

2022 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

## 离散数学

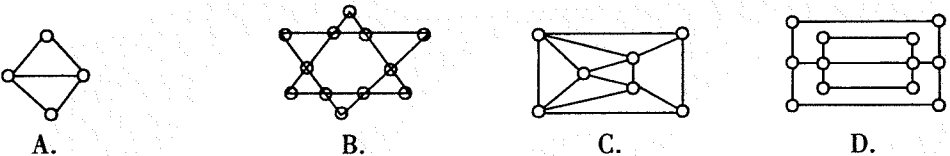
(课程代码 02324)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分,第一部分为选择题,第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答,答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔,书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

## 第一部分 选择题

一、单项选择题:本大题共 15 小题,每小题 1 分,共 15 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 令  $p$ :今天下雨, $q$ :我今天进城。命题“因为今天不下雨,所以我今天进城”的符号化形式为  
A.  $p \rightarrow q$       B.  $q \rightarrow p$       C.  $\neg p \rightarrow q$       D.  $\neg q \rightarrow p$
2. 设  $R(x)$ : $x$  是实数, $Q(x,y)$ : $y$  大于  $x$ 。则命题“对每个实数,都存在一个比它更大的实数”对应的谓词公式是  
A.  $\forall x(R(x) \rightarrow \exists y(Q(x,y) \wedge R(y)))$       B.  $\forall x(R(x) \rightarrow \exists y(Q(x,y) \wedge \neg R(x)))$   
C.  $\exists x(R(x) \rightarrow \forall y(Q(x,y) \wedge R(y)))$       D.  $\forall x(R(x) \wedge \exists yQ(x,y)) \rightarrow R(x)$
3. 下列关于小项和大项的性质,不正确的是  
A. 任意两个不同小项的合取必为假      B. 任意两个不同大项的析取必为真  
C. 任意两个不同小项的合取必为真      D. 大项的否定是小项
4. 下列是欧拉图的为  

5. 集合  $A = \{1, 2, 3\}$  上的关系  $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$ , 则  $R$  不是  
A. 自反关系      B. 对称关系      C. 传递关系      D. 反对称关系
6. 简单无向图  $G$  有 10 条边,每个结点都是 2 度结点,则  $G$  的结点数为  
A. 5      B. 10      C. 15      D. 20

7. 下列谓词恒等式,不正确的是

- A.  $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$
- B.  $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$
- C.  $\neg \exists xP(x) \Leftrightarrow \forall x\neg P(x)$
- D.  $\neg \forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x)$

8. 下列度数序列中,不能构成简单无向图的是

- A.  $\{1, 1, 1, 2, 3\}$
- B.  $\{1, 2, 2, 3\}$
- C.  $\{1, 2, 2, 2, 1\}$
- D.  $\{5, 3, 3, 3\}$

9. 一个 6 阶无向简单图,其结点的最大度数为

- A. 5
- B. 6
- C. 7
- D. 8

10. 集合  $A$  上的对称关系  $R$  的关系矩阵为  $M$ , 则

- A.  $M$  的对角线上元素全是 0
- B.  $M$  的对角线上元素全是 1
- C.  $M$  为对称矩阵
- D.  $M$  为反对称矩阵

11. 已知  $A, B, C, D$  是任意集合,则下列各式不成立的是

- A.  $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
- B.  $(A \oplus B) \times (C \oplus D) = (A \times C) \oplus (B \times D)$
- C.  $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$
- D.  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

12. 要从完全图  $K_4$  中得到一颗生成树,需要删除的边数为

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

13. 设  $G$  为 9 阶无向简单图,下列命题中可成立的是

- A.  $G$  的每个结点的度数均为 3
- B.  $G$  的每个结点的度数均为 6
- C.  $G$  的每个结点的度数均为 5
- D.  $G$  的每个结点的度数均为 7

14. 下列 4 个偏序集的图形,不能构成格的是

15. 设集合  $A$  的元素个数为 4, 则  $A$  上所有的等价关系的个数为

- A. 4
- B. 8
- C. 10
- D. 15

## 第二部分 非选择题

二、填空题:本大题共 10 小题,每小题 2 分,共 20 分。

16. 设  $A = \{1, 2\}$ , 则  $A^2 =$  \_\_\_\_\_。
17. 设集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 且  $A$  上的关系  $R_1 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$ ,  $R_2 = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$ , 则  $\text{dom}(R_1 \cup R_2) =$  \_\_\_\_\_,  $\text{ran}(R_1 \cup R_2) =$  \_\_\_\_\_。
18. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A$  上的关系  $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$ , 则  $R^2 =$  \_\_\_\_\_,  $R^{-1} =$  \_\_\_\_\_。
19. 设有集合  $A$  和  $B$ ,  $|A| = 4$ ,  $|B| = 2$ , 则从  $A$  到  $B$  不同的满射函数共有 \_\_\_\_\_ 个。
20. 在整数域中, 命题公式  $\forall x(x^2 > 0)$  的真值为 \_\_\_\_\_, 命题公式  $\forall x \exists y(x^2 < y)$  的真值为 \_\_\_\_\_。
21. 无向图  $G$  有 11 条边, 2 个 3 度结点, 其余均为 4 度结点, 则  $G$  的阶数为 \_\_\_\_\_, 其中 4 度结点有 \_\_\_\_\_ 个。
22. 一颗 6 阶树, 其分支结点最多有 \_\_\_\_\_ 个, 最多有 \_\_\_\_\_ 片树叶。
23. 设  $A$  为非空有限集合,  $P(A)$  为  $A$  的幂集,  $\cup$  为集合的并运算, 群  $\langle P(A), \cup \rangle$  的单位元是 \_\_\_\_\_, 零元是 \_\_\_\_\_。
24. 一个 6 阶简单非连通图的边的最大个数是 \_\_\_\_\_。
25. 若含  $n(n \geq 2)$  个命题变项的命题公式  $A$  的主析取范式包括  $k$  个小项, 则  $A$  的主合取范式必定包括 \_\_\_\_\_ 个大项。

三、计算题:本大题共 5 小题,每小题 6 分,共 30 分。

26. 用真值表法判定下列逻辑等价式成立  

$$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \vee R \rightarrow Q$$
27. 用等值演算法求命题公式  $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow R$  的主析取范式。
28. 对于实数集合  $R$ , 下表所列的二元运算是否具有左边一列中的那些性质, 填写下表(具备某项性质填写“是”, 不具备填写“否”, 请将题 28 表画在答题卡上作答)

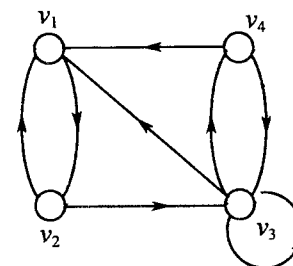
题 28 表

运算 \ 性质	$x+y$	$x-y$	$x \cdot y$
可结合性			
可交换性			

29. 一颗树有  $n_2$  个结点度数为 2,  $n_3$  个结点度数为 3,  $\dots$ ,  $n_k$  个结点度数为  $k$ , 求其度数为 1 的结点数  $n_1$  的值。

30. 有向图  $D$  如题 30 图所示, 回答下列问题

- (1) 写出  $D$  的邻接矩阵  $M_D$ ;
- (2)  $D$  中顶点  $v_3$  到顶点  $v_1$  之间长度为 3 的通路有多少条?



题 30 图

四、证明题:本大题共 3 小题,每小题 7 分,共 21 分。

31. 对于任意集合  $A$  和  $B$ , 证明:  

$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$
 其中  $P(A)$  表示集合  $A$  的幂集。
32. 证明:  

$$\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow L(x, y))) \Leftrightarrow \forall x \forall y((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow L(x, y))$$
33. 设  $n$  阶图  $G$  中有  $m$  条边, 其中  $\Delta(G)$  为图  $G$  的最大度,  $\delta(G)$  为图  $G$  的最小度, 证明:  

$$\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$$

五、综合应用题:本大题共 2 小题,每小题 7 分,共 14 分。

34. 分析一个  $n$  阶无向图  $G$  的邻接矩阵  $M_G$ , 如果该图为树, 则:
  - (1) 邻接矩阵  $M_G$  中值为 1 的元素个数为多少?
  - (2)  $M_G + M_G^2 + M_G^3 + \dots + M_G^n$  中值为 0 的元素个数为多少?
35. 设集合  $A = \{a, b, c\}$ ,
  - (1) 写出  $A$  的幂集  $P(A)$ ;
  - (2) 画出偏序关系  $\{P(A) - \{\emptyset\}, \subseteq\}$  的哈斯图, 并指出该偏序关系的极大元和极小元。

2022 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试  
离散数学试题答案及评分参考

( 课程代码 02324 )

一、单项选择题:本大题共 15 小题,每小题 1 分,共 15 分。

1. C
2. A
3. C
4. B
5. D
6. B
7. B
8. D
9. A
10. C
11. B
12. C
13. B
14. A
15. D

二、填空题:本大题共 10 小题,每小题 2 分,共 20 分。

16.  $\{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle \}$
17.  $\{ 1,2,3,4 \}, \{ 2,3,4 \}$
18.  $\{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,2 \rangle \}, \{ \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle \}$
19. 12
20. F,T
21. 6,4
22. 3,5
23.  $\phi, A$
24. 10
25.  $2^n - k$

三、计算题:本大题共 5 小题,每小题 6 分,共 30 分。

26. 解:分别列出两个命题公式的真值表如下

P Q R	$P \rightarrow Q$	$R \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q)$	$P \vee R$	$P \vee R \rightarrow Q$	(1 分)
0 0 0	1	1	1	0	1	
0 0 1	1	0	0	1	0	(1 分)
0 1 0	1	1	1	0	1	
0 1 1	1	1	1	1	1	(1 分)
1 0 0	0	1	0	1	0	
1 0 1	0	0	0	1	0	(1 分)
1 1 0	1	1	1	1	1	
1 1 1	1	1	1	1	1	(1 分)

从真值表可见,  $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q)$  与  $P \vee R \rightarrow Q$  的真值完全相同,因此有

$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \vee R \rightarrow Q$

(1 分)

27. 解:  $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow R$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \vee \neg Q) \vee R$

(1 分)

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee R$

(1 分)

$$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad (1 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \quad (1 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \quad (1 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad (1 \text{ 分})$$

此即所求命题公式  $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow R$  的主析取范式。

28. 解: 根据所列关系性质, 填表如下

运算 性质	$x+y$	$x-y$	$x \cdot y$
可结合性	是	否	是
可交换性	是	否	是

(每空 1 分)

29. 解: 设度数为 1 的结点数为  $n_1$ , 由握手定理可得

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + kn_k = 2(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k - 1) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{解此方程得 } n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + \cdots + (k-2)n_k \quad (2 \text{ 分})$$

30. 解: (1) 由题 30 图所示有向图  $D$ , 可得其邻接矩阵为

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 分)

(2) 由上述  $M_D$ , 利用矩阵乘法可得

$$M_D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 分)

由此可知,  $D$  中顶点  $v_3$  到顶点  $v_1$  之间长度为 3 的通路有 4 条。 (2 分)

四、证明题: 本大题共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分。

31. 证明:  $\forall x$ ,

$$x \in P(A) \cap P(B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in P(A)) \wedge (x \in P(B)) \quad (1 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow (x \subseteq A) \wedge (x \subseteq B) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B \quad (1 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow x \in P(A \cap B) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{由此可知, } P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)。 \quad (1 \text{ 分})$$

32. 证明:应用量词辖域扩张等值式可得

$$\begin{aligned} & \forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow L(x, y))) \\ \Leftrightarrow & \forall x \forall y(P(x) \rightarrow (Q(y) \rightarrow L(x, y))) \end{aligned} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg P(x) \vee (\neg Q(y) \vee L(x, y))) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee L(x, y)) \quad (1 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg (P(x) \wedge Q(y)) \vee L(x, y)) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y((P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow L(x, y)) \quad (1 \text{ 分})$$

33. 证明:设  $n$  阶图  $G$  中的结点为  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , 易知

$$n\delta(G) \leq \sum_{i=1}^n d(v_i) \leq n\Delta(G) \quad (1)$$

而由握手定理

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m \quad (2)$$

将(2)代入(1), 于是得

$$n\delta(G) \leq 2m \leq n\Delta(G) \quad (2 \text{ 分})$$

从而得到

$$\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G) \quad (1 \text{ 分})$$

五、综合应用题:本大题共 2 小题,每小题 7 分,共 14 分。

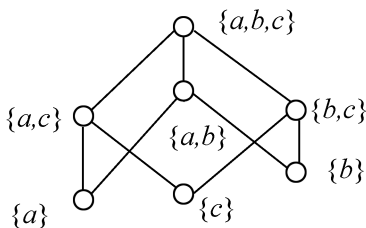
34. 解:(1)一颗树的边有  $n-1$  条,而每条边连接两个结点,故邻接矩阵  $M(G)$  中值为 1 的元素个数为  $2(n-1)$ 。

(2)一颗树中任意两个结点都是连通的,因此  $M_G + M_G^2 + M_G^3 + \dots + M_G^n$  中值为 0 的元素个数为 0。

35. 解:(1) $A$  的幂集

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\} \quad (3 \text{ 分})$$

(2)偏序关系  $\{P(A) - \{\phi\}, \subseteq\}$  的哈斯图如答 35 图所示。



答 35 图

(2 分)

由答 35 图可见,该偏序关系的极大元为  $A = \{a, b, c\}$ , 极小元为  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ 。

(2 分)