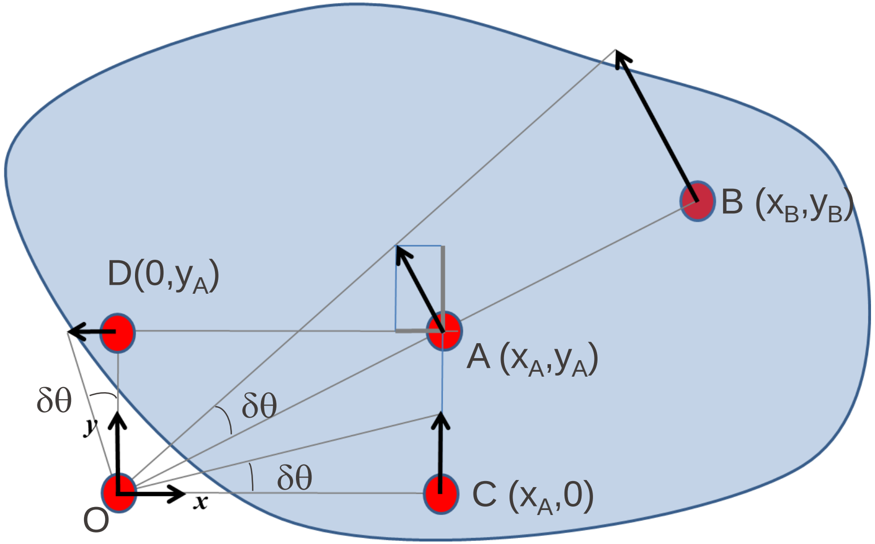
Translation d’un corps rigide



Rotation d'un corps rigide



Rotation d'un corps rigide



- C bouge de $x_A \cdot d\theta$ dans la direction y
- Pour que la distance entre C et A reste constante, A doit aussi faire une translation selon y de $x_A \cdot d\theta$
- Similaire pour la direction x (translation de A selon x: $-y_A \cdot d\theta$)

Théorème des déplacements virtuels

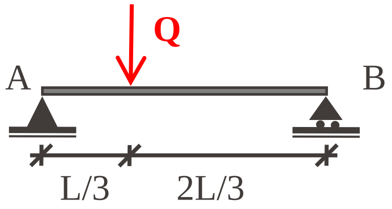
Si un solide est en équilibre, le travail virtuel est nul pour tout déplacement rigide: $\boldsymbol{\delta W = 0}$

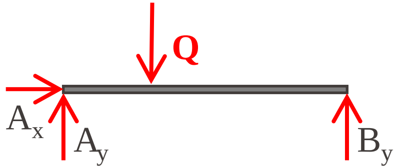
- Travail virtuel: somme des travaux de toutes les forces et moments agissant sur le solide
- Ce théorème n'est qu'une autre manière d'exprimer les 3 (plan) ou 6 (espace) équations d'équilibre

Exemple: Poutre simple

Calculer les 3 forces de réaction par le théorème des déplacements virtuels

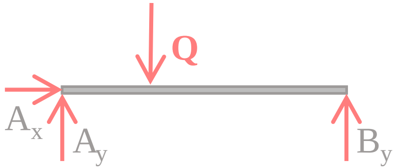
1. Couper toutes les liaisons & extérioriser les forces et moments
2. Introduire des déplacement δu, δv, $\delta\theta$ et formuler l'équilibre



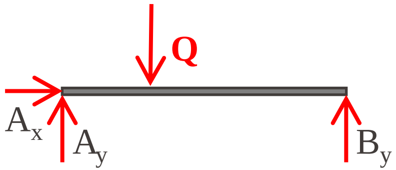


Corps libre avec toutes les forces de réaction extériorisées

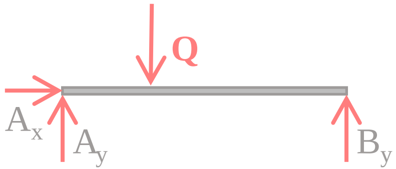
- $\boldsymbol{\delta u}$:



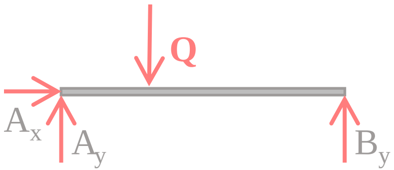
Exemple: Poutre simple (suite)



- δv:



- $\delta \theta$:



Coupure simple

Coupure simple = Suppression d'*une liaison* (un seul degré de liberté—translation ou rotation) qui fait naître un effort

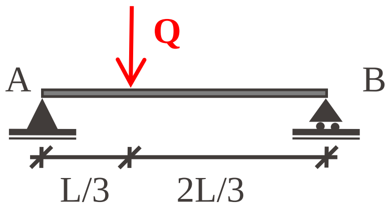
Idée: si on supprime seulement une liaison, il n'y a qu'une seule inconnue

Dans le cas d'une structure isostatique:

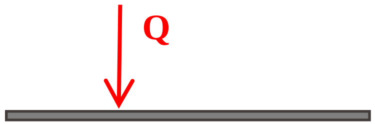
- Introduire la coupure simple qui extériorise la force qu'on veut calculer (force de réaction, force de liaison ou effort intérieur)
  - la structure est maintenant un mécanisme
- Trouver un champs de déplacement qui **respecte toutes les autres liaisons**
- Calculer cette force par le théorème des déplacements virtuels

Exemple: Poutre simple

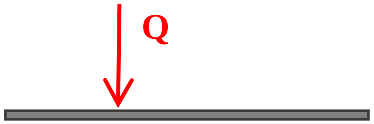
Calculer les 3 forces de réaction par des coupures simples et le théorème des déplacements virtuels



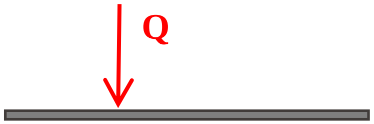
- B_y:



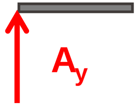
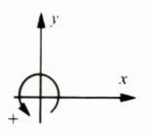
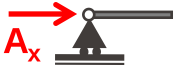
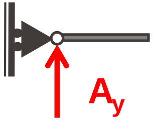
- A_y:



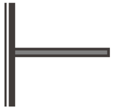
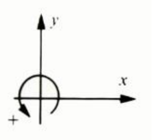
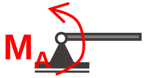
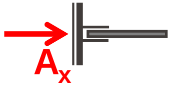
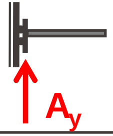
- A_x:



Exemples: Coupures simples relatives aux appuis

Appuis à rouleau 	Coupure simple supprime la liaison en y (trans. vert.)	
Articulation  	Coupure simple supprime la liaison en x (trans. horiz.)	
	Coupure simple supprime la liaison en y (trans. vert.)	

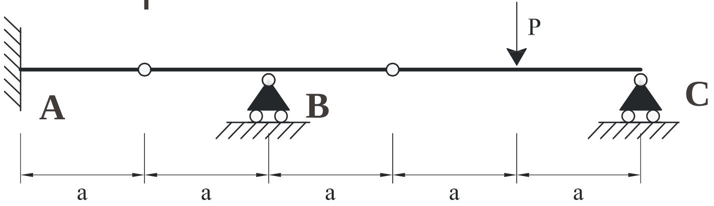
Exemples: Coupures simples relatives aux appuis (suite)

Encastrement  		
	Coupure simple supprime la liaison de rotation	
	Coupure simple supprime la liaison en x (transl. horiz.)	
	Coupure simple supprime la liaison en y (trans. vert.)	

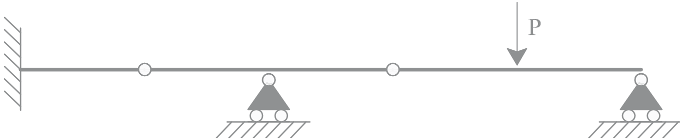
Exemple: Utiliser le TdV pour calculer les forces de réaction

Prof. Katrin Beyer

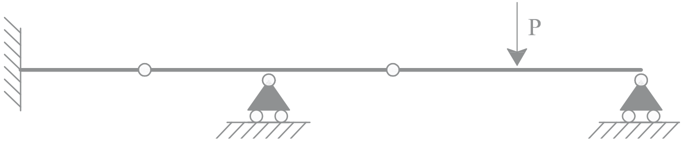
- Utiliser le Tdv pour calculer les forces de réaction C_y, A_y, B_y et M_A.



- C_y:

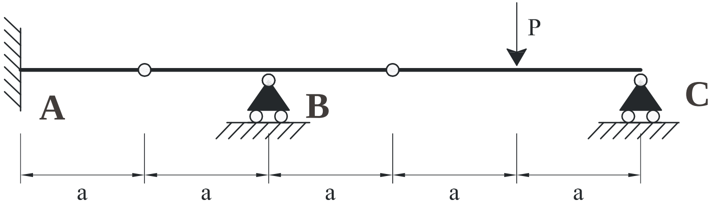


- A_y:

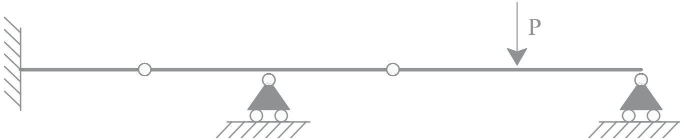


A votre tour!

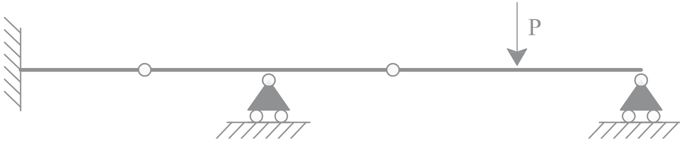
Utiliser le Tdv pour calculer les forces de réaction C_y, A_y, B_y et M_A.



- B_y:

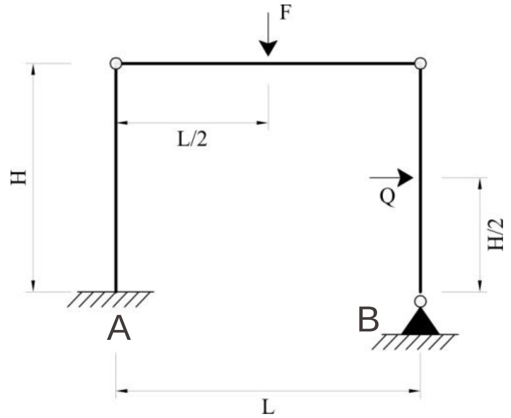


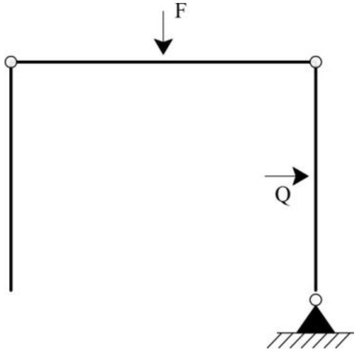
- M_A:



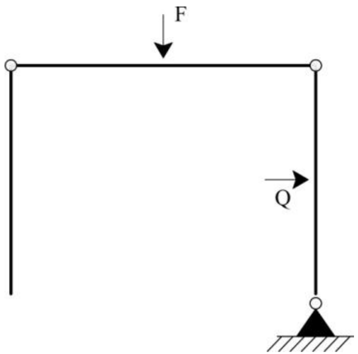
Exemple: Portique à 3 articulations

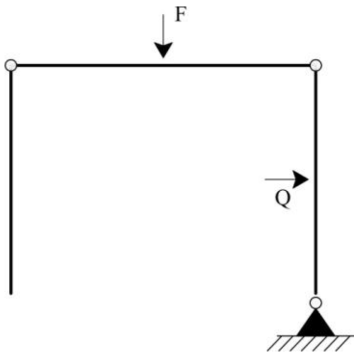
Calculer les réactions d’appuis en A: A_x, A_y, M_A (Ex. 11.9.4)





Exemple: Portique à 3 articulations (suite)



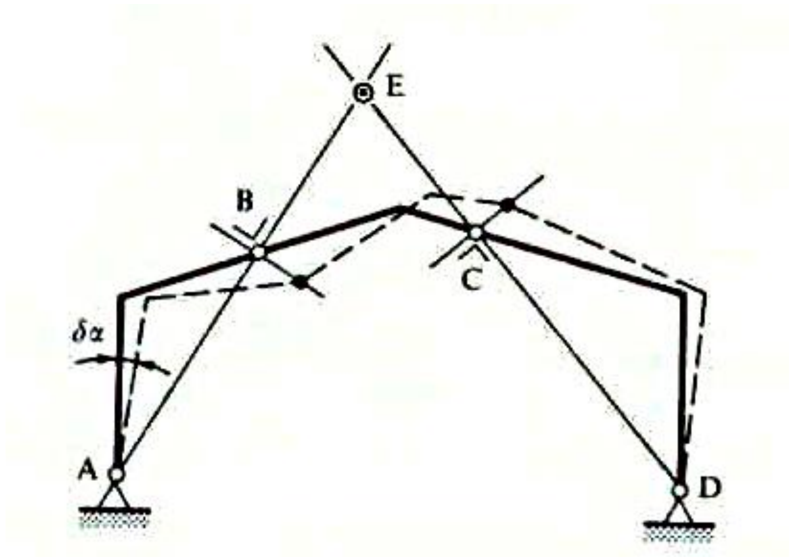


Déplacements virtuels

- Lorsqu’on coupe au moins une liaison à une structure isostatique, celle-ci se transforme en un mécanisme
- Les déplacements associés à ce mécanisme sont appelés **déplacement virtuels**
- Ils sont hypothétiques et très petits (respectent l’hypothèse de linéarisation géométrique)
- Les éléments structuraux ne se déforment pas
  - Le mouvement d’un mécanisme est un mouvement de corps rigides
  - Il n’a aucun rapport avec les déplacements réels de la structure

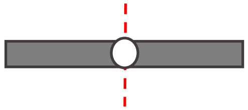
Centre instantané de rotation

Il s'agit du centre de rotation pour de très petits déplacements $d\theta$

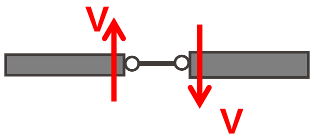


Coupure simple d'une articulation

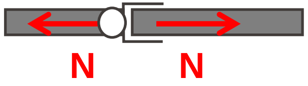
Coupure relative à l'axe suivant



Coupure pour faire apparaitre l'effort tranchant V



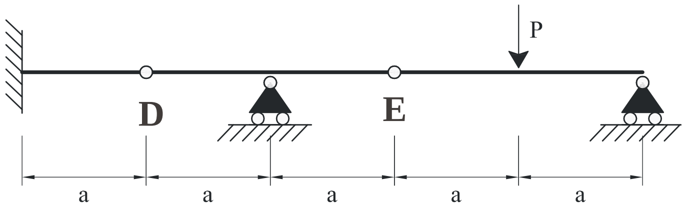
Coupure pour faire apparaitre l'effort normal N



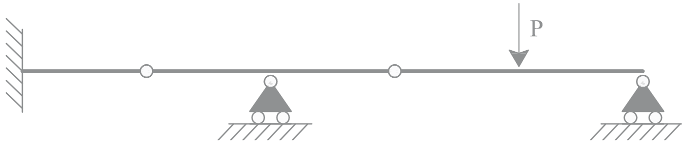
Coupure simple et naissance d'une force de liaison:

1. Introduire un degré de liberté en supprimant la liaison associée à ce degré
2. Extérioriser cet effort intérieur
3. Un effort intérieur apparait sur **chaque face** de la coupure (soit une **paire** d'efforts par coupure)

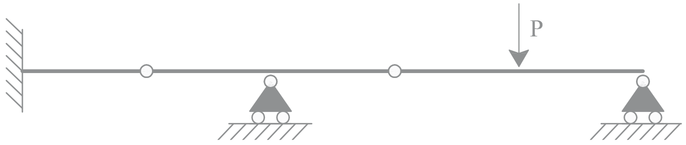
Exemple: Utiliser le TdV pour calculer les forces de liaison D_y et E_y.



- D_y:



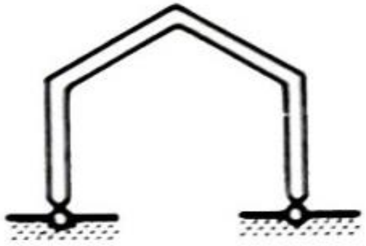
- E_y:

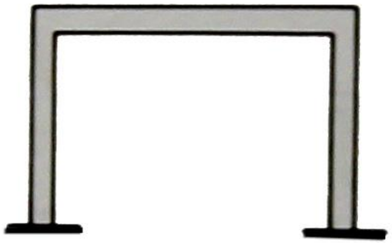


Degré d’hyperstaticité

- **Une structure immobile est hyperstatique, si on ne peut pas l’analyser complètement par les seules équations d’équilibre. Le nombre d’inconnus surabondants est appelé *le degré d’hyperstaticité.***
- Pour déterminer le **degré d’hyperstaticité** d’une structure, on introduit les coupures simples pour la transformer en une structure isostatique. Le nombre de coupures simples nécessaires est le degré d’hyperstaticité.
- Note: Il existe une infinité de manières de rendre isostatique une structure par l’introduction de coupures simples. On doit seulement faire attention à ne pas aboutir à un mécanisme.

Exemples





Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 11:** Coupure simple, hyperstaticité et théorème des déplacements virtuels (en entier)

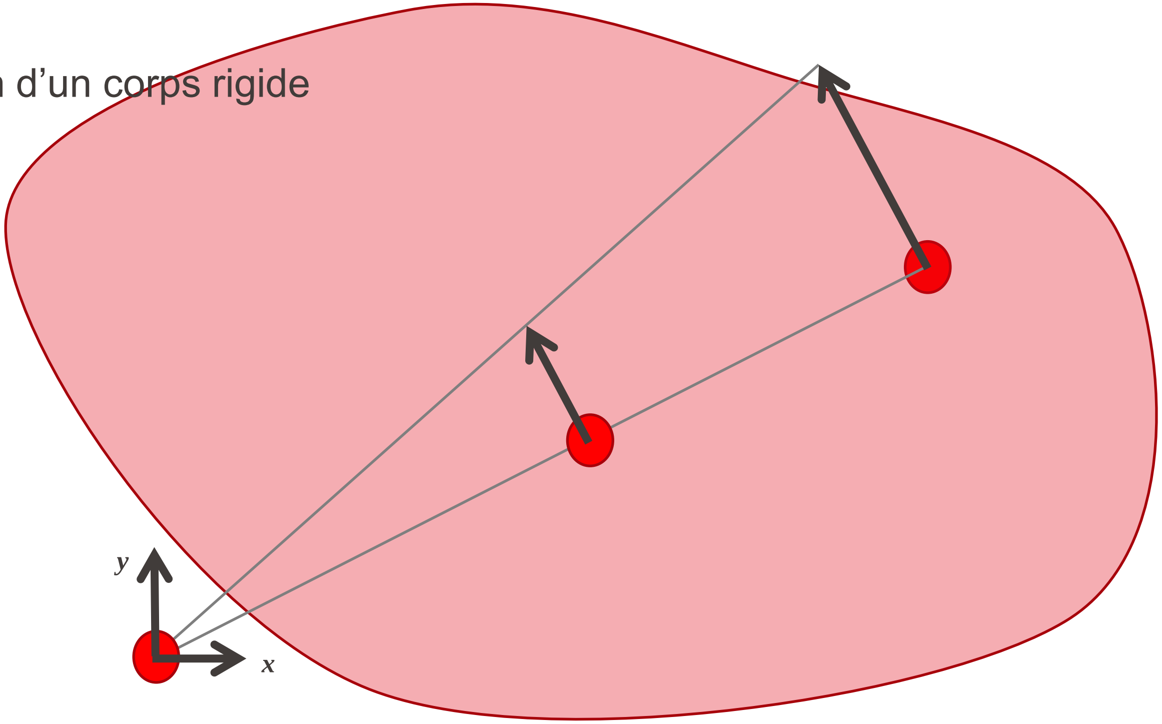
Références

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0
- [3] Centre instanté de rotation: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.
- [4] Exemples structures hyperstatiques: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.

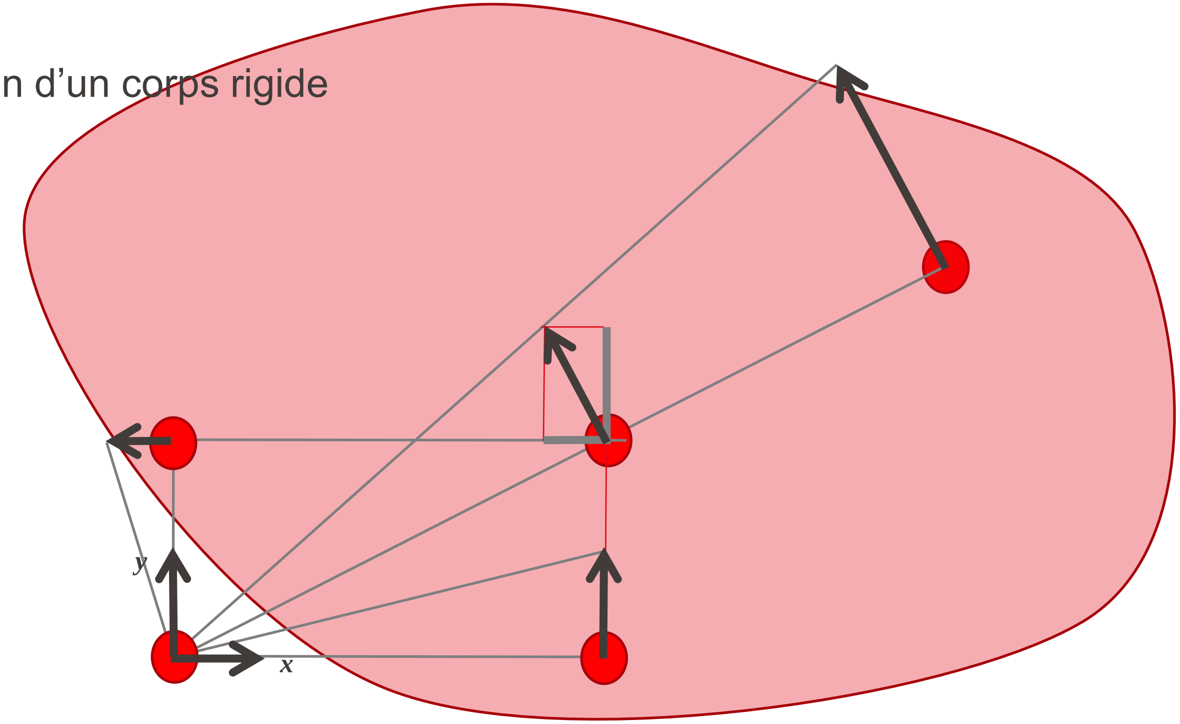
Théorème des déplacements virtuels

Rotation d’un corps rigide



Théorème des déplacements virtuels

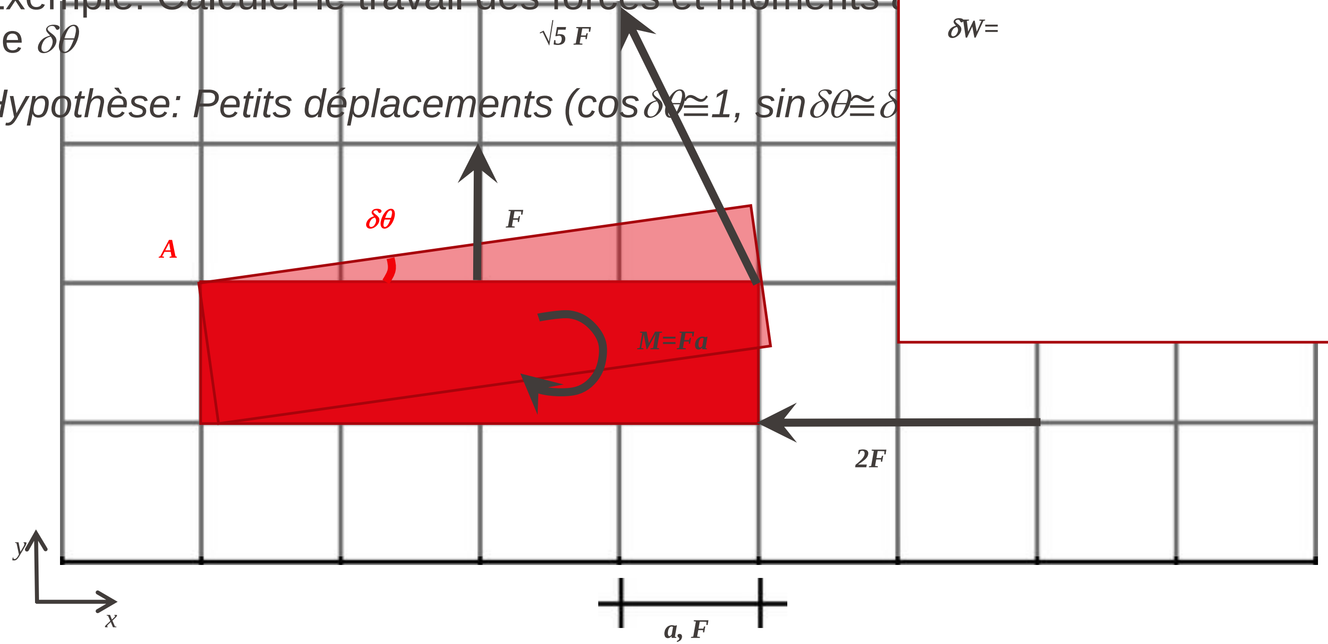
Rotation d'un corps rigide



Théorème des déplacements virtuels

Exemple: Calculer le travail des forces et moments a[...]ui tourne de $\delta\theta$

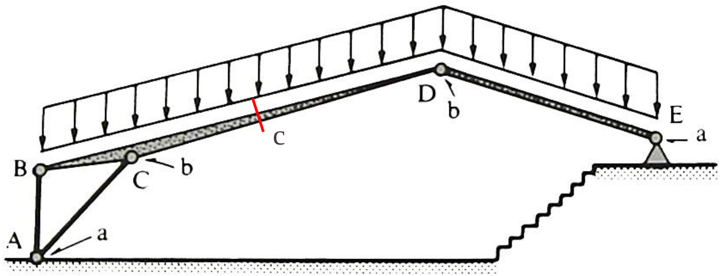
Hypothèse: Petits déplacements ($\cos\delta\theta \cong 1$, $\sin\delta\theta \cong \delta$[...]



$\delta W=$

Théorème des déplacements virtuels

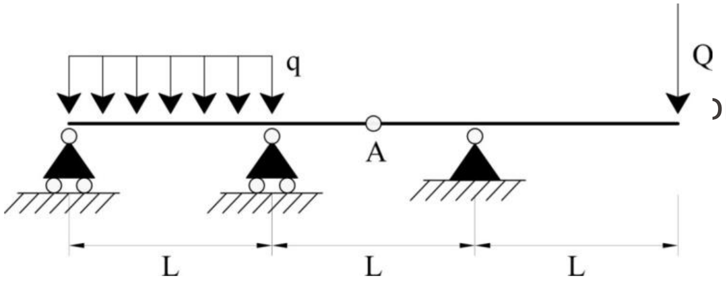
Liaison



Type de liaison	Nom de la liaison	Nom de la force qui naisse si on coupe
a) Liaison avec le sol de fondation	**Appui** (appareil d'appui)	**Réaction d'appui**
b) Liaison entre des éléments structuraux	**Liaison** (organe de liaison)	**Force de liaison**
c) Liaison par cohésion interne de la matière, selon la nature physique de l'élément structural	**Liaison interne**	**Effort intérieur** N: barres, câbles NVMT: Poutres

Théorème des déplacements virtuels

Exemple: Calculer



on A

Contrôl de connaissance 1

- Email avec toutes les informations suit
- Facultative
- Mardi 28.3.2018
- Heures: 10:30-11:30
- Salles: voir email
- Sujets: tous aspects discutés pendant les premiers 5 semaines du cours
- Livre fermé;
- Permis: “formulaire”: une page manuscrite

Treillis et Isostaticité des structures composées

Statique I

Prof. Katrin Beyer

EPFL

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Contrôle de connaissance 1

- Email avec toutes les informations suit
- Facultatif, ne compte pas pour la note finale
- Mardi 5.4.2022
- Horaires: 10:15-11:15
- Sujets: tous aspects discutés pendant les 6 premières semaines du cours
- Livre fermé
- Permis: formulaire (une page manuscrite)

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

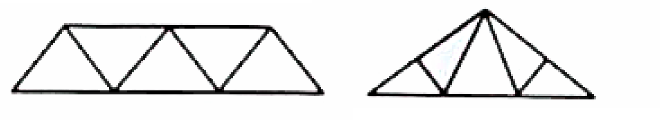
- Comment sont appelées les différentes barres d'un treillis
- Comment déterminer si un treillis est isostatique
- Comment calculer les efforts dans un treillis par différentes méthodes
- Comment identifier les barres avec effort nul rapidement
- Comment déterminer si une structure composée est isostatique

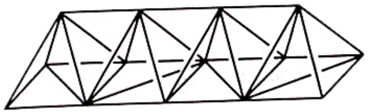
Contenu du cours

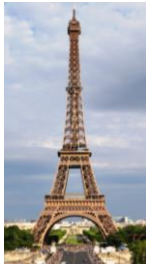
1. Définition et schéma statique d’un treillis
2. Isostaticité des treillis
3. Méthodes d’analyse
   - Equilibre des nœuds
   - Equilibre d’un fragment de treillis
   - Théorème des déplacements virtuels

Définition du treillis

- Ensemble de barres
- Liées par leurs articulations
- Formant une structure stable (plane ou spatiale)
  - Treillis plans (2D): les charges et la structure sont comprises dans un plan
  - Treillis spatiaux (3D)







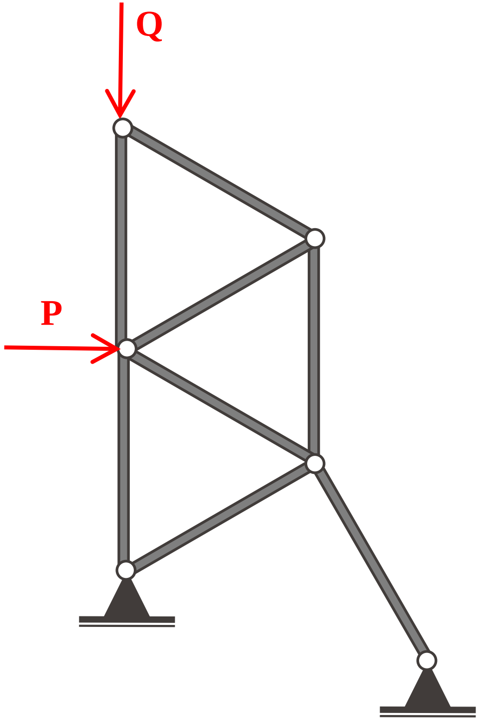
- Usage répandu des treillis:
  - Matériaux: acier, aluminium, bois
  - Construction légère et rationnelle (préfabrication)

Schéma statique du treillis

- **Nœuds:** articulations parfaites (pas de moment, rotation libre)
- **Barres:** axes concourants aux nœuds (pas d'excentricités!)
- **Charges:** seulement aux nœuds (puisque élément «barre»)

- Les barres ne transmettent qu'un effort axial (traction ou compression)

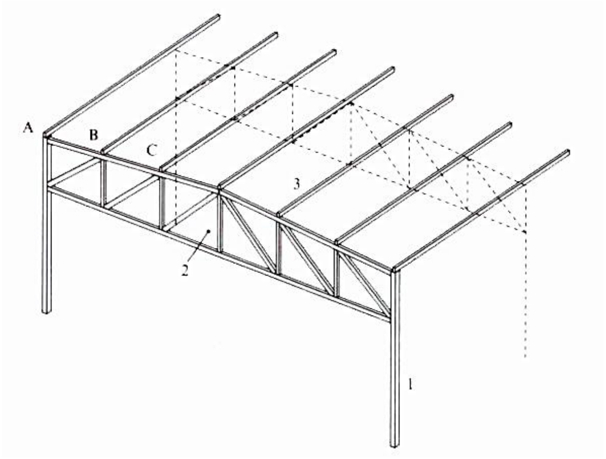
- Modélisation du poids propre:
  - Le poids propre de chaque barre est représenté par deux forces égales aux articulations de la barre
  - Le poids propre n'est pas négligeable mais l'effet local sur la barre est négligeable

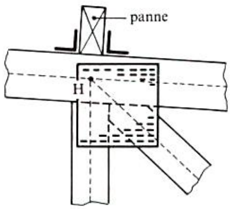


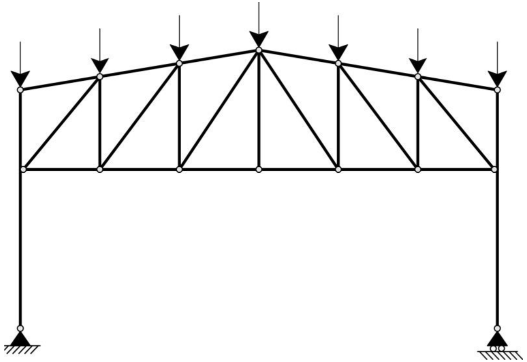
La réalité

- **Nœuds:** souvent quasi-rigides
- **Barres:** axes essentiellement concourants
- **Charges:** essentiellement aux nœuds

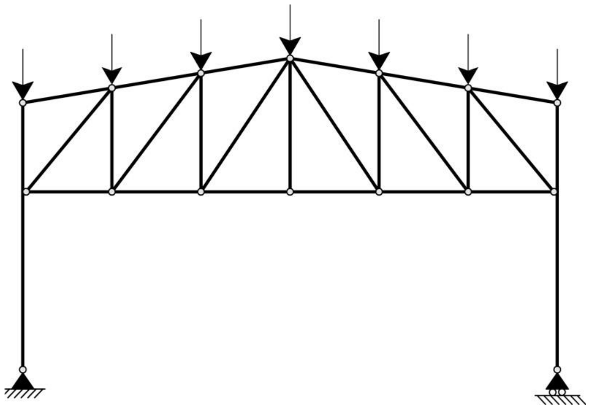
→ Si les nœuds ne sont pas trop encombrants ni les barres trop massives, le schéma statique du treillis est ok.

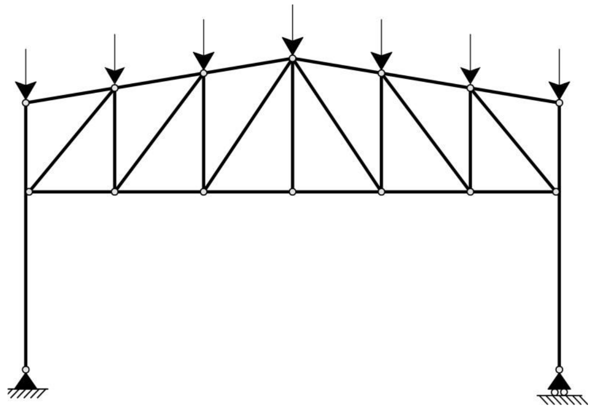




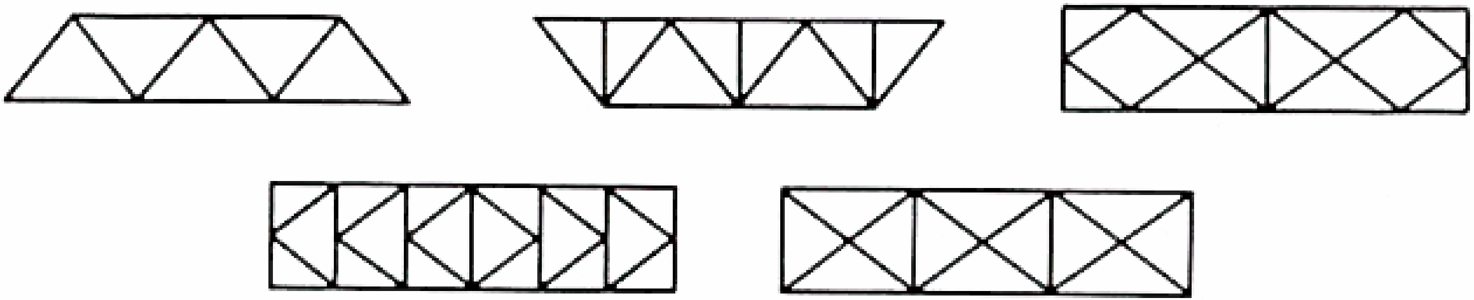


Attention à la position des articulations!





Poutres en treillis



Différents types de barres d'une poutre en treillis:

- Membrure supérieure/inférieure (barres orientées dans la plus grande direction de la poutre en treillis)
- Diagonales (barres orientées obliquement à cette direction)
- Montants (barres orientées orthogonalement à cette direction)

Exemple: Old Little Belt Bridge, Danemark (1935)

Isostaticité des treillis

1. Critère nécessaire (mais pas suffisant!)
   - b: nombre de barres
   - r: nombre de réactions
   - n: nombre de nœuds

Treillis plans (2D)

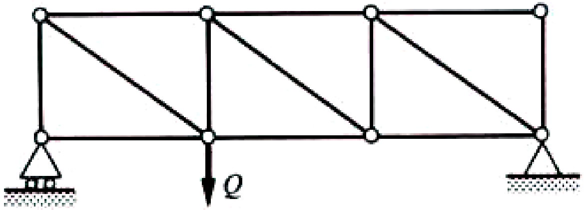
$$b + r = 2n$$

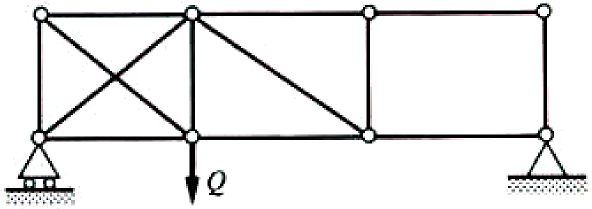
Treillis spatiaux (3D)

$$b + r = 3n$$

2. En plus, il faut vérifier que la structure **n'est pas un mécanisme**

Exemple: isostaticité des treillis





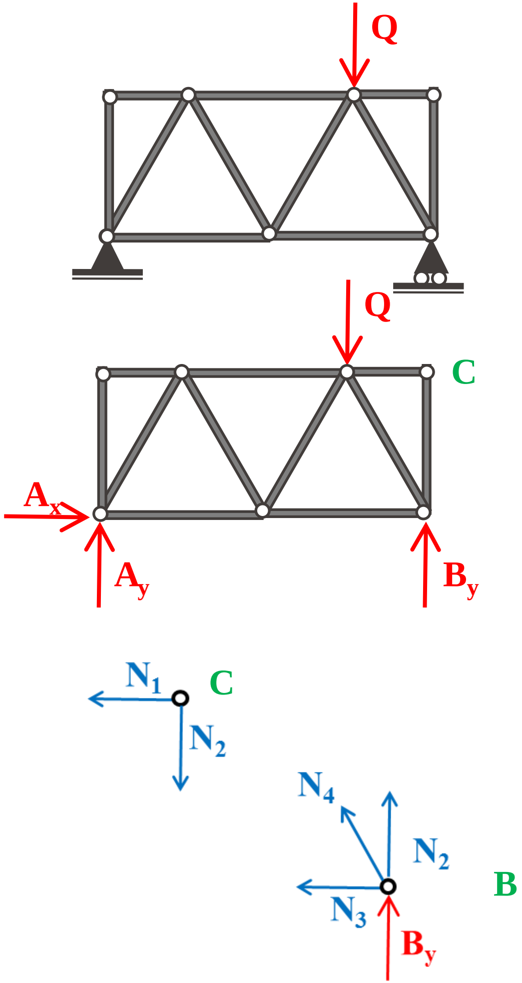
Méthodes pour calculer les efforts axiales dans les barres des treillis plans isostatiques

3 méthodes:

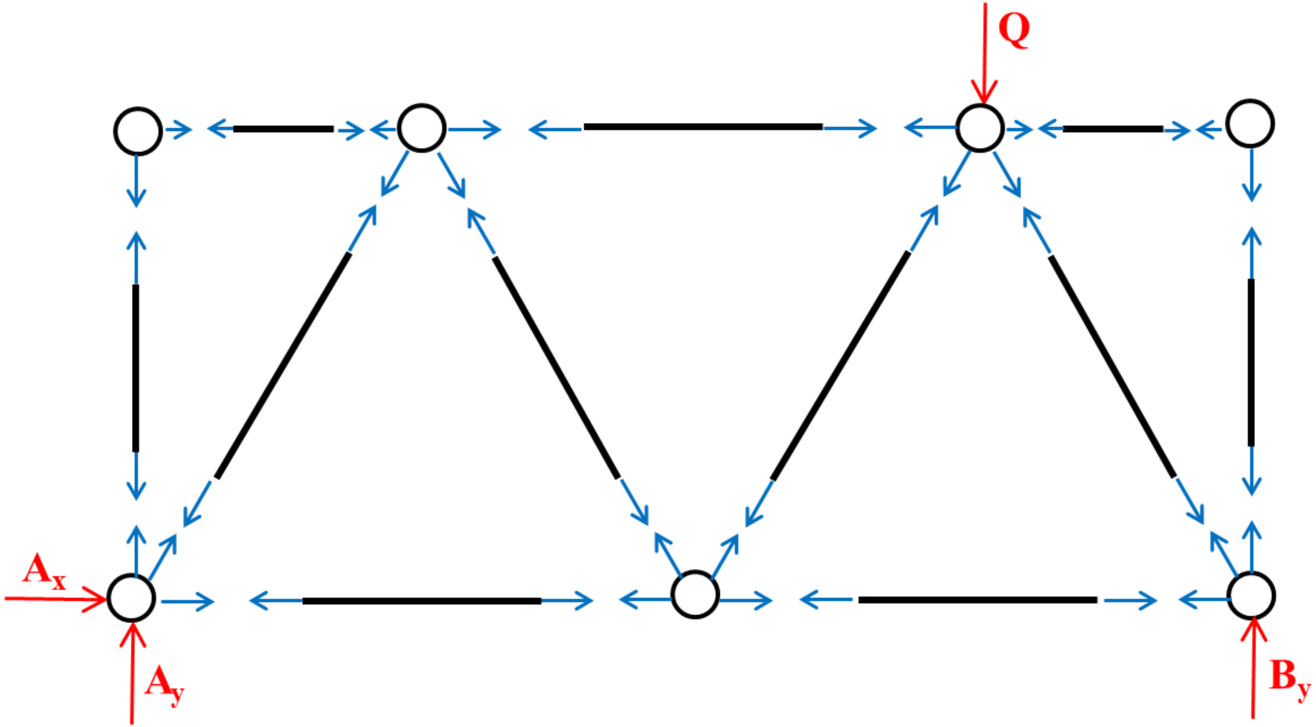
- Equilibre des nœuds
- Equilibre d'un fragment de treillis
- Théorème des déplacements virtuels

Equilibre des nœuds (Cas 2D)

1. Calculer les réactions d'appuis
2. Commencer par un nœud où ne sont connectées que 2 barres (« nœud simple »)
3. Isoler les nœuds en coupant les barres
4. **Extérioriser les efforts normaux de ces barres**
5. Ecrire les équations d'équilibre pour ce nœud
   - $\sum F_{x,noeud} = 0$
   - $\sum F_{y,noeud} = 0$
6. Continuer par un nœud avec seulement 2 inconnues



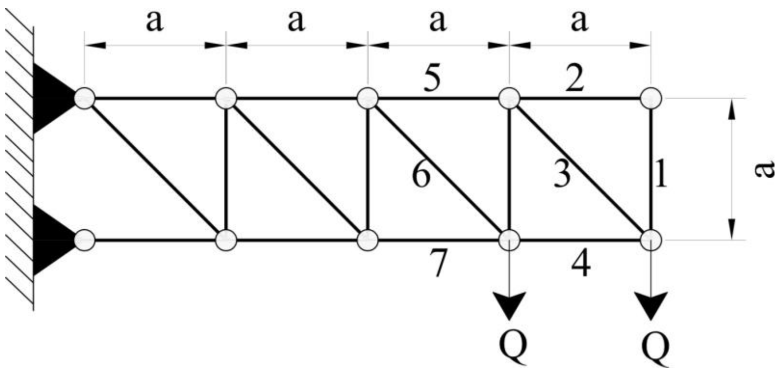
Equilibre des nœuds



Convention de signes pour l'effort normal:

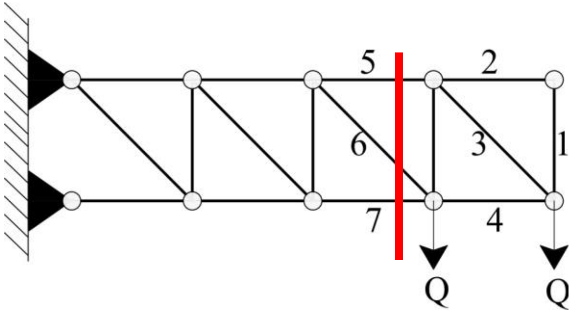
- Traction: +
- Compression: -

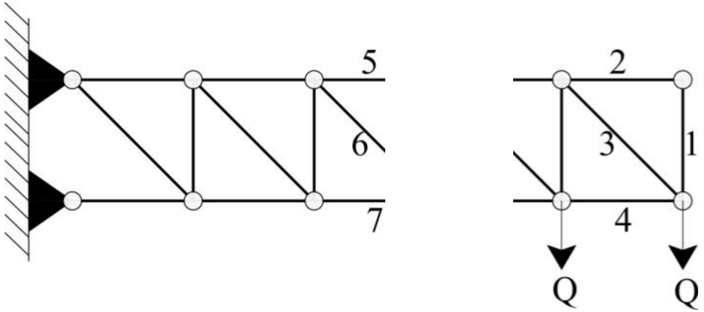
Exemple: Calculer les efforts normaux dans les barres 1 à 5 et 8 par l'équilibre du nœud



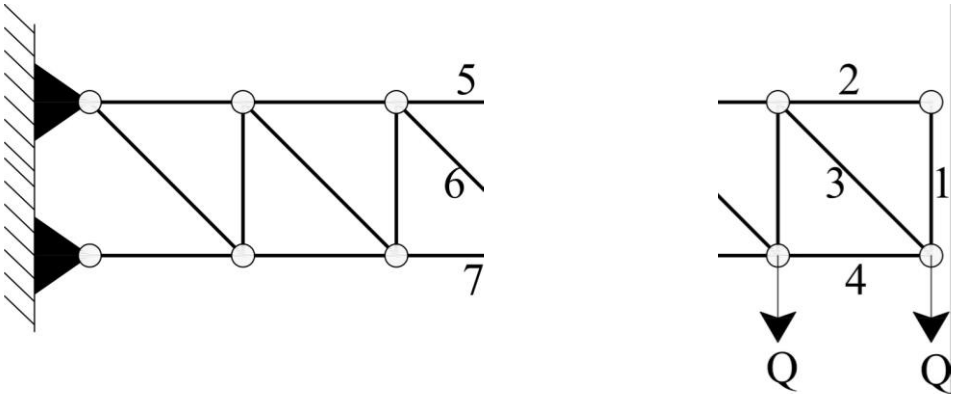
Equilibre d'un fragment d'un treillis

- Couper les treilles en deux fragments en coupant les barres dont les efforts normaux sont recherchés
- Formuler les équations d'équilibre pour un des deux fragments
- Coupe idéale: coupure de deux ou trois barres





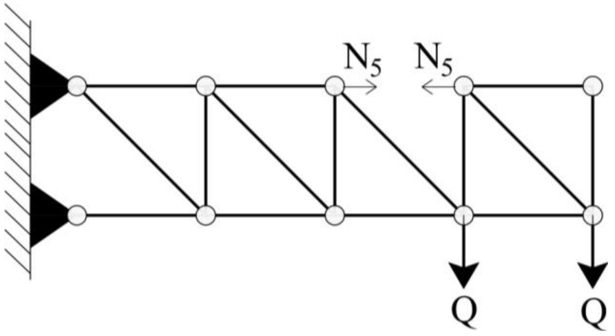
Exemple: Calculer les efforts normaux dans les barres 5 à 7 par l'équilibre d'un fragment de treillis



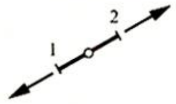
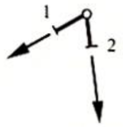
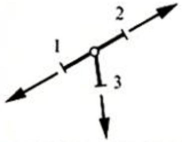
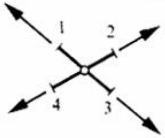
Théorème des déplacements virtuels

- Coupure simple d’une barre, extérioriser l’effort normal
- Trouver un champ de déplacement virtuel qui respecte toutes les autres liaisons
- Calculer l’effort axial par le TdV

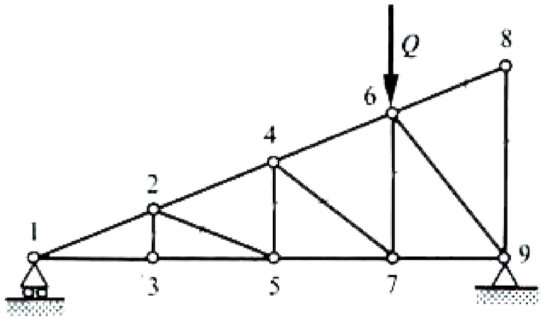
Exemple: Calculer l’effort normal de la barre 5



Quelques nœuds particuliers

Géométrie	 Barres alignées		 Barres 1 et 2 alignées	 Barres alignées deux à deux
Propriété	$N_1 = N_2$	$N_1 = 0$ $N_2 = 0$	$N_1 = N_2$ $N_3 = 0$	$N_1 = N_3$ $N_2 = N_4$

Avant de commencer à analyser un treillis, il faut identifier les barres avec un effort nul



Isostaticité des structures composées

Statique I

Prof. Katrin Beyer

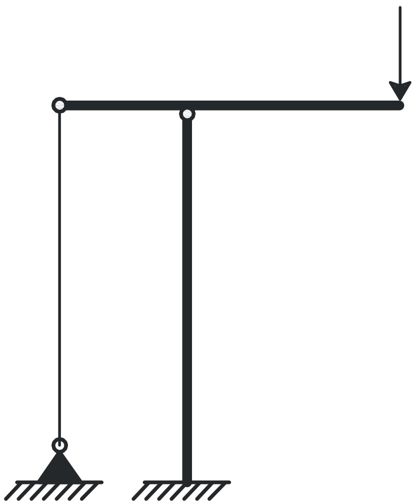
Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Isostaticité des structures composées

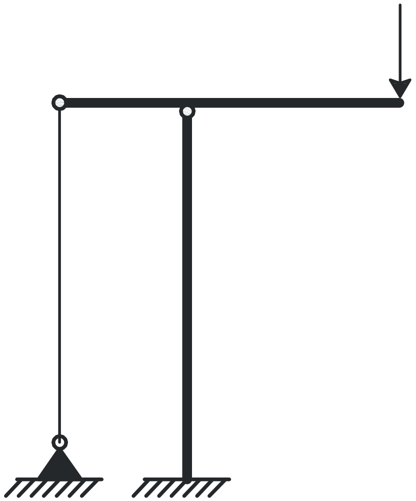
- Nombre d'équations indépendantes par élément isolé (cas 2D):
  - Poutre (ou solide 2D): 3
  - Barre: 1
  - Nœud: 2

- Conditions d'isostaticité:
  - Nombre d'inconnues = Nombre d'équations
  - La structure est stable/ne forme pas un mécanisme

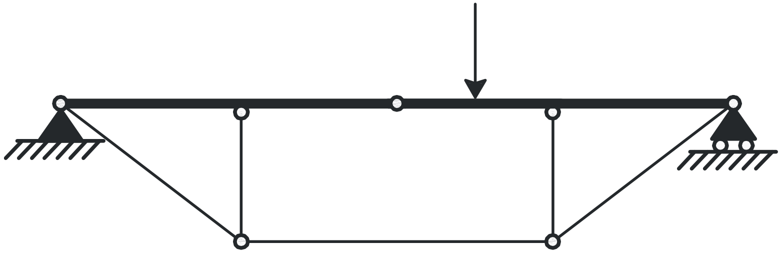
Exemple 1: Isostaticité des structures composées



Exemple 1: Isostaticité des structures composées (suite)

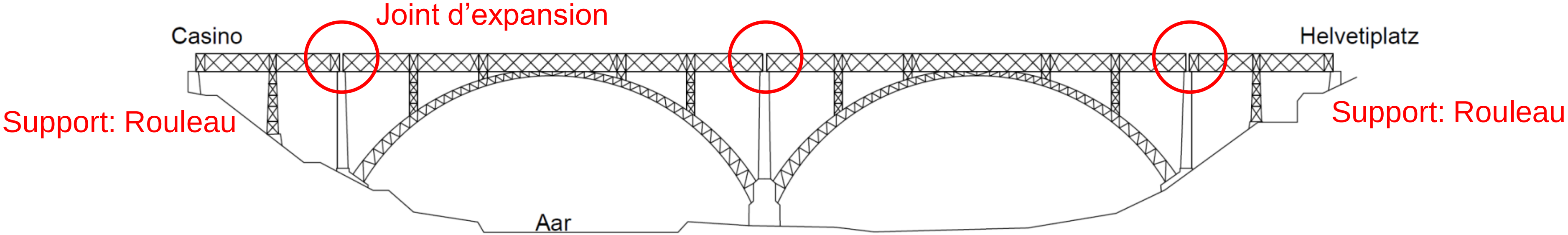


Exemple 2: Isostaticité des structures composées



Statique booklet
Kirchenfeldbrücke à Berne

Proposer un système statique pour ce pont et déterminer son dégrées d'hyperstaticité extérieur et intérieur. Modéliser les poutres en treillis comme poutres.



Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 7:** Treillis (en entier)

Références

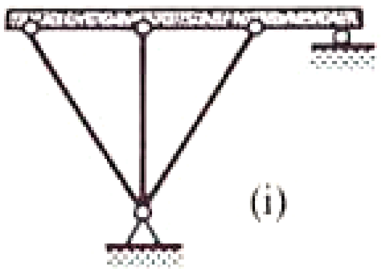
Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0
- [3] Tour Eiffel © Annish33, CC BY-SA 3.0
- [4] Ferme avec femes en treillis: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.
- [5] Old little belt bridge © Ævar Arnfjörð Bjarmason, CC BY-SA 3.0
- [6] Noeuds de treillis particuliers: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.
- [7] Structure composée avec poutres en treillis: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.
- [8] Illustration ex. 8.10.1 (i): Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.
- [9] https://de.wikipedia.org/wiki/Kirchenfeldbrücke

Isostaticité des structures composées

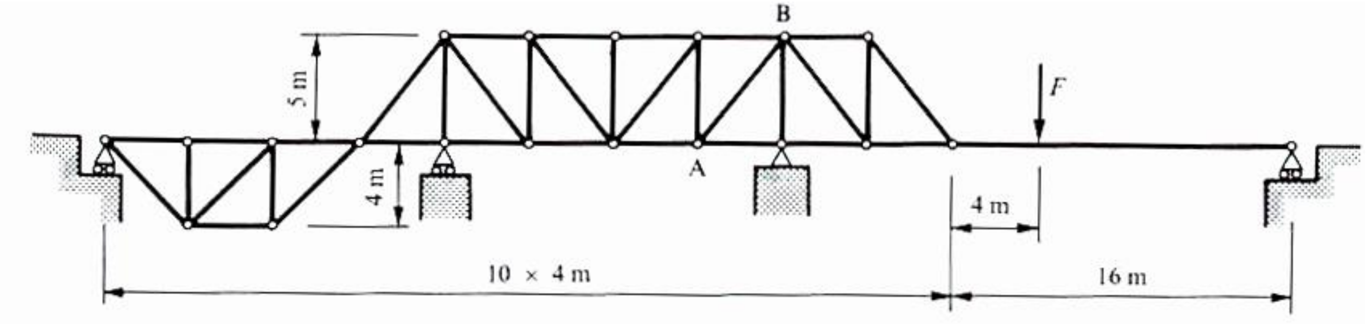
- Isostaticité **extérieure** = isostaticité par rapport aux appuis et liaisons
- Isostaticité **intérieure** = isostaticité par rapport aux poutres et barres
- Isostaticité **globale** = isostaticité extérieure et intérieure

Exemple (ex. 8.10.1 (i))



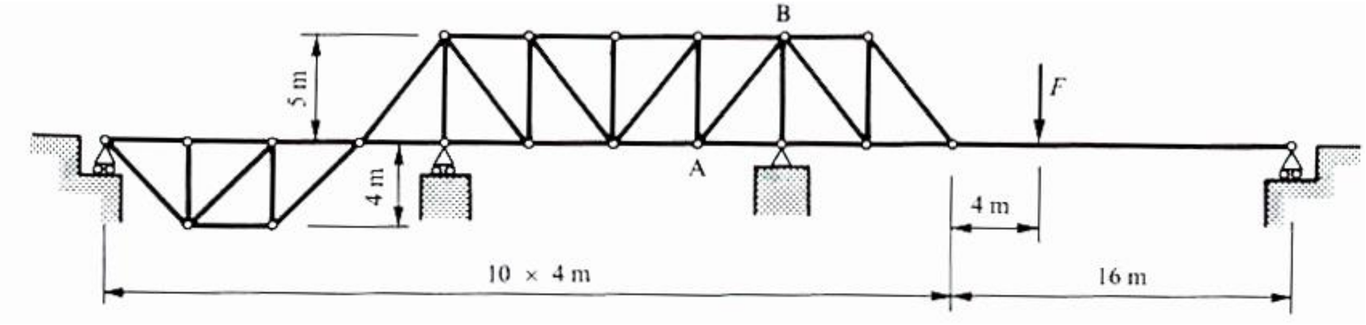
	Barres comptées comme éléments de structure	Barres comptées comme bielles d'appuis
Extérieurement (appuis)		
Intérieurement (poutre)		
Globalement		
Degré d'hyperstaticité (globalement)		

Exemple 3: Structures composées avec poutres en treillis



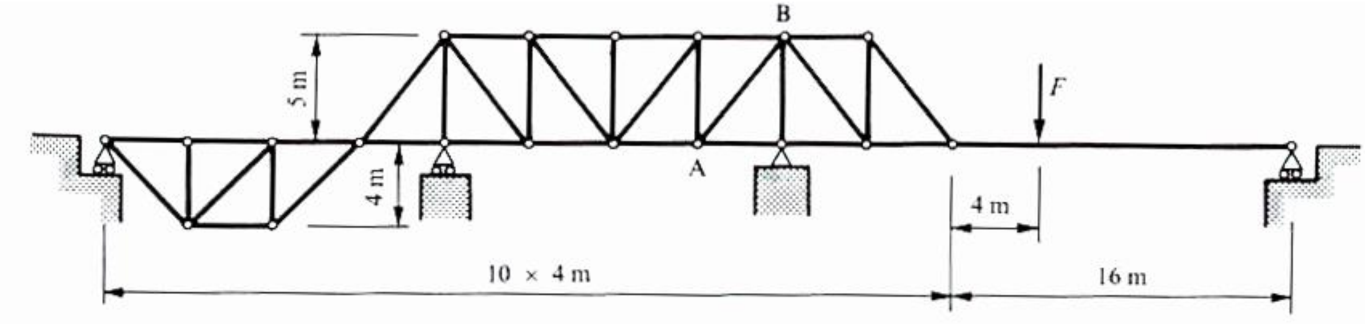
Faux:

Exemple 3: Structures composées avec poutres en treillis



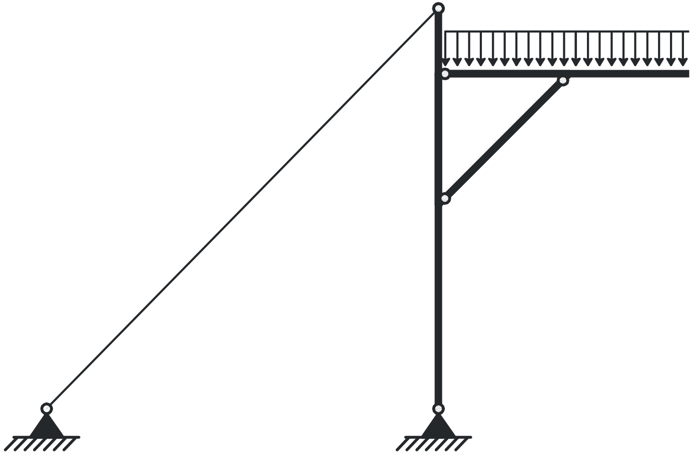
Isostaticité par rapport aux appuis et liaisons (isostaticité extérieure):

Exemple 3: Structures composées avec poutres en treillis



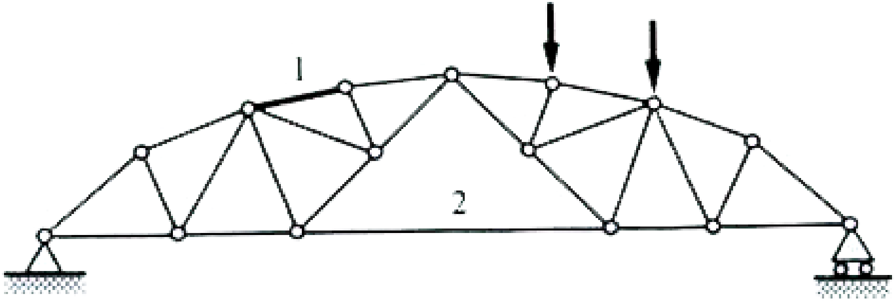
Isostaticité des poutres en treillis (isostaticité intérieure):

Exemple 3: Isostaticité des structures composées



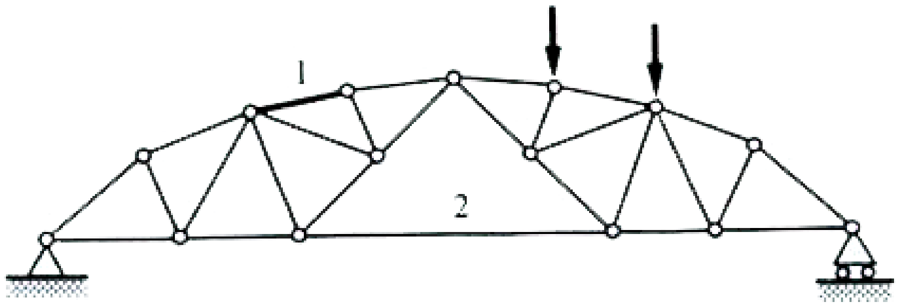
Exemple 4: Montre que la structure est isostatique Interprétation 1

Poutre en treillis

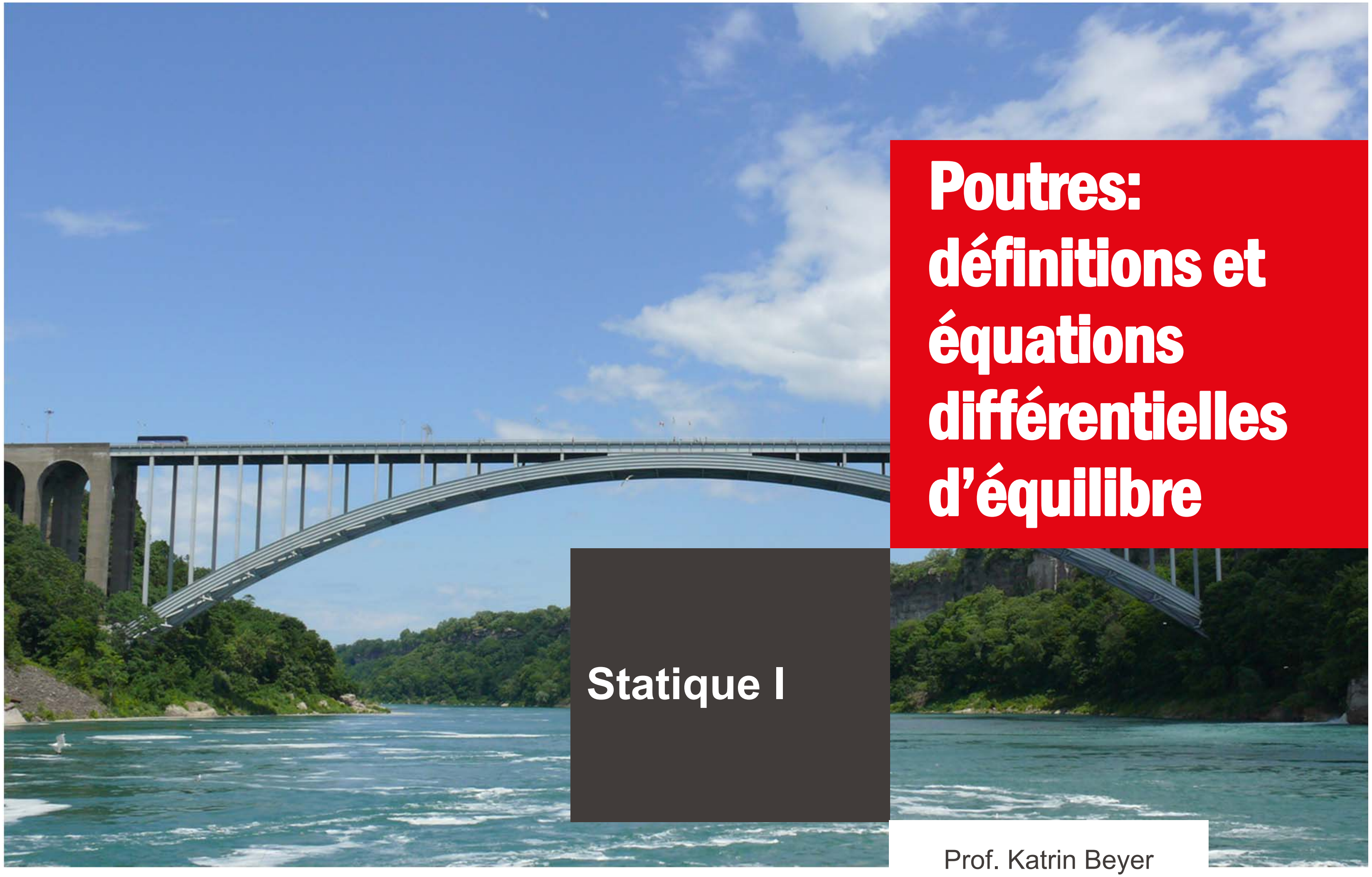


Exemple 4: Montre que la structure est isostatique Interprétation 2

Portique à trois articulations + tirant



EPFL



Poutres: définitions et équations différentielles d'équilibre

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Comment est définie la géométrie d’une poutre
- Comment déterminer l’isostaticité d’une structure composée de poutres
- Quelle est la définition des diagrammes des efforts intérieurs
- Quelles sont les équations différentielles qui relient les efforts intérieurs et les charges réparties
- Comment utiliser les équations différentielles pour calculer les diagrammes des efforts intérieurs

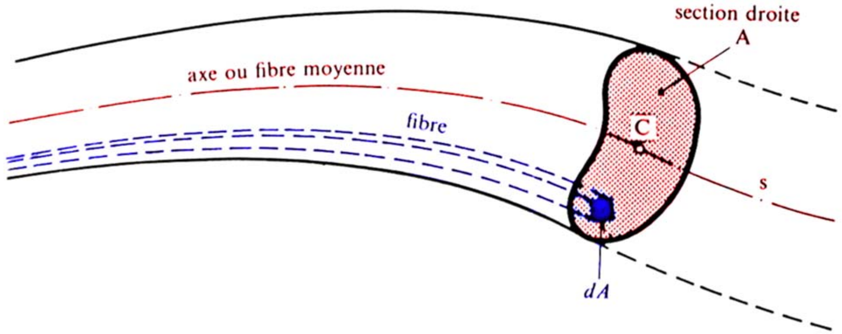
Contenu du cours

1. Définition de la poutre (géométrie, efforts intérieurs)
   - Poutre dans l'espace
   - Poutre à plan moyen
2. Structures formées de poutres (isostaticité extérieure et intérieure)
3. Diagrammes NVM par l'équilibre des fragments
4. Equations différentielles d'équilibre d'une poutre à plan moyen
5. Diagrammes NVM par les équations différentielles

Géométrie d'une poutre

- Un élément structurel allongé (2 dimensions plus petites que la $3^{\text{ième}}$)
- Sa géométrie est définie par
  - son axe ou «fibre moyenne» $\boldsymbol{s}$ (positions des centres C des sections A)
  - sa section droite $\boldsymbol{A}$ (figure plane normal à l'axe de la poutre)

- Note: La section droite A peut varier en grandeur et forme le long de l'axe s (variation lente et progressive)
- **Poutre à section constante:** La section droite A reste invariable.
- **Poutre prismatique:** La section droite A reste invariable et l'axe est droit

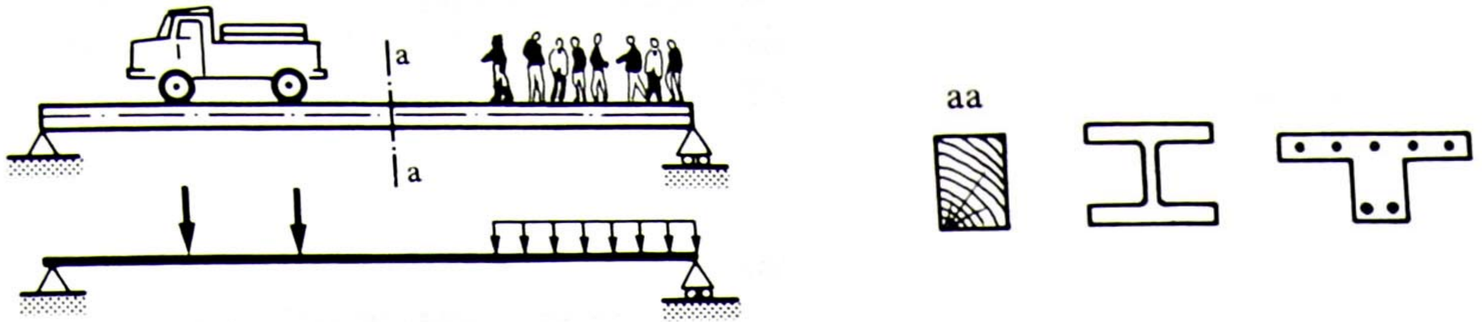


Système statique

Une poutre est complètement définie par

- la géométrie de son axe s
- une fonction qui décrit la section droite A (forme, dimensions, …) en fonction de s
  - Cette fonction est nécessaire seulement pour calculer les déformations → Statique II

→ Le schéma statique d'une poutre se réduit au dessin de l'axe de la poutre.



Efforts intérieurs d'une poutre

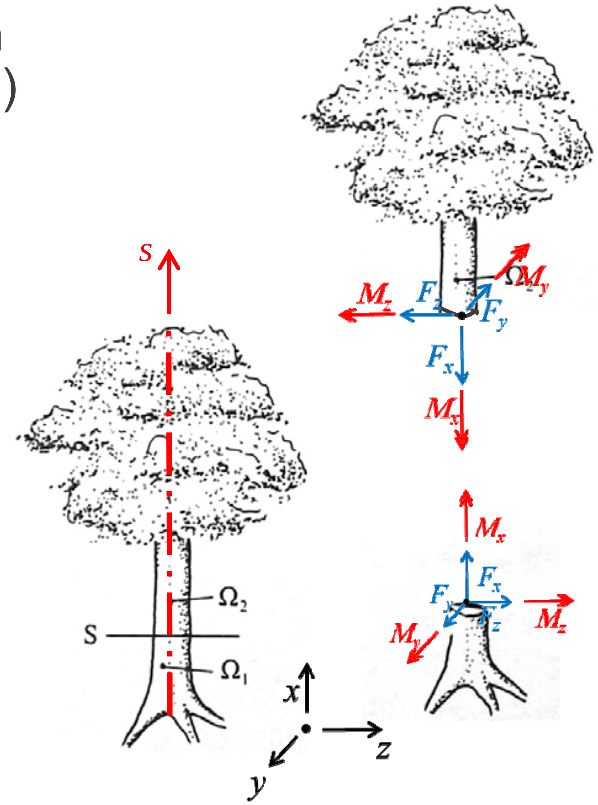
- Une poutre bloque **tous** les déplacements d'un fragment par rapport à l'autre (ex: tronc d'arbre)

- Grandeurs cinématique (dans l'espace):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta_x = 0, \quad \vartheta_y = 0, \quad \vartheta_z = 0$$

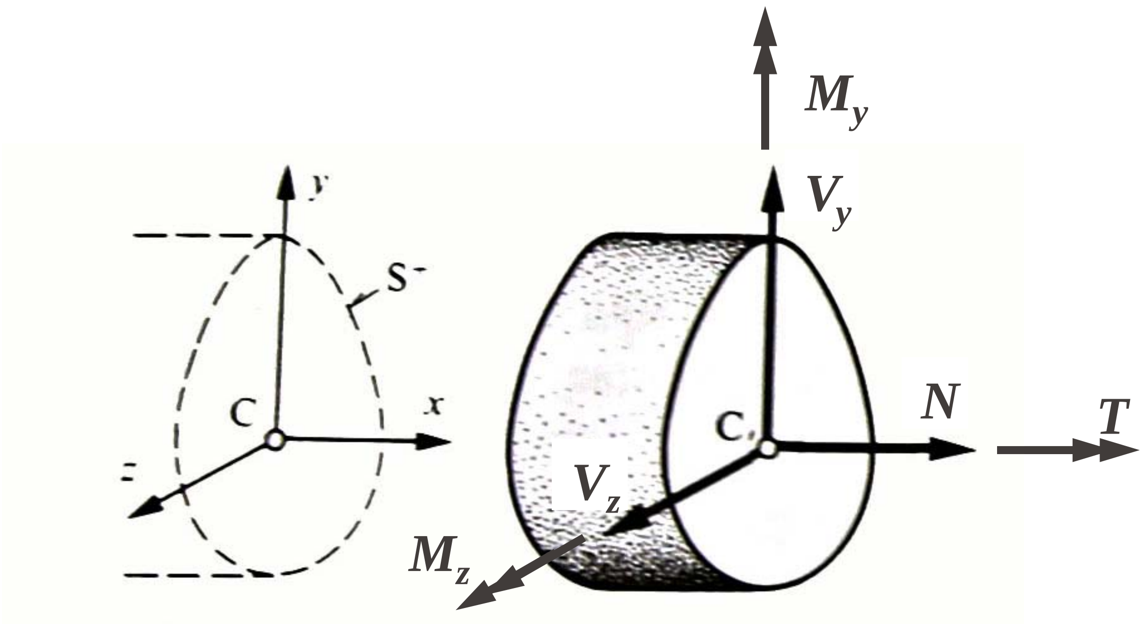
- Grandeurs statique (dans l'espace):

$$F_x \neq 0, \quad F_y \neq 0, \quad F_z \neq 0, \quad M_x \neq 0, \quad M_y \neq 0, \quad M_z \neq 0$$



Efforts intérieurs d'une poutre dans l'espace

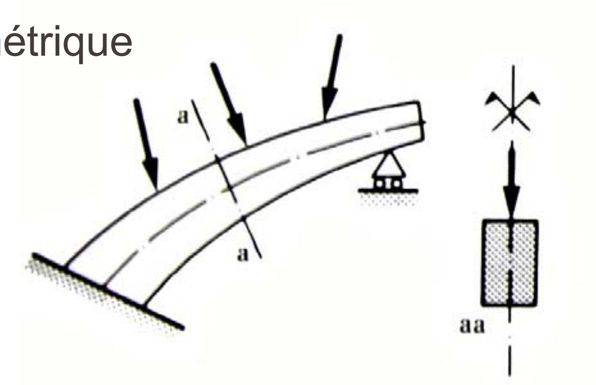
- F_x effort normal ou axial N
- F_y, F_z efforts tranchants V_y et V_z
- M_x moment de torsion T
- M_y, M_z moments de flexion M_y et M_z (moments fléchissant)



Efforts intérieurs d'une poutre à plan moyen

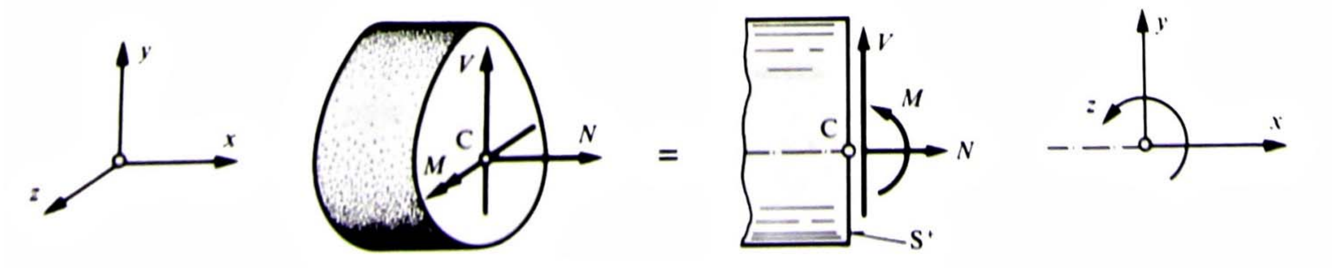
Une poutre est à plan moyen si:

- L'axe de la poutre est située dans un plan
- Les forces et couples sont situés dans le même plan
- La forme géométrique de la section droite est symétrique par rapport à ce plan



Les efforts intérieurs d'une poutre à plan moyen:

- Effort normal N (selon x)
- Effort tranchant V (selon y)
- Moments de flexion M (autour de z)

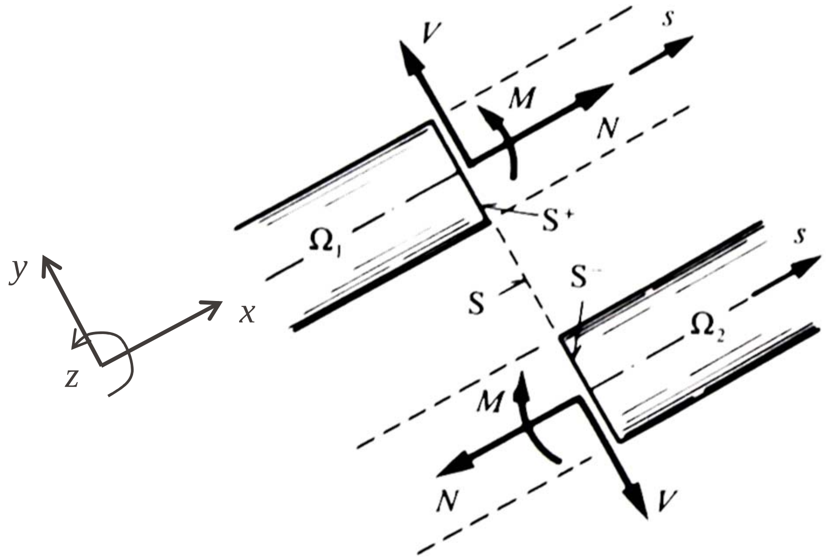


Signe des efforts intérieurs

Prof. Katrin Beyer

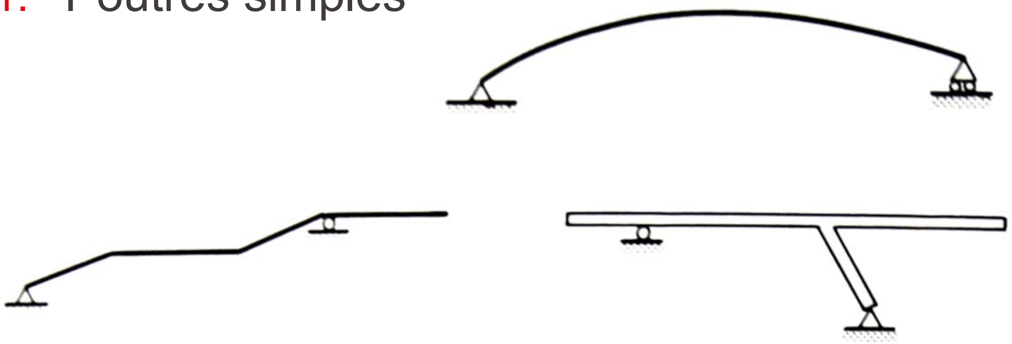
Les efforts intérieurs sont **positifs** s'ils agissent dans le même sens que les axes de coordonnées définis **sur la face positive** d'une section droite.

Une surface est dite positive (S^+) si la normale extérieure à la section droite a le même sens que s

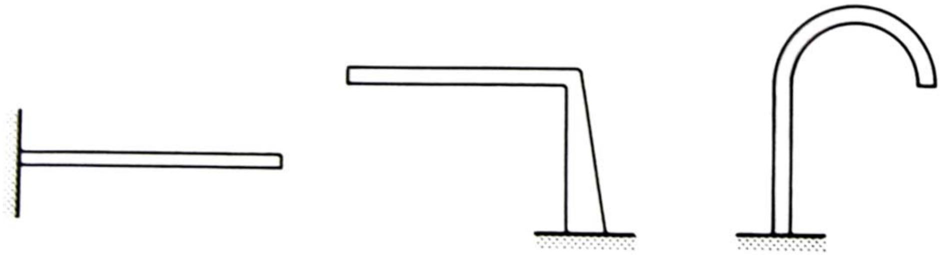


Différents types de poutres isostatiques

1. Poutres simples

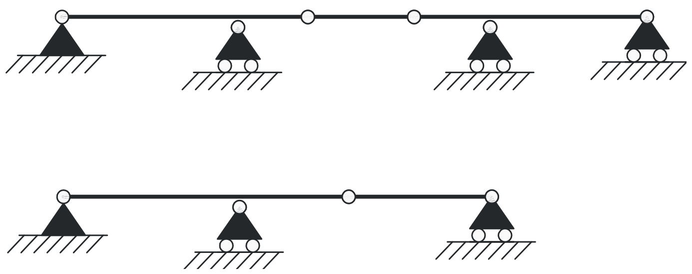


2. Poutres consoles

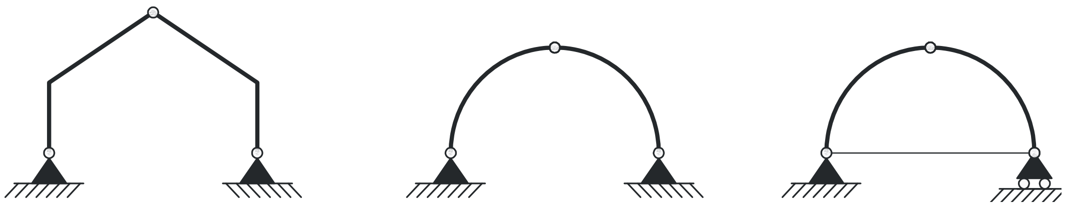


Différents types de poutres isostatiques (suite)

3. Poutres cantilevers ou poutres Gerber



4. Portiques à 3 articulations



Isostaticité

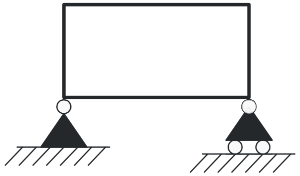
Isostaticité: on arrive à calculer les grandeurs statiques recherchées seulement avec les équations d'équilibre.

On distingue 3 types d'isostaticités:

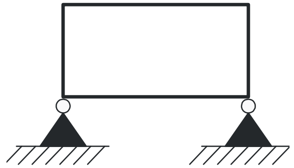
- Isostaticité **extérieure**: isostaticité des réactions d'appui et forces de liaison
- Isostaticité **intérieure**: isostaticité des efforts intérieurs dans tous les éléments et en toute section
- Isostaticité **globale**: isostaticité extérieure et intérieure (la structure est isostatique globalement si elle est isostatique extérieurement *et* intérieurement)

Tester l'isostaticité extérieure et intérieure

1. Isostaticité extérieure: tester les appuis et liaisons
   - Détacher des appuis, couper aux organes de liaison
   - Isoler les fragments. Pour chaque liaison coupée, introduire une force ou un moment sur les deux faces de coupe (principe action – réaction)



Isostatique



Hyperstatique

2. Isostaticité intérieure

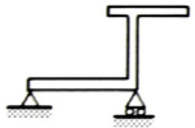
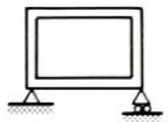
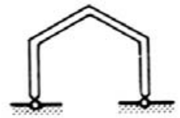
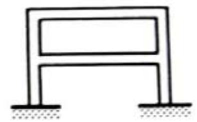
   Après avoir coupé et disloqué la structure à tous les appuis et organes de liaison, une poutre est isostatique intérieurement, si une coupe produit toujours deux fragments séparés (3 inconnus dans le plan, 6 dans l'espace).

Isostatique

Hyperstatique

A votre tour!

Est-ce que les structures planes en poutres suivantes sont isostatiques ou hyperstatiques intérieurement et extérieurement? Si la structure est hyperstatique, déterminer aussi le degré d'hyperstaticité.

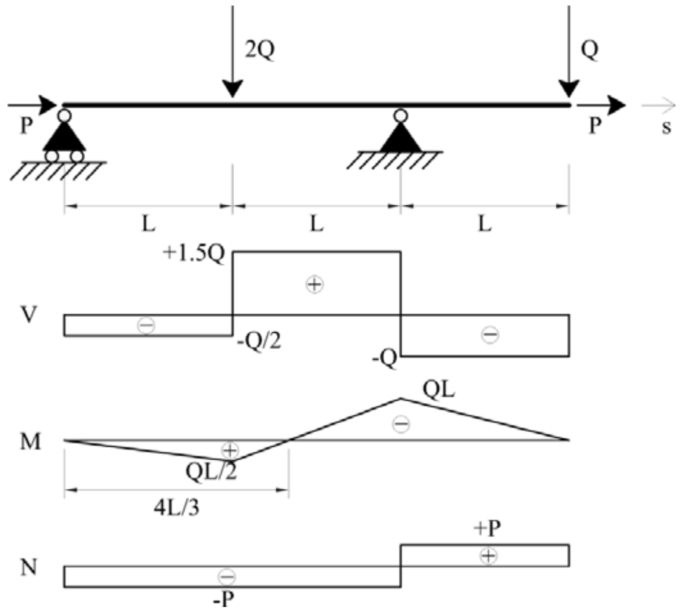
				
Extérieurement (appuis)				
Intérieurement (poutre)				
Globalement				
Degré d'hyperstaticité (globalement)				

Diagrammes NVM

Les efforts intérieurs d'une poutre varient d'une section à d'autre. On appelle «diagrammes des efforts intérieurs» ou «diagrammes NVM» la représentation graphique des efforts intérieurs le long de l'axe de la poutre

Cas plan N, V_y, M_z

Cas 3D: N, V_y, V_z, T, M_y, M_z

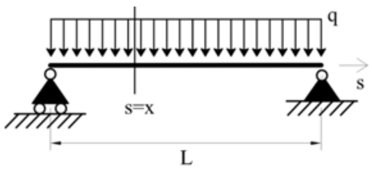


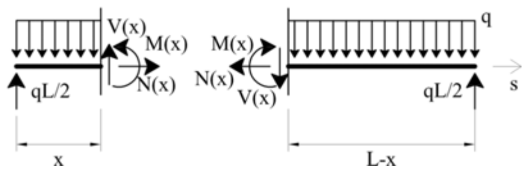
Méthodes de calcul possibles:

- Equilibre des fragments
- Equations différentielles
- Calcul rapide des diagrammes NVM

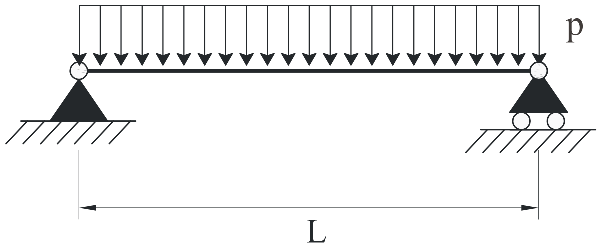
Calcul des diagrammes NVM par l'équilibre des fragments

1. Calculer les forces de réaction et les forces de liaison
2. Couper à une position $s = x$
3. Formuler l'équilibre du fragment Ω_1 ou Ω_2
4. Attention aux charges concentrées (appuis ou forces externes) et aux changements des charges distribuées → différents cas

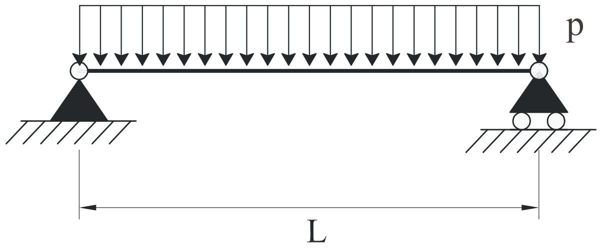




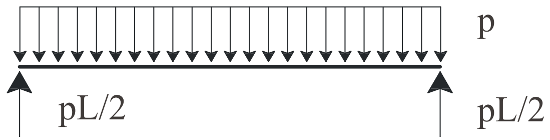
Exemple: Calculer les diagrammes NVM d'une poutre simple uniformément chargée par l'équilibre des fragments



Exemple (suite)



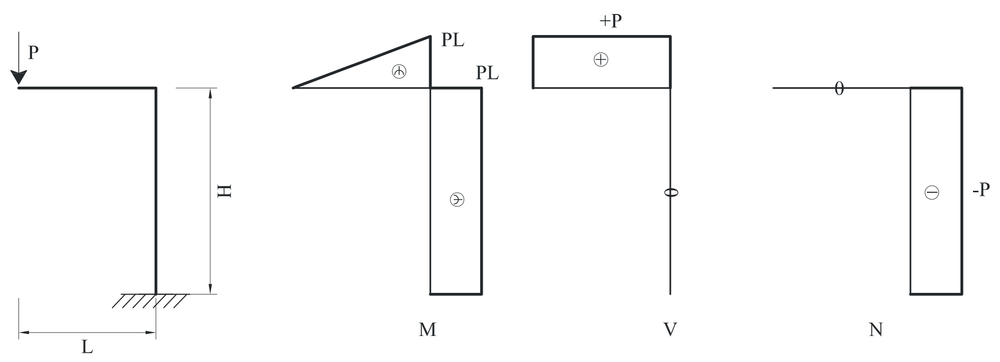
Exemple (suite)



Diagrammes des efforts intérieurs

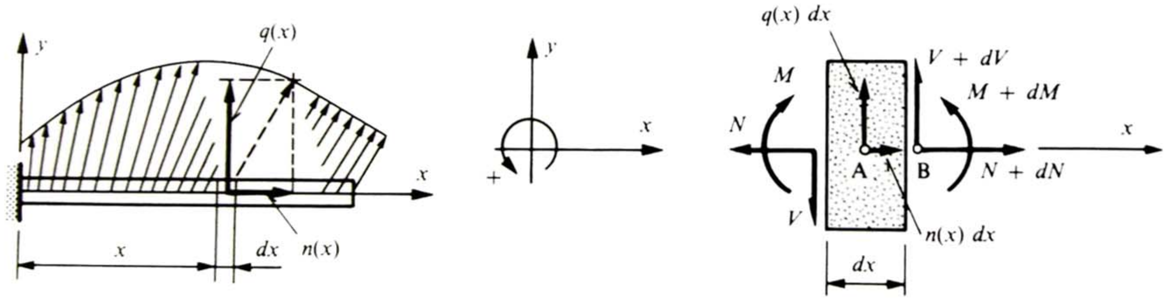
Les diagrammes de NVM sont dessinés

- par-dessus le schéma statique de la structure
- perpendiculairement à l'axe de chaque poutre
- à une échelle convenable
- avec un signe
- avec une indication des valeurs caractéristiques



Prof. Katrin Beyer

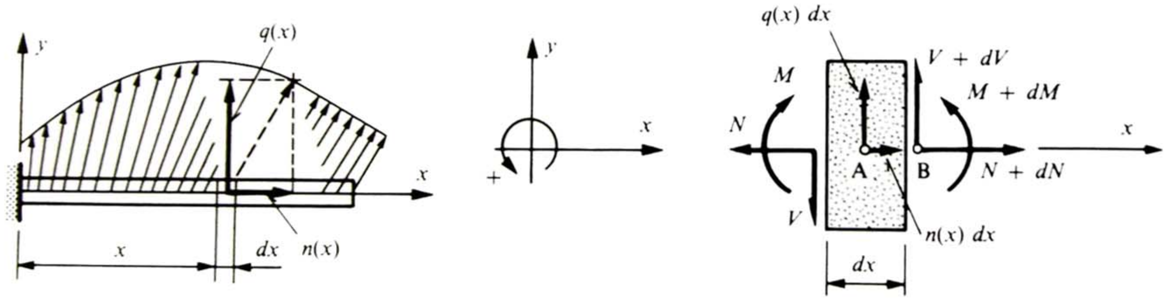
Equations différentielles d'équilibre d'une poutre rectiligne à plan moyen



Equilibre du petit élément avec longueur dx:

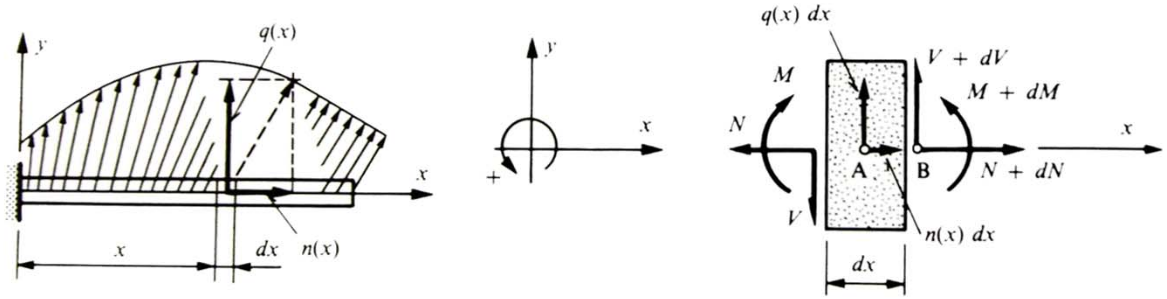
- $\sum F_x = 0$

Equations différentielles d'équilibre d'une poutre rectiligne à plan moyen (suite)



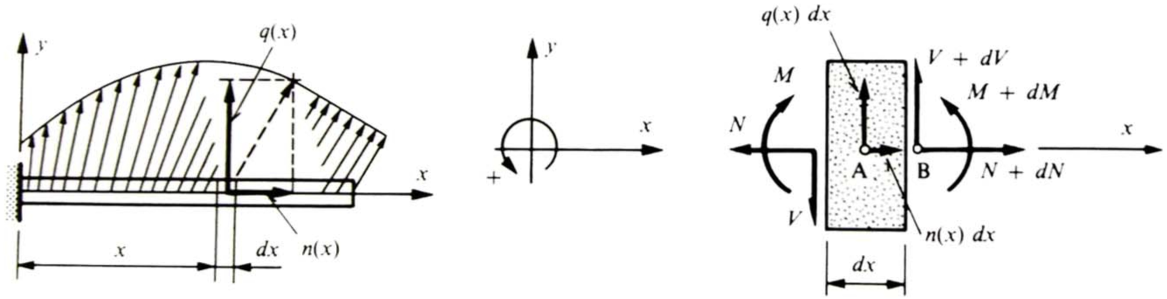
- $\sum F_y = 0$

Equations différentielles d'équilibre d'une poutre rectiligne à plan moyen (suite)



- $\sum M_{A,z} = 0$

Equations différentielles d'équilibre d'une poutre rectiligne à plan moyen (suite)



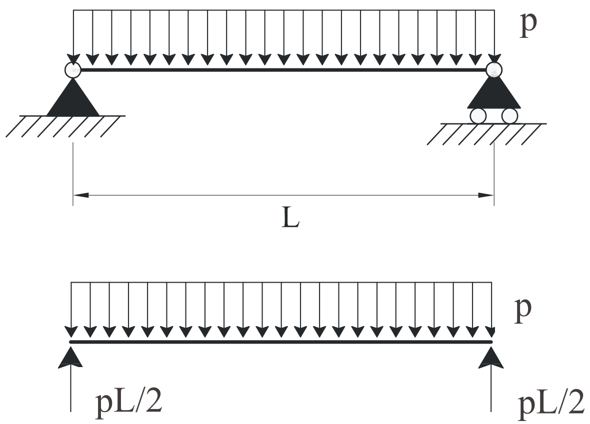
$$N'(x) = -n(x)$$

$$\left.\begin{aligned} V'(x) &= -q(x) \\ M'(x) &= -V(x) \end{aligned}\right\} M''(x) = q(x)$$

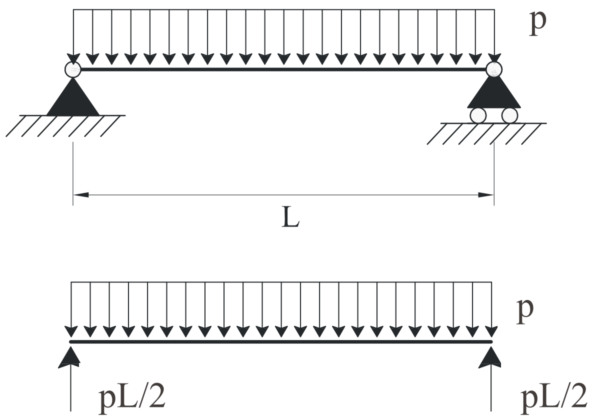
Exemple 1

Prof. Katrin Beyer

Calculer les diagrammes NVM d'une poutre simple uniformément chargée par les équations différentielles d'équilibre

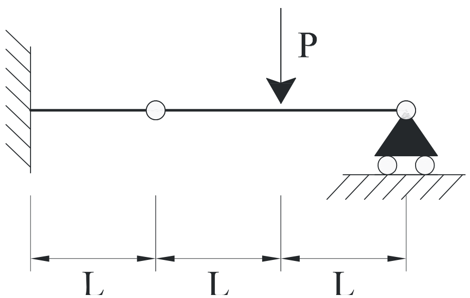


Exemple 1 (suite)

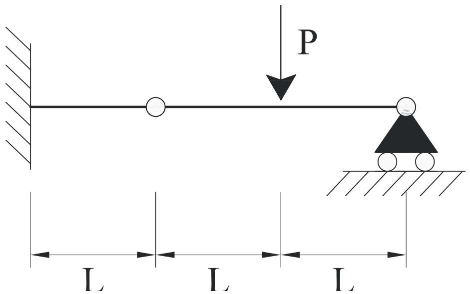


Exemple 2

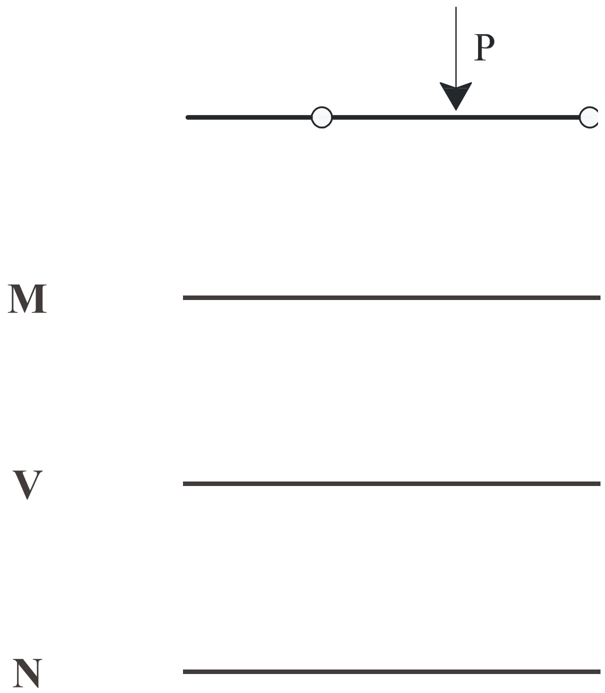
Calculer les diagrammes NVM d'une poutre Gerber avec une charge concentrée par les équations différentielles d'équilibre



Exemple 2 (suite)



Exemple 2 (suite)



Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 8:** Poutres (en entier)
- **Chapitre 9:** Poutres à plan moyen 9.2.1

EPFL

Références

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0
- [3] Exemples de poutres et de sections: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [4] Arbre: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [5] Sections de poutre dans l'espace et dans le plan moyen: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [6] Faces positives et signe: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [7] Exemples de poutres isostatiques: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005

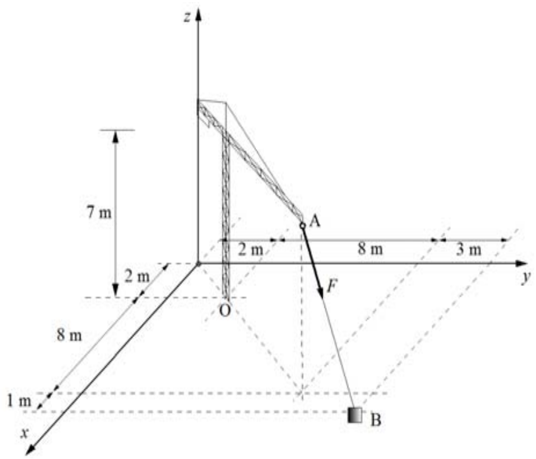
CdC 1

Exercice 1 *(8 points)*

Une grue soulève une charge de manière légèrement oblique (figure 1), il s'exerce de ce fait une force F = 200 kN à l'extrémité A de la flèche.

a) Trouver les composantes cartésiennes de la force F.

b) Trouver les composantes du moment que cette force exerce au pied O du mat.



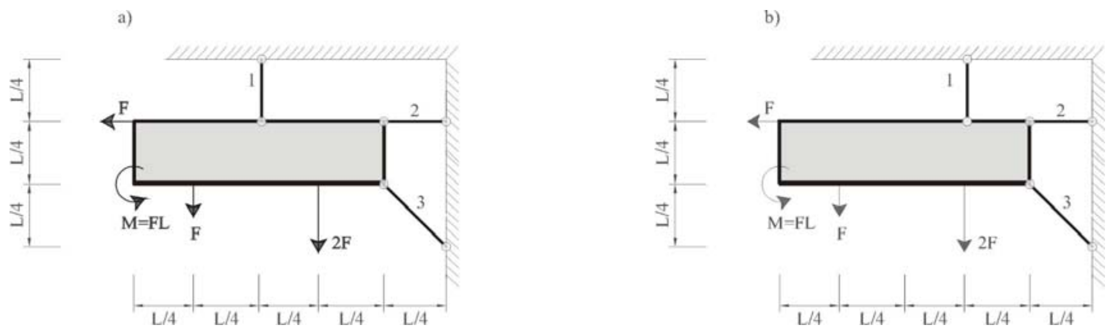
CdC1

CdC 1

Exercise 2

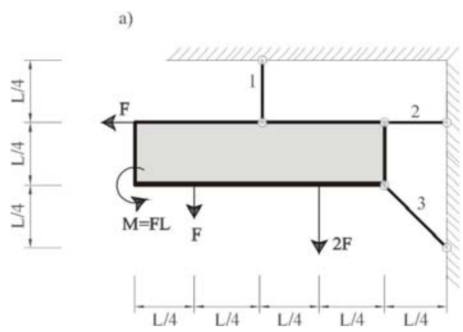
Les rectangles de la figure 2a et b s’appuient sur trois barres. Pour chacune des structures en a) et b) :

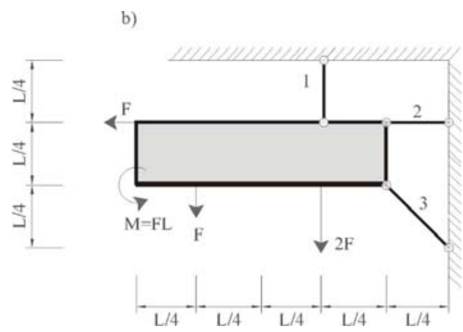
- Déterminer si cette structure est isostatique quant à ses appuis.
- Si elle est isostatique, calculer l’effort normal dans les trois barres, mentionner lesquelles de ces trois barres sont comprimées et lesquelles sont tendues.



CdC 1

Exercise 2





CdC 1

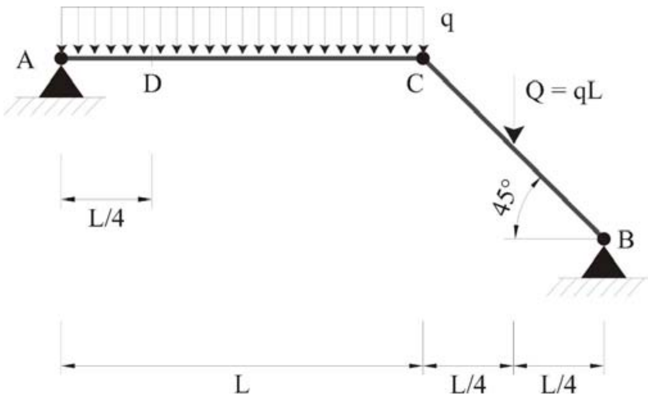
Exercise 3

Une structure plane en poutres est soumise à une charge uniforme et une charge concentrée (figure 3).

a) Montrer que cette structure est isostatique quant à ses appuis et ses liaisons.

b) Calculer toutes les composantes des réactions d'appui et des forces de liaison.

c) Calculer les forces internes NVM au point D.

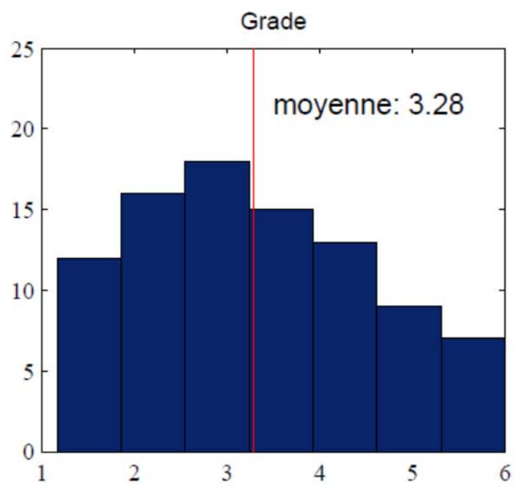


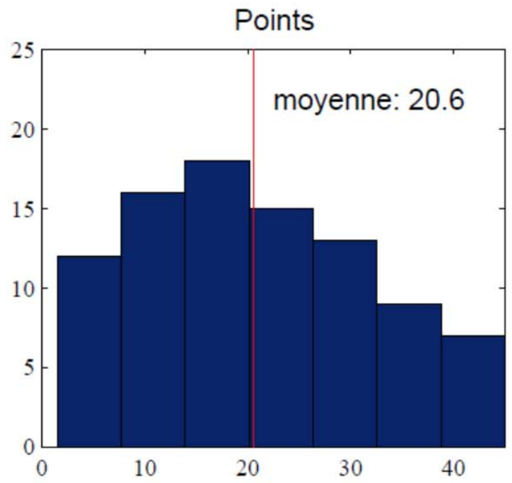
CdC 1

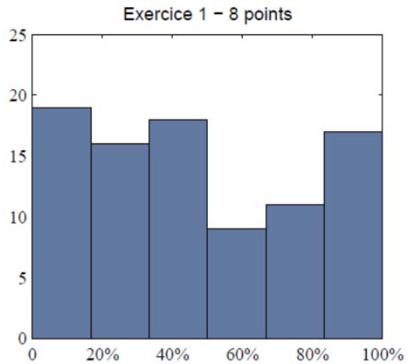
Exercise 3

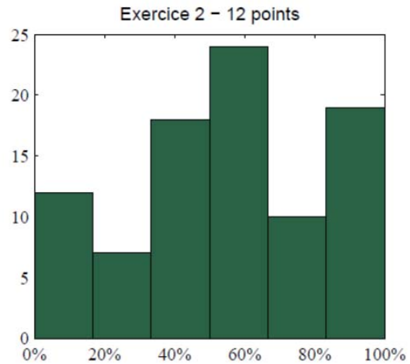
CdC1

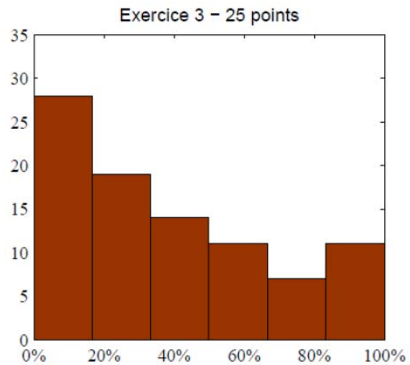
- Présence: 90 / 118 (76%)
- Moyenne: 20.6 / 45 (46%)
- Notes:
  - Note 1: 0 Points
  - Note 4: 27 Points
  - Note 6: 45 Points

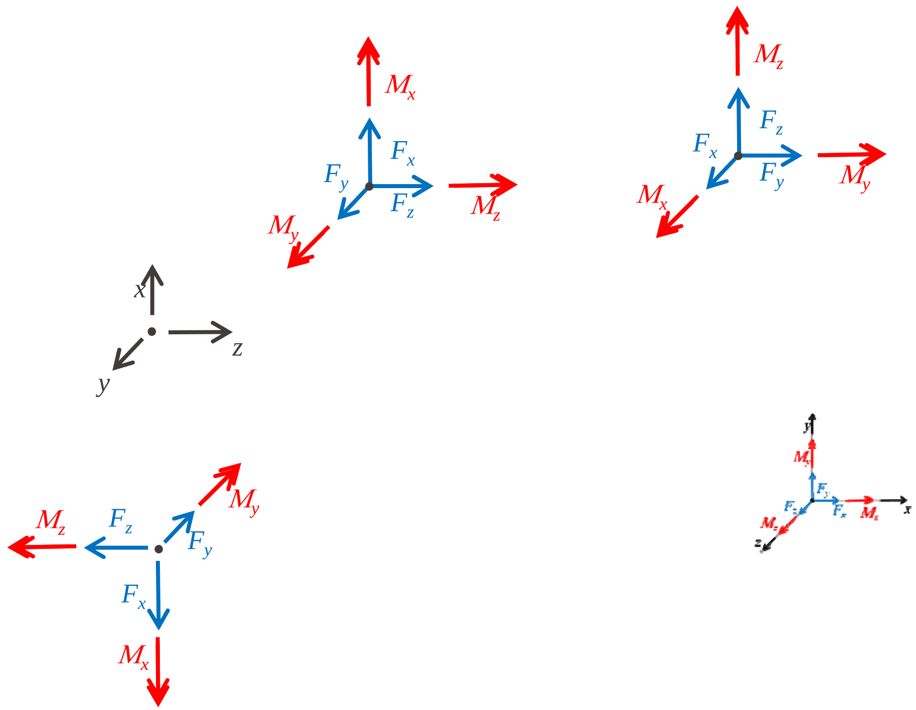





Exercice 1 − 8 points
25
20
15
10
5
0
0
20%
40%
60%
80%
100%


Exercice 2 − 12 points
25
20
15
10
5
0
0%
20%
40%
60%
80%
100%


Exercice 3 − 25 points
35
30
25
20
15
10
5
0
0%
20%
40%
60%
80%
100%


M_x
F_x
F_y
F_z
M_z
M_y
x
y
z

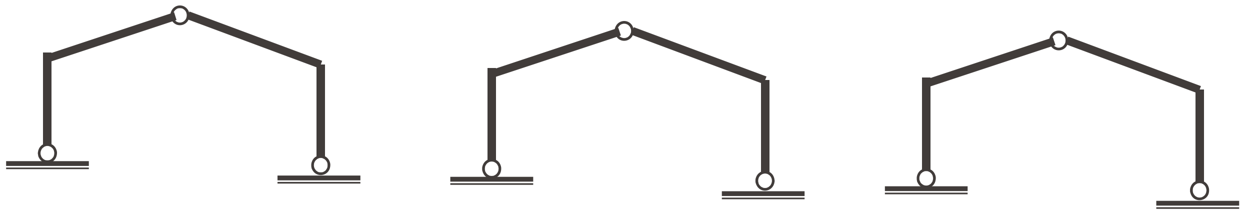
La direction de l'axe s

Convention sur la direction de l'axe s:

- De gauche à droite, de bas en haut
- Dans le sens de l'horaire
- Eviter, si possible, un changement du sens de l'axe s dans la structure

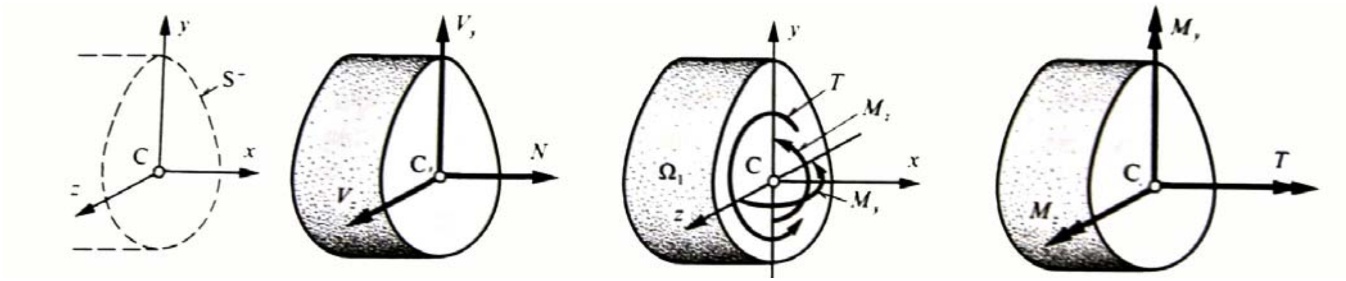
Indication de la direction de l'axe s:

- Avec des flèches indicés le sens de l'axe s
- Poutre à plan moyen: Avec une ligne en tirets sur la côté inférieure (l'axe z est toujours vers vous).



Efforts intérieurs d'une poutre dans l'espace

- F_x Effort normale N
- F_y, F_z Efforts tranchants V_y et V_z
- M_x Moment de torsion T
- M_y, M_z Moments de flexion M_y et M_z (moments fléchissants)



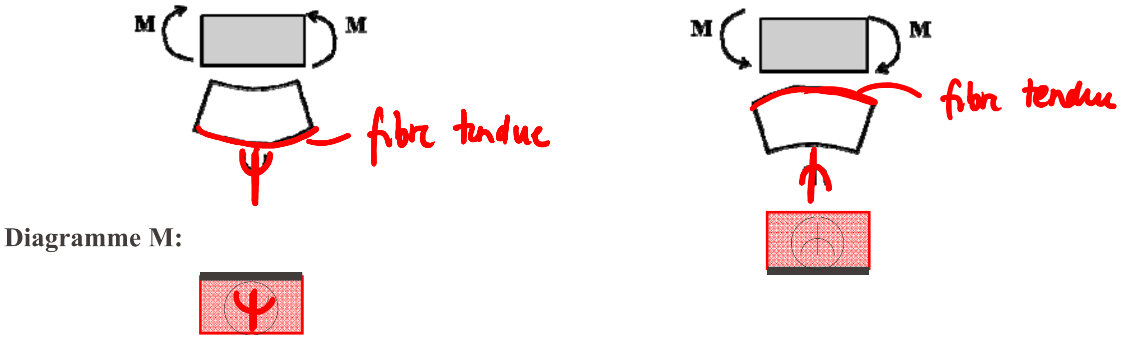
- Résultante de l'effort tranchant $\vec{V} = \vec{V}_y + \vec{V}_z$
- Résultante des moments de flexion $\vec{M} = \vec{M}_y + \vec{M}_z$

Peu utilisées

Poutres: Diagrammes NVM

Diagramme du moment M:

Utilisant le papillon comme alternative aux signes positif et négatif

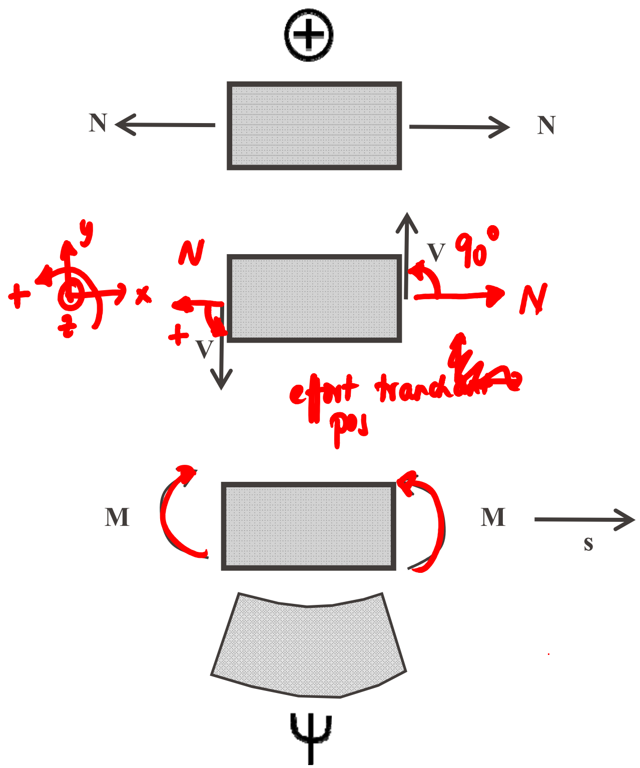


- Courbure positive: Poutre s'arque vers le bas → fibre inférieure est tendue
- Courbure négative: Poutre s'arque vers le haut → fibre supérieure est tendue.

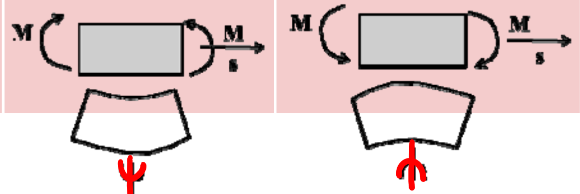
- On dessine le diagramme des moments de flexion du côté de la fibre extrême tendue.

Poutres: Diagrammes NVM

Signes de NVM: Convention de l'ingénieur

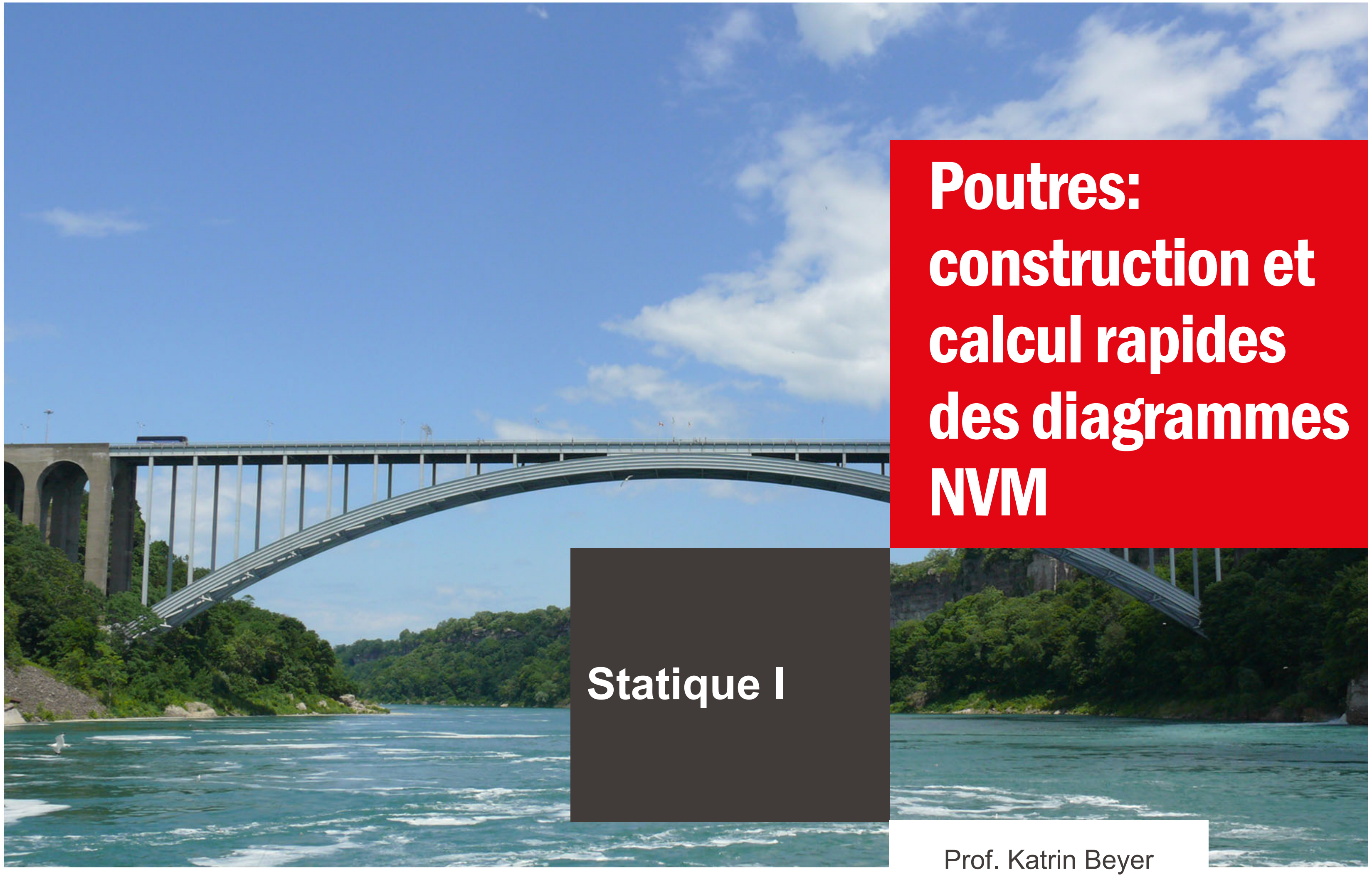


Signe	+	−
N	Traction	Compression
V	$+\frac{\pi}{2}$ à partir de N (dans le sens de l'axe local y, z dehors du plan)	$-\frac{\pi}{2}$ à partir de N
M		



N,V – signe doit être correct mais de n'importe quel côté de la poutre *

EPFL



Poutres: construction et calcul rapides des diagrammes NVM

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Comment déduire les diagrammes NVM de la forme de la charge répartie et des charges concentrées
- Comment déterminer les points des diagrammes où les efforts sont nuls
- Comment dessiner les diagrammes NVM conformément aux conventions

Règles pour construire rapidement les diagrammes NVM

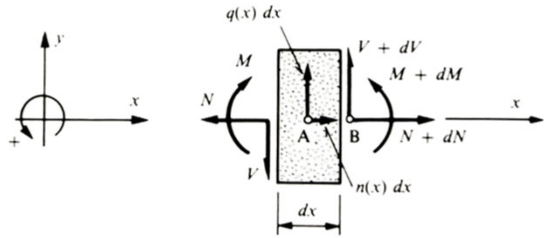
1. Règles dérivées des équations différentielles d'équilibre
2. Discontinuités dans les diagrammes NVM
   - Force concentrée
   - Moment concentré
3. Nœuds dans une structure: équilibre du nœud
4. Conditions statiques: points où M, V ou N sont nuls

EPFL

Règles dérivées des équations différentielles (poutres droites)

$$N'(x) = -n(x)$$

$$\left.\begin{aligned} V'(x) &= -q(x) \\ M'(x) &= -V(x) \end{aligned}\right\} \quad M''(x) = q(x)$$



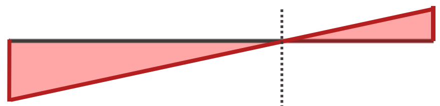
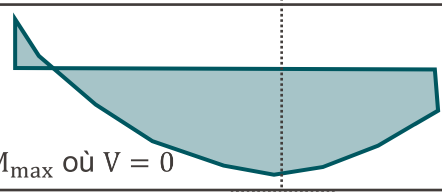
- Relation entre la charge répartie n et l'effort normal N:
  - $n = 0$ $\quad N = constant$
  - $n = cst$ $\quad N = linéaire$
  - …
- Relation entre la charge répartie q et l'effort tranchant V et le moment de flexion M:
  - $q = 0$ $\quad V = constant$ $\quad M = linéaire$
  - $q = constant$ $\quad V = linéaire$ $\quad M = parabolique$
  - …
- Relation entre l'effort tranchant V et le moment de flexion M:
  - $V = -M'$ $\quad V = 0 \rightarrow M_{min}\ ou\ M_{max}$

Règles dérivées des équations différentielles (poutres droites)

- Relation entre la charge répartie n et l'effort normal N:

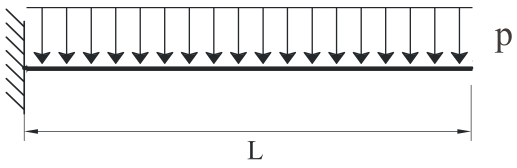
	$n = 0$	$n = constante$
Effort normal N		

- Relation entre la charge répartie q et l'effort tranchant V et le moment de flexion M:

	$q = 0$	$q = constante$
Effort tranchant V		
Moment de flexion M		

Exemple

Tracer les diagrammes NVM d'une console en utilisant la méthode rapide

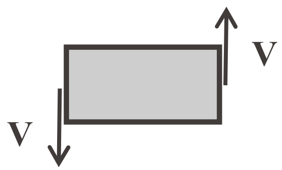
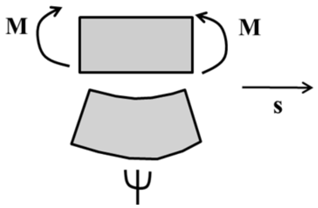
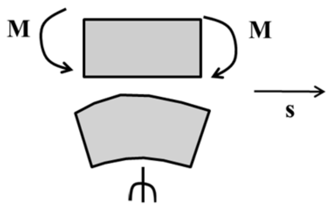


M

V

N

Signes de NVM: conventions de l'ingénieur

	⊕	⊖
	Traction	Compression
	$+\frac{\pi}{2}$ à partir de N (dans le sens de l'axe local y, z sortant du plan)	$-\frac{\pi}{2}$ à partir de N
		

Signe du moment *M*

On utilise le papillon comme alternative aux signes positif ou négatif

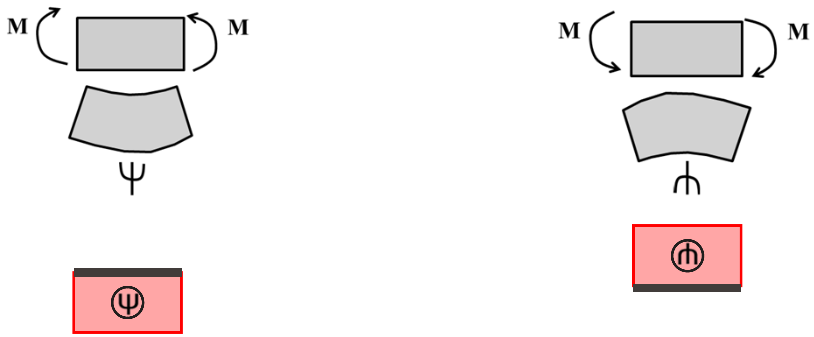
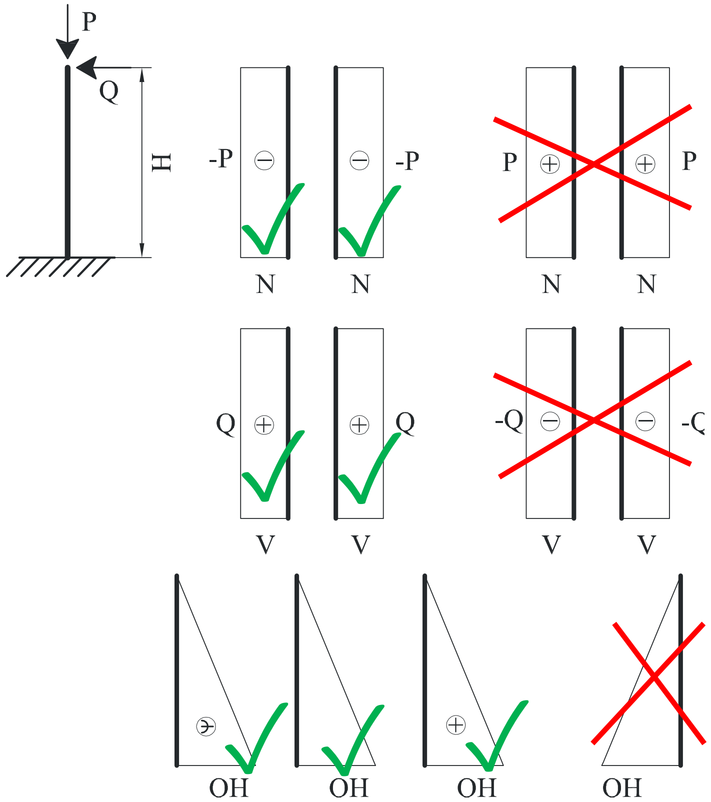


Diagramme M :

- Courbure positive: la poutre s’arque vers le bas → la fibre inférieure est tendue
- Courbure négative: la poutre s’arque vers le haut → la fibre supérieure est tendue.
- On dessine le diagramme des moments de flexion du côté de la fibre extrême **tendue**

Exemples des NVM diagrammes justes et faux

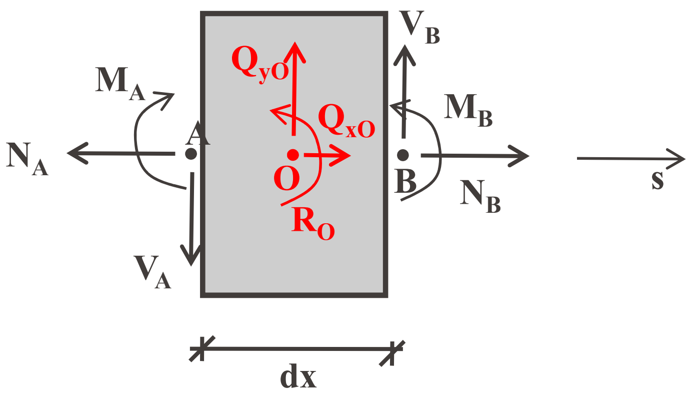


- Pour le diagramme N le signe doit être juste. Le côté est égal.
- Pour le diagramme V le signe doit être juste. Le côté est égal.
- Pour le diagramme M le côté doit être juste. Le signe est égal.

Prof. Katrin Beyer

Discontinuités dans les diagrammes NVM

Effets d'une force concentrée ou d'un moment concentré sur les diagrammes



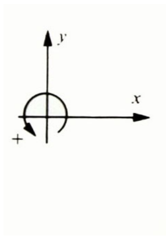
$$N_B = N_A - Q_{xO}$$

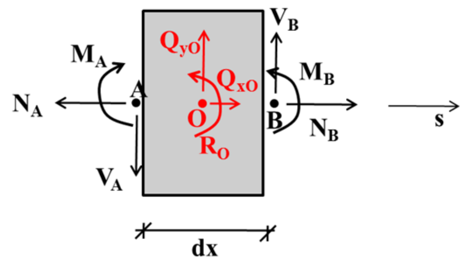
$$V_B = V_A - Q_{yO}$$

$$M_B = M_A - R_O$$

Règles pour les discontinuités dans les diagrammes NVM

- *Forces concentrées Q_{xO} ou Q_{yO}*
- *Moment concentré R_O*



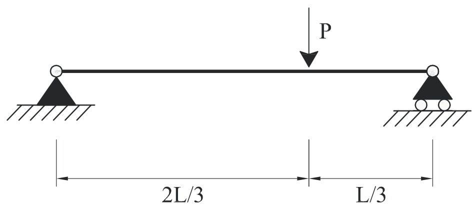


- Une force concentrée Q_{xO} cause:
  - un saut dans le diagramme N de $-Q_{x0}$

- Une force concentrée Q_{y0} cause:
  - un saut dans le diagramme V de $-Q_{yO}$
  - un pli dans le diagramme M d'angle $+Q_{yO}$

- Un moment concentré R_O cause:
  - un saut dans le diagramme M de $-R_O$

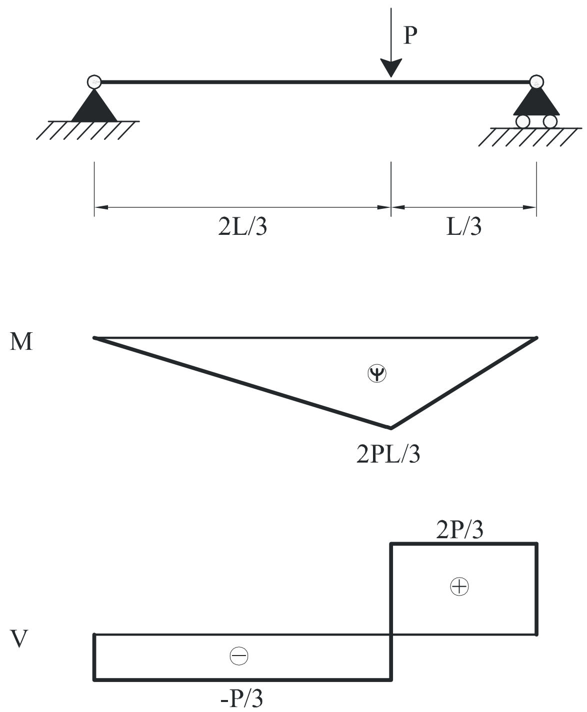
Exemple: Poutre simples avec charge concentrée



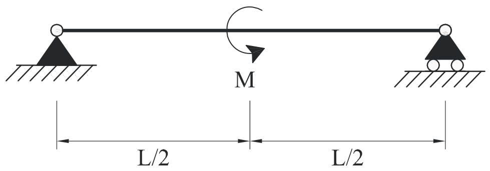
M

V

Une remarque sur les pentes et les plis du diagramme de M



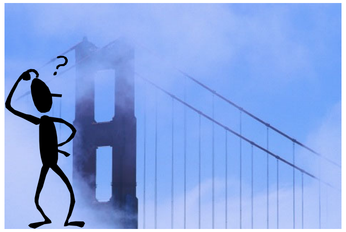
Exemple: Poutre simples avec moment concentré



M

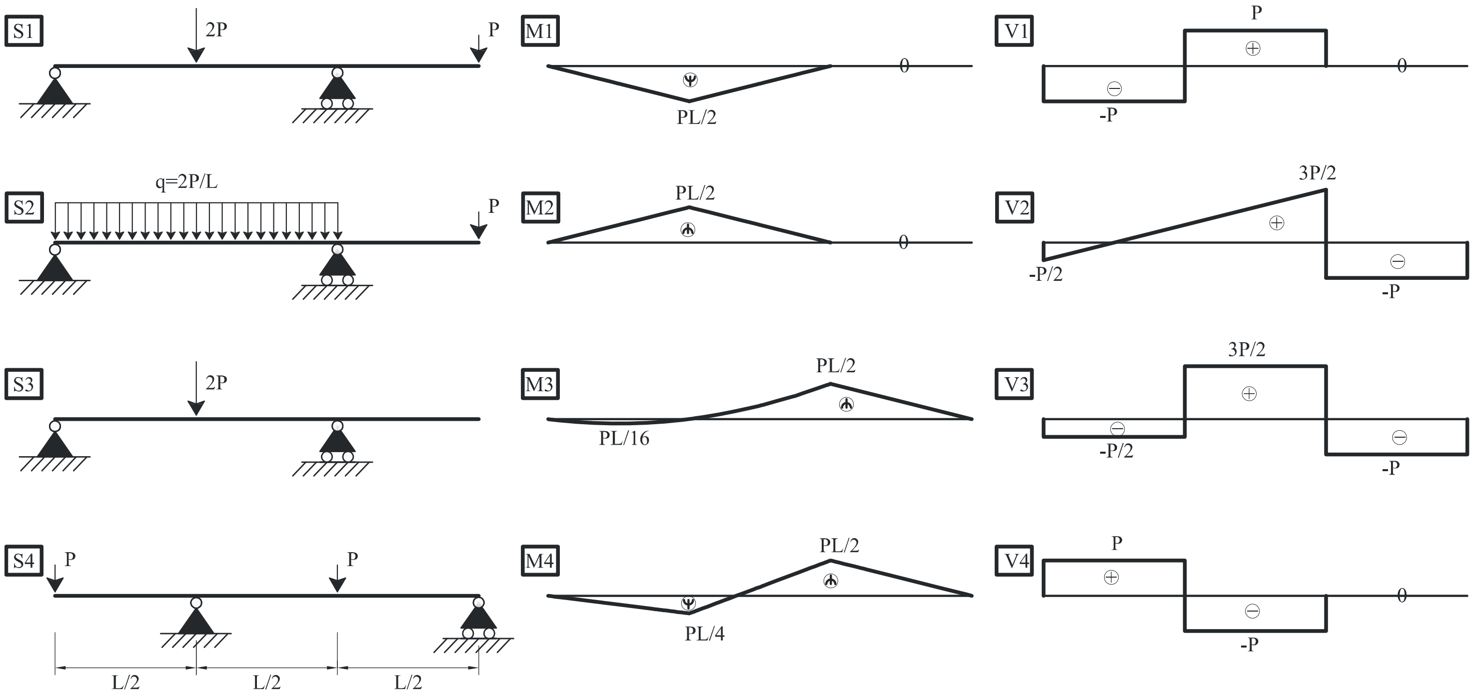
V

Exemple: Poutre simples avec moment concentré (suite)

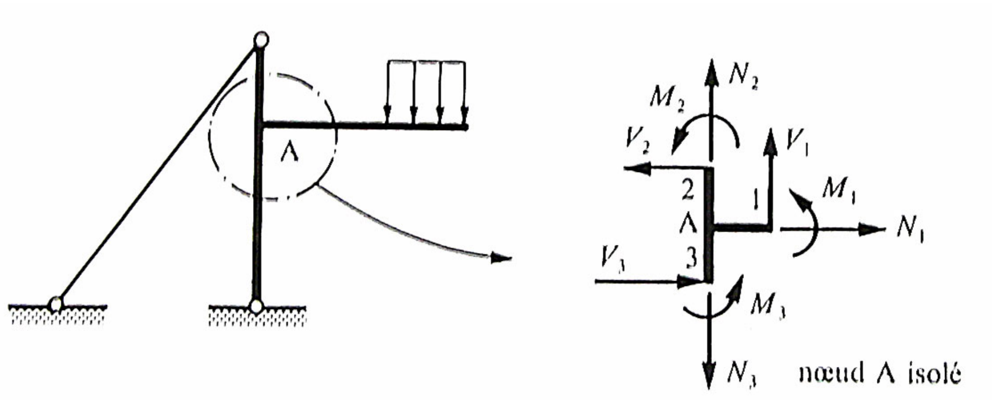


A votre tour!

Quels diagrammes M/V correspondent aux systèmes statiques suivants?



Nœuds dans une structure



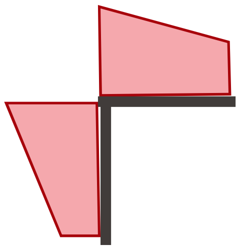
Equilibre du nœud:

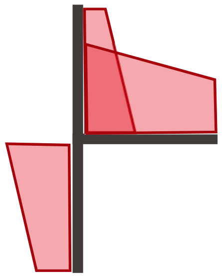
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

Exemples pour l'équilibre du moment:

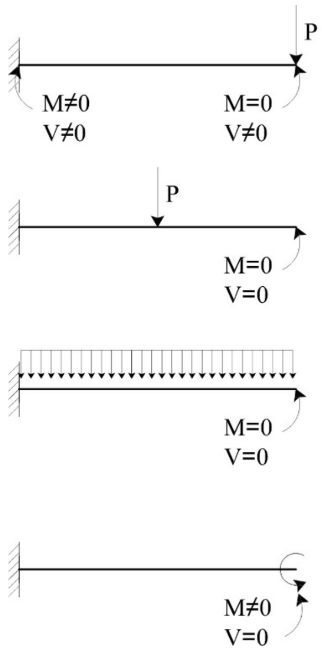


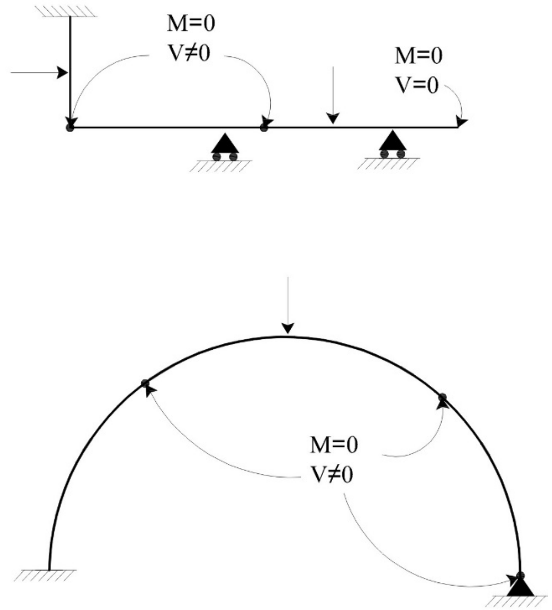


Conditions statiques

- Points où $M = 0$ (si des moments ne sont pas appliqués à ce point):
  - Extrémités libres
  - Extrémités supportées par un appui à rouleau ou une articulation
  - Articulation (organe de liaison)

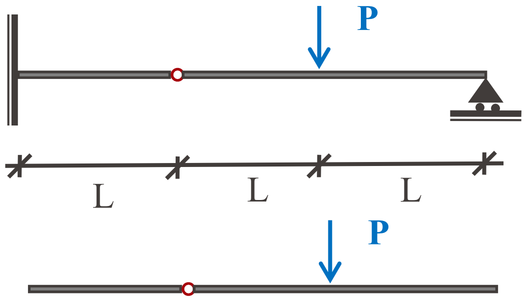
- Points où $V = 0$ (si des forces ne sont pas appliquées à ce point):
  - Extrémités libres





Prof. Katrin Beyer

Exemple: Poutre cantilever avec une charge concentrée



M

V

Exemple: Poutre cantilever avec une charge concentrée (suite)

Chapitres à étudier dans le TGC 1

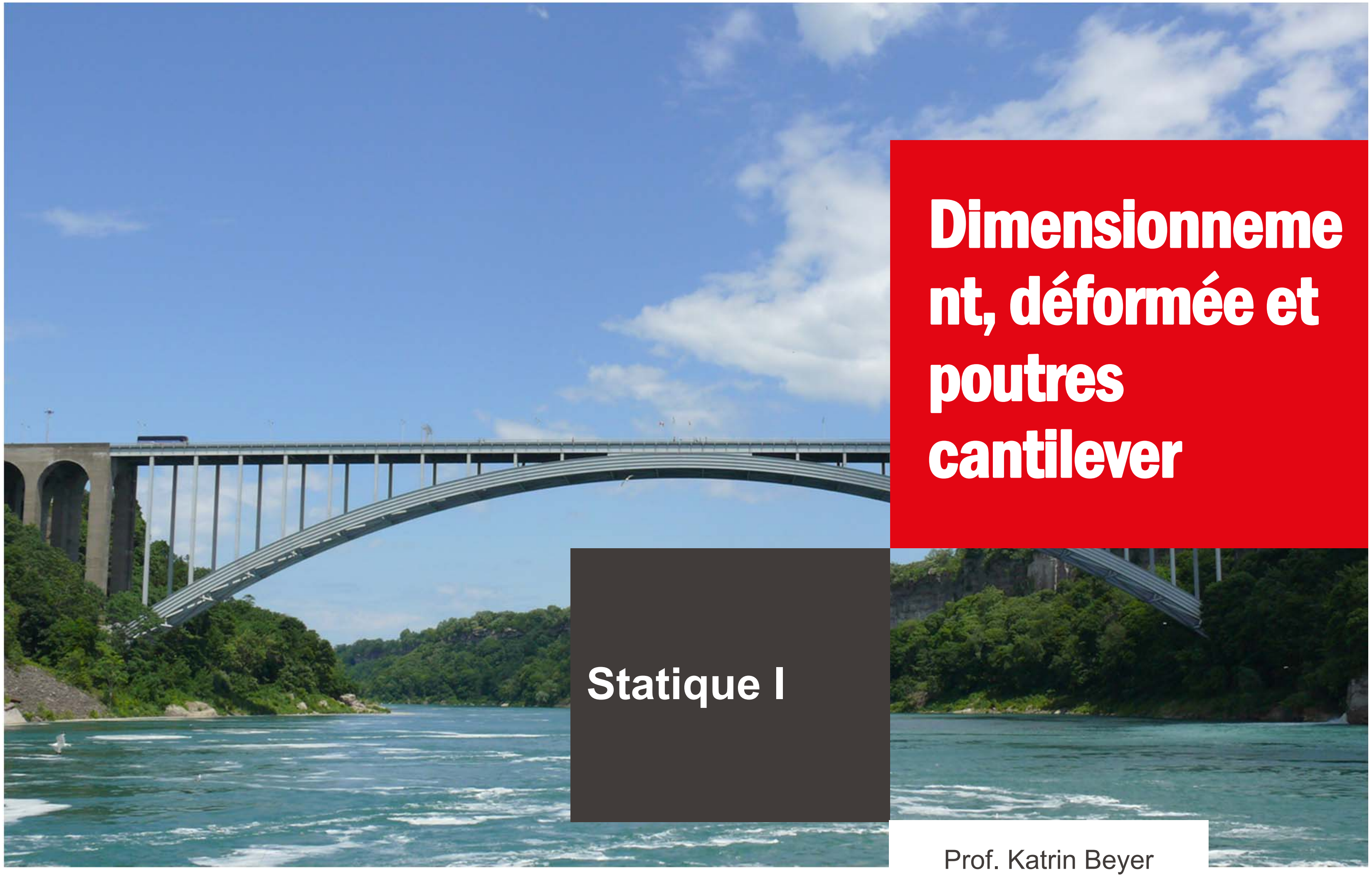
- **Chapitre 9:** Poutres à plan moyen 9.2 à 9.5

EPFL

Références

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0
- [3] Noeuds dans une structure: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.



Dimensionnement, déformée et poutres cantilever

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Quelle est la procédure de dimensionnement d’un élément structural
- Comment dessiner qualitativement la déformée d’une structure en poutre
- La définition d’une poutre cantilever
- Comment dessiner les diagrammes des efforts intérieurs et la déformée d’une poutre cantilever

Contenu du cours

1. Utilisation des diagrammes NVM pour le dimensionnement des structures
2. La déformée des structures en poutres
3. Poutres cantilever - exemples

EPFL

L'utilisation des diagrammes NVM pour le dimensionnement des éléments structuraux

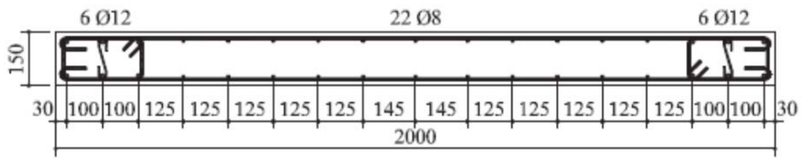
Les diagrammes NVM sont utilisés pour dimensionner les éléments structuraux en béton armé, acier, bois, etc.

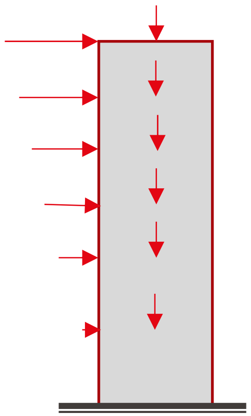
Procédé de dimensionnement:

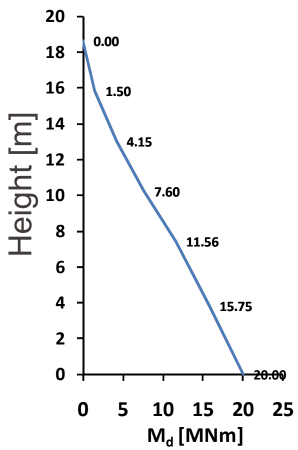
1. Déterminer les charges qui agissent sur la structure (poids propre, vent, etc.)
2. Calculer les diagrammes NVM pour ces charges
3. Choisir les dimensions des sections ou les armatures afin que la résistance pour chaque section est plus grande que les efforts résultant des charges

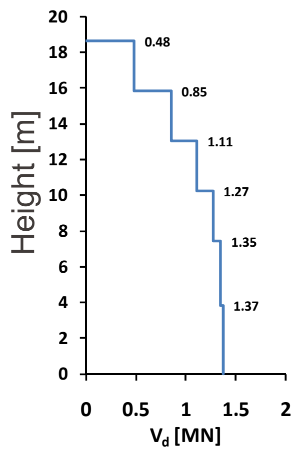
Dimensionnement d'un refend en béton armé

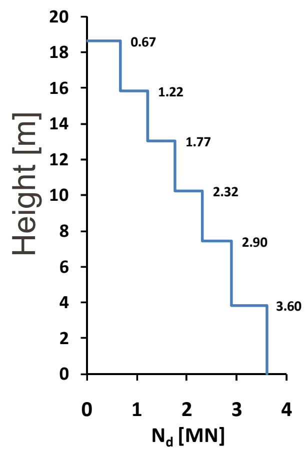
- Charges: poids propre et charges sismiques
- Armature longitudinale: fonction de M et de N
- Armature transversale: fonction de V
- Etriers: modes de rupture locale





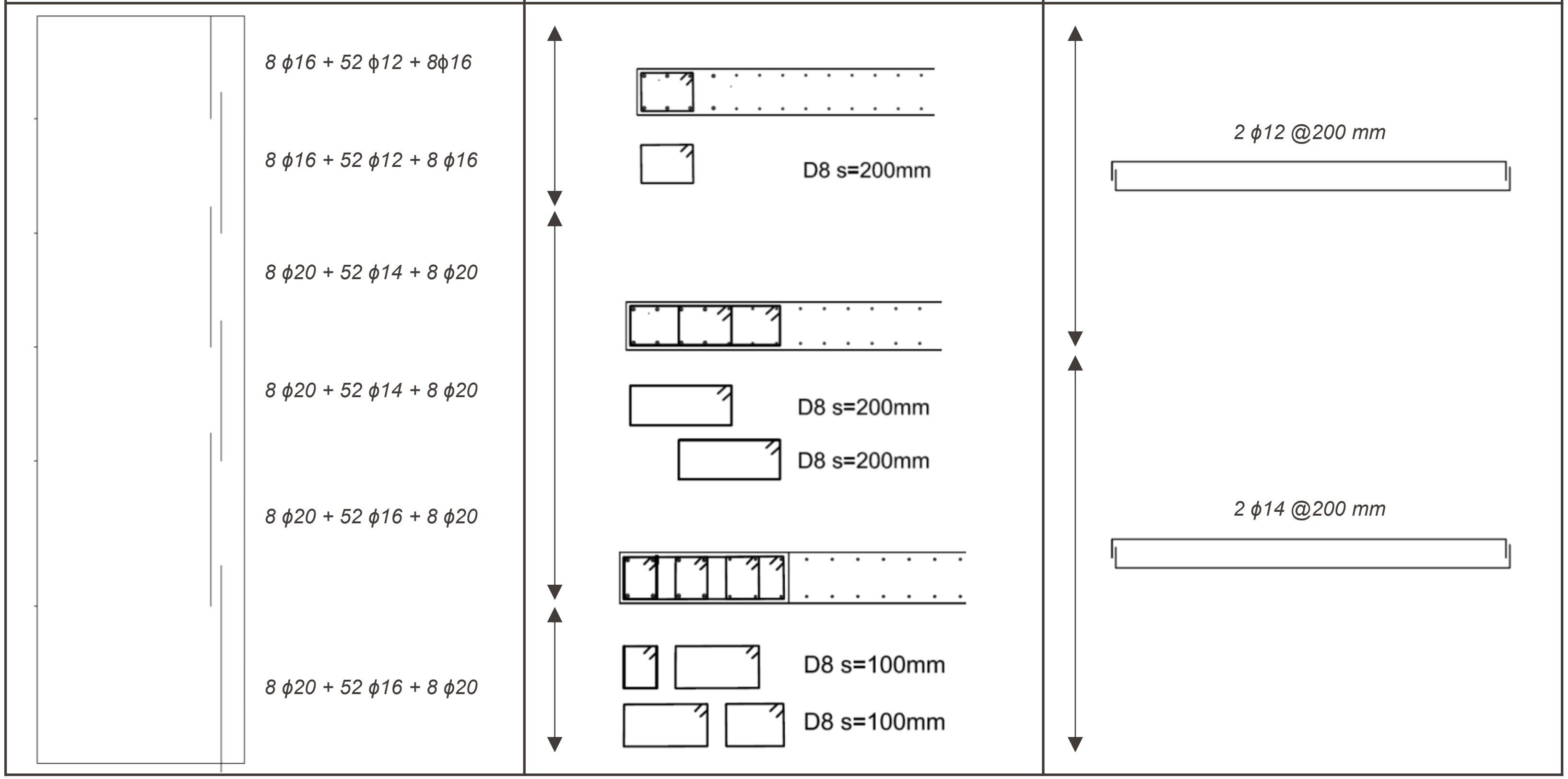






Dimensionnement d'un refend (suite)

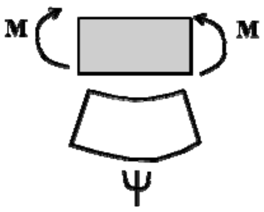
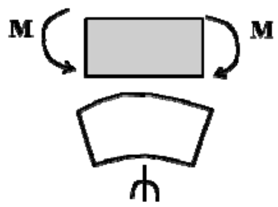
Armature longitudinale	Etriers	Armature transversale



EPFL

Déformée (en flexion)

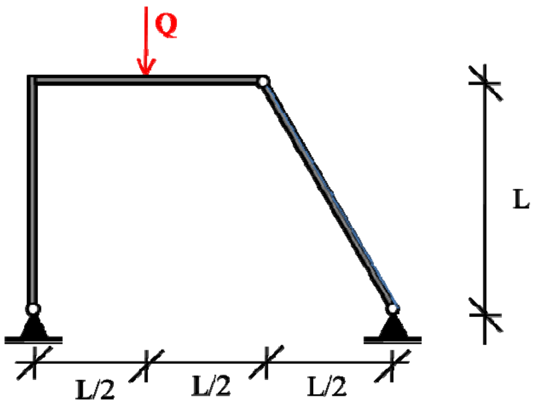
- Forme incurvée de l'axe d'une poutre fléchie
- Relation entre moment et courbure:

	
fibre inférieure est tendue	*fibre supérieure est tendue*

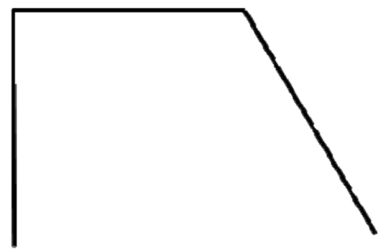
- Pour l'instant seulement tracé intuitif (équations décrites au 3ème semestre)
- Souvent, les déformations à cause de l'effort tranchant et de l'effort axial sont beaucoup plus petites que les déformations à cause du moment de flexion
  - Elles sont négligées ici
  - La déformée qu'on trace est donc seulement une fonction du moment de flexion

Exemple de déformée

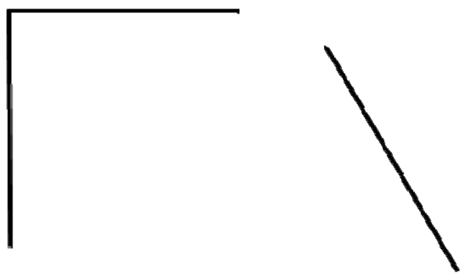
Portiques à trois articulations



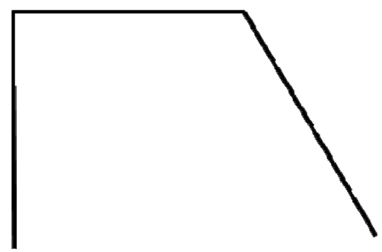
- M:



- Corps isolé:

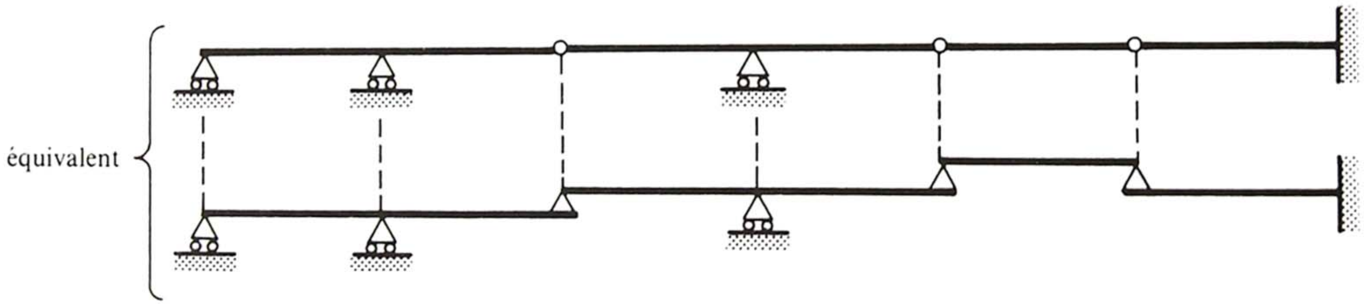


- Déformée:

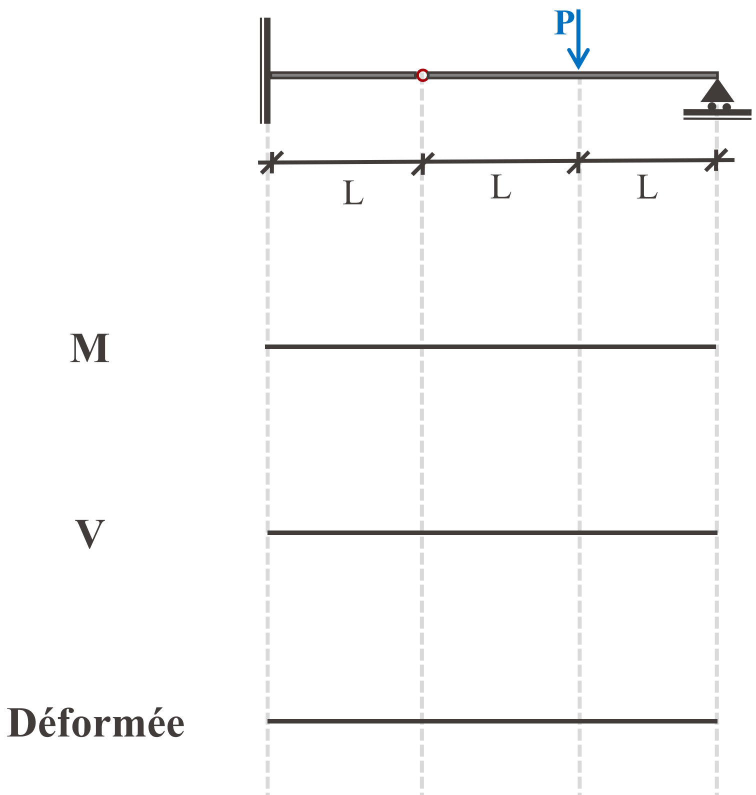


Poutres cantilever (ou poutres Gerber)

- Suite de poutres droites réunies entre elles bout à bout par des articulations
- Supportées par un système d'appuis qui rend la poutre cantilever isostatique quant à ses appuis et ses liaisons
- A noter:
  - Le moment est zéro aux articulations
  - La poutre cantilever peut être interprétée comme un empilage de poutres simples:

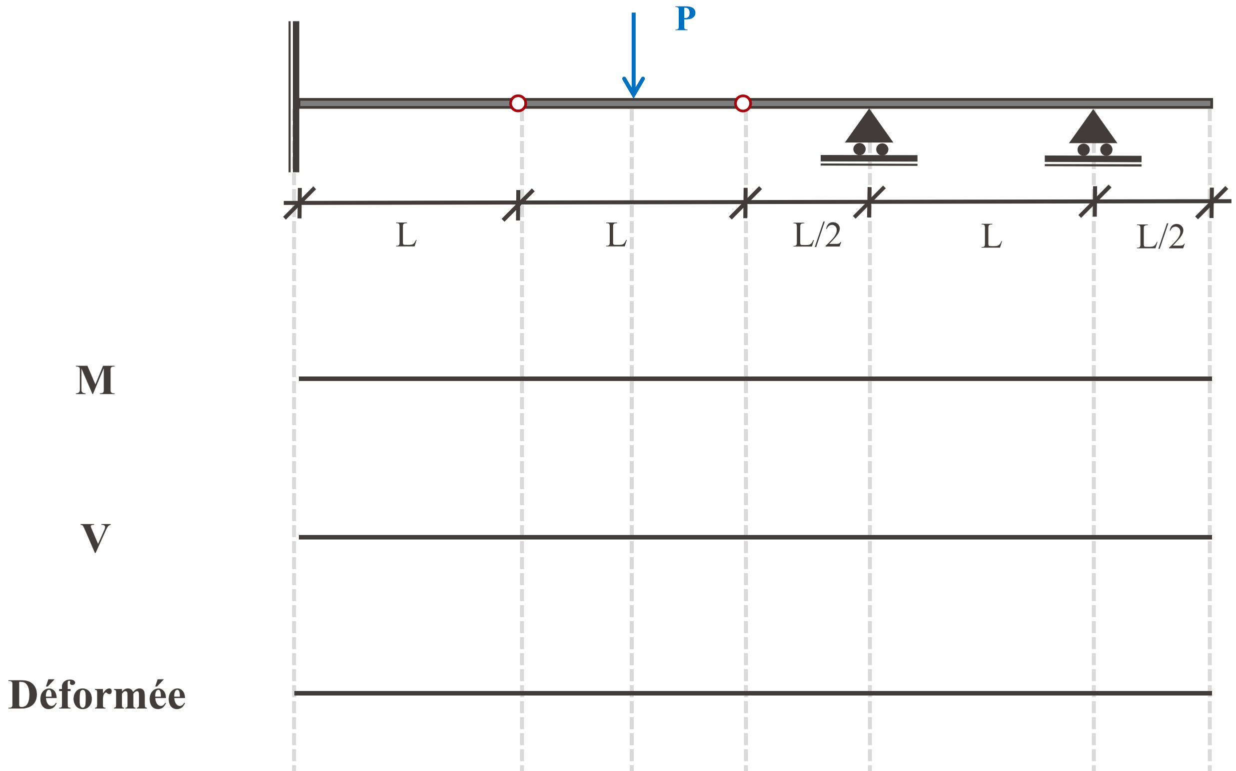


Exemple 1: Poutre cantilever avec une charge concentrée



Exemple 2: Poutre cantilever avec une charge concentrée

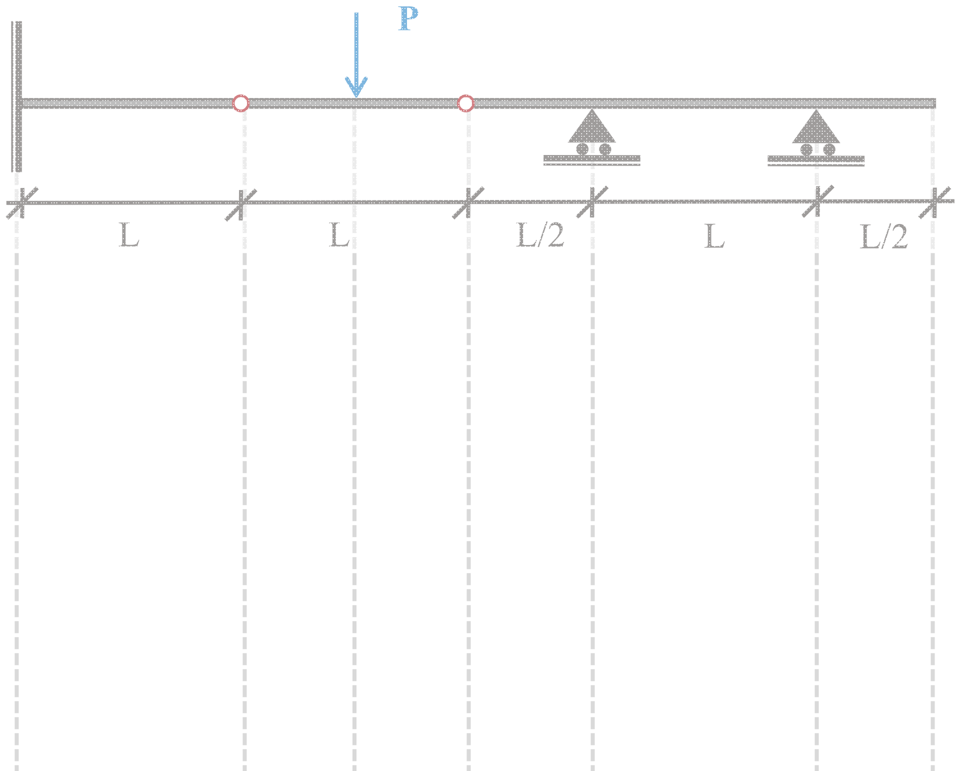
Prof. Katrin Beyer



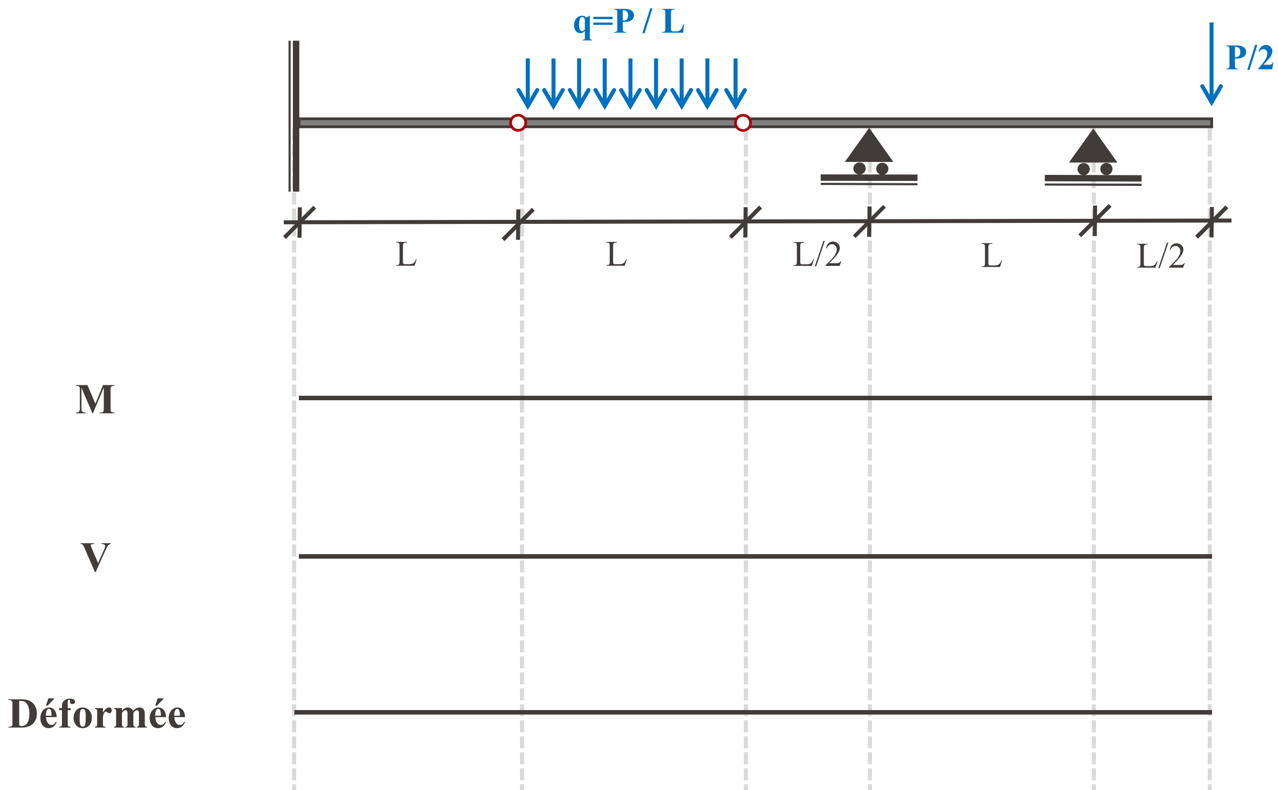
EPFL

Exemple 2 (brouillon)

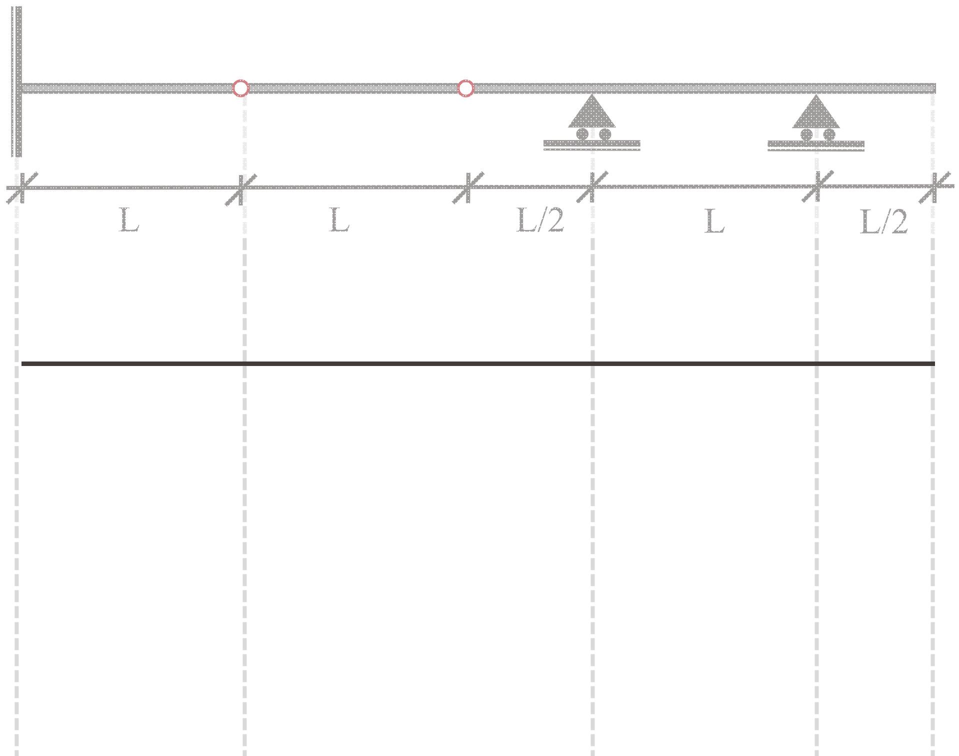
Prof. Katrin Beyer



Exemple 3: Poutre cantilever avec une charge distribuée et une charge concentrée

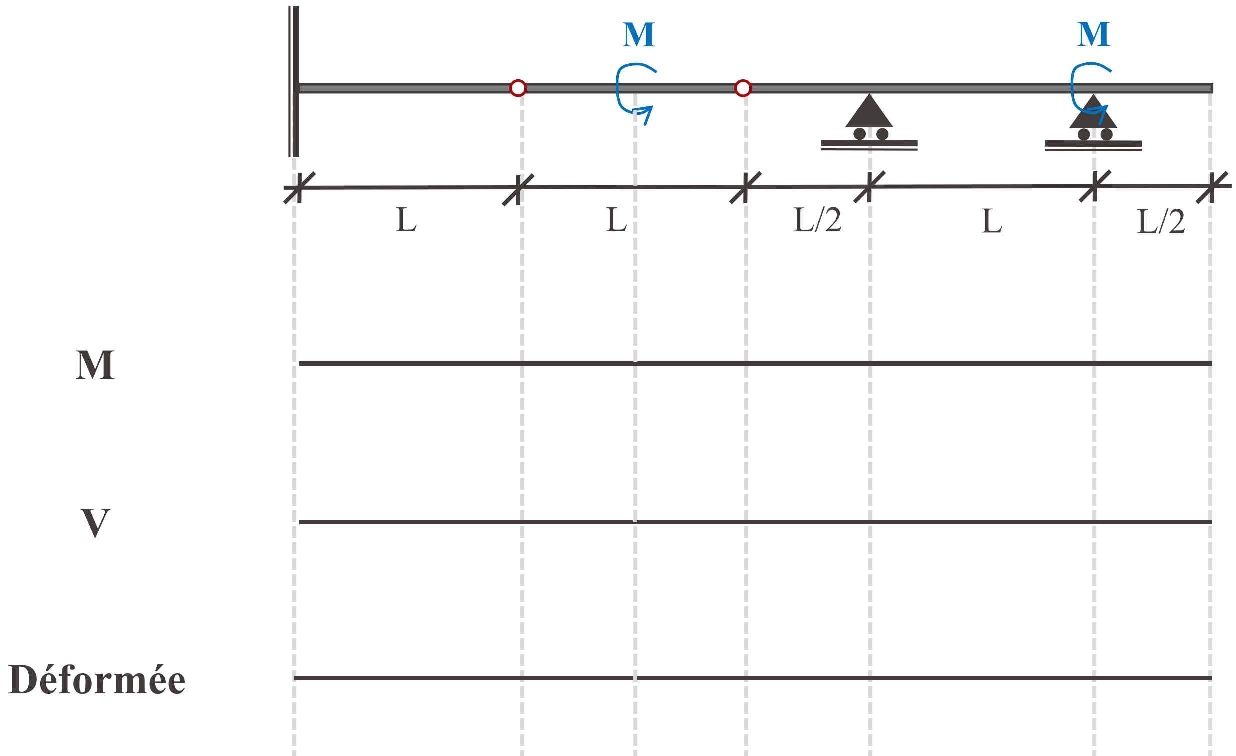


Exemple 3 (brouillon)

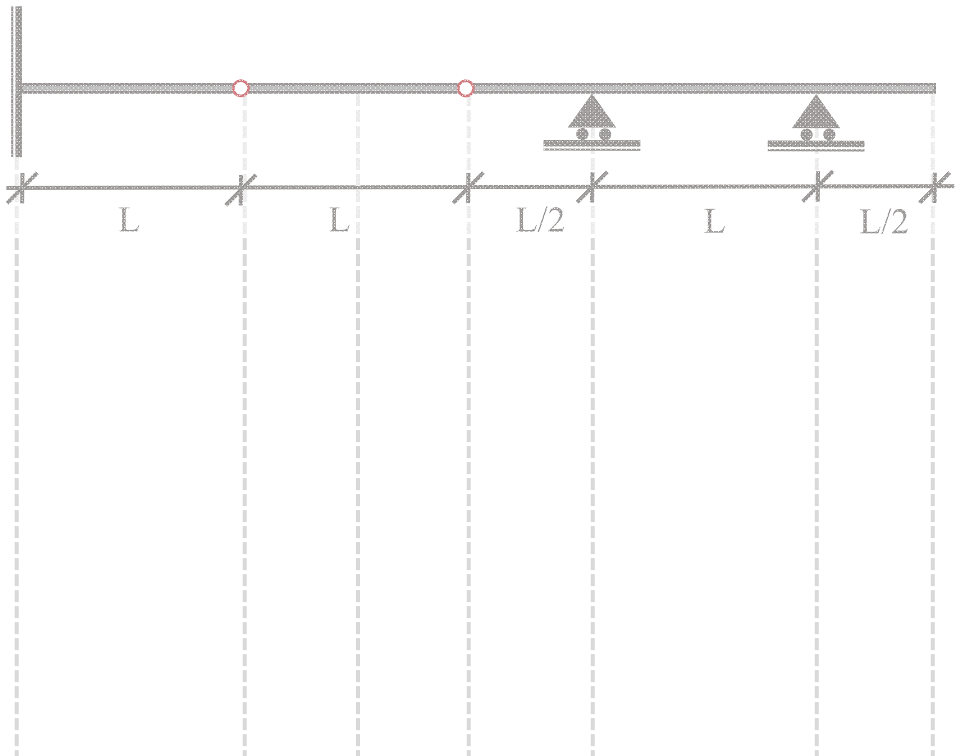


EPFL

Exemple 4: Poutre cantilever avec deux moments concentrés



Exemple 4 (brouillon)

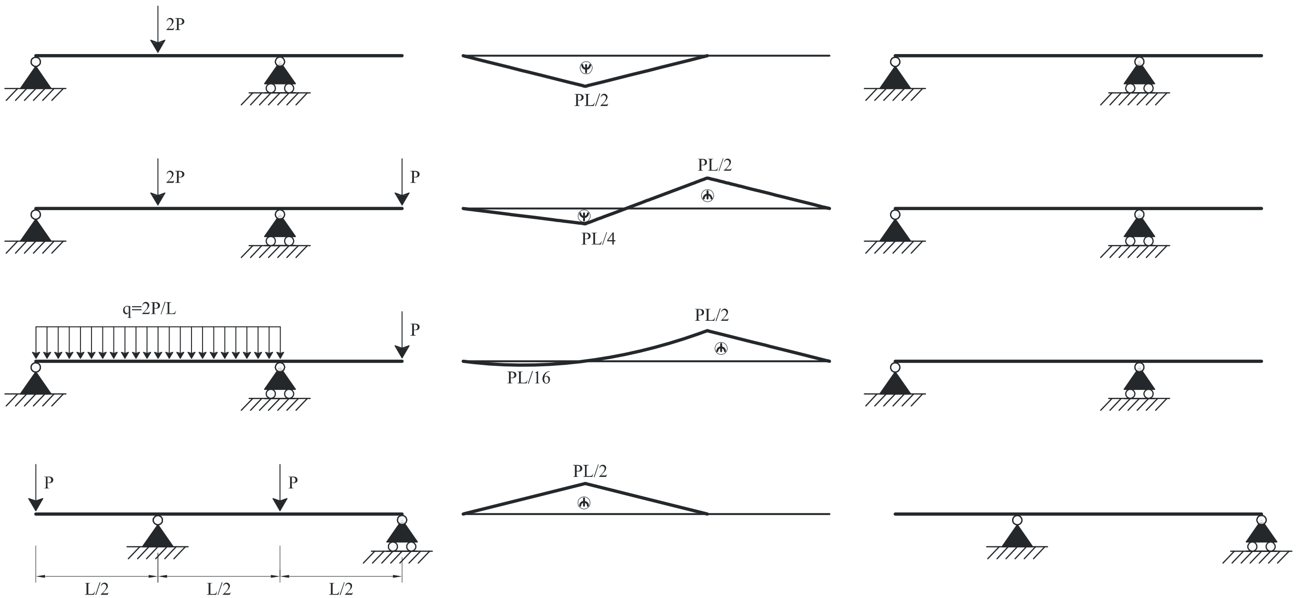


Règles pour esquisser la déformée

- Respecter les appuis
- Nœuds rigide → l'angle du nœud est conservé
- Articulations → les angles ne sont pas conservés
- Point d'inflexion en x (la courbure change de sens) → $M(x) = 0$
- La portée d'une poutre fléchie ne change pas
  - théorème des petits déplacements: si la courbure est faible, $\cos(\alpha) \sim 1$
- Si $M(x) = 0$ sur un tronçon de la poutre, l'élément reste droit

A votre tour!

Esquisser les déformées des poutres suivantes avec porte-à-faux



Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 9:** Poutres à plan moyen 9.5, 9.6, 9.2.2

Références

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0
- [3] Stuttgarter Fernsehturm © Taxiarchos228, FAL
- [4] Poutre cantilever et empilement de poutres équivalent: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.

Poutres à plan moyen: Exercices additionnels

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Identifier rapidement les incohérences dans les diagrammes NVM et dans le dessin de la déformée
- Utiliser le théorème des 2 moments ou « principe de superposition »
- Comment calculer les efforts NVM sur des poutres cintrées
- Comment calculer les efforts NVM et comment dessiner la déformée de portiques articulés

Contenu du cours

1. Principe de superposition
2. Poutres courbes – équations différentielles d'équilibre
3. Portiques à trois articulations

Examen 2

- Mardi 5.5.2020 ~10:15-11:15
- Obligatoire, compte 25% vers la note finale

- Contenu:
  - Tous les chapitres des semaines 1 à 10

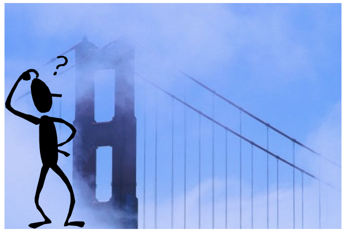
- Permis:
  - “formulaire”: deux pages manuscrites (= une feuille recto-verso)

Examen 2

- Questions standard

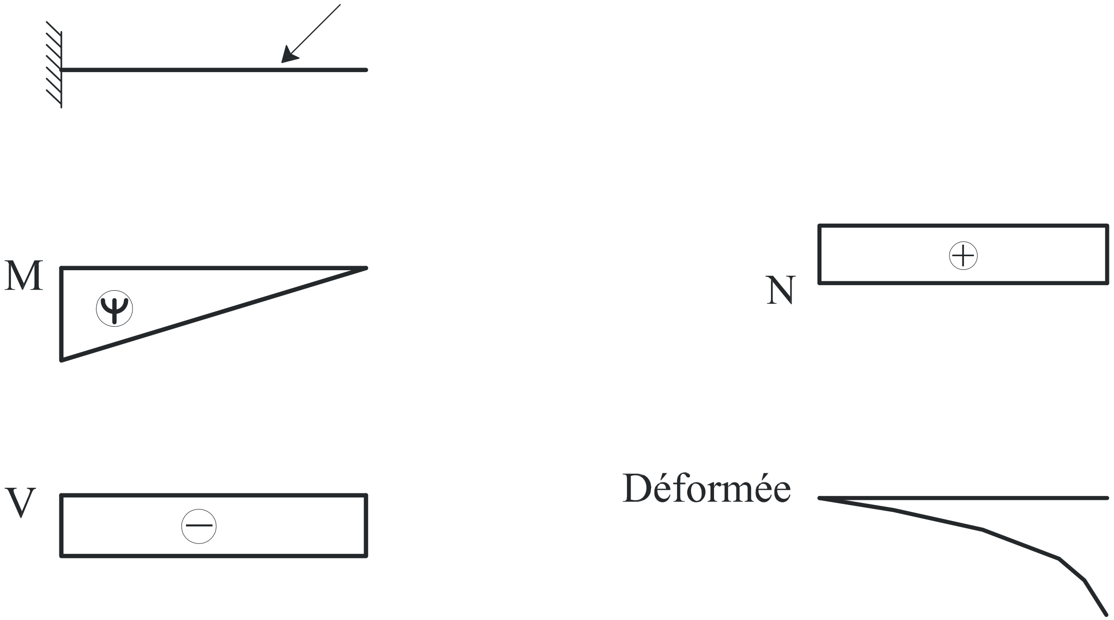
  Donné: Système statique avec des charges

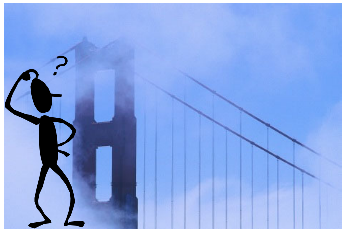
  - Montrer que la structure est isostatique
  - Calculer les réactions d'appuis
  - Tracer les diagrammes des efforts intérieurs NVM et calculer toutes leurs valeurs caractéristiques
  - Tracer l'allure de la déformée
  - Calculer quelques grandeurs statiques par le TdV
- D'autres types de questions
  - Tracer les diagrammes NVM sans faire de calculs
  - Diagrammes NVM donnés, trouver les charges
  - Trouver des erreurs dans les diagrammes NVM
  - etc.



A votre tour!

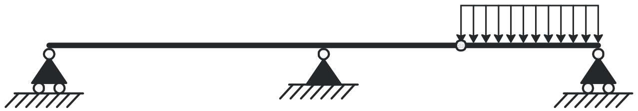
Trouver 7 erreurs dans les diagrammes NVM et la déformée

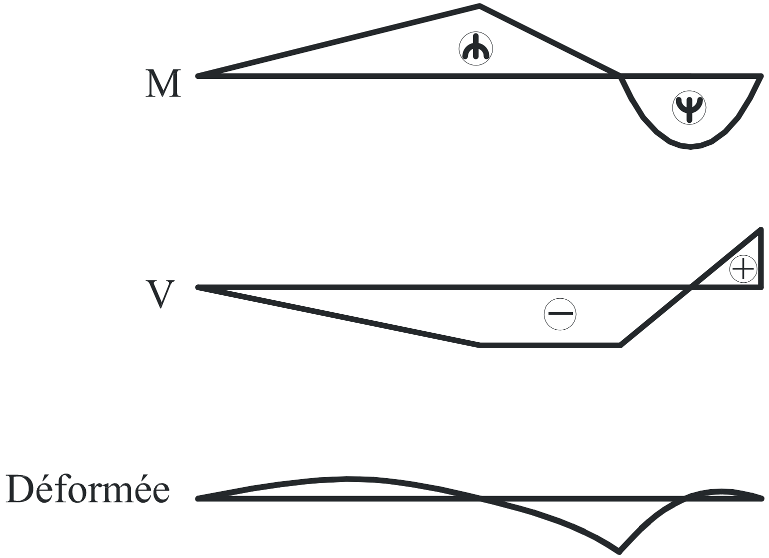




A votre tour!

Trouver 3 erreurs dans les diagrammes NVM et la déformée



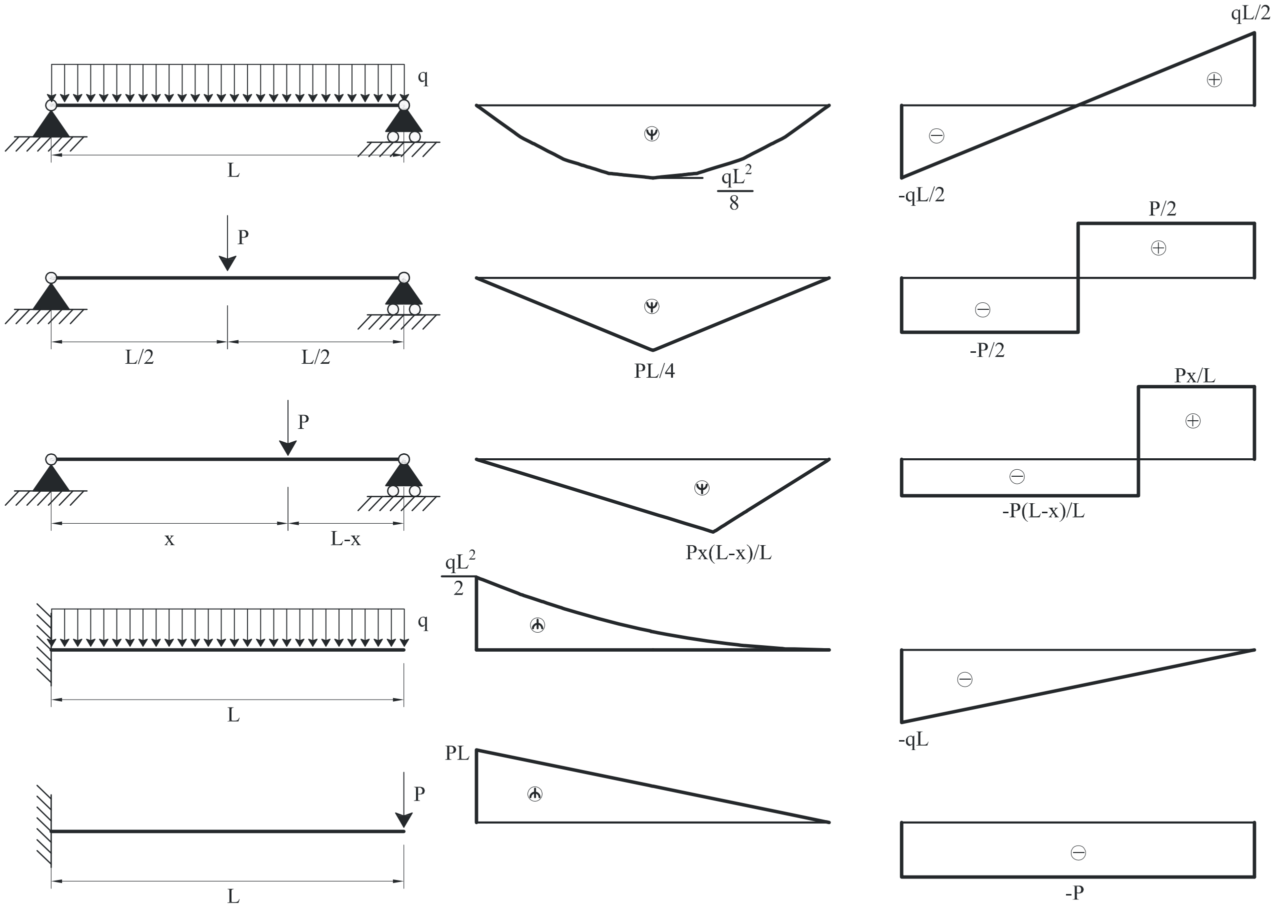


3 méthodes pour déterminer les diagrammes NVM

1. Règles pour la construction rapide des diagrammes NVM (poutres droites avec des charges concentrées ou uniformément distribuées)
2. Equilibre de fragments
3. Equations différentielles d'équilibre (seulement pour poutres droites)

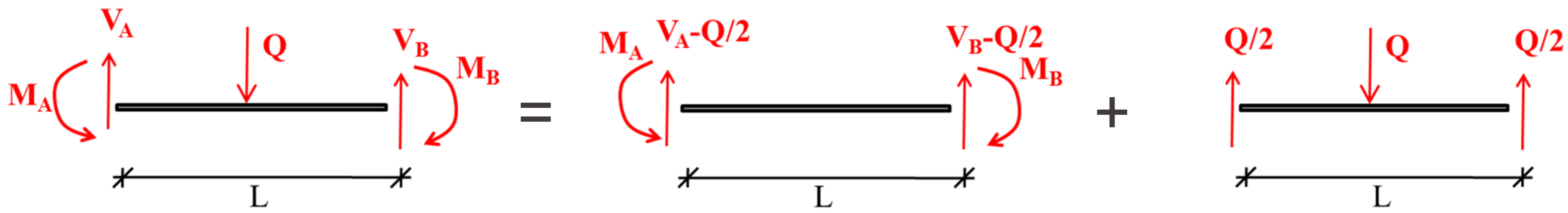
- Les méthodes 2 et 3 donnent les équations pour $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$
  - x est la coordonnée le long de l'axe de la poutre
- La méthode 1 est la méthode la plus rapide pour les poutres droites avec des charges concentrées ou uniformément réparties
  - Calculer seulement les valeurs caractéristiques
    - Valeurs aux extrémités de poutre
    - Valeurs maximales / minimales
    - Valeurs où des charges concentrées sont appliquées
- Il faut connaître les trois méthodes.

Cas à connaître par cœur



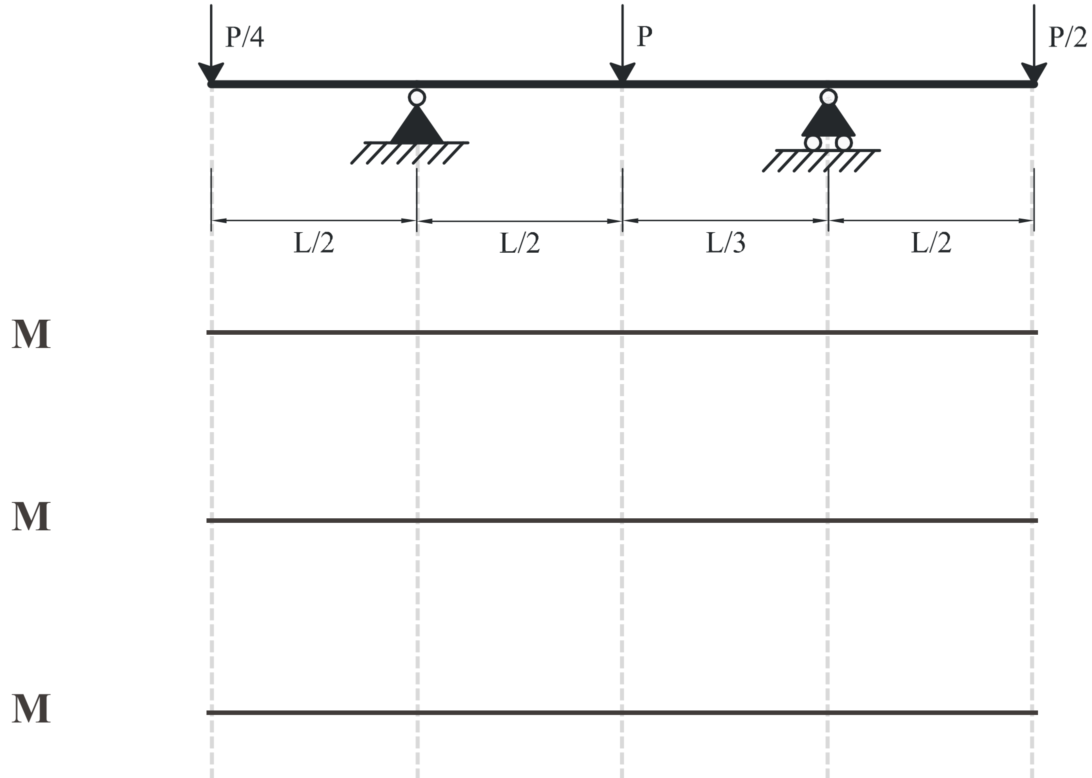
Théorème des 2 moments (superposition)

Fragment en équilibre (efforts intérieurs sont montrés dans leur sens actuels, pas dans le sens positif):



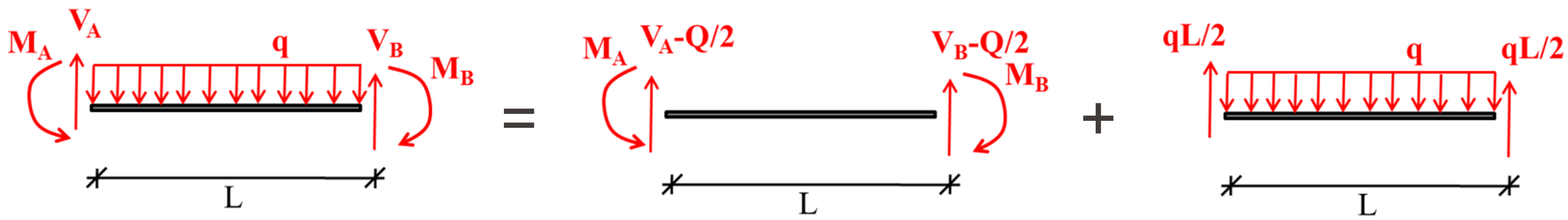
M ———— = ———— + ————

Exemple 1: Application du théorème des 2 moments



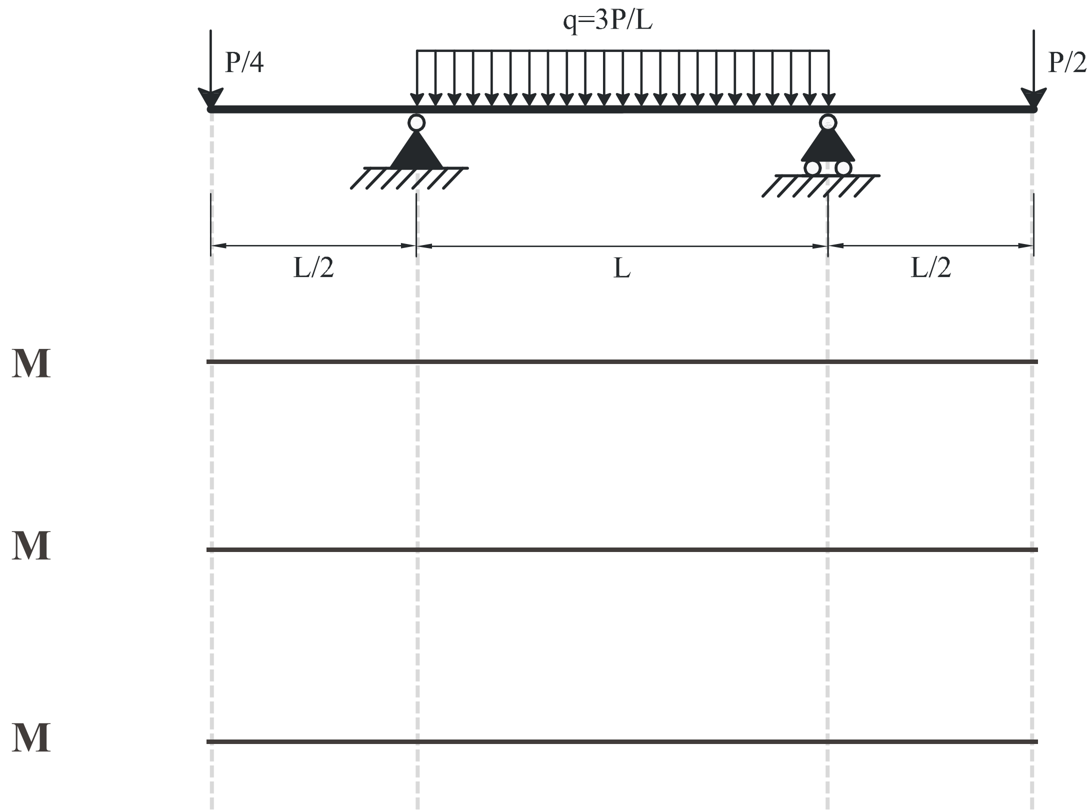
Théorème des 2 moments (superposition)

Fragment en équilibre (efforts intérieurs sont montrés dans leur sens actuels, pas dans le sens positif):

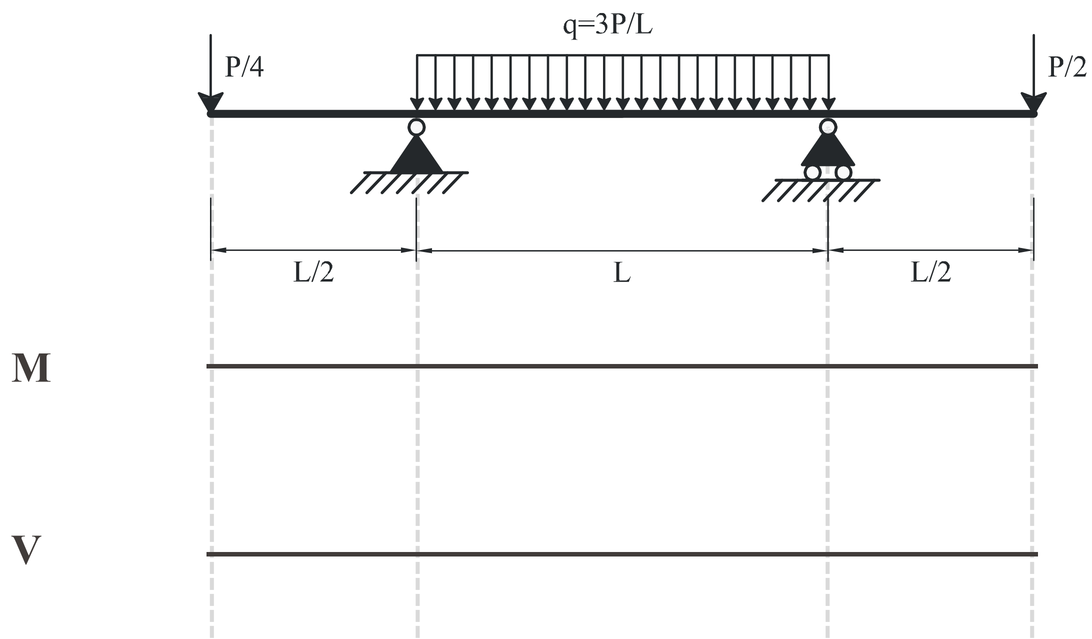


M ______ = ______ + ______

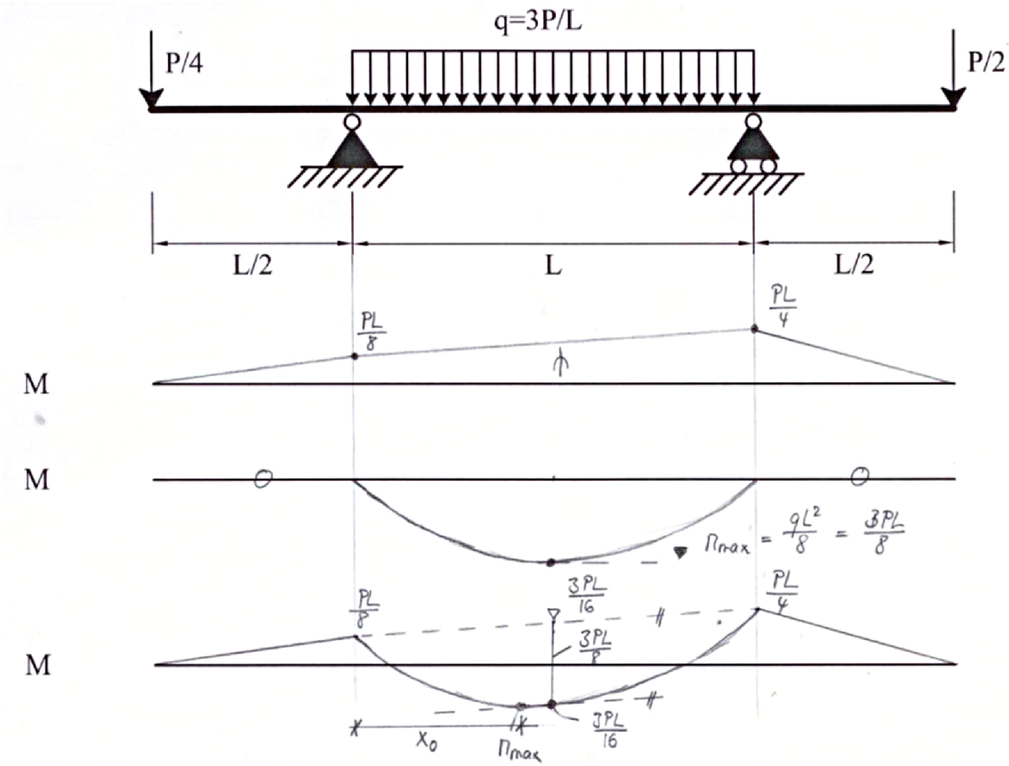
Exemple 2: Application du théorème des 2 moments



Exemple 2 (suite)



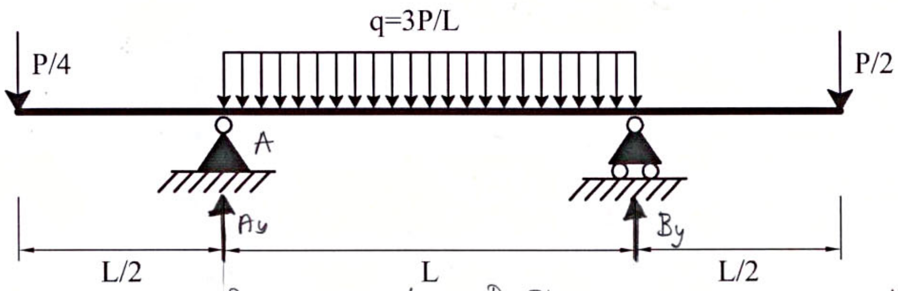
Exemple d'application



$M_{max} = 0.19\,PL$

$x_0 = \frac{11}{24}L \quad (M_{max} \text{ ou } V=0)$

Exemple d'application (suite)

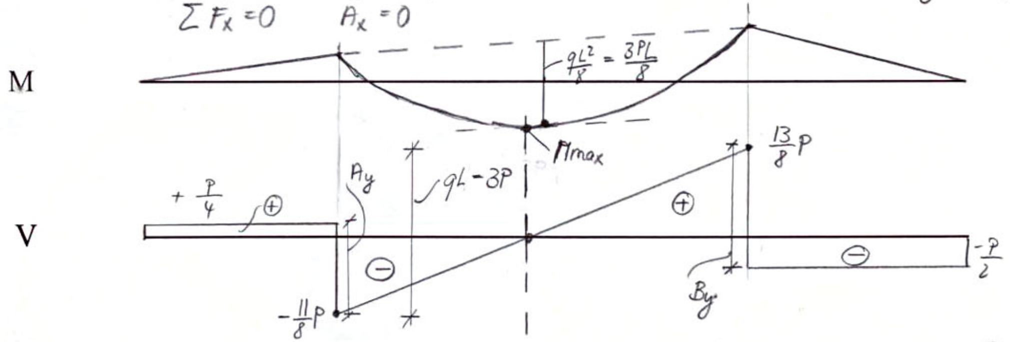


Forces de réaction:

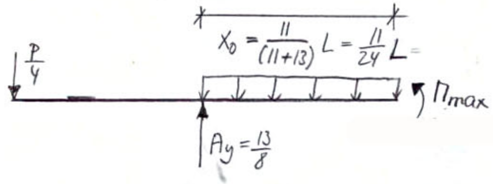
$\Sigma M_A = 0 \quad \frac{P}{4}\cdot\frac{L}{2} - q\cdot L\cdot\frac{L}{2} - \frac{P}{2}\cdot\frac{3L}{2} + B_y\cdot L = 0 \qquad B_y = \frac{17}{8}P$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + B_y - \frac{P}{4} - qL - \frac{P}{2} = 0 \qquad A_y = \frac{13}{8}P$

$\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$



Calculer M_{max}:



Pour calculer M_{max}: Couper où $V=0$

→ équilibre du tronçon

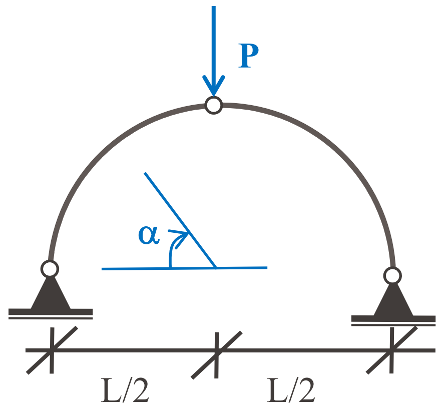
$\Sigma M = 0 \quad M_{max} + \frac{P}{4}\left(\frac{L}{2}+x_0\right) - A_y\cdot x_0 + q\cdot\frac{x_0^2}{2} = 0$

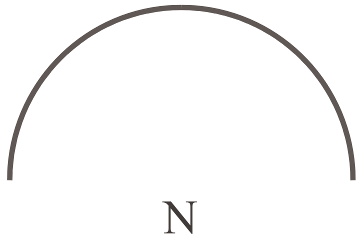
$M_{max} = \underline{\underline{0.1901\ PL}}$

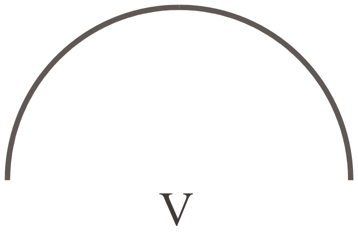
Exemple 3: Arc à trois rotules en forme de demi-cercle

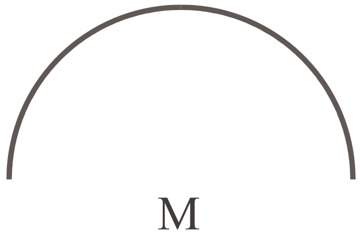
Prof. Katrin Beyer

Calculer les efforts NVM en fonction de α et dessiner l'allure des diagrammes NVM

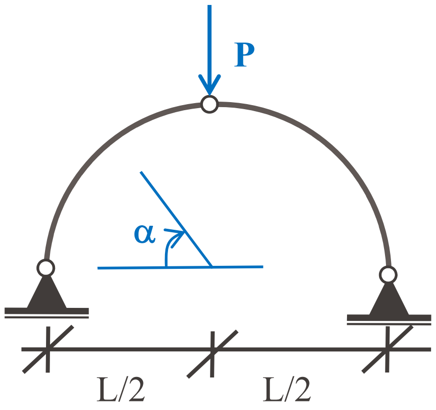




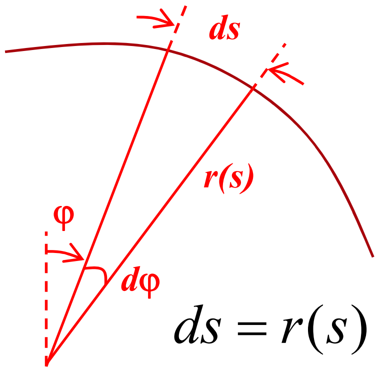




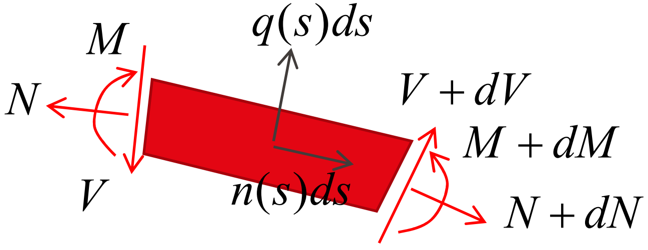
Exemple 3 (suite)



Poutres courbes – équations différentielles d'équilibre



$$ds = r(s) \cdot d\varphi$$

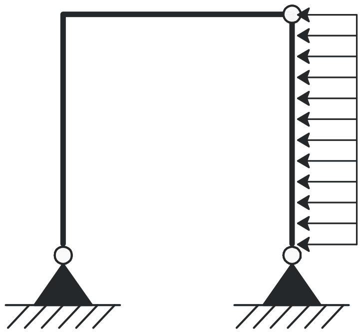


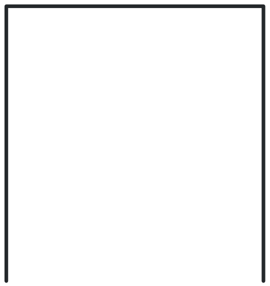
$$\frac{dN}{ds} + \frac{V}{r} + n = 0$$

$$\frac{dV}{ds} - \frac{N}{r} + q = 0$$

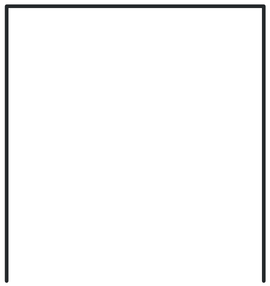
$$\frac{dM}{ds} + V = 0$$

Exemple 4: Dessiner l’allure des diagrammes MV et de la déformée

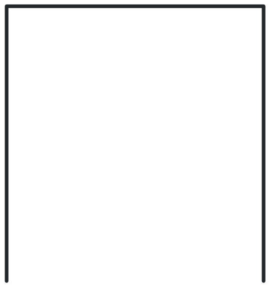




M



V

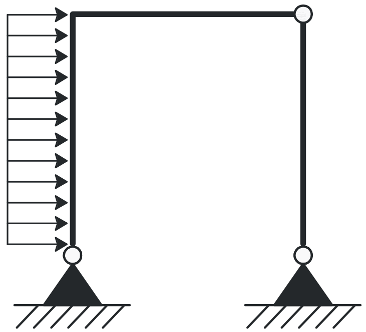


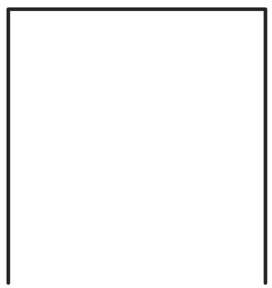
Déformée

EPFL

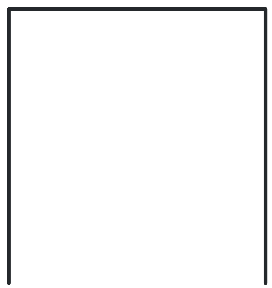
Exemple 5: Dessiner l’allure des diagrammes MV et de la déformée

Prof. Katrin Beyer

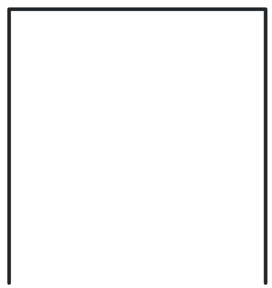




M



V



Déformée

Chapitres à étudier dans le TGC 1

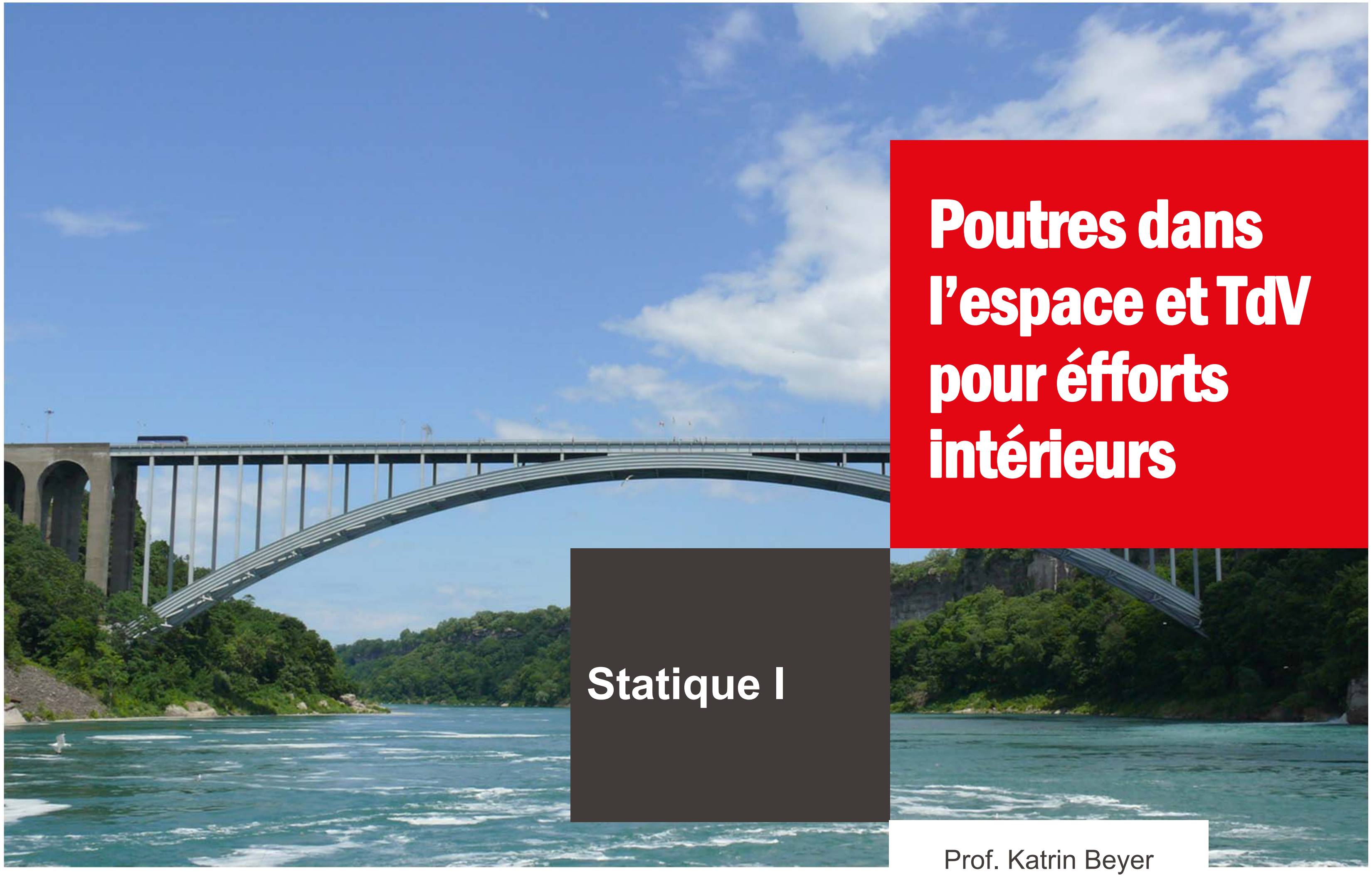
- **Chapitre 9:** Poutres à plan moyen 9.5, 9.6, 9.2.2

Références

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0

EPFL



Poutres dans l'espace et TdV pour éfforts intérieurs

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Comment calculer les efforts dans une poutre en éspace
- Comment contrôler les efforts intérieurs avec le TdV

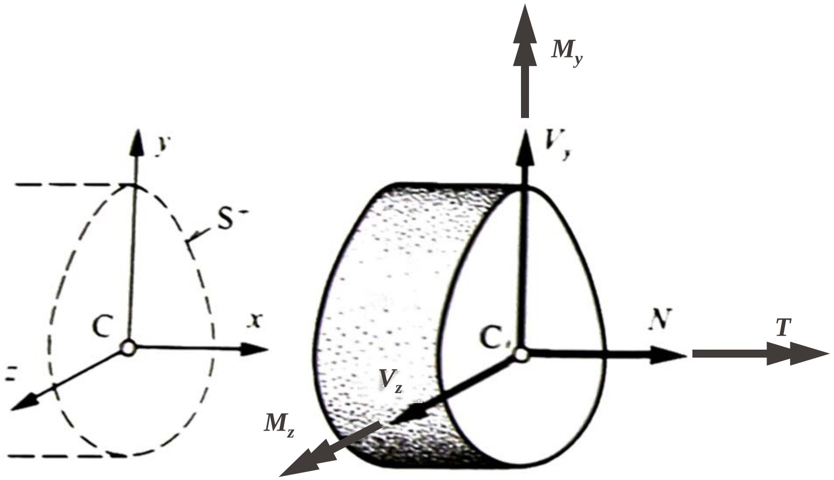
Contenu du cours

1. Efforts intérieurs d’une poutre dans l’espace
2. Théorème des déplacements virtuels
   - contrôle des efforts intérieurs par le Tdv

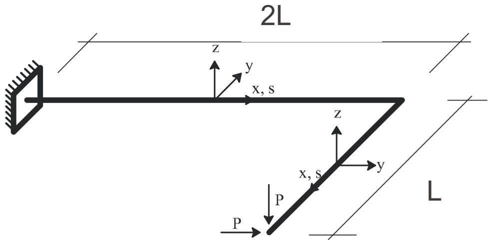
Efforts intérieurs d'une poutre dans l'espace

Prof. Katrin Beyer

- F_x Effort normal N
- F_y, F_z Efforts tranchants V_y et V_z
- M_x Moment de torsion T
- M_y, M_z Moments de flexion (ou fléchissants) M_y et M_z



Exemple



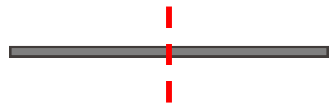
Prof. Katrin Beyer

Révision du Théorème des dépl. virtuels

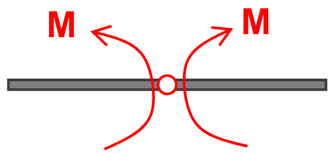
1. Introduire la coupure simple qui extériorise la force qu'on veut calculer (force de réaction, force de liaison ou effort intérieur)
   - Si la structure est isostatique, on obtient un mécanisme
2. Trouver un champs de déplacement qui **respecte toutes les autres liaisons**
3. Calculer cette force par le théorème des dépl. virtuels $\delta W = 0$

Coupure simple d'une poutre

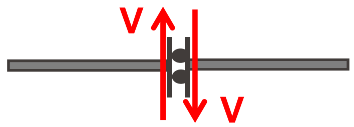
Coupure relative à l'axe suivant



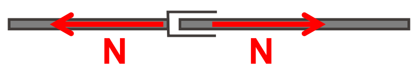
Coupure pour faire apparaitre le moment M



Coupure pour faire apparaitre l'effort tranchant V



Coupure pour faire apparaitre l'effort normal N

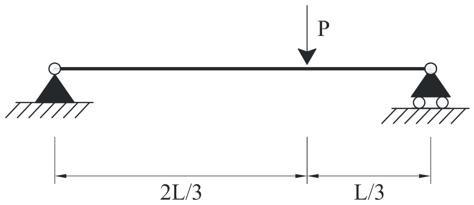


Coupure simple et naissance d'un effort intérieur:

1. Introduire un degré de liberté en supprimant la liaison associée à ce degré
2. Extérioriser cet effort intérieur
3. Un effort intérieur apparait sur **chaque face** de la coupure (soit une **paire** d'efforts par coupure)

Exemple 1: Poutre simples avec charge concentrée

Analyse standard (calcul rapide et équilibre des fragments)

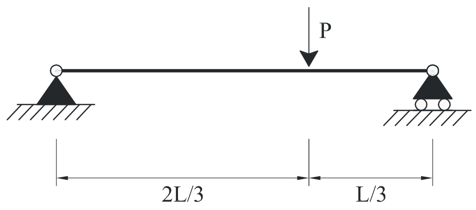


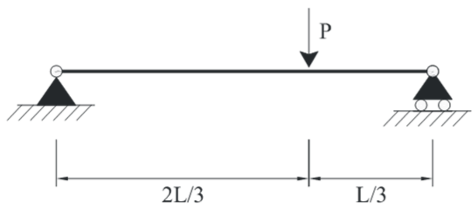
M

V

Exemple: Poutre simples avec charge concentrée

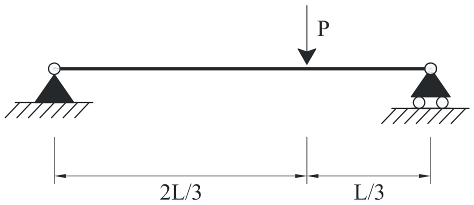
Contrôler le moment à $x = 2L/3$ par le TdV

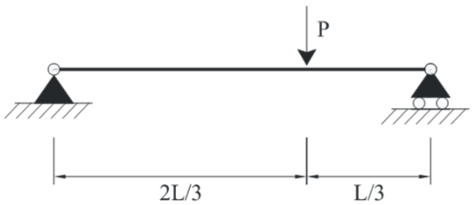




Exemple: Poutre simples avec charge concentrée

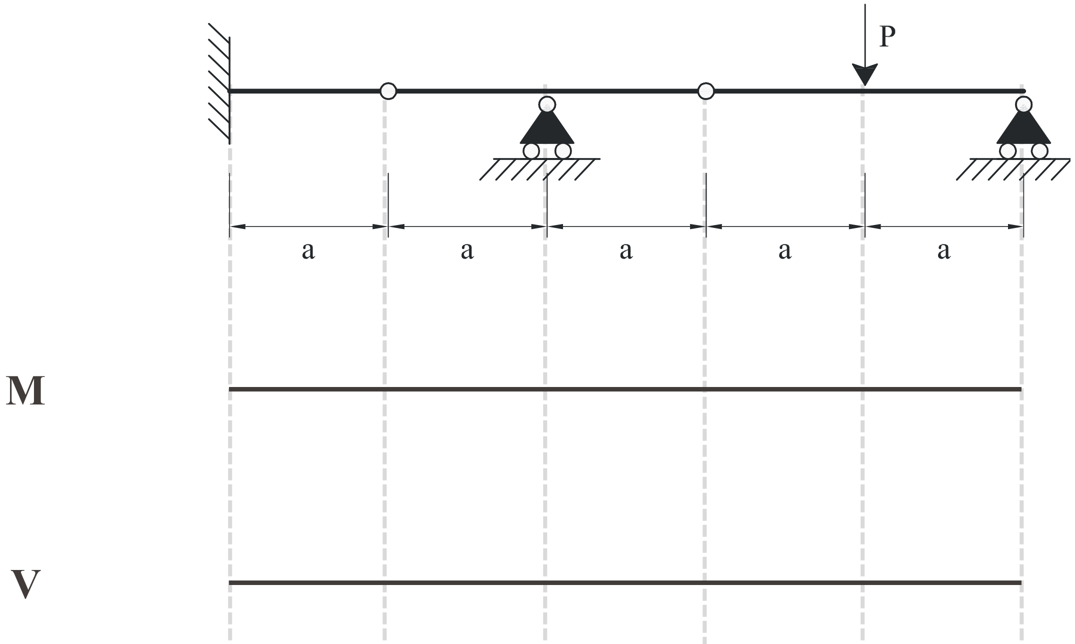
Contrôler l'effort tranchant à $x = 2L/3$ par le TdV





A votre tour!

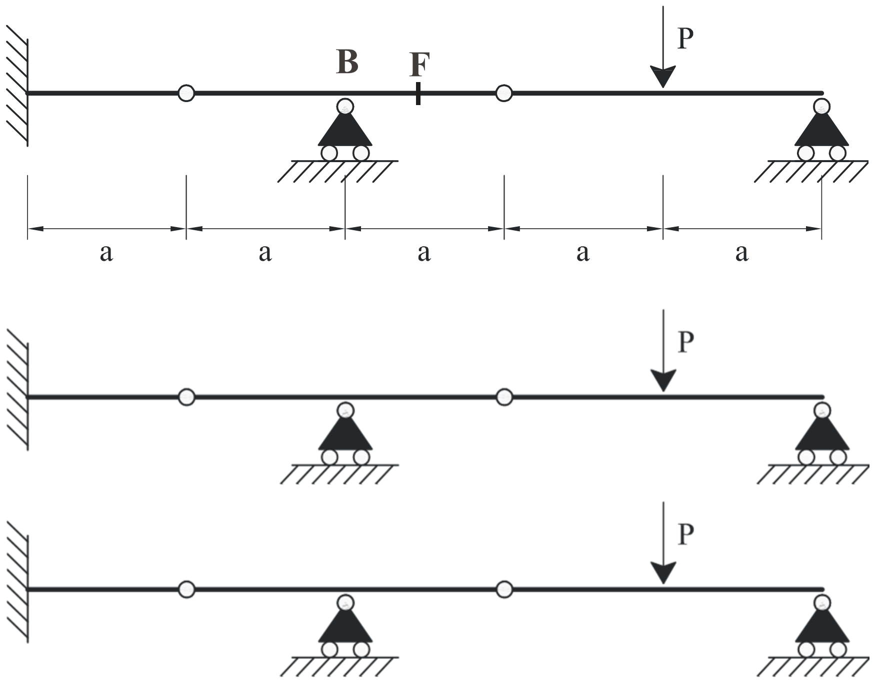
Tracer les diagrammes MV de la poutre cantilever



Prof. Katrin Beyer

A votre tour!

Contrôler le moment en B et l'effort tranchant en F avec le TdV



M_b

V_F

EPFL

Références

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0
- [3] Poutre dans l'espace, ex. 8.10.1 (i), Structure composée en treillis: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.

EPFL

Lignes d’influence

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Comment on définit un train de charges mobiles
- Ce qu’est une ligne d’influence et quelle est son utilité
- Comment calculer une ligne d’influence en utilisant l’équilibre et le TdV
- Quel est le lien entre les diagrammes NVM et les lignes d’influence d’un point de la poutre

Contenu du cours

1. **Définition d'une « ligne d'influence »**
2. Calcul des lignes d'influence par l'équilibre
3. Calcul des lignes d'influence par le Tdv
   - Principe et application aux réactions d'appuis
   - Lignes d'influence des forces de liaison
   - Lignes d'influence des efforts intérieurs
   - Trains de charges

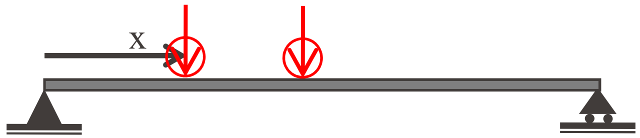
EPFL

Charges mobiles

Prof. Katrin Beyer

- Exemples de charges mobiles:
  - Véhicule sur un pont
  - Pont roulant sur des rails

- Les effets statiques (forces de réaction, forces de liaison et efforts intérieurs) changent avec la position de la charge mobile
  - Il faut étudier la variation des effets statiques en fonction de la position de la charge mobile
  - On veut trouver la position de la charge qui maximise un certain effet statique



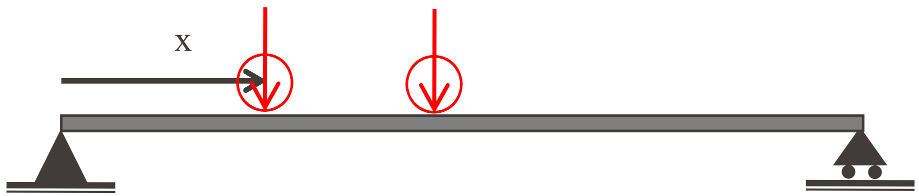
Définitions

Train de charges:

Un groupe mobile de charges dont les positions relatives et les intensités sont fixes.

Chemin de roulement:

Eléments de structure sur lesquels le train de charges peut agir (ex: tablier de pont).

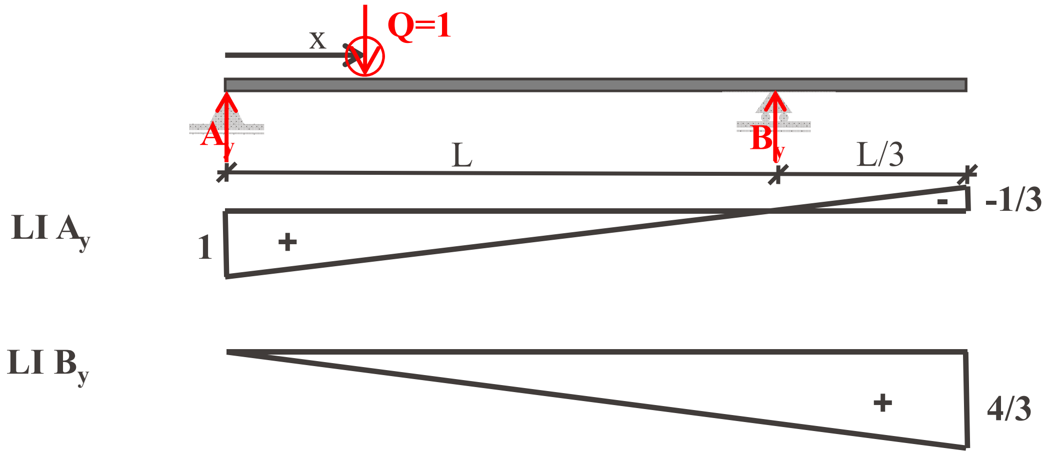


Définitions

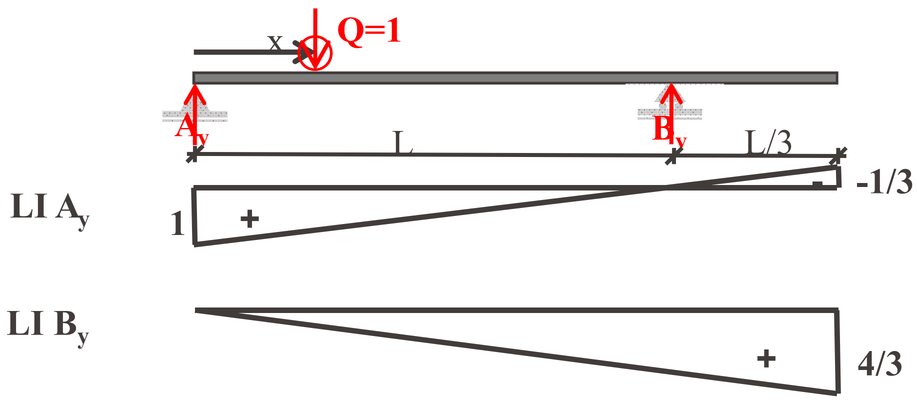
Ligne d'influence:

La courbe qui donne la valeur d'une force de réaction ou d'un effort intérieur à une position fixe pour toutes les positions possibles d'une charge mobile.

- *la ligne d'influence est typiquement calculée pour une charge unitaire*



Exemple: pont avec porte-à-faux



- Pour quelle position de la charge la réaction B_y devient-elle maximale?

- Si la charge vaut $50\ kN$, combien vaut cette réaction?

Contenu du cours

1. Définition d'une « ligne d'influence »
2. **Calcul des lignes d'influence par l'équilibre**
3. Calcul des lignes d'influence par le Tdv
   - Principe et application aux réactions d'appuis
   - Lignes d'influence des forces de liaison
   - Lignes d'influence des efforts intérieurs
   - Trains de charges

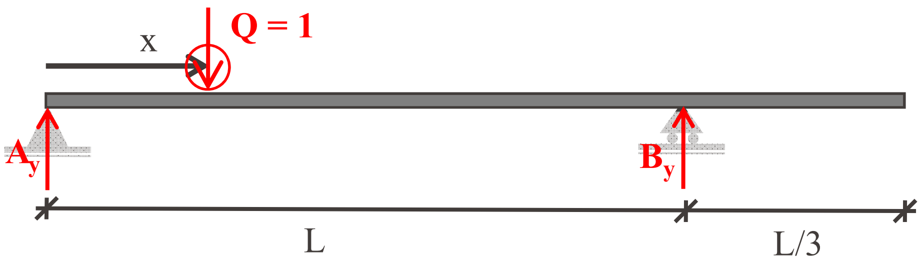
Calcul des ligne d'influences

Marche à suivre pour calculer les lignes d'influence par l'équilibre des fragments:

1. Introduire la position de la charge mobile $Q = 1$ par une variable x
2. Extérioriser l'effet statique recherché en effectuant la coupe appropriée
3. Résoudre l'équilibre en fonction de la position x de la charge

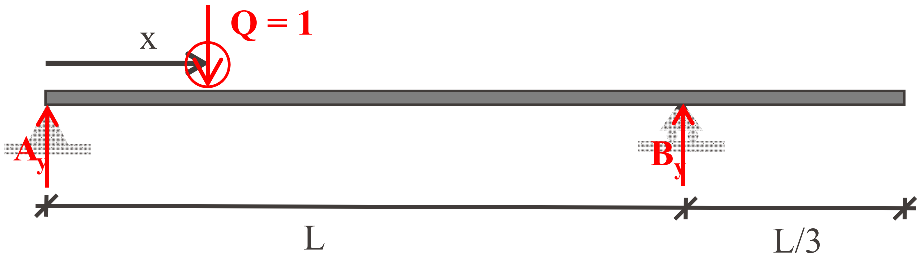
Exemple 1: charge mobile sur une poutre simple avec un porte-à-faux

Calculer la réaction A_y en fonction de la position x de Q.



Exemple 1 (suite)

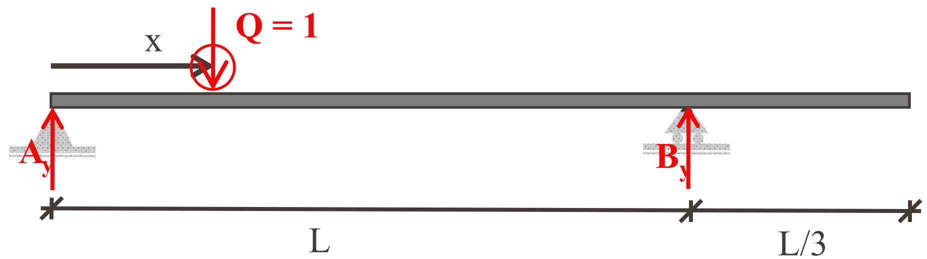
Contrôle de A_y pour quelques positions x de la charge $Q = 1$



Exemple 1 (suite)

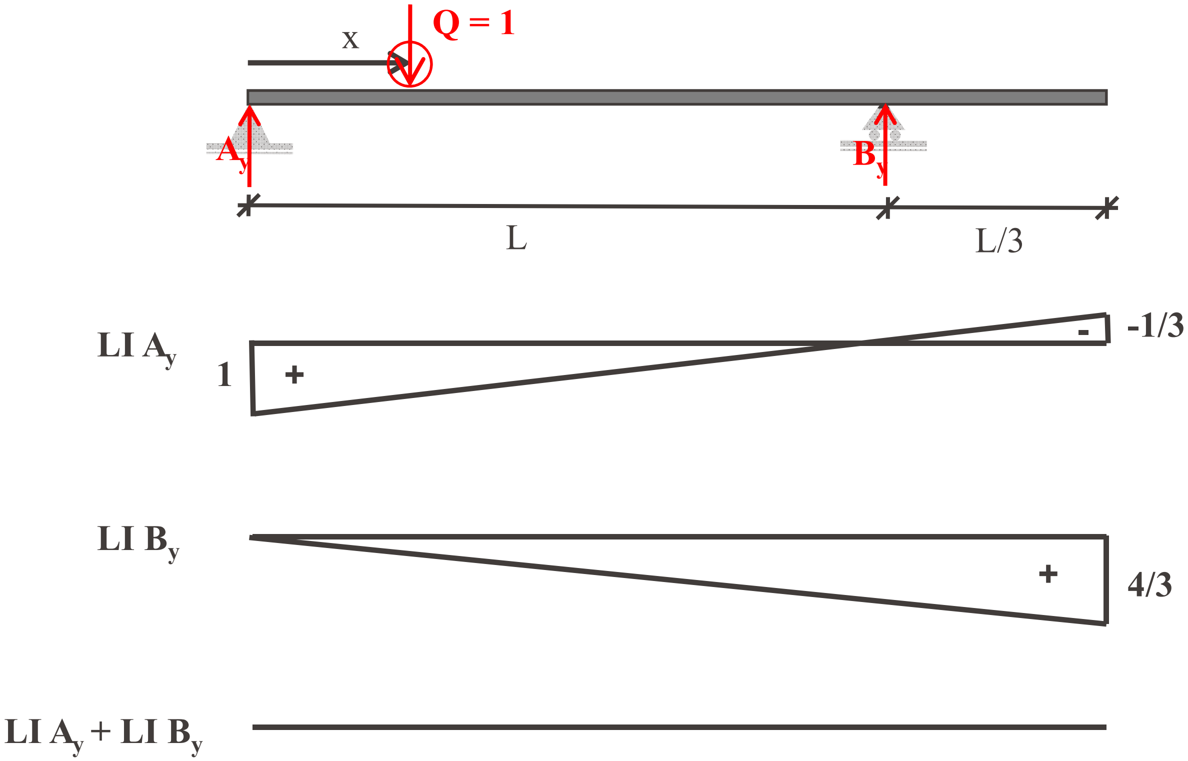
Prof. Katrin Beyer

Calculer la réaction B_y en fonction de la position x de Q.



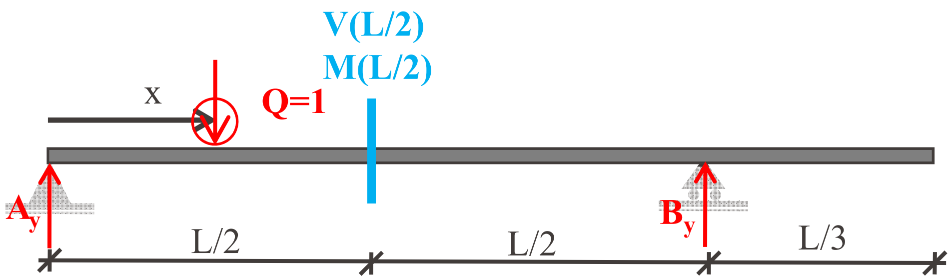
Exemple 1 (suite)

Remarque: somme des réactions



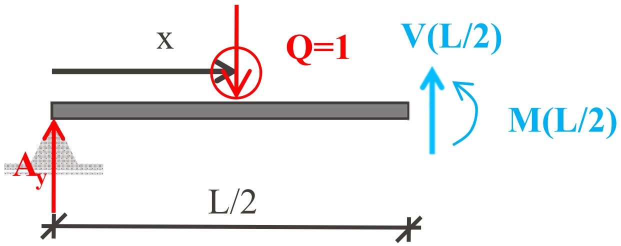
Exemple 2: lignes d'influences des efforts intérieurs

Calculer les lignes d'influences de M et V à mi-portée de la poutre



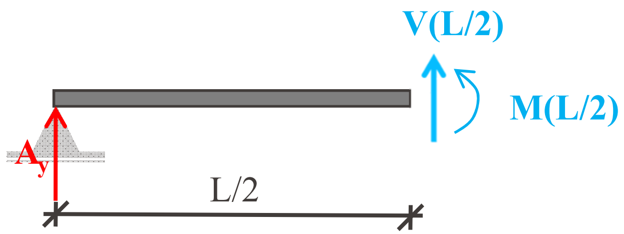
Exemple 2 (suite)

Cas 1: $x < L/2$



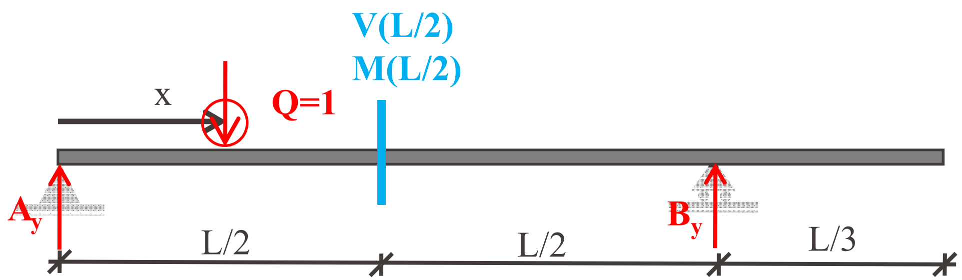
Exemple 2 (suite)

Cas 2: $x > L/2$



Exemple 2 (suite)

Lignes d'influence



LI $V(L/2)$

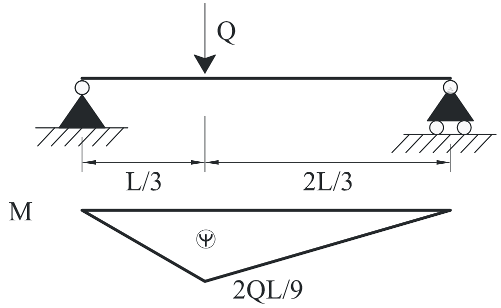
LI $M(L/2)$

Remarque

Il ne faut pas confondre les diagrammes NVM avec les lignes d'influence des efforts intérieurs.

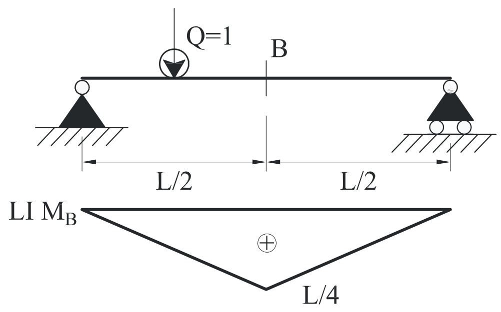
- Diagrammes NVM

  Donnent les valeurs NVM le long de l'axe de la poutre pour un ***système de charges fixe***



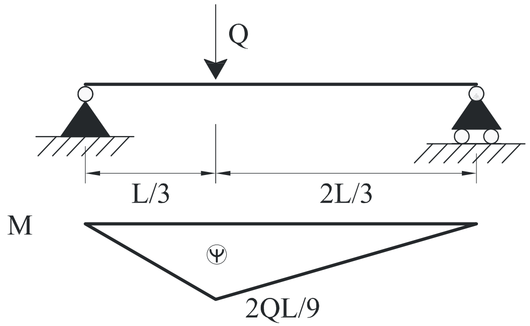
- Lignes d'influence des efforts intérieurs NVM

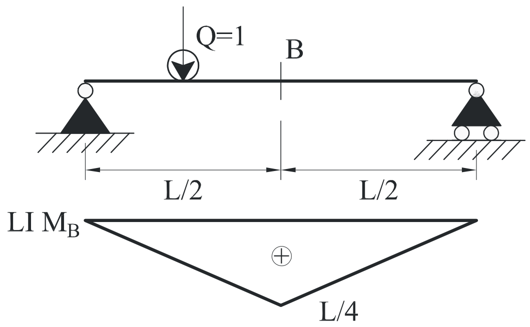
  Donnent les valeurs NVM pour une ***section spécifée*** *et pour un* ***système de charges mobiles*** *(position des charges varie le long de l'axe de la poutre)*



Exercice

Trouver un point commun entre les deux diagrammes.





Contenu du cours

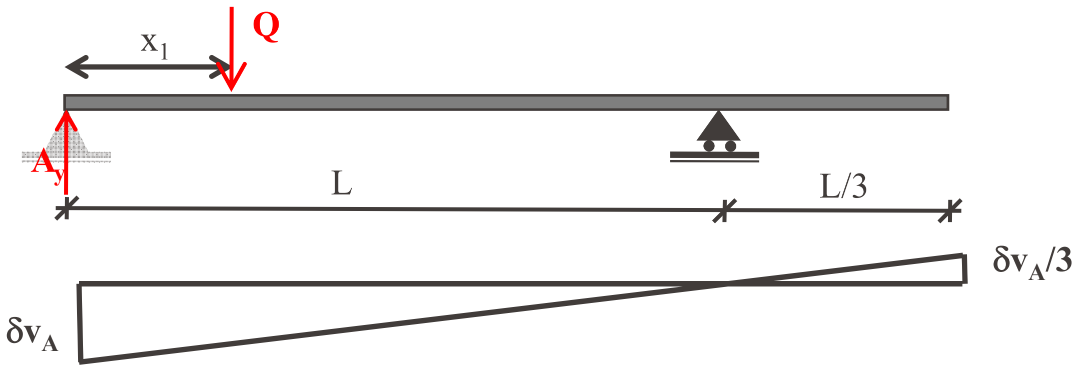
1. Définition d’une « ligne d’influence »
2. Calcul des lignes d’influence par l’équilibre
3. **Calcul des lignes d’influence par le Tdv**
   - **Principe et application aux réactions d’appuis**
   - **Lignes d’influence des forces de liaison**
   - **Lignes d’influence des efforts intérieurs**
   - **Trains de charges**

Lignes d'influence par la Tdv

Calculer par le Tdv

1. La force de réaction A_y pour Q en $x = x_1$
2. La ligne d'influence de A_y

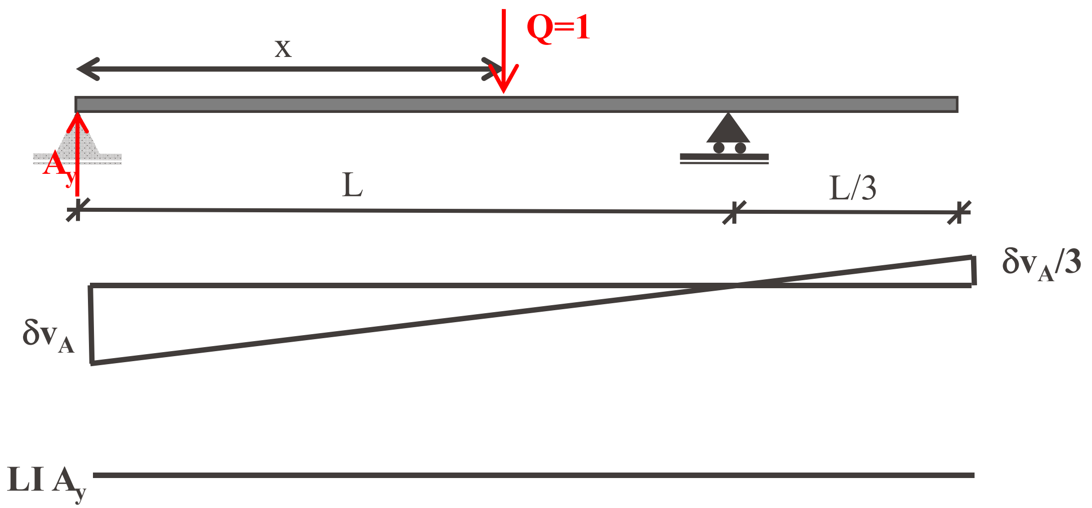
1. Q à $x = x_1$



- Tdv:

Lignes d'influence par la Tdv

2. Ligne d'influence de A_y

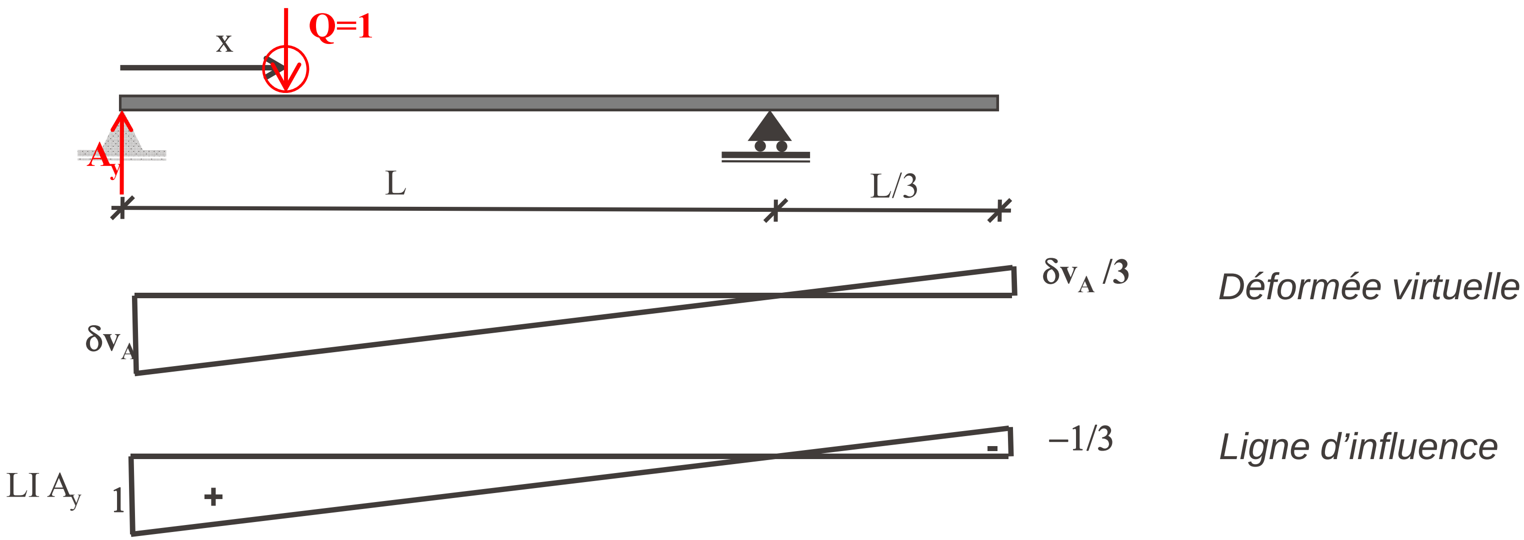


- Si $\delta v_A = 1$:
  - La valeur de A_y lorsque la charge est positionnée en x est la valeur de la déformée virtuelle en x
  - La ligne d'influence **correspond** à la déformée virtuelle

Lignes d'influence par la Tdv

Tracer la ligne d'influence de A_y par le Tdv

- Ligne d'influence de la reaction A_y = déformée virtuelle associée à la coupure simple qui extériorise A_y avec $\delta v_A = 1$



Lignes d'influence par la Tdv

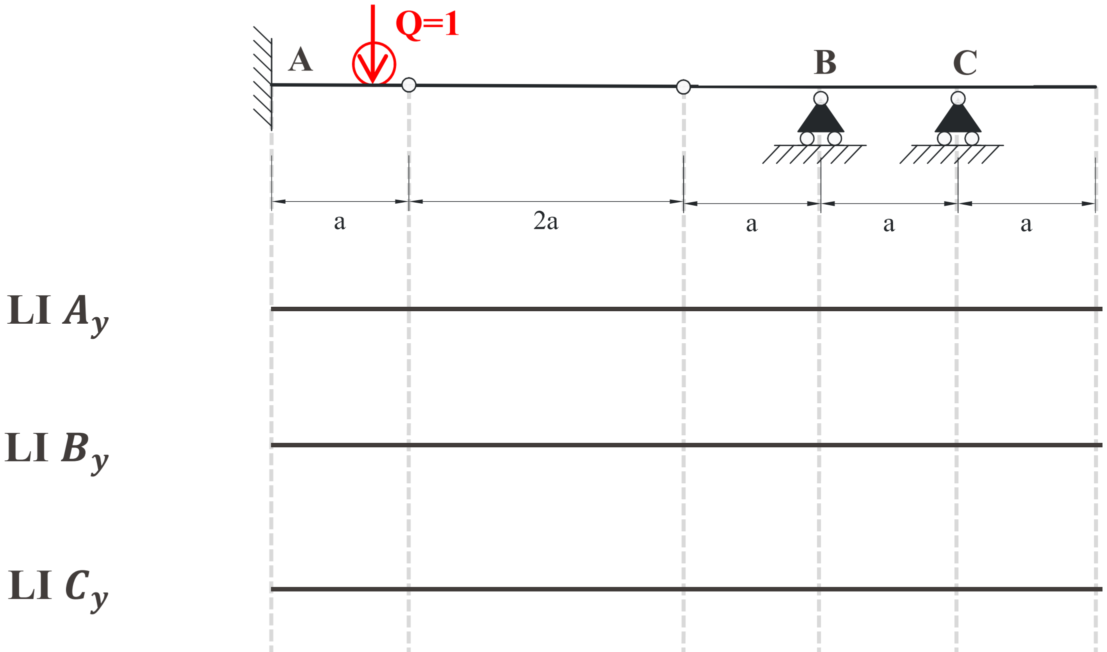
Pour trouver la ligne d'influence d'un effet statique par le théorème des déplacements virtuels:

- Coupure simple relative à l'effet statique recherché
- Trouver la déformée virtuelle compatible avec les appuis tel que le déplacement virtuel associé à l'effet statique recherché soit égal à 1
- La ligne d'influence correspond à la déformée virtuelle

Cette méthode permet de tracer les lignes d'influence sans calculs

A votre tour!

Trouver l'allure (sans calculs) des lignes d'influence des réactions d'appuis pour une charge mobile $Q = 1$ (négliger le signe)

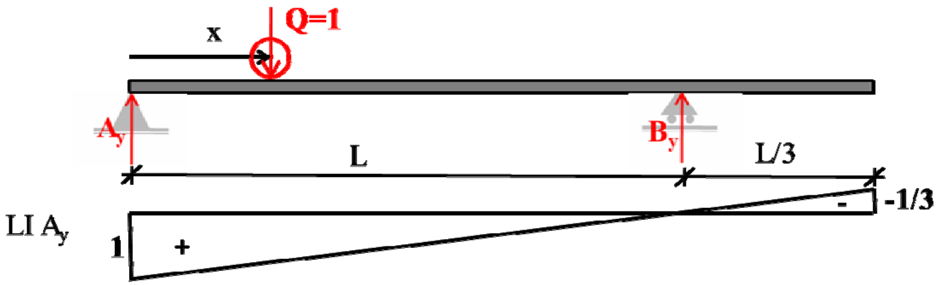


Signe de la ligne d'influence

Si le déplacement virtuel associé à l'effet statique recherché est dans le sens opposé de celui de l'effet statique, *le signe du travail de la charge unitaire donne le signe de la ligne d'influence*.

Les lignes d'influence sont normalement calculées pour des charges qui résultent du poids propre des véhicules

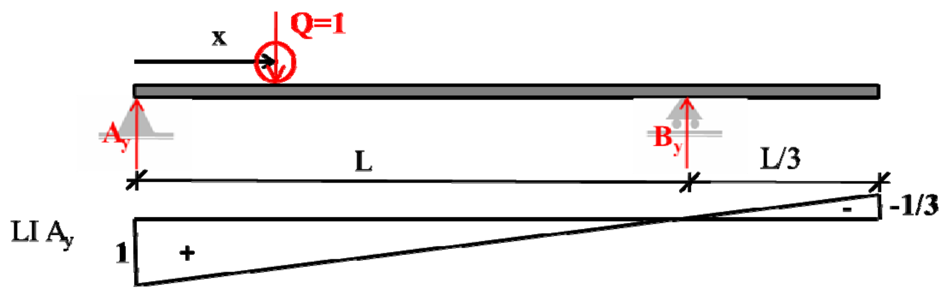
- Charges verticales vers le bas
- Les valeurs positives sont les valeurs en dessous de la ligne repère



Signe de la ligne d'influence

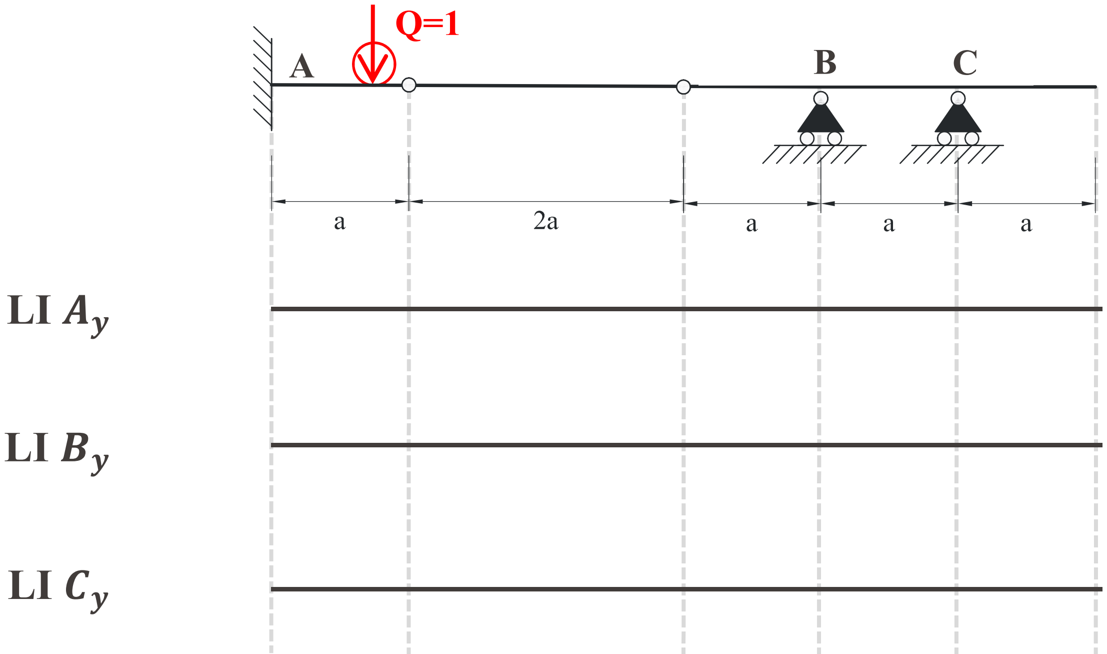
Recommandations:

- Contrôler l'équilibre pour une position de la force unitaire
- Contrôler le signe de l'effet statique recherché (ici A_y) pour cette position
- Les autres signes suivent automatiquement



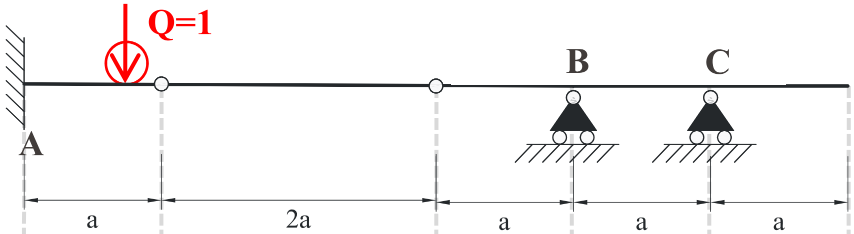
A votre tour!

Trouver l'allure (sans calculs) des lignes d'influence des réactions d'appuis pour une charge mobile $Q = 1$



Exemple

Trouver l'allure de la ligne d'influence du moment d'encastrement M_A pour une charge mobile $Q = 1$

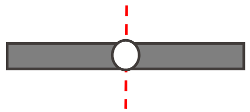


Déformée virtuelle associée à M_A

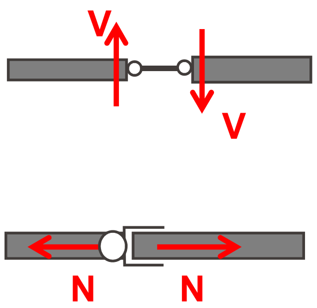
LI M_A

Ligne d'influence d'une force de liaison

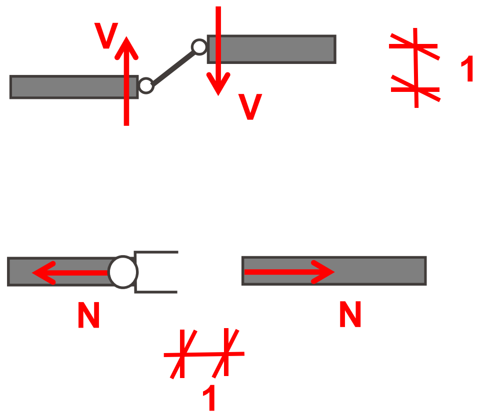
Coupure relative à l'axe suivant



Coupure simple pour extérioriser V et N dans l'articulation

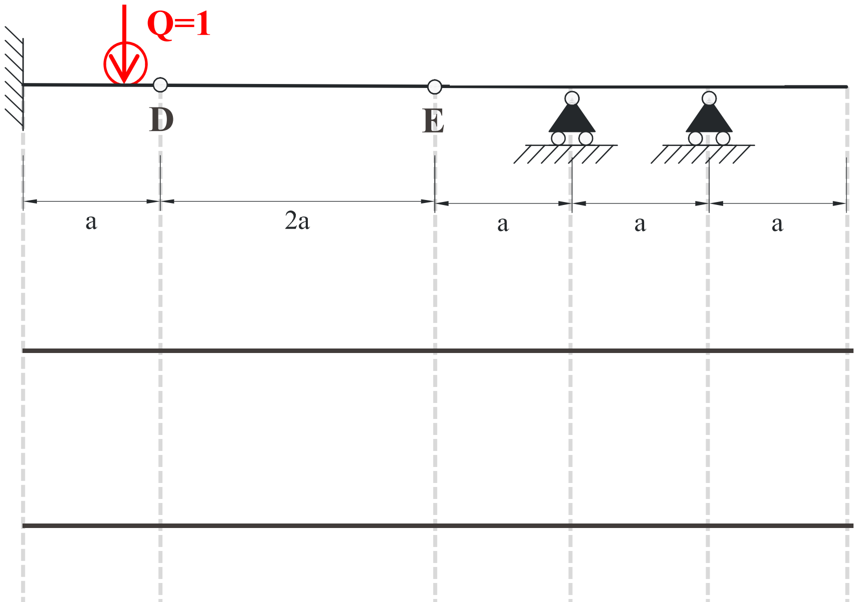


Déplacements virtuels dans le sens opposé des effets statiques extériorisés



A votre tour!

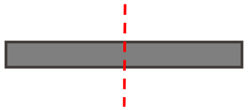
Tracer les lignes d'influence des forces de liaison verticales en D et E pour une charge mobile $Q = 1$



LI D_y

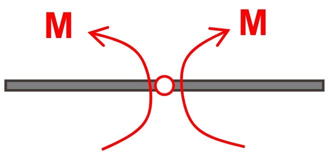
LI E_y

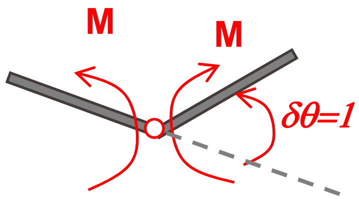
Ligne d'influence des efforts intérieurs

Coupure relative à 

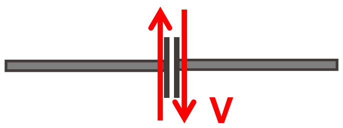
Avec une déformation virtuelle unitaire dans le sens opposé à l'effort intérieur extériorisé

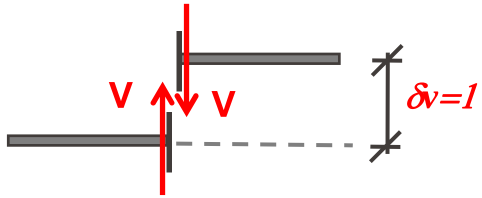
M



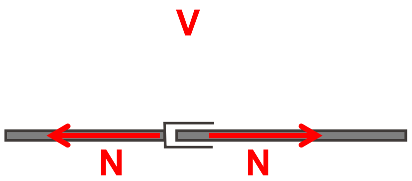


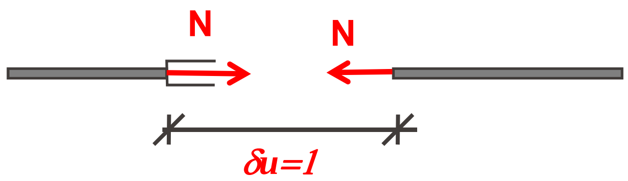
V





N



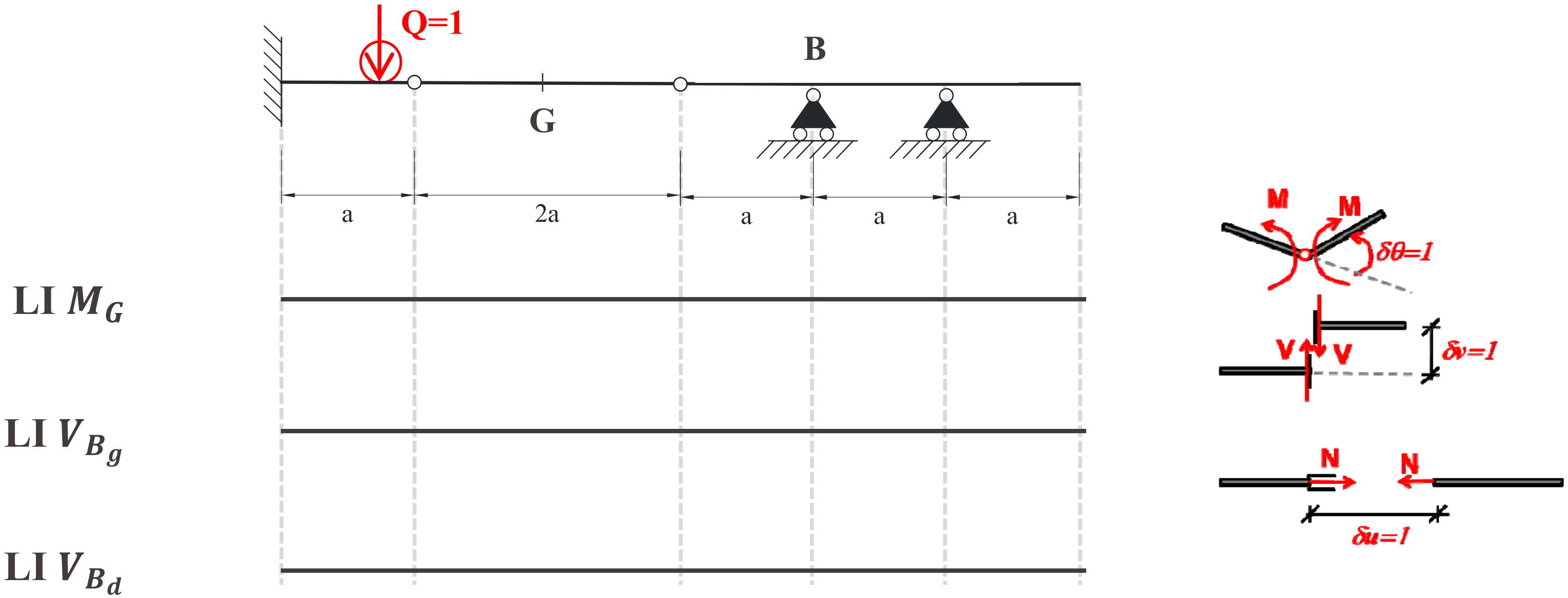


Prof. Katrin Beyer

Exemple

Tracer les lignes d'influence des efforts intérieurs suivants pour une charge mobile $Q = 1$: M_G, V_{B_g} et V_{B_d}

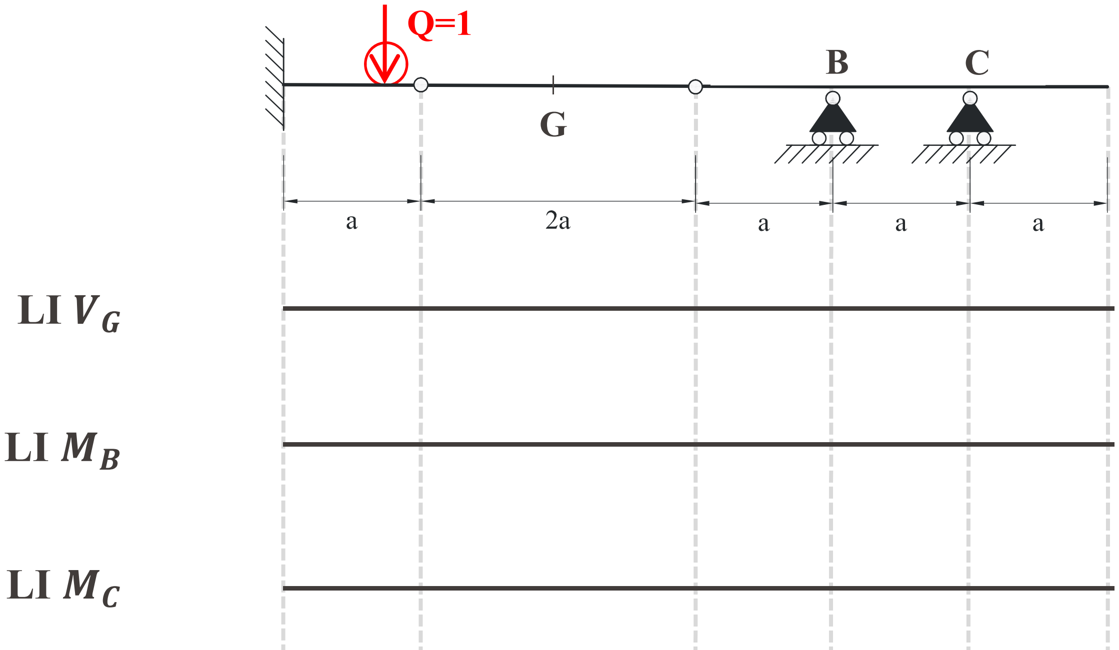
- B_g et B_d sont les sections juste à gauche et juste à droite de l'appui B

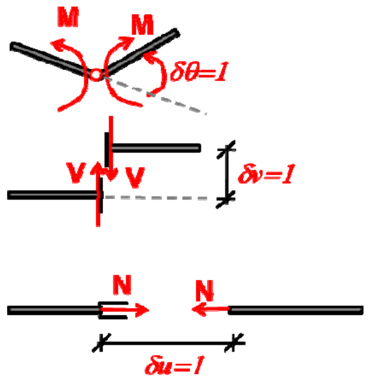


Prof. Katrin Beyer

A votre tour!

Tracer les lignes d'influence des efforts intérieurs suivants pour une charge mobile $Q = 1$: V_G, M_B et M_C





Contenu du cours

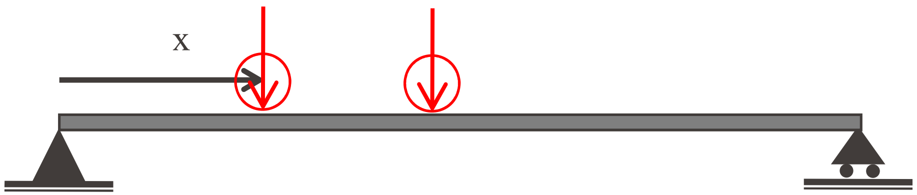
1. Définition d'une « ligne d'influence »
2. **Calcul des lignes d'influence par l'équilibre**
3. Calcul des lignes d'influence par le Tdv
   - Principe et application aux réactions d'appuis
   - Lignes d'influence des forces de liaison
   - Lignes d'influence des efforts intérieurs
   - Trains de charges

Train de charges

Prof. Katrin Beyer

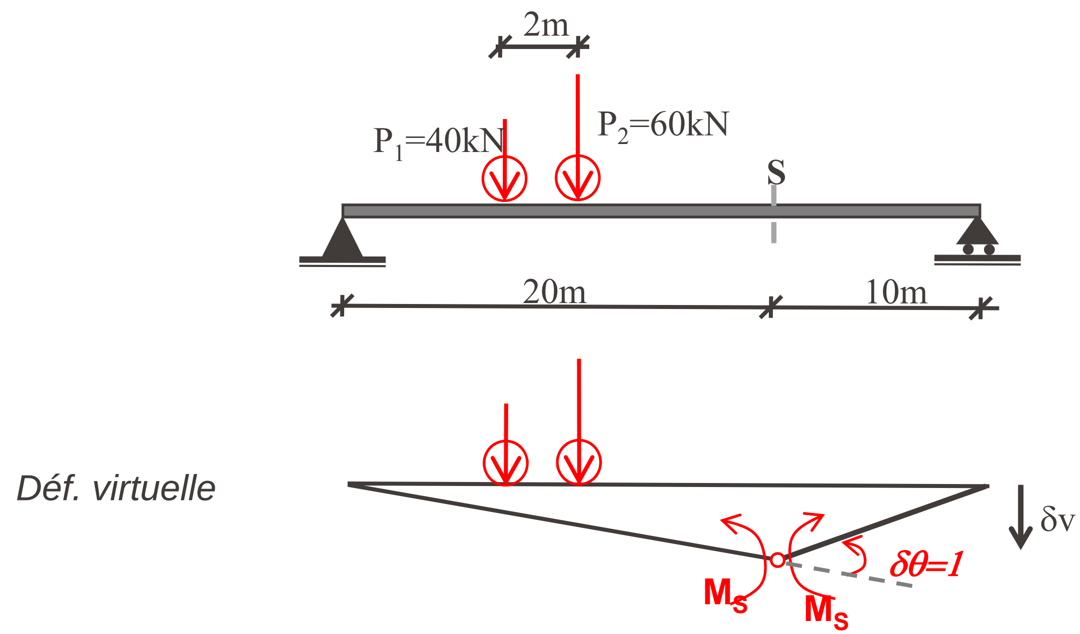
Un groupe mobile de charges dont les positions relatives et les intensités sont fixes.

Intéressant: trouver la position d'un train de charges qui maximise l'effort statique



Exemple

Trouver la position du train de charges qui maximise le moment en S



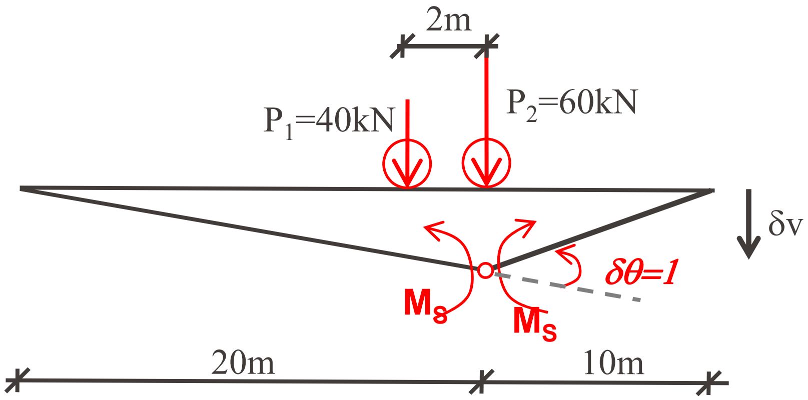
$$\delta W = -M_S \cdot 1 + P_1 \cdot \delta v_{P1} + P_2 \cdot \delta v_{P2} = 0$$

Il faut trouver la position des charges P_1 et P_2 qui maximise leur travail virtuel

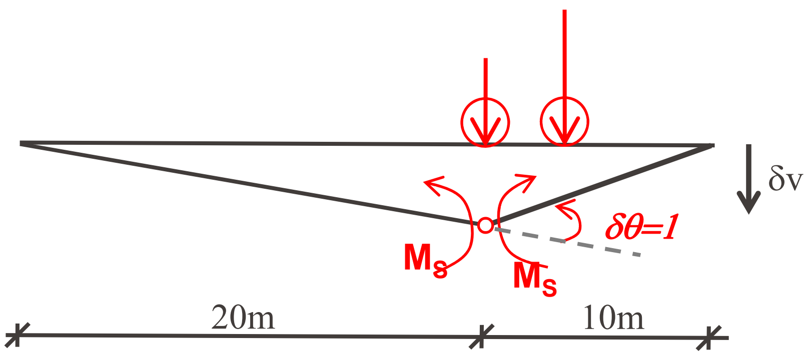
Prof. Katrin Beyer

Exemple (suite)

- Possibilité 1



- Possibilité 2

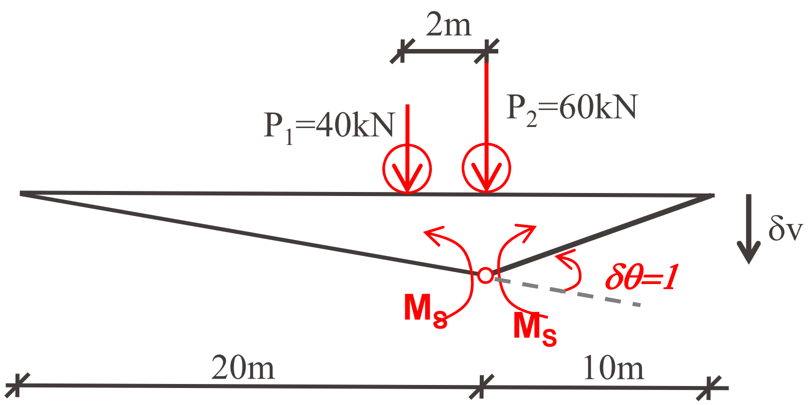


Indication:
Pour un train formé de charges concentrées, le maximum d'un effet se produit toujours lorsqu'une charge se trouve au droit d'un sommet de la déformée virtuelle.

EPFL

Exemple (suite)

Déf. virtuelle



$$\delta W = -M_S \cdot 1 + P_1 \cdot \delta v_{P1} + P_2 \cdot \delta v_{P2} = 0$$

Moment maximal en S:

$$M_S = P_1 \cdot \delta v_{P1} + P_2 \cdot \delta v_{P2} =$$

Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 12:** Lignes d’influence 12.1 à 12.3 et 12.5

EPFL

Références

Références des illustrations par ordre d’apparition

- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0

EPFL

Exercices

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

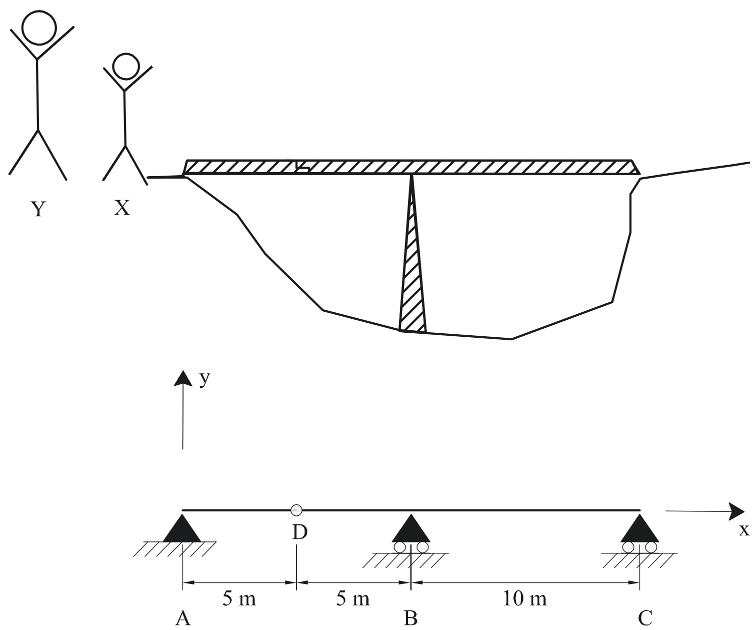
Exercice

Prof. Katrin Beyer

Deux amis X et Y aimeraient traverser un pont. Le pont est très léger et ils pensent d'abord à traverser l'un après l'autre. X, qui est le plus petit et pèse 60 kg, va en premier.

a) X n'a pas des difficultés pour passer, le pont reste stable. Quel est le poids propre minimum du pont (en kg/m') pour lequel X peut traverser le pont sans qu'un des trois appuis soit en traction (force de réaction orientée vers le bas) ?

b) Après que X ait passé le pont, les deux amis se demandent si Y, qui pèse 100 kg, peut aussi passer le pont. Ils réfléchissent et décident que X devrait se placer sur le pont alors que Y traverse le pont. Où est-ce que X devrait se placer pour que Y puisse traverser le pont sans qu'un des trois appuis soit en traction ? Donner toutes les positions x pour lesquelles cette condition est satisfaite. Les positions valables sont x = 0 m à 20 m. **L'effet du poids propre du pont peut être négligé pour question b.**



Examen 2

Exercice 1 (6 points)

Pour chacune des 3 structures de la figure 1:

Pour le cas de charges indiqué, déterminer si la structure est **globalement** isostatique, hyperstatique ou un mécanisme.

- Si la structure est hyperstatique : Quel est son degré d'hyperstaticité ?
- Si la structure est un mécanisme : Dessiner quel mécanisme peut se former.

Note : Seulement le résultat est noté. Ce n'est pas nécessaire de documenter la dérivation.

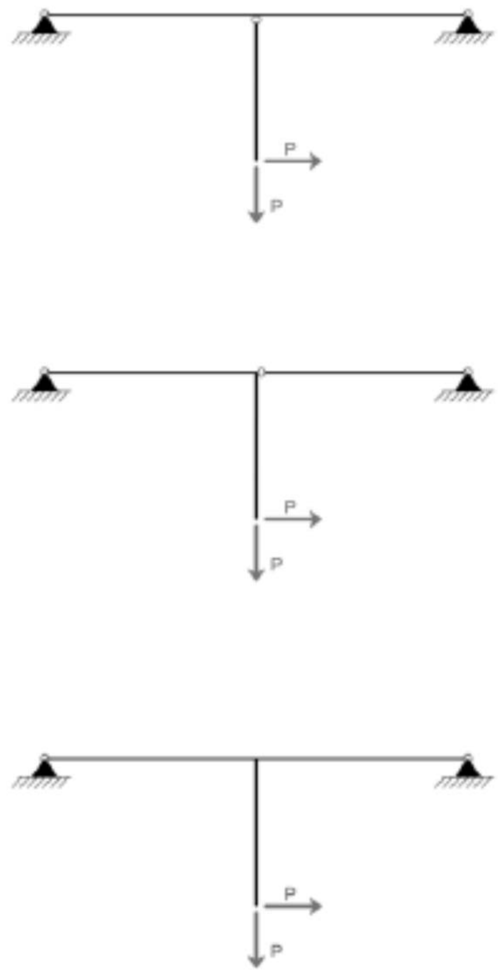


Figure 1 Exercice 1

Examen 2

Exercice 2 (*50 points*)

- Figure 3 montre une structure. Pour cette structure:

a) Démontrer que la structure est isostatique.

b) Calculer les réactions d'appuis et les dessiner dans un diagramme avec leur **sens réel**. Indiquer les composantes éventuellement nulles de certaines réactions.

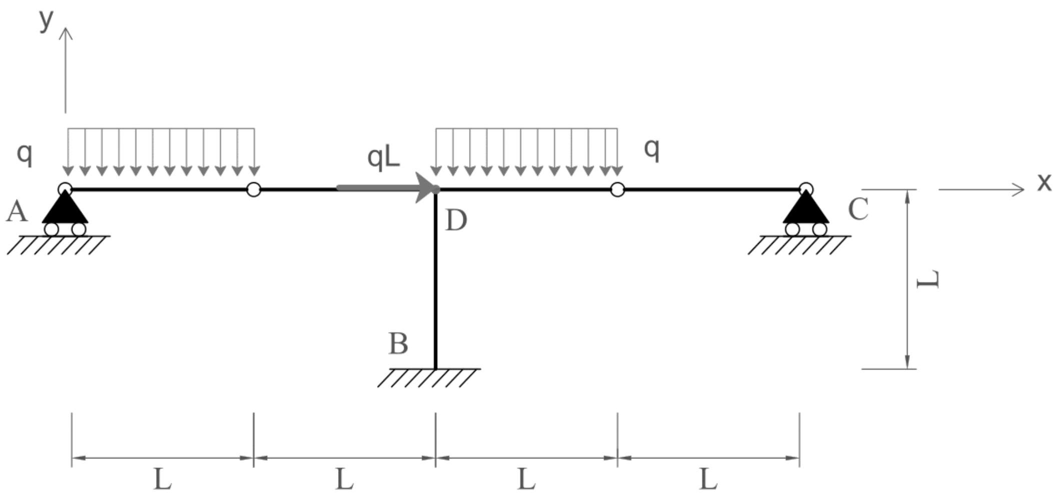
c) Contrôler le moment d'encastrement en B avec le théorème de déplacement virtuel en combinaison avec une coupure simple. **Tracer le champ des déplacements virtuels correspondant. Indiquer pour chaque fragment les coordonnées (x et y) du centre de rotation instantané**. Origine de système de coordonnées : Point A.

d) Tracer les diagrammes des efforts intérieurs NVM et calculer toutes leurs **valeurs caractéristiques** (valeurs minimales/ maximales, valeurs aux extrémités des poutres).

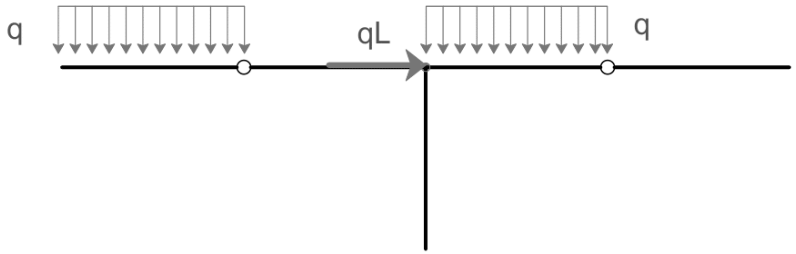
e) Contrôler l'équilibre du nœud D. À cette fin, introduire toutes les forces internes et externes sur le nœud D isolé en figure 2 et formulez l'équilibre (équilibre des forces horizontales et verticales, équilibre de moment).

f) Tracer avec soin l'allure de la déformée. Indiquer les **points d'inflexion et les plis**.

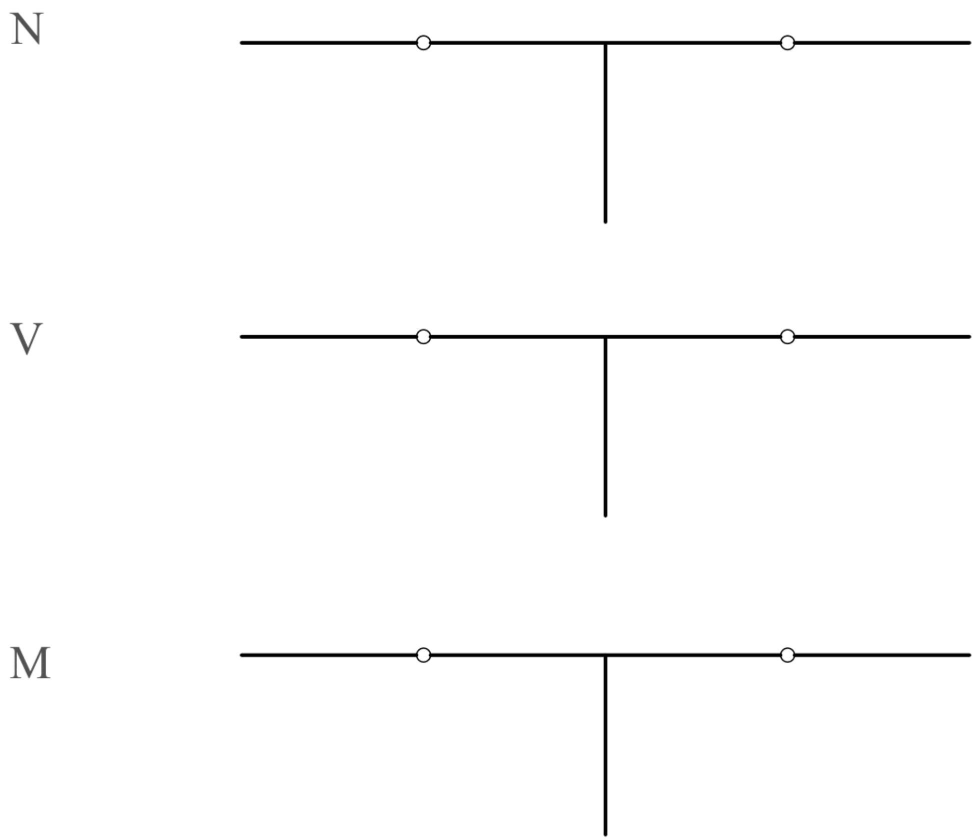
Examen 2

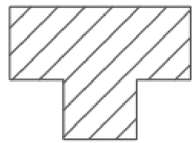


Réactions d'appuis



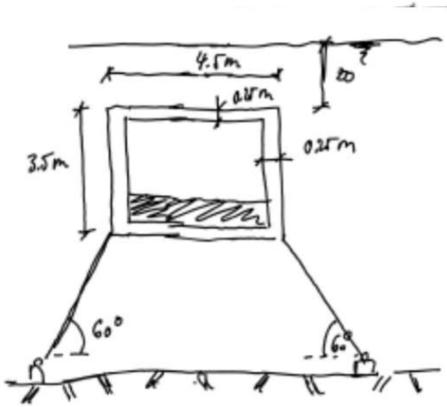
Examen 2

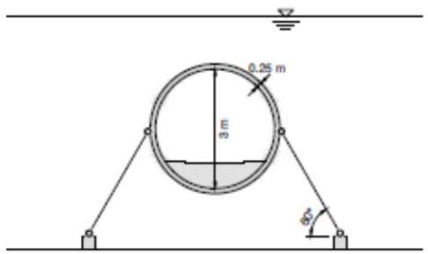




3.2 Tunnel immergé[2]

Un tunnel rectangulaire et un tunnel cylindrique en béton sont immergés dans l'eau (eau: $\gamma_e = 10\ kN/m^3$, béton: $\gamma_b = 25\ kN/m^3$). Ils sont maintenus par des paires de câbles disposés tous les 6 m. La charge dans les tunnels est de 10 kN/m.

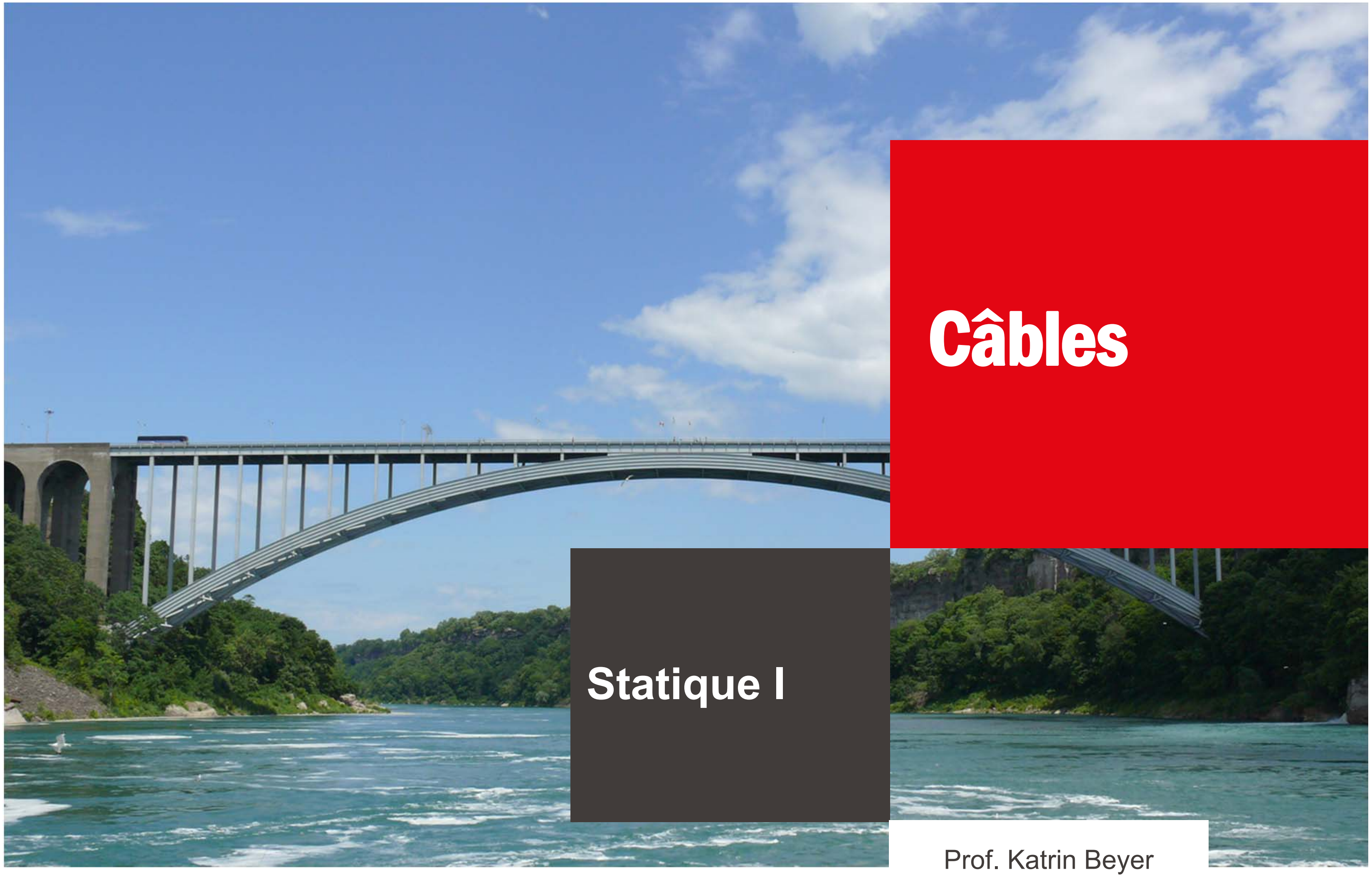




Pour chacun de ces deux tunnels:

1. Tracer la distribution de la poussée hydrostatique sur le tunnel.
2. Déterminer l'orientation et le valeur de la résultante de la poussée hydrostatique qui s'applique sur le tunnel. Cette force est aussi referée comme poussée d'Archimède.
3. Representer dans un schéma toutes les forces qui agissent sur le tunnel (schéma du corps libre). Calculer la force reprise par chaque câble.

EPFL



Câbles

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Quelles sont les caractéristiques statiques d'un câble
- Comment déterminer la forme d'un câble sous charges arbitraires en utilisant les équations différentielles d'équilibre ou l'équilibre de fragments
- Comment déterminer la forme d'un câble sous charges concentrées
- Quelles sont les similitudes entre un câble et un arc

Contenu du cours

1. Dérivation de l’équation différentielle des câbles
2. Câble sous une charge uniformément répartie sur l’horizontale
   - Analyse par l’équation différentielle
   - Analyse par l’équilibre des fragments
3. Câble sous une charge uniformément repartie le long de l’axe du câble
4. Câble sous charges concentrées
5. Comparaison câble - arc

Stade Olympique de Munich, 1972


Olympiastadion

Allianz Arena à Munich, 2005

Câble

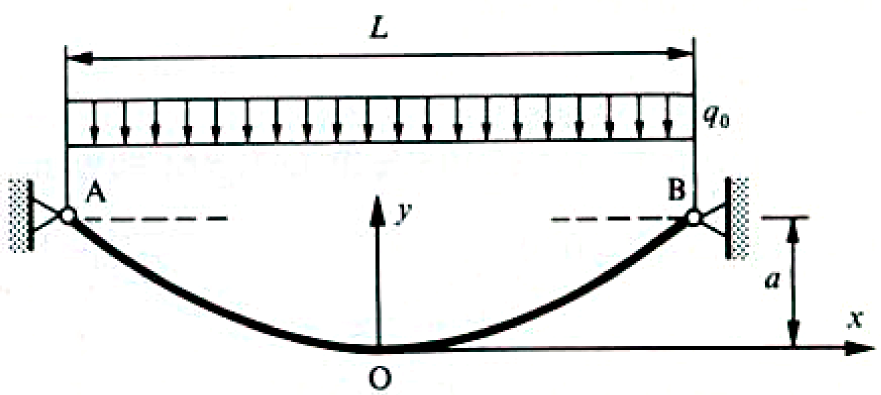
- **Elément structural qui n'est résistant qu'à l'effort normal de traction (tension du câble)**
  - Le câble représente une liaison unilatérale
  - Le câble n'offre de résistance ni à la compression, ni à l'effort tranchant, ni à la flexion, ni à la torsion (le diamètre est très faible par rapport à sa longueur)
- **Matériaux**
  - Acier à très haute résistance (acier pour câbles)
  - Fibres de carbone
  - Fibres naturelles
- **Géométrie du câble**
  - Câble non chargé: lâche, sans forme définie
  - Les charges sur le câble définissent sa configuration
  - But des analyses des câbles: trouver pour une charge donnée la forme qui permet d'avoir l'équilibre du câble
  - Types de charges: poids propre, charges concentrées ou distribuées, prétension
  - L'hypothèse des petites déformations n'est plus valable

Dérivation de l'équation différentielle des câbles

Câble sous charge répartie arbitraire (cas plan)

- Hypothèses:
  - Le câble est inextensible (la forme change mais pas la longueur)
  - La force répartie $q(x)$ agit vers le bas (effet de la pesanteur)
- Objectif:

  Trouver $y(x)$: la forme qui permet l'équilibre du câble avec la charge $q(x)$

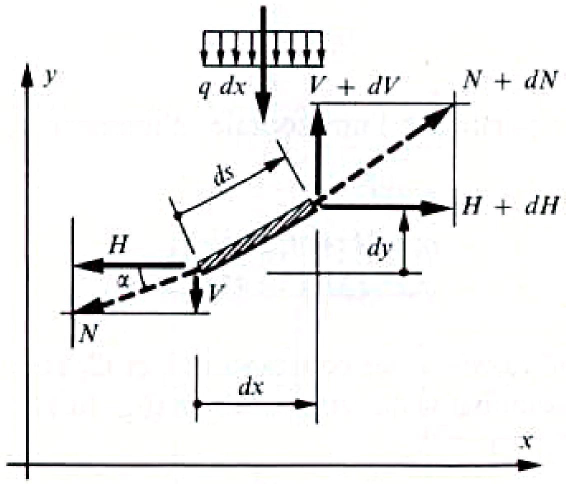


L: la portée du câble
a: la flèche du câble
s: la longueur du câble

Prof. Katrin Beyer

Dérivation de l'équation différentielle des câbles

Equilibre d'un petit tronçon ds d'un câble sous des charges verticales:



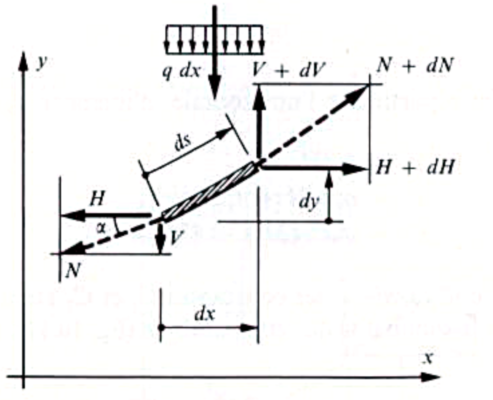
N: effort normal (tension) qui agit dans la direction du câble (N a la même pente que le câble)

Décomposition de N en 2 inconnues V et H:

Prof. Katrin Beyer

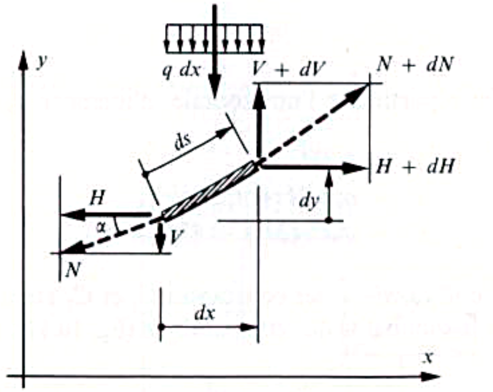
Dérivation de l'équation différentielle des câbles

Equilibre d'un petit tronçon ds d'un câble sous des charges verticales:



Longueur du câble:

Equation différentielle d'équilibre d'un câble



N Effort normal
V Composante verticale
H Composante horizontale
q Charge répartie verticale (positive vers le bas)
y Configuration du câble / forme en équilibre
s Longueur du câble

$$V = Hy'$$

$$V'(x) = q(x)$$

$$H(x) = const.$$

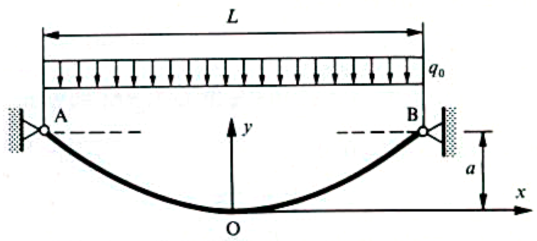
$$\boxed{y''(x) = \frac{q(x)}{H}}$$

$$ds = dx\sqrt{1 + y'(x)^2}$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

$$N = \sqrt{H^2 + V^2} = H\sqrt{1 + y'(x)^2}$$

Exemple: câble sous une charge uniformément répartie sur l'horizontale

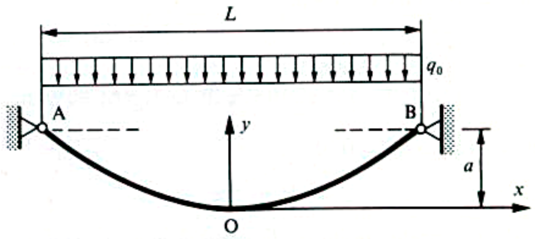


$$\boxed{y''(x) = \frac{q(x)}{H}}$$

Calculer avec l'équation différentielle

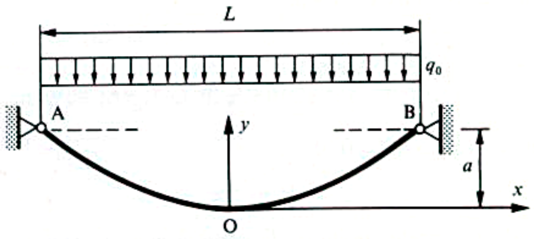
- La composante horizontale H si la flèche est égale à a
- L'effort axial minimal et maximal dans le câble (N_{min} et N_{max})

Exemple (suite)



$$\boxed{y''(x) = \frac{q(x)}{H}}$$

Exemple (suite)

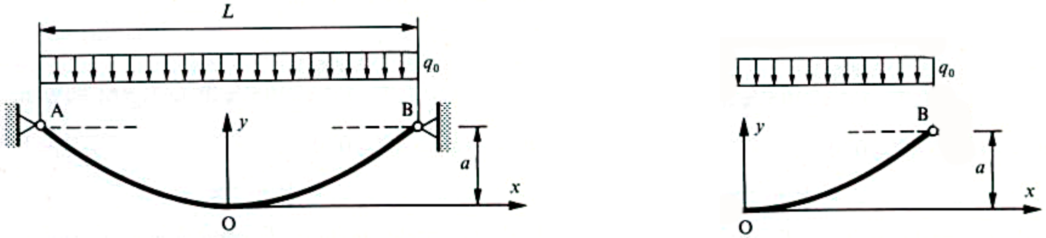


$$\boxed{y''(x) = \frac{q(x)}{H}}$$

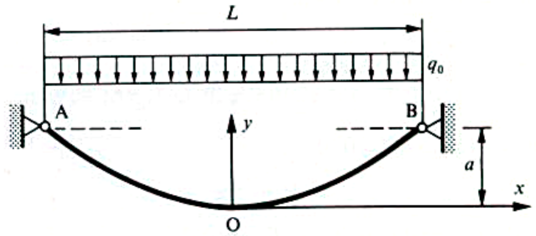
A votre tour!

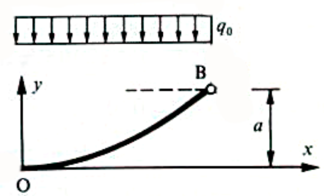
Calculer avec l'équilibre par tronçon

- La composant horizontale H si la flèche est égale à a
- L'effort axial minimal et maximal dans le câble (N_{min} et N_{max})

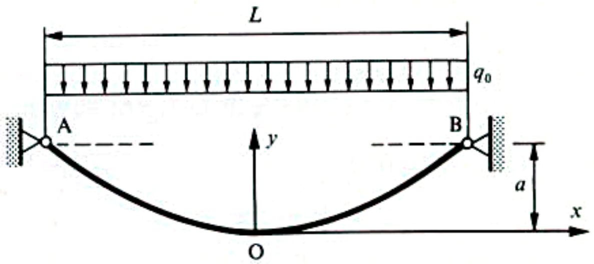


A votre tour! (suite)





Résumé: câble sous une charge uniformément répartie sur l'horizontale



$$\boxed{y''(x) = \frac{q(x)}{H}}$$

- 2 supports sur la même hauteur:

$$y = \frac{q_0 x^2}{2H} \qquad -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$$

$$a = \frac{q_0 L^2}{8H} \qquad H = \frac{q_0 L^2}{8a}$$

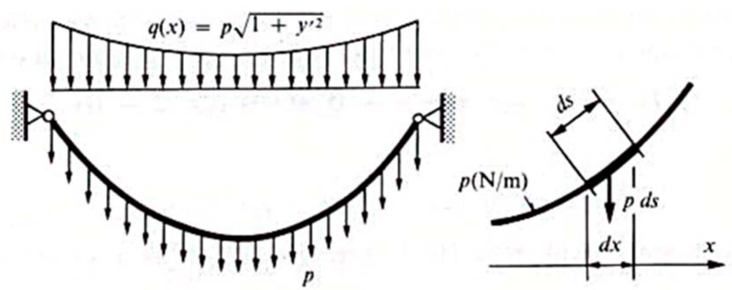
$$N = q_0 \sqrt{x^2 + \left(\frac{L^2}{8a}\right)^2} = H\sqrt{1+k^2}$$

$$s = 2\int_0^{L/2} ds = \frac{L}{2}\left[\sqrt{1+k^2} + \frac{1}{k}\ln\left(k + \sqrt{1+k^2}\right)\right]$$

- La configuration du câble est une parabole.
  - Plus la composante horizontale est grande, plus la flèche du câble est petite
  - $k = \frac{4a}{L}$
  - Longueur:

Câble sous une charge uniformément répartie le long de l'axe du câble

La configuration d'un câble sous une charge uniformément répartie **le long de l'axe du câble** est appelée **chaînette**



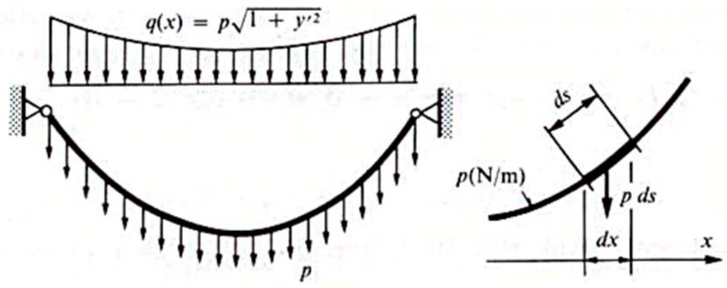
p: *poids propre du câble par mètre de longueur du câble*

$$q(x)dx = p \cdot ds = p\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$y''(x) = \frac{q(x)}{H} = \frac{p}{H}\sqrt{1+y'^2}$$

Câble sous une charge uniformément répartie le long de l'axe du câble

$$y''(x) = \frac{q(x)}{H} = \frac{p}{H}\sqrt{1+y'^2}$$



On peut montrer que la solution de cette équation différentielle est la chaînette:

$$y(x) = \frac{H}{p}\cosh\left(\frac{p}{H}x + C_1\right) + C_2$$

Axes passant par le sommet:

$$y(x) = \frac{H}{p}\left(\cosh\frac{p}{H}x - 1\right)$$

Câble sous une charge uniformément répartie le long de l'axe du câble

$$y''(x) = \frac{q(x)}{H} = \frac{p}{H}\sqrt{1+y'^2} \qquad\qquad y(x) = \frac{H}{p}\left(\cosh\frac{p}{H}x - 1\right)$$

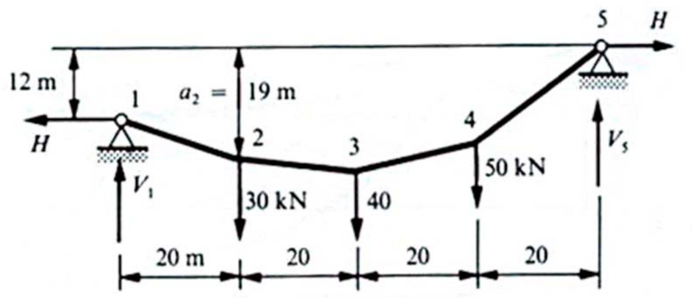
Longueur du câble:

Effort axial du câble:

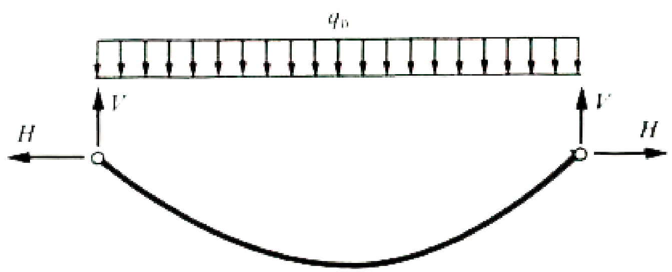
A votre tour!

Câble sous forces concentrées

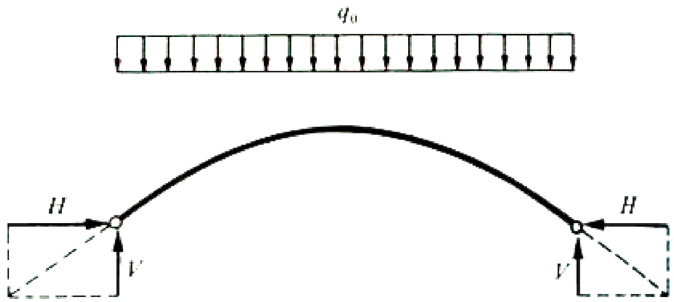
- Configuration du câble: ligne brisée (poids propre négligé)
- Objectif: trouver H



Comparaison câble-arc

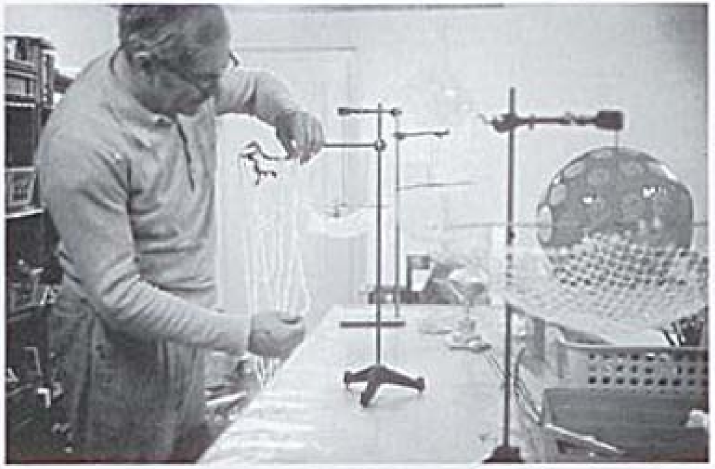


$$H = \frac{ql^2}{8f}; \quad V = \frac{ql}{2}$$



$$H = \frac{ql^2}{8f}; \quad V = \frac{ql}{2}$$

	Câble	**Arc**
Effort normal	Traction	Compression
Matériaux	Acier Fibre de carbone Fibre naturelle	Béton (avec faible armature) Pierre naturelle Bois



Heinz Isler

Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 10:** Câbles (sauf 4.5)

EPFL

Préparation de l’examen

Statique I

Prof. Katrin Beyer

Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory

Examen

- Date 01.07.2022 from 09h15 to 12h15
- Salle: CE6
- Durée: 3h
- Formulaire («Cheat sheet»): Deux pages (=une feuille recto-verso)

Des « cheat sheets » photocopiés ou imprimés ne sont pas permis.

Sujets

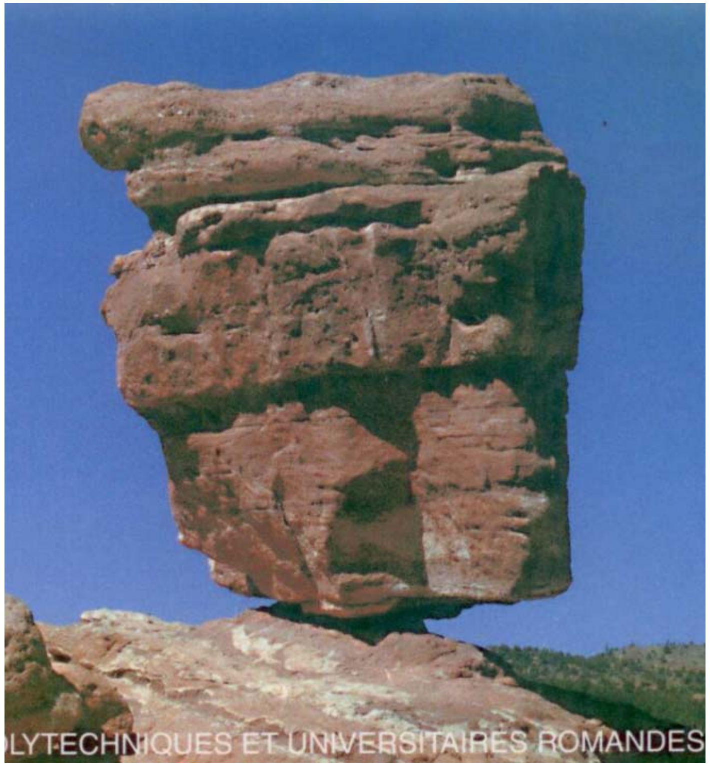
- Tous sujets qu'on a traités pendant le cours
- = Chapitres 1-12 du livre "Analyse des structures et milieux continus – Statique appliquée"
- Pas à l'examen:
  - 1.3.3 Action du vent
  - 10.4.5 Câble surbaissés
  - 13 Propriétés des figures planes

Préparation à l'examen

- Comprendre la théorie
- Faire des exercices (aussi: exercices supplémentaires, un exercice d'un examen)
- Venir aux séances de préparation avec vos questions
  - Dates:
    - Jeudi 16.6.2022 10-12:00
    - Samedi 25.6.2022 10-12:00
  - Sur site / zoom / hybride?

EQUILIBRE

- Corps isolé
- Schéma statique



Références

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Olympiastadion München © Arad Mojtahedi
- [3] Allianz Arena, Munich © Tobias Alt, CC BY-SA 4.0
- [4] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0
- [5] Photographies des coques de Heinz Isler: © Ramm et Schunck; 2002
- [6] Figures sur les câbles: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.