绝密★启用前

# 2021 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

# 离散数学

（课程代码　02324）

**注意事项：**

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

## 第一部分　选择题

**一、单项选择题：本大题共 15 小题，每小题 1 分，共 15 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。**

1. 设$P$：他勤奋，$Q$：他成绩高，命题“只有他勤奋，他成绩才高”符号化为

　A. $P \vee Q$　　B. $Q \rightarrow P$　　C. $\neg P \vee \neg Q$　　D. $P \rightarrow Q$

2. 下列命题公式是矛盾式的为

　A. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$　　B. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

　C. $\neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$　　D. $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$

3. 下列式子中，不正确的是

　A. $\exists x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B)$　　B. $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

　C. $A \rightarrow \forall x B(x) \Leftrightarrow \exists x(A \rightarrow B(x))$　　D. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

4. 设论域的元素为$a$和$b$，与谓词公式$\forall x P(x)$等价的是

　A. $P(a) \wedge P(b)$　　B. $P(a) \vee P(b)$　　C. $P(a) \rightarrow P(b)$　　D. $P(b) \rightarrow P(a)$

5. 下列关系矩阵所对应的关系具有自反性的是

　A. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. 下列非负整数度序列可简单图化的是

　A. (5,5,4,1,1)　　B. (3,3,2,2,1,1)　　C. (3,3,3,1)　　D. (4,3,2,1)

7. $S = \{a, b\}$的二元运算∘定义为$a \circ a = a$，$a \circ b = b$，$b \circ a = b$，$b \circ b = a$，则∘不满足

　A. 交换律　　B. 幂等律　　C. 结合律　　D. 消去律



8. 设集合$A = \{1,2,3\}$上的二元关系$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$，则$R$是$A$上的

　A. 相容关系　　B. 等价关系　　C. 偏序关系　　D. 拟序关系

9. 设$\mathbf{R}$为实数集，下列关系中能构成函数的是

　A. $\{\langle x,y\rangle \mid x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge (y^2 - x = 0)\}$

　B. $\{\langle x,y\rangle \mid x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge (x^2 + y = 0)\}$

　C. $\{\langle x,y\rangle \mid x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge (y/x = 1)\}$

　D. $\{\langle x,y\rangle \mid x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge (y \cdot x = 1)\}$

10. 设$R$、$S$均为集合$A$上的二元关系，下列命题错误的是

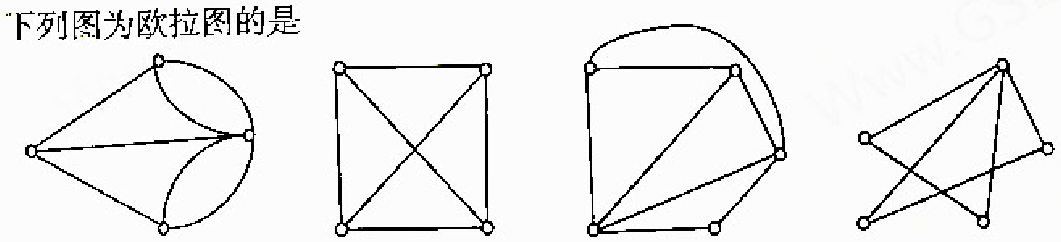
　A. 若$R$和$S$是反自反的，则$R \cup S$也是反自反的

　B. 若$R$和$S$是自反的，则$R \cup S$也是自反的

　C. 若$R$和$S$是反对称的，则$R \cup S$也是反对称的

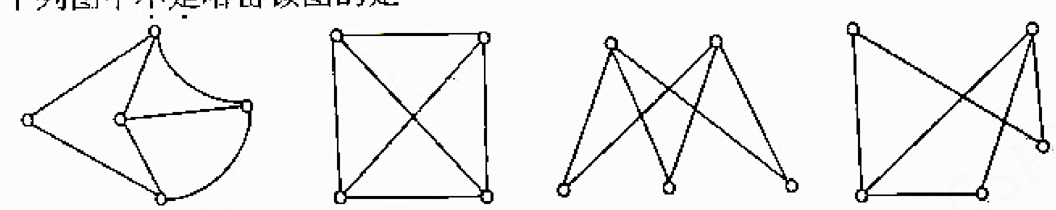
　D. 若$R$和$S$是对称的，则$R \cup S$也是对称的

11. 下列图为欧拉图的是



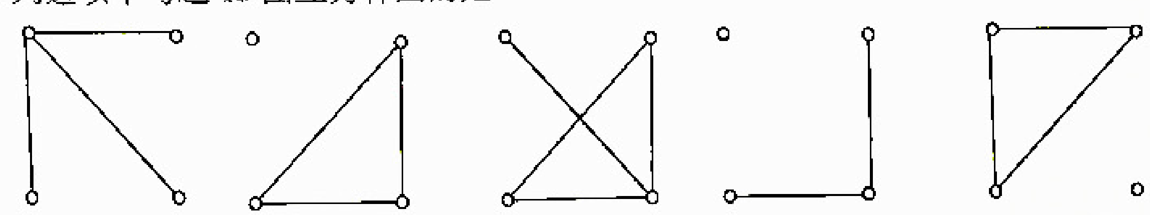
　A.　　B.　　C.　　D.

12. 下列图中不是哈密顿图的是



　A.　　B.　　C.　　D.

13. 下列选项中与题 13 图互为补图的是



　A.　　B.　　C.　　D.　　题 13 图

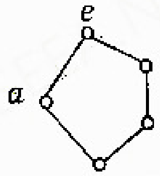
14. 在下列代数系统$(G, \circ)$中，∘是普通加法运算，其中不是群的是

　A. $G$为自然数集合　　B. $G$为偶数集合

　C. $G$为有理数集合　　D. $G$为整数集合

15. 如题 15 图所示的格中，元$c$的补元是

　A. $a$　　B. $b$　　C. $d$　　D. $e$




题 15 图

# 第二部分　非选择题

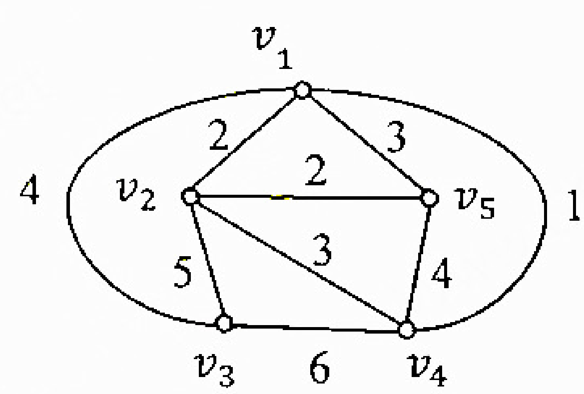
**二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。**

16. 任意两个不同大项的析取式的真值是________。
17. 设论域为整数集，命题$\exists x \forall y(x * y = 1)$的真值为__________。
18. 公式$\forall x P(x) \rightarrow \neg \exists x Q(x)$对应的前束范式为_______________。
19. 设代数系统$(S,*)$为独异点，$\forall a, b \in S$，均有逆元$a^{-1}, b^{-1} \in S$，且$a * b$也有逆元，则$a * b$的逆元为________。
20. 设无向树有 8 片树叶，1 个度为 4 的分支点，其余的分支点的度为 3，则树的结点数为________。
21. 设$G$为连通平面图，共 8 个顶点，其平面表示中共有 6 个面，则边数为____________。
22. 有 9 个顶点的无向完全图$K_9$，需要删除________条边才能得到生成树。
23. 设集合$A = \{1,2\}$，$B = \{2,3\}$，则$A$，$B$的幂集的对称差$\mathscr{P}(A) \oplus \mathscr{P}(B)$为

    ____________________。
24. 设集合$A = \{a, b, c\}$，$A$上的关系$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$，$S = \{\langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle\}$，则复合关系（采用右复合）$R \circ S$为________________________。
25. 设集合$A = \{1,2,3,4,5\}$，集合$B = \{a, b\}$，从$A$到$B$的不同的满射的个数为__________。

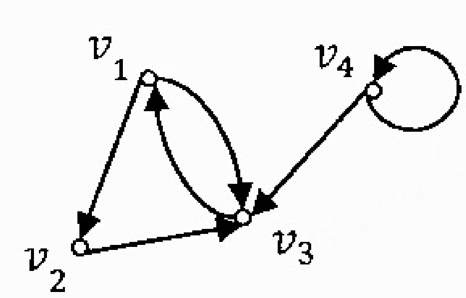
**三、简答题：本大题共 7 小题，第 26~30 小题，每小题 6 分；第 31~32 小题，每小题 7 分，共 44 分。**

26. 用真值表法判定命题公式$(P \leftrightarrow (P \wedge Q)) \vee R$是否为非重言式的可满足式。
27. 用等值演算法求命题公式$(P \rightarrow Q) \wedge \neg R$的主析取范式。
28. 设集合$A = \{1,2,3\}$上的二元关系$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle\}$，写出自反闭包$r(R)$，对称闭包$s(R)$和传递闭包$t(R)$的集合表达式。
29. 利用 Kruskal 算法求题 29 图所示的连通带权图的最小生成树，请给出详细过程并画出最小生成树。




题 29 图

30. 设有向图$G$如题 30 图所示，
    (1) 写出图$G$的邻接矩阵；
    (2) 计算图$G$中长度为 4 的通路数；
    (3) 计算图$G$中长度小于或等于 4 的回路数。




题 30 图

31. 用二叉树表示算术表达式$(3 * a - 2) / (b + c * d)$，并给出先序、中序和后序遍历序列。

32. 设$A = \{1,2,4,6,12\}$，$\preccurlyeq$为整除关系，回答下列问题：

(1) 画出$\langle A, \preccurlyeq \rangle$的哈斯图；

(2) 求子集$B = \{2,4,6\}$的极大元，极小元，最大元，最小元；

(3) 判断该偏序集是否为格。

**四、证明题：本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分。**

33. 在整数集$\mathbf{Z}$上定义二元运算$\circ$：$a \circ b = a + b - 3$，$\forall a, b \in \mathbf{Z}$，证明$\langle \mathbf{Z}, \circ \rangle$构成交换群。

34. 用 CP 规则证明下面有效推理。

前提：$P \to (Q \to R)$，$S \to P$，$Q$

结论：$S \to R$

35. 设$G$是$n(n \geq 2)$阶无向简单图，且$G$为自补图，证明$n = 4k$或$n = 4k + 1$，其中$k$为正整数。

绝密★启用前

2021年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

# 离散数学试题答案及评分参考

（课程代码　02324）

一、单项选择题：本大题共15小题，每小题1分，共15分。

1. B　2. D　3. C　4. A　5. D　6. B　7. B　8. A　9. B　10. C

11.D　12.C　13.A　14.A　15.A

二、填空题：本大题共10小题，每小题2分，共20分。

16. T

17. F

18. $\exists x\forall y(\neg P(x)\vee\neg Q(y))$（或$\exists x\forall y\neg(P(x)\wedge Q(y))$或蕴涵式）

19. $b^{-1}*a^{-1}$

20. 13

21. 12

22. 28

23. $\{\{1\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}\}$

24. $\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$

25. 30

三、简答题：本大题共7小题，第26~30小题，每小题6分；第31~32小题，每小题7分，共44分。

26. 解：$(P\leftrightarrow(P\wedge Q))\vee R$的真值表如下

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P\wedge Q$ | $P\leftrightarrow(P\wedge Q)$ | $(P\leftrightarrow(P\wedge Q))\vee R$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | T | T | (1分) |
| F | F | T | F | T | T | (1分) |
| F | T | F | F | T | T | |
| F | T | T | F | T | T | (1分) |
| T | F | F | F | F | F | |
| T | F | T | F | F | T | (1分) |
| T | T | F | T | T | T | |
| T | T | T | T | T | T | (1分) |

由上表可知，命题公式为非重言式的可满足式。　(1分)

27. 解：$(P \to Q) \wedge \neg R$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge \neg R$ (2 分)

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R)$ (2 分)

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$ (1 分)

由此得原命题公式的主析取范式为

$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$。 (1 分)

28. 解：

$r(R) = R \cup I_A = R \cup \{\langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$， (2 分)

$s(R) = R \cup R^{-1} = R \cup \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$， (2 分)

$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 = R \cup \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle\} = E_A$

$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$. (2 分)

29. 解：利用 Kruskal 算法计算，按权值从小到大对边进行排列，

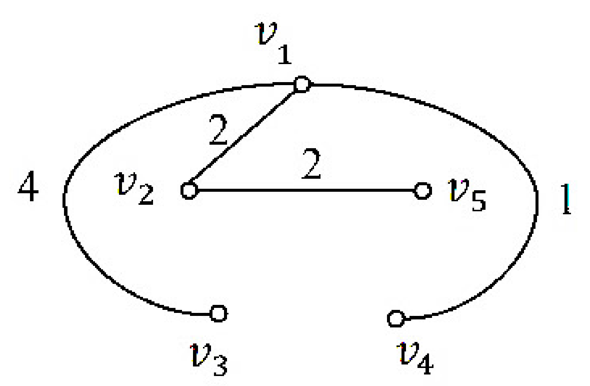
添加权值为 1 的边$(v_1, v_4)$； (1 分)

添加权值为 2 的边$(v_1, v_2)$； (1 分)

添加权值为 2 的边$(v_2, v_5)$； (1 分)

添加权值为 4 的边$(v_1, v_3)$； (1 分)

得到的最小生成树如答 29 图所示。 (2 分)




答 29 图

30. 解：

(1) 图 $G$ 的邻接矩阵为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ (1 分)

(2) 由于

$$\boldsymbol{M}^2=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\end{bmatrix},$$ (1 分)

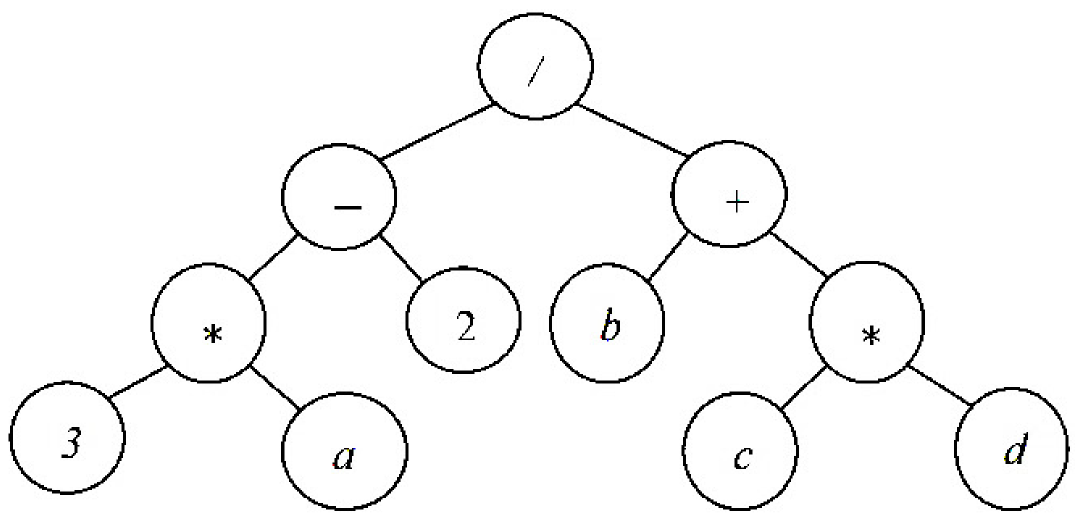
$$\boldsymbol{M}^3=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&2&1\end{bmatrix},$$ (1 分)

$$\boldsymbol{M}^4=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\1&0&1&0\\1&1&1&0\\2&1&3&1\end{bmatrix},$$ (1 分)

由 $\boldsymbol{M}^4$ 可知，图 $G$ 中长度为 4 的通路数为 16 条。 (1 分)

(3) 由 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{M}^2$，$\boldsymbol{M}^3$ 和 $\boldsymbol{M}^4$ 可知，$G$ 中长度小于或等于 4 的回路数为 11。(1 分)

31. 解：算术表达式 $(3*a-2)\,/\,(b+c*d)$ 的二叉树如答 31 图所示：




答 31 图 (1 分)

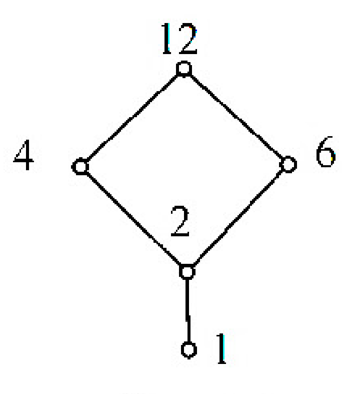
先序遍历序列为 $/(-(*\,3a)2)(+b(*\,cd))$，即 $/-*\,3a2+b*cd$; (2 分)

中序遍历序列为 $((3*a)-2)/(b+(c*d))$，即 $3*a-2/b+c*d$; (2 分)

后序遍历序列为 $((3a\,*)2-)(b(cd\,*)+)/$，即 $3a*2-bcd*+/$。 (2 分)

32. 解：

(1) $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 的哈斯图如答 32 图所示： (2 分)




答 32 图

(2) 子集$B=\{2,4,6\}$的极大元为 4 和 6，(1 分)

极小元为 2，(1 分)

最大元不存在，(1 分)

最小元为 2。(1 分)

(3) 该偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$是格，因为 $A$ 中每对元素都有最小上界和最大下界。(1 分)

**四、证明题：本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分。**

33. 证明：

(1) 满足封闭性：$\forall a,b\in \mathbf{Z}$，有

$$a\circ b=a+b-3\in \mathbf{Z};$$ (1 分)

(2) 满足结合律：$\forall a,b,c\in \mathbf{Z}$，有

$$(a\circ b)\circ c=a+b+c-6=a\circ(b\circ c);$$ (1 分)

(3) 存在幺元 3：$\forall a\in \mathbf{Z}$，有

$$a\circ 3=a+3-3=a=3+a-3=3\circ a\ ;$$ (1 分)

(4) 每个元素存在逆元：$\forall a\in \mathbf{Z}$，$a\circ(6-a)=(6-a)\circ a=3$，

故$a$的逆元为$6-a$；(2 分)

(5) 满足交换律：$\forall a,b\in \mathbf{Z}$，有

$$a\circ b=a+b-3=b\circ a;$$ (1 分)

综上，$\langle \mathbf{Z},\circ\rangle$构成交换群。(1 分)

34. 证明：

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $S$ | CP 规则（附加前提） | (1 分) |
| (2) | $S\to P$ | P 规则 | (1 分) |
| (3) | $P$ | T (1) (2) | (1 分) |
| (4) | $P\to(Q\to R)$ | P 规则 | (1 分) |
| (5) | $Q\to R$ | T (3) (4) | (1 分) |
| (6) | $Q$ | P 规则 | (1 分) |
| (7) | $R$ | T (5) (6) | (1 分) |

由此得到推理是正确的。

35. 证明：由补图的定义可知，对于 $n$ 阶图 $G$ 有 $G\cup\overline{G}=K_n$，(1 分)

设 $G$ 与 $\overline{G}$ 的边数分别为 $m$ 和 $\overline{m}$，则有 $m+\overline{m}=n(n-1)/2$，(2 分)

另外，由于 $G$ 为自补图，$G\cong\overline{G}$，二者的边数相同，$m=\overline{m}$，(1 分)

故 $m=\overline{m}=n(n-1)/4$，(2 分)

由于 $n$ 和 $n-1$ 是连续自然数，二者互素，又因为 $m$ 是整数，所以 $n$ 被 4 整除或 $n-1$ 被 4 整除，即 $n=4k$ 或 $n=4k+1$，其中 $k$ 为正整数。(1 分)