# Week 1

5.10.2022

## Probabilitate

- fie $\Omega$ o mulțime oarecare
- notăm cu $P(\Omega)$ familia tuturor submulțimilor lui $\Omega$

  $\emptyset \in P(\Omega)$, $\Omega \in P(\Omega)$
- fie $\mathcal{F} \subset P(\Omega)$

  $\mathcal{F}$ se numește $\sigma$ dacă:

  a) $\Omega \in \mathcal{F}$

  b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

  obs: $\bar{A} = \Omega / A$
- fie $I$ o mulțime de indici finită sau numerabilă

  dacă $A_i \in \mathcal{F}$, $\forall i \in I$ atunci $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$

**CONSECINȚE**:

1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ Dem: $\Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{\Omega} \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$

2) dacă $I$ este finită sau numerabilă și $A_i \in \mathcal{F}, \forall i \in I$ atunci $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$

3) dacă $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

Dem: $\left.\begin{array}{l} A \setminus B = A \cap \bar{B} \\ B \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{B} \in \mathcal{F} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap \bar{B} \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

- fie $\mathcal{F}$ o sigmă algebră, o funcție $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ se numește prob. dacă:
  a) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
  b) $P(\Omega) = 1$
  c) dacă $I$ este finită sau numerabilă, $A_i \in \mathcal{F} \ \forall i \in I$ și $A_i$ sunt disjuncte două câte două, atunci $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$

CONSECINȚE:

1) $P(\emptyset) = 0$ Dem: $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, disjuncte

$\Rightarrow P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$

$$P(\Omega) = I(\Omega) + P(\emptyset)$$

$$1 = 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$   Dem: $A \cup \bar{A} = \Omega$, disjuncte

$$\Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$1 = P(A) - P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

3) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

**Definitie:**

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se numeste câmp de prob.
- elementele lui $\mathcal{F}$ se numesc evenimente
- $\emptyset$ se numeste evenimentul imposibil
- $\Omega$ se numeste evenimentul sigma
- $\bar{A}$ se numeste evenimentul contrar lui $A$

Dpdv empiric,

- $\Omega$ se identifică cu mulțimea tuturor rezultatelor posibile ale unui experiment aleatoriu
- $\mathcal{F}$ se identifică cu mulțimea evenimentelor asociate experimentelor
- $P(A)$ este prob. evenimentului A

ex 1:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\} \qquad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{1, 2, 3\} \qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{4\} \qquad P(C) = \frac{1}{6}$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

# Probabilitate condiționată. Independență

- Considerăm un experiment aleator cu $n$ rezultate posibile, fiecare având probabilitatea $\frac{1}{n}$.
- Fie A și B asociate experimentului:

$P(A) = \frac{m}{n}$ $\quad P(B) = \frac{p}{n}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{q}{n}$

- $P(B|A) = ?$

A realizat $\Rightarrow$ „m" cazuri posibile rămase astfel,

$$P(B|A) = \frac{q}{m} = \frac{\frac{q}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

ex 2:

$A = \{1, 2\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B}) = \frac{1}{3}$ ?

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$A \cap B = \{2\}$ $\quad A \cap \bar{B} = \{1\}$ $\quad \bar{B} = \{1, 5, 6\}$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Temă: $P(B) = P(B|A) = P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2}$ ?

Realizarea sau nerealizarea lui B nu influențează P(A), iar realizarea sau nerealizarea lui A nu influențează P $\quad$ obs.

$\Rightarrow$ A, B evenimente independente

ex 3. $\quad A = \{1, 3\}$ $\quad P(A) = \frac{1}{3}$

$B = \{2, 4, 6\}$ $\quad P(A|B) = 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

Considerăm în general evenimentele $A$ și $B$.

Vom spune că sunt independente dacă:

1) $P(B \mid A) = P(B)$

2) $P(B \mid \bar{A}) = P(B)$

3) $P(A \mid B) = P(A)$

4) $P(A \mid \bar{B}) = P(A)$

Arătăm că $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$ și echivalente cu 5) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Dem: $(1) \Leftrightarrow (5)$

$$(1) \Leftrightarrow P(B \mid A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow (5)$$

Dem: $(2) \Leftrightarrow (5)$

$$(2) \Leftrightarrow P(\bar{A}) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(B \setminus A)}{P(\bar{A})} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{P(B)} - P(A \cap B) = \cancel{P(B)} - P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow (5)$$

**Temă**: restul ( )

**Def**: $A, B$ independente dacă $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Obs**: uneori, independența evenimentelor $A$ și $B$ este evidentă pe cale intuitivă și putem folosi formula (5)

# Temă 1

1. $A = \{1, 2\}$ $\quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$$P(B) = P(B|A) = P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

- $$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

obs:

$A \cap B = \{2\}$

$\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$

$B \cap \bar{A} = \{3, 4\}$

- $$P(B) = \frac{1}{2}$$

- $$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ relația „A"

2. (3) $\Leftrightarrow$ (5) (5) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$(3)\quad P(A|B) = P(A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{q.e.d.}$$

(4) $\Leftrightarrow$ (5)

$$(4)\quad P(A|\overline{B}) = P(A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = P(A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A \setminus B)}{P(\overline{B})} = P(A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A) - P(B \cap A)}{1 - P(B)} = P(A)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{P(A)} - P(A \cap B) = \cancel{P(A)} - P(A) \cdot P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{q.e.d.}$$

# Week 3

19.10.22

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(A) = \frac{\text{card } A}{6}$, $A = \{1, 2\}$, card $A = 2$

## Modelul Poison

- fixăm un număr $n \in \mathbb{N}$ și un interval de timp $t$.
- considerăm o centrală telefonică și ne interesează $P_n(t)$ ca în intervalul $[0, t]$ să intre în centrală exact $n$ apeluri.
- se poate arăta că $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

$\lambda > 0$, depinde de capacitatea centralei și nr. de abonați

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = e^{0} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

# Formula prob. totale
# Formula lui Bayes

- fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ a.î. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$
- $A_1, \ldots, A_n$ două câte două incompatibile
- fie $X \in \mathcal{F}$

$$X = X \cap \Omega = X \cap (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$= (X \cap A_1) \cup (X \cap A_2) \cup \ldots \cup (X \cap A_m)$$

reuniune de evenimente incompatibile două câte două

$$P(X) = P\left[(X \cap A_1) \cup (X \cap A_2) \cup \ldots \cup (X \cap A_m)\right]$$
$$= P(X \cap A_1) + P(X \cap A_2) + \ldots + P(X \cap A_m)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$
$$= P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(X \cap A_j) = P(A_j) \cdot P(X|A_j)$$

$$\Rightarrow P(X) = P(A_1) \cdot P(X|A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(X|A_n)$$

↳ formula prob. totale

$$P(A_j|X) = \frac{P(A_j) \cdot P(X|A_j)}{P(X)}$$

formula lui Bayes

obs. $\begin{cases} P(A_1) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n} \quad \text{caz particular} \\ \Rightarrow P(A_j|X) = \dfrac{P(X|A_j)}{P(X|A_1) + \dots + P(X|A_n)} \end{cases}$

1. 5,000 piese $f_1$

3,000 piese $f_2$

$f_1 \to 4\%$

$f_2 \to 5\%$ piese defecte

a) P(piesă defectă) = ?

b) piesă defectă, $P(f_1) = ?$

alegem $n = 2$

$A_1$ piesa aleasă provine din $f_1$

$A_2$ piesa aleasă provine din $f_2$

$A_1 \cup A_2 = \Omega$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

a) $P(X) = P(A_1) \cdot P(X|A_1) + P(A_2) \cdot P(X|A_2)$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{100} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{100}$$

$$= \frac{20}{800} + \frac{15}{800} = \frac{35}{800} = \frac{7}{160}$$

b) $$P(A_1|X) = \frac{P(A_1) \cdot P(X|A_1)}{P(X)}$$

$$= \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{100}}{\frac{35}{800}} = \frac{\frac{20}{800}}{\frac{35}{800}} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

# Variabile aleatoare

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se numește v.a.

  dacă $\underbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\}}_{\{X < a\}} \in \mathcal{F}$, $(\forall)\ a \in \mathbb{R}$ (1)

- notăm : $\{X < a\}$

- se poate arăta că (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\{X \leq a\} \in \mathcal{F}$

  (3) $\{X > a\} \in \mathcal{F}$

  (4) $\{X \geq a\} \in \mathcal{F}$

- obs. $\left\{\begin{array}{l} \text{dacă } \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow (\forall)\ X : \Omega \to \mathbb{R} \\ \text{se poate arăta că dacă } X, Y \text{ v.a. atunci} \end{array}\right.$

  $X+Y$, $X-Y$, $X \cdot Y$, $X/Y$, $|X|$, $c \cdot X$ sunt v.a.

- dpdv practic, o v.a. este o mărime ai cărei val numerică depinde de rez unui exp. aleator

ex. aruncare zar

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$X(\omega) = \omega$

$Y(\omega) = \omega^2$, $Y(5) = 25$

obs: nu ne interezează doar val numerică luată de v.a. X, ci mai ales prob ca X să ia o valoare dintr-un interval dat

ex: X înălțimea unui adult ales

## Funcția de distribuție a unei v.a.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = P(X < x)$ se numește fct. de distribuție/repartiție

**Proprietăți**

1) $F(x) \in [0, 1]$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$

2) F cresc., $P(X < x) \leq P(X < y)$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

4) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$, $(\forall)\ a < b$


$$\{x < b\} = \underbrace{\{x < a\}}_{} \cup \underbrace{\{a \leq x < b\}}_{\text{incompatibile}}$$

$$P(x<b) = P(x<a) + P(a \leq x < b)$$

$$F(b) = F(a) + P(a \leq x < b)$$

## Week 4

26.10.22

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $x(\omega) \in \mathbb{R}$

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = P(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$

1) $0 \leq F(x) \leq 1$

2) $F$ cresc

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

4) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$

# Variabile aleatoare discrete

**Def:**

$X$ discretă dacă mulțimea valorilor este finită / numerabilă

în acest caz, $X$ poate fi descrisă sub forma $X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$,

unde $I$ este o mulțime finită / numerabilă,

$x_i$ valorile lui $X$,

$p_i = P(X = x_i)$.

ex: aruncare zar

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \sum_{i \in \overline{I}} p_i = 1$$

**Variabila binomială (Bernoulli)** $n, p$ parametrii

$n \in \mathbb{N}, n \geq 1, p \in [0,1]$

ex: urna cu bilă revenită

$P(\text{bilă albă}) = p$

$P(\text{bilă roșie}) = q = 1 - p$

$n$ extrageri succesive, bila extrasă este pusă înapoi

- calculăm prob. ca din cele $n$ bile extrase, exact $k$ să fie albe

$$\left.\begin{matrix} a & a & r & r & a & \dots & a \\ p & p & q & q & p & & p \end{matrix}\right\} n \text{ extrageri}$$

$p^k q^{n-k}$

- numărul succesiunilor este $C_n^k$

! probabilitate să obținem exact $k$ bile albe este $C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

$$\Rightarrow X\begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}_{k=0,1,\dots,n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

## Variabila Poisson $\lambda > 0$

$X$ - nr apeluri în intervalul de timp $(0,1)$

$$X\begin{pmatrix} n \\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \end{pmatrix}_{n=\overline{0,n}}$$

v.d. cu infinitate numerabilă de valori

# Variabile aleatoare continue

**Def:**

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este densitate de prob. dacă:

1) $f(t) \geq 0, (\forall) t \in \mathbb{R}$
2) $f$ integrabilă pe $\mathbb{R}$
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$

X se numește v.a. cont. dacă $\exists$ o densitate de prob $f$ a.î. fct. de repartiție a lui X să fie:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(X < x) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$$

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

Variabila uniform distribuita în $[a,b]$

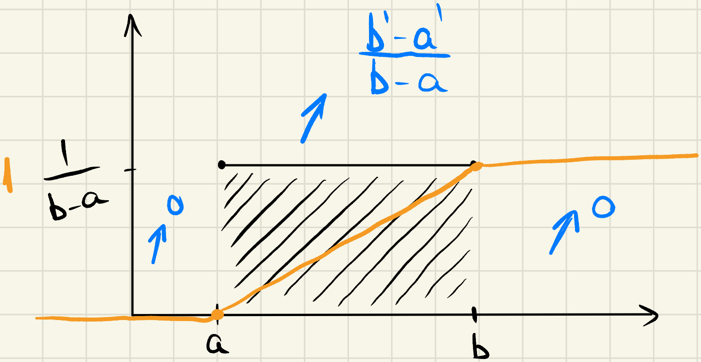
- este v.a. cu densitatea de prob cu forma

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a,b] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(t) \geq 0, \quad (\forall)\, t \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b 1\,dt$$

$$= \frac{1}{b-a}\, t\Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$



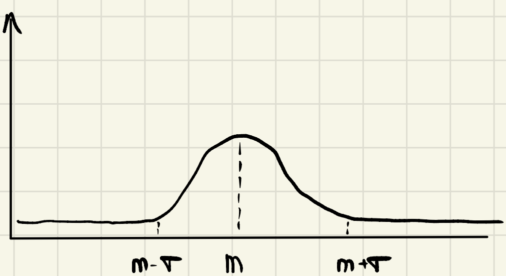

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \begin{cases} 0 &, x < a \\ \frac{x-a}{b-a} &, a \le x \le b \\ 1 &, x \ge b \end{cases}$$

## Variabila aleatoare normală

v.a. cu densitatea de prob. :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0,\ m \in \mathbb{R}$$




$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$$

fie $\sigma = 1$, $m = 0$ $\Rightarrow$ **funcția integrală a lui Laplace**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2} + \Phi(n), \text{ unde } \Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

- se poate arăta că $\Phi$ este impară
- este suficient să cunoaștem val lui $\Phi$ pt $x > 0$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\Phi(x)$ | 0,3413 | 0,4772 | 0,4987 | 0,4999 |

$x > 0$

$$P(-x < X < x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(-x)$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi(x) - \left[\frac{1}{2} + \Phi(-x)\right]$$

$$= \Phi(x) + \Phi(x)$$

$$= 2\Phi(x)$$

ex: $P(-1 \leq X \leq 1) = 2\Phi(1) = 0.6826$

$P(-2 \leq X \leq 2) = 2\Phi(2) = 0.9544$

$P(-3 \leq X \leq 3) = 2\Phi(3) = 0.9974$

caz general,

$$P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) = 0.6826$$

$$P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) = 0.9544$$

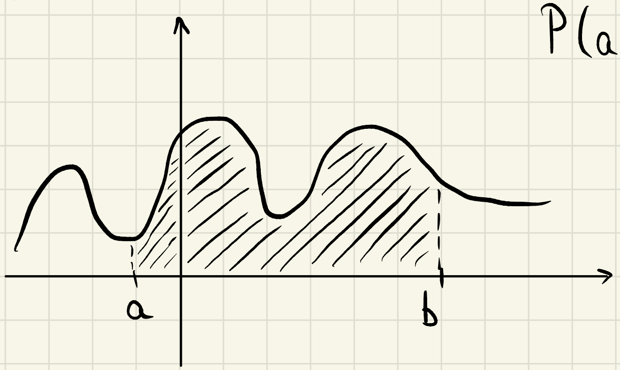
$$P(m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma) = 0.9974$$

# Week 5

2.11.2022

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) $f(t) \geq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$
2) $f$ integrabilă pe $\mathbb{R}$
3) $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$




$$P(a < X < b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

ex1 $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \ t \in \mathbb{R}$ Var. Cauchy

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ex2 $\alpha > 0, \ \beta > 0$

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

## $\Gamma(\alpha)$ Gamma Euler

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \quad \alpha>0$$

în particular, $\alpha=1$

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t/\beta}}{\beta}, & t>0 \\ 0, & t\leq 0 \end{cases}$$

ex 3

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\frac{\nu}{2}-1}\, e^{-t/2}}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}, & t>0 \\ 0, & t\leq 0 \end{cases}$$

$\chi^2$ Chi-Squared

## Variabile aleatoare multidimensionale

fie $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

$(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ se numește v.a. bidimensională

fct. de distribuție este $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = P(X<x, Y<y)$

obs: $X$, $F(x) = P(X<x)$

$F_1(x) = P(X<x)$, $F_2(y) = P(Y<y)$

Se poate arăta că $\lim\limits_{y\to\infty} F(x,y) = F_1(x)$

$$\lim_{x\to\infty} F(x,y) = F_2(y)$$

1 • Dacă se cunoaște fct de repartiție $F$ a perechii $F_1, F_2$ se pot determina fct. de repartiție $F_1, F_2$ ale $X, Y$

• Reciproca nu este în general adevărată.

2 • $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este densitate de prob pe $\mathbb{R}^2$ dacă:

a) $f(s,t) \geq 0, \ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$

b) $f$ integrală pe $\mathbb{R}^2$

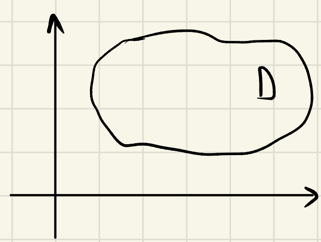
c) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\, ds\, dt = 1$

Def.

3 • Spunem că $(X,Y)$ este va bidimensională continuă dacă $\exists$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\, ds\, dt$$

$$P((X,Y) \in D) = \iint\limits_{D} f(s,t)\, ds\, dt$$



$$f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1 \text{ este densitate de prob } X \\ f_2 \text{ —"— } Y \end{array} \right.$$

$$f_2(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$$

- dacă se cunoaște dens. de prob $f(x,y)$ a $(X,Y)$ se pot determina dens. de prob a componentelor $X$ și $Y$.
- $f_1, f_2$ se numesc dens. de prob. marginale a $(X,Y)$.
- dacă se cunosc $f_1, f_2$ nu putem în general să reconstituim densitatea de prob.

ex: fie $f(x,y) = \begin{cases} (x+y^2)\,\cancel{c}\ \tfrac{6}{5}, & (x,y)\in[0,1]^2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

a) $c = ?$ a.î. $f$ o densitate de prob.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 (x+y^2)\,c\,dx\,dy = c\left[\int_0^1\int_0^1 x\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 y^2\,dx\,dy\right]$$

$$= c\left[\int_0^1 x\,dx \int_0^1 dy + \int_0^1 y^2\,dy \int_0^1 dx\right] =$$

$$= c\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \; y\Big|_0^1 + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 \; x\Big|_0^1\right] =$$

$$= c\left[\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1\right]$$

$$= c\,\frac{5}{6} \overset{?}{=} 1 \iff c = \frac{6}{5}$$

fie $(X, Y)$

b) $P(X < \frac{1}{2}) = ?$

det. dens. de prob. $X$, $f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$

$$f_1(x) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dy \quad , x \in [0,1]$$

$$= \frac{6}{5}\left[\int_0^1 x\,dy + \int_0^1 y^2\,dy\right]$$

$$= \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right), & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = P\left(-\infty < X < \frac{1}{2}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_1(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right) dx =$$

$$= \frac{6}{5}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{6}{5}\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right] = \frac{7}{20}$$

c) $P\left((X,Y) \in \left[0,\frac{1}{2}\right]^2\right)$ Temă

$$= \iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6}{5}(x+y)^2\,dx\,dy = \dots = \frac{1}{10}$$

- fie $y$ fixat, $f_2(y) > 0$
- funcția $x \longrightarrow f(x|y) \overset{def.}{=} \dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}$ se numește dens. de prob cond. a lui $X$ știind că $Y = y$
- dacă se cunoaște această densitate cond, atunci o vom folosi în locul lui $f_1$

d) să se calculeze $f_2(y) = \dots = \begin{cases} \frac{3}{5} + \frac{6}{5}y^2, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

e) $P\left(X < \frac{1}{2} \,\middle|\, Y = \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f\left(x \middle| \frac{1}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) dx$ (*)

$$f\left(x\middle|\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(x,\frac{1}{2}\right)}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}\cdot\frac{6}{5}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{2\cdot 2}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{10}$$

$$= \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

$x \in [0,1]$

$$(*) = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (4x+1)\,dx = \frac{1}{3}\left[2x^2 + x\right]\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}$$

# Week 7

16.11.2022

$X \quad F_1(x) = P(X < x) \qquad f_1(x)$

$Y \quad F_2(y) = P(Y < y) \qquad f_2(y)$

$(X, Y) \quad F(x,y) = P(X < x,\ Y < y) \quad = f(x,y)$

$\lim_{y \to \infty} F(x,y) = F_1(x) \qquad f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$

$\lim_{x \to \infty} F(x,y) = F_2(y) \qquad f_2(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$

- ne interesează dacă sunt ind. / gradul de dep.

## Variabile aleatoare ind.

- $X, Y$ v.a. ind. dacă evenimentele $\{X < x\}, \{Y < y\}$ sunt ind. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$
- în acest caz, putem scrie $F(X < x, Y < y) = P(X < x, Y < y)$
$= P(X < x) \cdot P(Y < y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$

de asemenea, $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

# Operații cu v.a.

$X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$ $\quad Y \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j \in J}$ $\quad p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$

$X+Y \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j) \in I \times J}$

- dacă $X, Y$ ind, atunci $p_{ij} = P(X = x_i) P(Y = y_j) =$

$= p_i q_j$

$\Rightarrow X+Y \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_i q_j \end{pmatrix}_{(i,j) \in I \times J}$

- analog pt produsul $X \cdot Y$

ex: fie $X, Y$ var. Poisson cu par $\lambda, \mu$

p.p. $X, Y$ ind.

să se arate că $X+Y$ var Poisson cu par. $\lambda + \mu$

$X \begin{pmatrix} i \\ \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \end{pmatrix}_{i = 0, 1, \dots}$ $\quad Y \begin{pmatrix} j \\ \frac{\mu^j e^{-\mu}}{j!} \end{pmatrix}_{j = 0, 1, \dots}$

$$X+Y \begin{pmatrix} k \\ \frac{(\lambda+\mu)^k e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \end{pmatrix}_{k=0,1,\dots} \Rightarrow X+Y \text{ va Poisson cu par } \lambda+\mu$$

$$\{X+Y=k\} = \{X=0, Y=k\} \cup \{X=1, Y=k-1\} \cup \dots \cup \{X=k, Y=0\}$$

aceste evenimente sunt incomp. 2 câte 2

$$P(X+Y=k) = P(X=0, Y=k) + \dots + P(X=k, Y=0)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \frac{\mu^{k-i} e^{-\mu}}{(k-i)!}$$
$$= e^{-\lambda} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{i!(k-i)!}}_{C_k^i} \lambda^i \mu^{k-i}$$
$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^i \mu^{k-i}}_{(\lambda+\mu)^k}$$
$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda+\mu)^k$$

fie $X, Y$ v.a. continue cu densitățile de prob.
$f_1(x)$, $f_2(y)$
$f(x,y)$ $(X,Y)$

fie $Z = X + Y$, $g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(u, z-u)\,du$ $(\forall)$ $z \in \mathbb{R}$

în particular, dacă $X, Y$ ind. $g(z) = \int_{\mathbb{R}} f_1(u) f_2(z-u)\,du$

## Media & Dispersia

$X \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$

media lui $X$ se def. $E(X) = \sum_{i \in I} p_i x_i$ cu cond. ca suma să existe

ex: la aruncarea zarului,

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = \frac{1}{6}(1+2+\dots+6) = 3.5$$

• fie X o va. cont cu $f(x)$

$X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$, $E(X) = \sum_{i \in I} p_i x_i$

$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$ cu cond ca $\int$ să fie convergentă

• fie $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$E(h(X)) = \sum_{i \in I} p_i h(x_i)$, $E(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \cdot f(x)\,dx$

ex: $h(x) = x^2$

$E(X^2) = \sum_{i \in I} p_i x_i^2$

$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx$

• în general, are loc $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

dacă X, Y ind atunci $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

• dacă $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

Obs.

• fie $X$ o v.a.

dispersia lui $X$ se definește prin $Var(X)$

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right) \geq 0$$

$$= E\left[X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2\right]$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2$$

$$= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

dpdv. practic, dispersia este o măsură a grad de împrăștiere a lui $X$ în jurul unei medii.

## Inegalitatea lui Schwarz

$X, Y$ v.a. atunci $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

egalitatea are loc $\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ aî $P(Y = cX) = 1$

ex $X$ var uniform distrib. in $[a,b]$

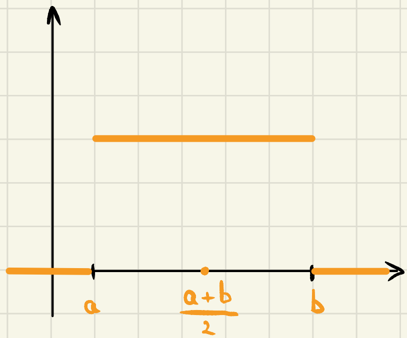
$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a,b] \\ 0, & t \notin [a,b] \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} t\, f(t)\, dt = \int_a^b t \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{1}{b-a} \frac{t^2}{2}\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{b-a}} \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2}$$

$$= \frac{b+a}{2}$$




$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_a^b t^2 f(t)\, dt = \frac{1}{b-a} \frac{t^3}{3}\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{b^3-a^3}{3}$$

$$= \frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2)}{3\cancel{(b-a)}}$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4}$$

$$= \left(b^2 - 2ab + a^2\right) / 12$$

$$= (b-a)^2 / 12$$

# Week 8

## Corelație. Metoda celor mai mici pătrate

- considerăm v.a. $X, Y$
- $\exists$ 2 cazuri extreme:
  1. $X, Y$ ind, cunoscând doar 1, nu putem știi despre celelalte (ex: aruncare zaruri)
  2. dacă știm că $\exists$ $Y = \varphi(X)$, atunci $Y$ este complet det. de $X$ (ex: $\overset{X}{\text{profit}}$, $\overset{Y}{\text{impozit}}$)
- între 1 & 2, $\exists$ diverse grade de dep. între $X$ și $Y$ (ex: profit, cadou)
- ne interesează să măsurăm gradul de dep.

notăm $C(X,Y) = E((X - \underset{E(X)}{EX})(Y - EY))$

numărul $C(X,Y)$ se numește corelația $X, Y$

$$C(X,Y) = E[XY - (EX)Y - (EY)X + EX \cdot EY]$$

$$= E(XY) - (EX)(EY) - \cancel{(EY)(EX)} + \cancel{(EX)(EY)}$$

$$\Rightarrow \boxed{C(X,Y) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY}$$

media π - π mediilor

Obs: • $X, Y$ ind $\Rightarrow C(X,Y) = 0$

reciproca nu este în general adevărată

• $C(X,X) = E(X^2) - (EX)^2 = Var(X)$

## Coeficient de corelație

$$r(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

1) $-1 \leq r(X,Y) \leq 1$

2) dacă $r(X,Y) = 1 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$

aî $Y = aX + b$

3) dacă $r(X,Y) = -1 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$

aî $Y = aX + b$

4) dacă $r(X,Y) \approx 1 \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}$, $a>0$

aî $Y \approx aX + b$

5) negativ —"—

ex pp că în urma unor măsurători, avem

$(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ $(X, Y)$

$$E(X) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \qquad E(X^2) = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}$$

$$E(Y) = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \qquad E(Y^2) = \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2}{n}$$

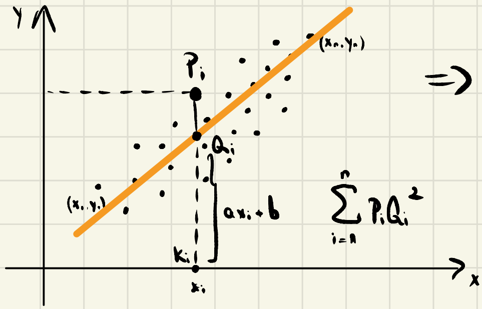
$$E(XY) = \frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} C(X,Y) = \dots \\ Var(X) = \dots \\ Var(Y) = \dots \end{array}\right\} \Rightarrow r(X,Y)$$

pp. că $\underline{\underline{r}}(X,Y) \approx 1$

$\Rightarrow \exists\, a>0, b \in \mathbb{R}$ aî

$Y \approx aX + b$, $a = ?$ $b = ?$




$\Rightarrow$ vom det $a, b$ aî dreapta de ec $y = ax + b$ să reprezinte cât mai bine sist. de pct dat

$P_iQ_i = P_iK_i - Q_iK_i = y_i - ax_i - b$ $\qquad$ obs: $y = ax + b$

$$\sum_{i=1}^{n} P_iQ_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

- notăm $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$

  vom det $a$ și $b$ pt care $S(a,b)$ este minimă

- considerăm sistemul $\begin{cases} \frac{dS}{da} = 0 \\ \frac{dS}{db} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{dS}{da} = \sum_{i=1}^{n} \cancel{2}(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0 \\ \frac{dS}{db} = \sum_{i=1}^{n} \cancel{2}(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sum x_i y_i + \sum a x_i^2 + \sum b x_i = 0 \\ -\sum y_i + \sum a x_i + \sum b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i \end{cases}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{vmatrix}} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \quad \Big| : n^2$$

$$= \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n} - \frac{\sum x_i}{n}\frac{\sum y_i}{n}}{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2} = \frac{E(XY) - EXEY}{E(X^2) - (EX)^2}$$

$$= \boxed{\frac{C(X,Y)}{Var(X)} = a}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i & \sum y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{vmatrix}} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{\sum x_i^2}{n} \frac{\sum y_i}{n} - \frac{\sum x_i}{n} \frac{\sum x_i y_i}{n}}{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2} = \frac{E(x^2)EY - EX\,E(XY)}{E(x^2) - (EX)^2}$$

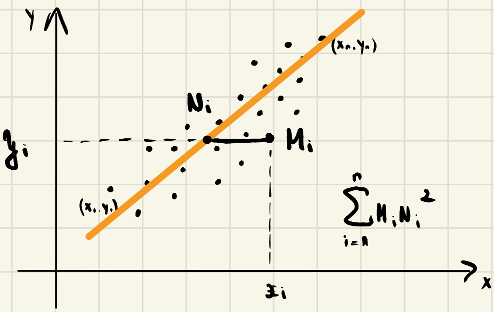
$$= \frac{\left(E(x^2) - (EX)^2\right)EY - EX\,E(XY) + (EX)^2 EY}{Var(X)}$$

$$= \frac{Var(X)EY - EX\left(E(XY) - EXEY\right)}{Var(X)}$$

$$= \boxed{EY - \frac{EX\,C(X,Y)}{Var(X)} = b}$$

$$\Rightarrow y = \frac{C(X,Y)}{Var\,X}\cdot x + EY - \frac{EX\,C(X,Y)}{Var\,X}$$

$$y - EY = \frac{C(X,Y)}{Var\,X}(x - EX) \qquad \underline{d_1}$$

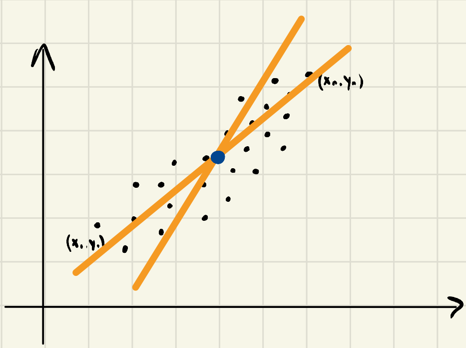


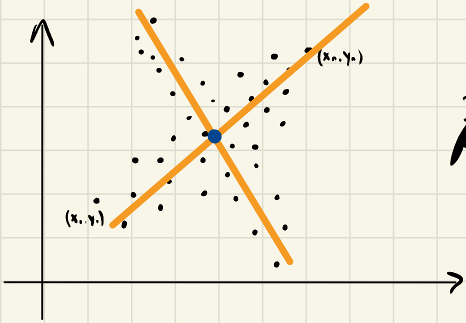

minimizând $\sum_{i=1}^{n} M_iN_i^2$, obținem

$$x - EX = \frac{C(X,Y)}{Var\,Y}(y - EY) \qquad \underline{d_2}$$

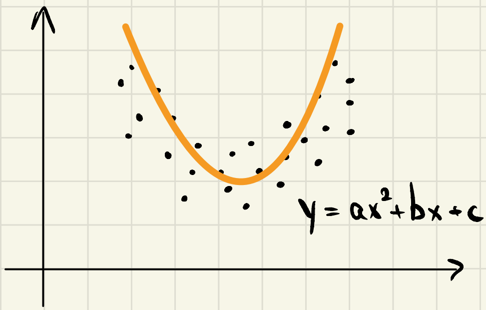
- $d_1, d_2$ -> drepte de regresie
- $d_1, d_2$ trec amândouă prin punctul de coordonate $(EX, EY)$ $0=0$
- gradul de dep.

este cu atât mai mare cu cât $d_1$ & $d_2$ sunt mai apropiate ca poz.

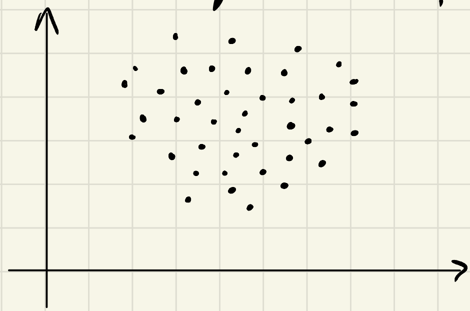





$\nexists$ corelație




$\nexists$ corelație



# Week 10

7.12.22

# Lanțuri Markov

## Mersul la întâmplare

- la momentul $n=0$, o particulă se află în punctul $i_0 \in \mathcal{X}$;
- la momentele $n = 1, 2, \ldots$ particula se deplasează la dr cu prob $p$, fie la st cu prob. $q = 1-p$;
- fie $X(n)$, poziția la momentul $n \geq 0$.

$X(0) = i_0$


$$X(1) = \begin{pmatrix} i_0-1 & i_0+1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

$$X(2) = \begin{pmatrix} i_0-2 & i_0 & i_0 & i_0+2 \\ q^2 & qp & pq & p^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i_0-2 & i_0 & i_0+2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix}$$

$$P(X(n+1) = i_{n+1} \mid X(n) = i_n, \dots, X(1) = i_1, X(0) = i_0)$$

$$= \begin{cases} p, & i_{n+1} = i_n + 1 \\ q, & i_{n+1} = i_n - 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} = P(X(n+1) = i_{n+1} \mid X(n) = i_n)$$

- Un sistem Markovian se caracterizează prin ideea că întregul trecut se regăsește rezumat în starea existentă la momentul ultimii obs.
- Modul în care sistemul a ajuns în această stare nu contează pt evoluția ulterioară.
- Un sistem Markovian păstrează asupra trecutului său doar amintirea cea mai recentă.

**Def.** $r \in \mathbb{N}$ $\quad (X(n))_{n \geq 0}$

$S = \{1, \dots, r\}$

Un lanț Markov este un șir de va cu valori în $S$ a.î. $P(X(n+1) = i_{n+1} \mid X(n) = i_n, \dots, X(1) = i_1, X(0) = i_0)$

$\forall\, n \geq 0,\ \forall\, i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in S$

$P(X(0)=i) = p_0(i)$, $i = 1, \dots, r$

$\sum_{i=0}^{r} p_0(i) = 1$, $p_0(i) \geq 0$

$(p_0(1), p_0(2), \dots, p_0(r))$ - vectorul inițial de prob.

- Un lanț Markov omogen $\Leftrightarrow \forall\, i, j \in S$

$$P(X(n+1) = j \mid X(n) = i) = p(i,j), \ \forall\, n \geq 0$$

obs: este aceeași pt $\forall\, n \geq 0$

- Numărul $p(i,j)$ se numește prob de trecere într-un pas din starea $i$ în $j$.

- Vom lucra doar cu LM omogene

- Matricea $T = \begin{pmatrix} p(1,1) & p(1,2) & \dots & p(1,r) \\ \vdots & & & \\ p(r,1) & p(r,2) & \dots & p(r,r) \end{pmatrix}$

se numește matricea de tranziție a LM omogen

- Suma elem. de pe oricare linie a $T$ este 1.
- O astfel de matr. se numește stochastică.

ex: $P(X(4)=j, X(5)=k, X(6)=h \mid X(3)=i) =$

$$= \frac{P(X(6)=h, X(5)=k, X(4)=j, X(3)=i)}{P(X(3)=i)}$$

$$= \frac{P(X(6)=h, X(5)=k, X(4)=j, X(3)=i)}{P(X(5)=k, X(4)=j, X(3)=i)} \cdot$$

$$\cdot \frac{P(X(5)=k, X(4)=j, X(3)=i)}{P(X(4)=j, X(3)=i)} \cdot \frac{P(X(4)=j, X(3)=i)}{P(X(3)=i)}$$

$$= P(X(6)=h \mid X(5)=k, \cancel{X(4)=h, X(3)=i}) \cdot$$

$$\cdot P(X(5)=k \mid X(4)=j, \cancel{X(3)=i}) \cdot$$

$$\cdot P(X(4)=j \mid X(3)=i)$$

$$= p(k,h) \cdot p(j,k) \cdot p(i,j)$$

ex. O urnă conține 8 bile albe & 4 roșii.
în exterior, 1 albă.
- la $t_0$, extragem o bilă din urnă și o înlocuim cu bila exteriară.
- repetăm la $t_2$, ...
- notăm cu $x(n)$ culoarea extrasă la momentul $n$.
$X(n) \in \{a, r\} = S$

$$P(x(0) = a) = \frac{2}{3}$$
$$P(x(0) = r) = \frac{1}{3}$$

vectorul inițial de prob. $(p_0(a), p_0(r)) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$T = \begin{pmatrix} p(a,a) & p(a,r) \\ p(r,a) & p(r,r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$p(a,a) = \frac{2}{3}$ $\quad p(a,r) = \frac{1}{3}$ $\quad 9a \; {}_2 \; 3r$

$p(r,a) = \frac{3}{4}$ $\quad p(r,r) = \frac{1}{4}$

ex: fie $m \geq 1$

$$p(m,i,j) = P(X(n+m)=j \mid X(n)=i), \quad n \geq 0$$

- $p(1,i,j) = p(i,j)$
- se poate arăta că

$$\begin{pmatrix} p(m,1,1) & p(m,1,2) & \dots & p(m,1,r) \\ \vdots & & & \\ p(m,r,1) & p(m,r,2) & \dots & p(m,r,r) \end{pmatrix} = T^m, \quad m \geq 1$$

matricea prob. de trecere în m pași

## Probabilități absolute

Notăm cu $p_m(i) = P(X(m)=i)$, $m \geq 0$, $i \in S$

Vectorul $(p_m(1), p_m(2), \dots p_m(r))$ s.n. vectorul probabilităților la momentul $m$

Obs. Pt. $m=0$ acesta este vectorul inițial de probabilitate ~~și~~

Teoremă

$$(p_m(1), p_m(2) \dots p_m(r)) = (p_0(1), p_0(2) \dots p_0(r)) \cdot T^m$$

# Week 11

14.12.22

$A \in M_r(\mathbb{R})$ (pătratică)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r \quad (\text{vector})$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ este o val. proprie a $A \iff \exists\, x \in \mathbb{R}^r,\ r \neq 0$

aî $Ax = \lambda x$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ în acest caz, $x$ se num vec propriu al A asociat cu val. proprie $\lambda$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots a_{1r} x_r = \lambda x_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2r} x_r = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{nn} x_r = \lambda x_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + (a_{rr}-\lambda)x_r = 0 \end{cases} \qquad (S)$$

Sistemul S are și soluții nebanale $\Leftrightarrow$ $\det(S) = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2r} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

dezvoltat, det (S) ne conduce la o ec de gradul r, în rap. cu necunoscuta $\lambda$.

$\Rightarrow$ val proprii ale A sunt sol. reale ale aceste ec.

- fie $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ o astfel de val proprie (răd. reală);
- înlocuim în S cu $\lambda_0$ pe $\lambda$;
- rezolvăm sistemul obținut și reținem toate sol. nebanale;
- sol. nebanale furnizează vect. pr. asociați cu val pr. $\lambda_0$.

## Teoremă

- o matr. stochastică are o val pr egală cu vectorul propriu asociat $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

## Dem: 2

pp că $A$ este stoch.

$a_{ij} \geq 0$ și $\Sigma$ elem pe fiecare linie $= 1$

? $A \cdot v = 1 \cdot v$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ex. se dă matr. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ stoch.

$T^n = ?$

- căutăm val pr & vectorii pr.
- $T$ stoch, $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- adunăm col 2 și 3 la col 1

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 1-\lambda & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} \\ 1-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- factor comun $1-\lambda$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- scădem lin 1 din 2 și 3

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6}-\lambda & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{6}-\lambda & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)\left(\frac{1}{3}-\lambda\right) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3},\ \lambda_3 = \frac{1}{6}$$

· det vect. pr. asociați cu $\lambda_2$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 0 \mid 6 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \mid 12 \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 0 \mid 6 \end{cases}$$

sistem liniar comp. nedeterminat

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 = -3x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = -2x_3 \\ x_1 + 2x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_3$$

$$2x_2 = -x_3 + x_3 \Rightarrow x_2 = 0$$

alegem $x_3 = -1$

$\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_3$ pt $\lambda_3 = ?$ $\Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{6}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

• det. $T^n = ?$

a) construim matr. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) construim matr. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$

c) din teorie, $T = PDP^{-1}$

d) $T^n = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}_{n \text{ ori}} = P\underbrace{DIDID \dots IDID}_{D^n}P^{-1}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$= PD^nP^{-1}$

$$T^n = PD^nP^{-1}$$

$$T^n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3+\frac{5}{3^n}+\frac{2}{6^n} & 4-\frac{4}{6^n} & 3-\frac{5}{3^n}+\frac{2}{6^n} \\ 3-\frac{3}{6^n} & 4+\frac{6}{6^n} & 3-\frac{3}{6^n} \\ 3-\frac{5}{3^n}+\frac{2}{6^n} & 4-\frac{4}{6^n} & 3+\frac{5}{3^n}+\frac{2}{6^n} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} T^n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

obs: inv. matr. P

① $\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10$

② $P^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

③ $P^{-1} = \frac{1}{\det P} P^*$

$$P^* = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -3 \\ -5 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

# Week 12

21.12.22

ex: 8a, 4r, 1a exterior

- n=0, se extrage o bilă și se înlocuiește cu ext.
- repetăm la n=1,2,...
- notăm X(n) culoarea bilei la mom. n
- $X(n) \in \{a, r\}$

$$(p_0(a), p_0(r)) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$T = \begin{pmatrix} p(a,a) & p(a,r) \\ p(r,1) & p(r,r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

- $T^n = ?$

rez:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{3} \\ 1-\lambda & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{1}{4} - \lambda - \frac{1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{12}$$

obs: $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y = 0 \Leftrightarrow 9x + 4y = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{9}{4}x$$

fie $x = 4 \Rightarrow y = -9$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} \quad \det P = -13$$

$$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}, \quad P^* = \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P} P^* = -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}}_{D} P^{-1} \Leftrightarrow T = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$T^n = \overbrace{T \cdot T \cdot \ldots \cdot T}^{n}$$

$$T^n = (PDP^{-1}) \ldots (PDP^{-1})$$

$$T^n = P\overbrace{DD\ldots D}^{n}P^{-1}$$

$$T^n = P\cdot D^n\cdot P^{-1}$$

dar $T^n = P\cdot D^n\cdot P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{-1}{12^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix}1 & 4\left(-\frac{1}{12}\right)^n\\ 1 & -9\left(-\frac{1}{12}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix}9+4\left(-\frac{1}{12}\right)^n & 4-4\left(-\frac{1}{12}\right)^n\\ 9-9\left(-\frac{1}{12}\right)^n & 4+9\left(-\frac{1}{12}\right)^n\end{pmatrix}$$

$$(p_n(a),\ p_n(n)) = (p_0(a),\ p_0(n))\,T^n$$

$$(p_n(a), p_n(n)) = \underbrace{\frac{1}{13}\left(\overset{=2}{\frac{2}{3}},\ \overset{=1}{\frac{1}{3}}\right)}_{\cdot 3}\begin{pmatrix}9+4\left(-\frac{1}{12}\right)^n & 4-4\left(-\frac{1}{12}\right)^n\\ 9-9\left(-\frac{1}{12}\right)^n & 4+9\left(-\frac{1}{12}\right)^n\end{pmatrix}$$

$$(p_n(a), p_n(n)) = \frac{1}{39}\left(27-\left(-\frac{1}{12}\right)^n,\ 12+\left(-\frac{1}{12}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow p_n(a) = \frac{9}{13} - \frac{1}{39}\left(-\frac{1}{12}\right)^n$$

$$p_n(n) = \frac{4}{13} + \frac{1}{39}\left(\frac{-1}{12}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} T^n = \begin{pmatrix} \frac{9}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} \qquad \lim_{n\to\infty} p_n(a) = \frac{9}{13}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n(r) = \frac{4}{13}$$

$$\Rightarrow \quad p_n(a) \simeq \frac{9}{13}, \quad p_n(r) \simeq \frac{4}{13}$$

# Week 13

11.01.23

$$\begin{cases} T = \begin{pmatrix} p(1,1) & p(1,2) & \dots & p(1,r) \\ p(2,1) & p(2,2) & \dots & p(2,r) \\ \vdots & & & \\ p(r,1) & p(r,2) & \dots & p(r,r) \end{pmatrix} \\ (p_0(1), p_0(2), \dots, p_0(r)) \end{cases}$$

$$(p_n(1), p_n(2), \dots, p_n(r)) = (p_0(1), p_0(2), \dots, p_0(r)) \cdot T^n$$

- Spunem că $T$ este regulată dacă $\exists\, k \in \{1, 2, \dots\}$ aî toate elem. lui $T$ la puterea $k > 0$.

ex: $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\underline{I}}$$

$$T^3 = T^2 \cdot T = \underline{I} \cdot T = T$$

$$T^4 = T^2 \cdot T^2 = \underline{I} \cdot \underline{I} = \underline{I}$$

## Teoremă

[1]

- Dacă $T$ este regulată $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} T^n = B$ unde $B$ este o matrice stochastică și are toate liniile identice.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_r \\ b_1 & \dots & b_r \\ \vdots & & \\ b_1 & \dots & b_r \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} b_1 + \dots + b_r = 1 \\ b_1, \dots, b_r > 0 \end{array}$$

- pp că $T$ este regulată

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (p_n(1), \dots, p_n(r)) = (b_1, b_2, \dots, b_r)$$

$$= (p_0(1), p_0(2), \dots, p_0(r)) \cdot \lim_{n\to\infty} T^n$$

$$= (p_0(1), p_0(2), \dots, p_0(r)) \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_r \\ b_1 & \dots & b_r \\ \vdots & & \\ b_1 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

dem [2]

obs [2]: $p_0(1) \cdot b_1 + p_0(2) \cdot b_1 + \dots + p_0(r) \cdot b_1 = b_1$

**Def.**

- Vectorul $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ se numește distribuția limită a lanțului Markov regulat* (*când T este regulată)

- Vectorul b poate fi det. fără a calcula $T^n$

**Teoremă** $^2$

- b este unicul vector propriu al matr. T transpus ($T^t$) asociat cu val proprie 1 & $\Sigma$ componentelor = 1

$$\begin{cases} T^t \cdot b = b \\ b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1 \end{cases}$$

ex:

$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ stoch & reg.

z

$$\exists \lim_{n\to\infty} T^n = B = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} \big(p_n(1), p_n(2), p_n(3)\big) = \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

= vom regăsi vectorul b fără a calcula $T^n$

cu teorema 2

$$b = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ? \qquad \begin{cases} T^t b = b \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{T^t} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6}z = x \quad \Big| \cdot 12 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = y \quad \Big| \cdot 6 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = z \quad \Big| \cdot 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+3y+2z=12x \\ 2x+3y+2z=6y \\ 2x+3y+6z=12z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+3y+2z=0 \\ 2x-3y+2z=0 \\ 2x+3y-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+4z=0 \\ 4x-4z=0 \\ 2x+3y-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ 2x+3y-6z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-6z=0 \\ z=x \end{cases} \Leftrightarrow 3y-4x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{4x}{3} \\ z=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \rightarrow \text{reamintim} \\ x+\frac{4x}{3}+x=1 \Rightarrow 10x=3 \end{cases}$$

$$x=\frac{3}{10}, \quad y=\frac{4}{10}, \quad z=\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow b=\begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

ex:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} T^t b = b \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = x \quad | \cdot 12 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = y \quad | \cdot 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 9y = 12x \\ 4x + 3y = 12y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 9y = 0 \\ 4x - 9y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 4x = 9y \\ x = \frac{9y}{4} \\ x + y = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \frac{4}{13} \\ x = \frac{9}{13} \end{array}$$

$$\Rightarrow b = \begin{pmatrix} \frac{9}{13} \\ \frac{4}{13} \end{pmatrix}$$

Pentru examen, prima parte:

- Formula Bayes
- Probabilitatea totală
- Media
- Dispersia
- Integrale (exponențială, polinomială)