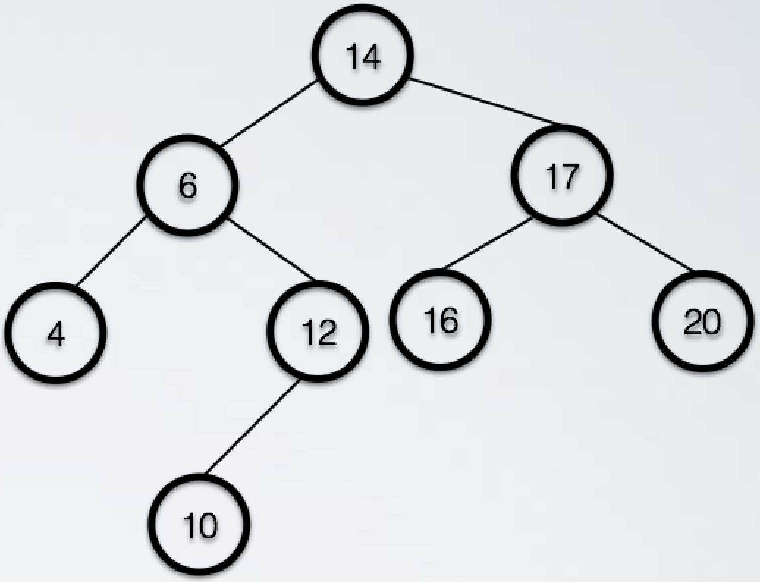
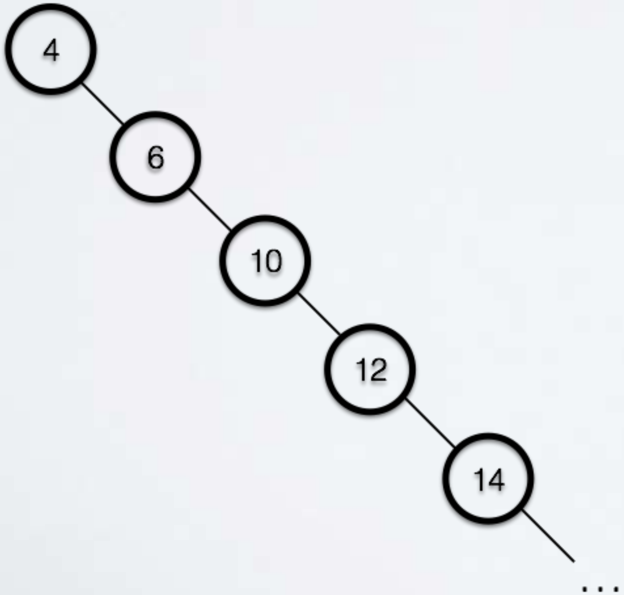
SDA CURS 4: Arbori binari de cautare echilibrati. Arbori AVL

ARBORI BINARI DE CAUTARE

- Cautare: *O(h)*
- Inserare: *O(h)*
- Stergere: *O(h)*
- *h = log n ?*
- Cazul defavorabil?





PERFORMANTA ABC

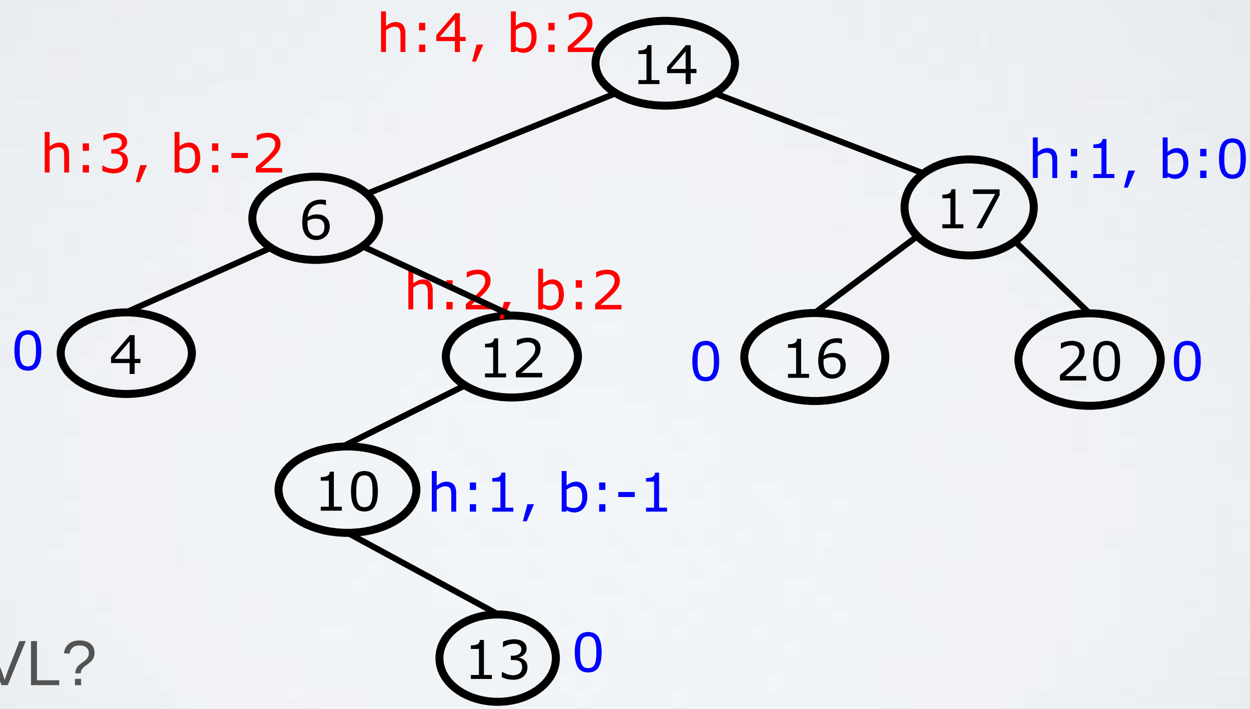
Putem garanta *h~log n*?

- chei cunoscute de la inceput, fara modificari ulterioare:
  - constructia initiala -> mediana
  - operatii ulterioare de inserare/stergere nu garanteaza mentinerea conditiei
  - Perfectly Balanced Trees: |*balance(n)*| **<= *1***, where balance(n) = no_nodes(n.left) – no_nodes(n.right)
- chei inserate aleator:
  - necesitatea unei conditii de echilibru, care:
    1. sa garanteze ca *inaltimea este log n* in orice situatie
    2. este *usor de mentinut* la inserare/stergere

ARBORI AVL
ADELSON-VELSKI-LANDIS

pentru orice nod *n*:

- ***|balance(n)|*** ≤ 1, unde
  - height(n) = nr. max muchii de la nod la o frunza
  - **balance(n)=height(n.left) - height(n.right)**



Este AVL?

Care este cel mai adanc nod dezechilibrat?

AVL - CONDITIA DE ECHILIBRU

1. Sa garanteze ca inaltimea este *O(log n)*
   - *n(h)* - numarul minim de noduri pt. AVL de inaltime h
   - *n(0) = 1, n(1)=2*
   - *n>=2,* AVL contine cel putin:
     - *radacina*
     - *sub-arbore AVL de inaltime h-1*
     - *sub-arbore AVL de inaltime h-2*
   - Adica: ***n(h) = 1+ n(h-1) + n(h-2)***
   - Intrucat ***n(h-1)>n(h-2)*** => ***n(h) > 2n(h-2) > 4n(h-4) > 8n(h-6) > … > 2^in(h-2i)***
   - Rezolvand: ***n(h) > $2^{h/2}$***
   - Aplicam log: ***h < 2log n(h)***

AVL - CONDITIA DE ECHILIBRU

2. Usor de intretinut
   - traditional, se mentine factorul de echilibru (balance factor) la fiecare nod: +1, 0 sau -1 (sau inaltimea)
   - Proprietatile algoritmului de echilibrare
     - dupa *Insert*:
       - modificarea informatiei de echilibru se produce la mai multe noduri inspre radacina, DAR
       - de indata ce s-a executat o rotatie simpla/dubla arborele se re-echilibreaza
     - dupa *Delete:*
       - este posibil sa fie nevoie de rotatii pe <u>toate</u> nodurile de pe calea de cautare

AVL - OPERATII

Cautare: la fel ca si in ABC

Inserare:

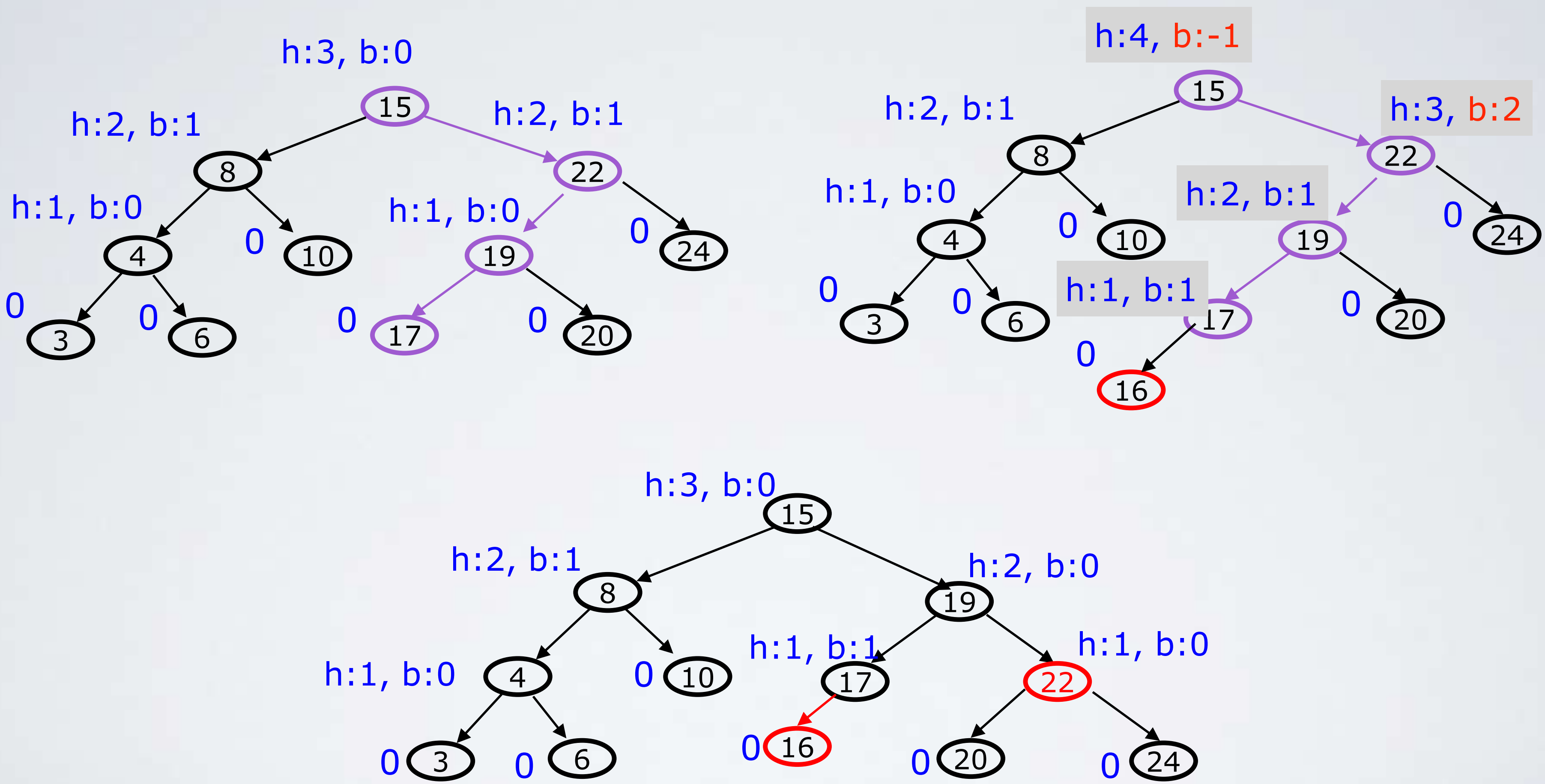
- inserare ca si frunza (ca si in ABC)
- verificare echilibru
- echilibrare (4 cazuri diferite)
  - se rezolva cu rotatii simple/duble
  - ∃ un cel mai adanc nod care este dezechilibrat
    - daca acesta se reechilibreaza, totul deasupra lui este echilibrat! (vom vedea de ce…)

Stergere:

- se elimina nodul ca si in ABC
- verificare echilibru
- se reechilibreaza arborele
- mai complicata ca inserarea

AVL - EXEMPLU INSERARE - ROTATIE SIMPLA

Insert(16)



Ce puteti spune despre inaltimea celui mai adanc nod unde s-a produs dezechilibrul? (inaltimea de dinainte de insert, si cea de dupa echilibrare)

AVL – TIPURI DE ROTATII

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

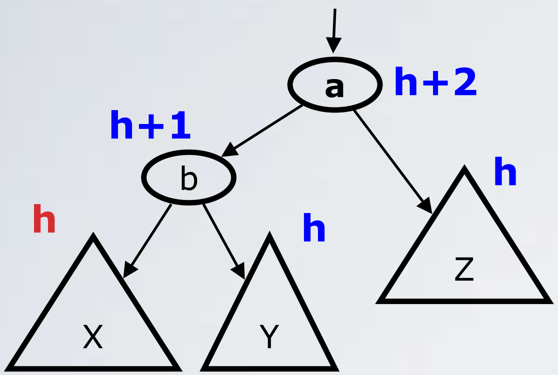
Rotatii

- Simple
  - **Stanga – LL Rotation:**
    nod inserat in subarborele drept al unui copil dreapta (cu dezechilibru pe dreapta)
  - **Dreapta – RR Rotation:**
    nod inserat in subarborele stang al unui copil stanga (cu dezechilibru pe stanga)
- Duble
  - **Stanga Dreapta – LR Rotation**
    nod inserat in sub-arborele **drept** al copilului **stang** (cu dezechilibru pe sta
  - **Dreapta Stanga – RL Rotation**
    nod inserat in sub-arborele **stang** al copilului **drept** (cu dezechilibru pe dre

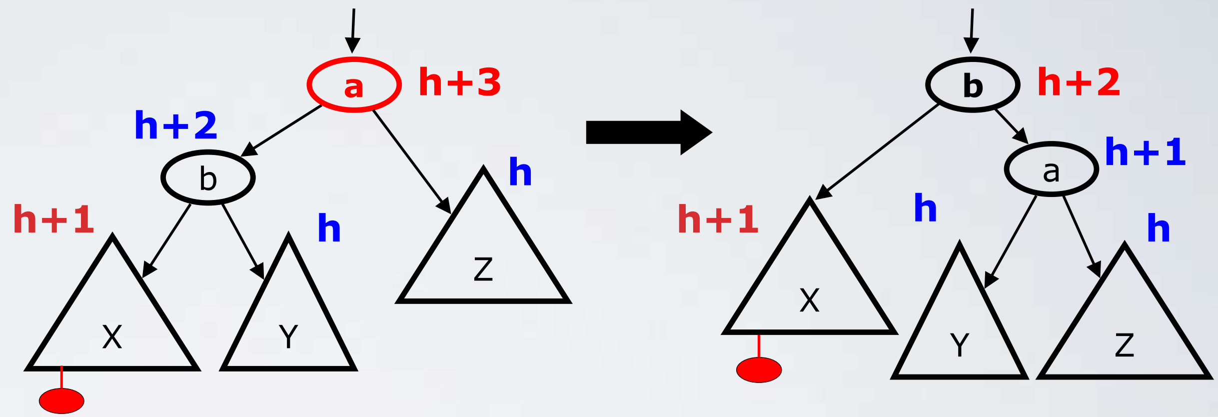
AVL - ROTATII SIMPLE

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

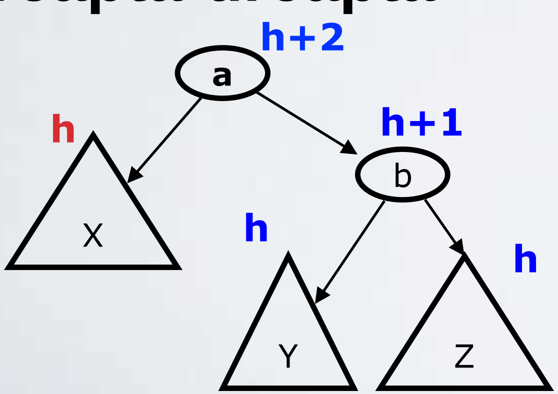
Stanga-stanga



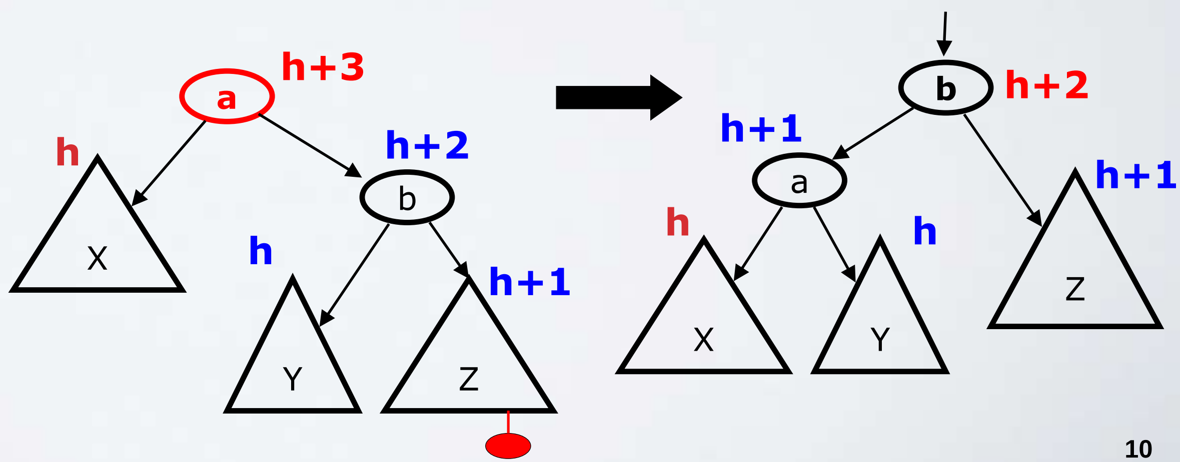
Right rotation



Dreapta-dreapta

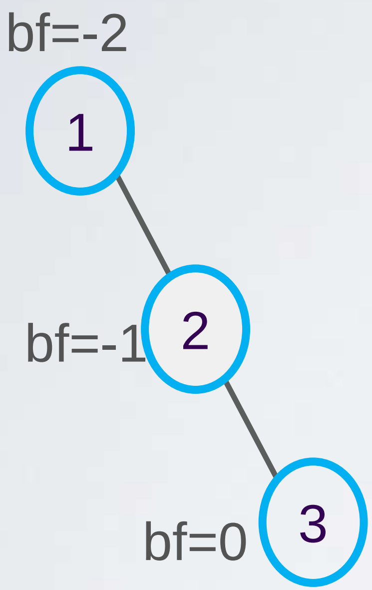


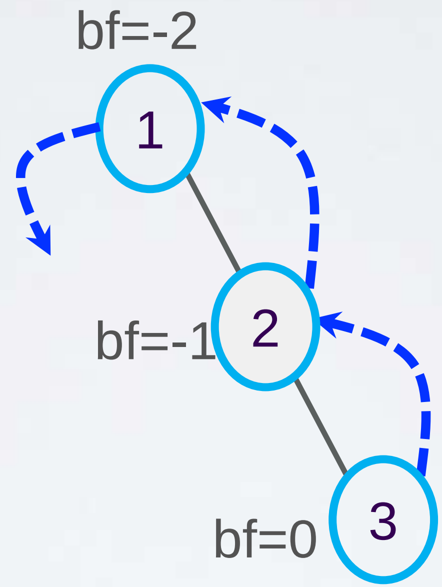
Left rotation

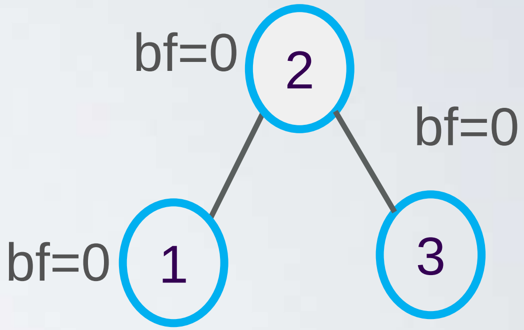


ROTATIE STANGA - EXEMPLU

Insert 1, 2, 3







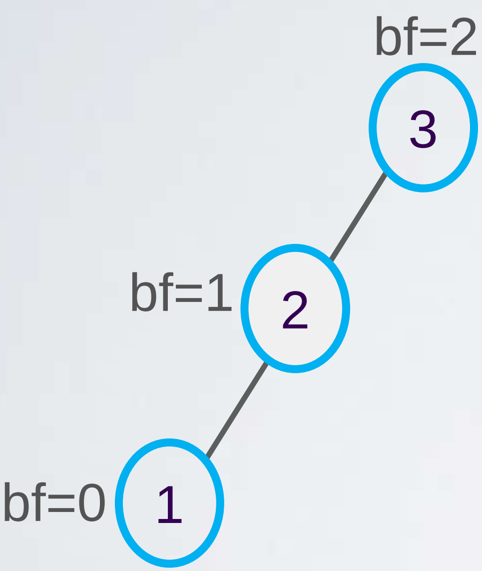
Arbore ne-echilibrat

Ca sa il echilibram folosim rotatia left (stanga) care “muta” nodurile cu o pozitie la stanga.

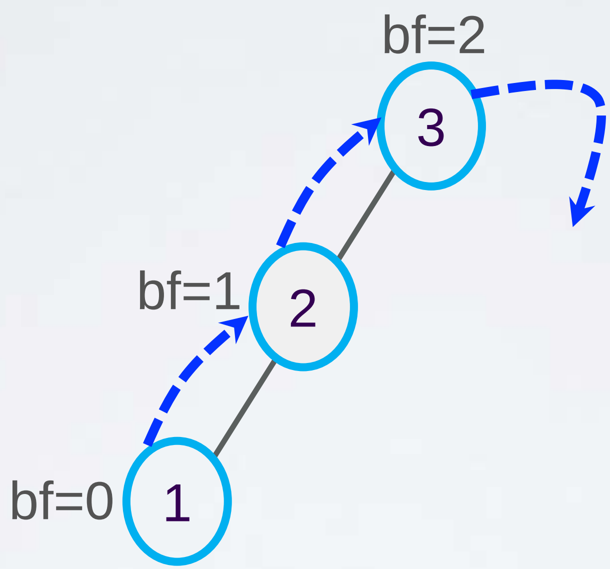
Dupa rotatia stanga arborele devine echilibrat.

ROTATIE DREAPTA – EXEMPLU

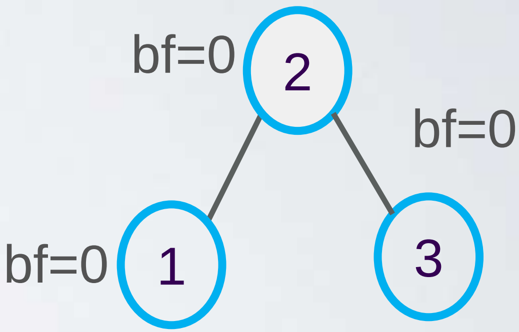
Insert 3, 2, 1



Arbore ne-echilibrat deoarece nodul 3 are bf = 2



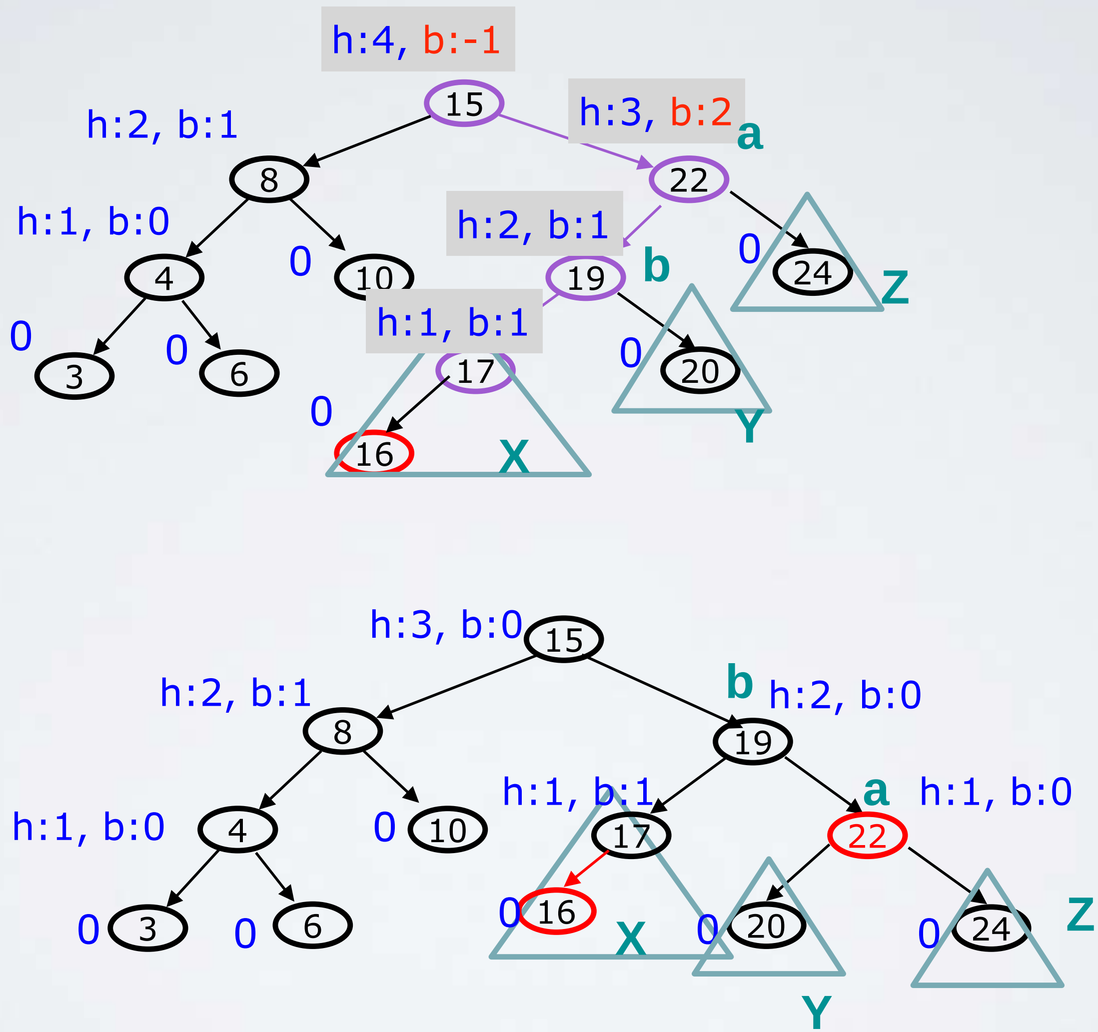
Ca sa il echilibram folosim rotatia dreapt care “muta” nodurile cu o pozitie la dreapta.



Dupa rotatia dreapta (right) arborele devine echilibrat.

AVL - ROTATIE DREAPTA EXEMPLU

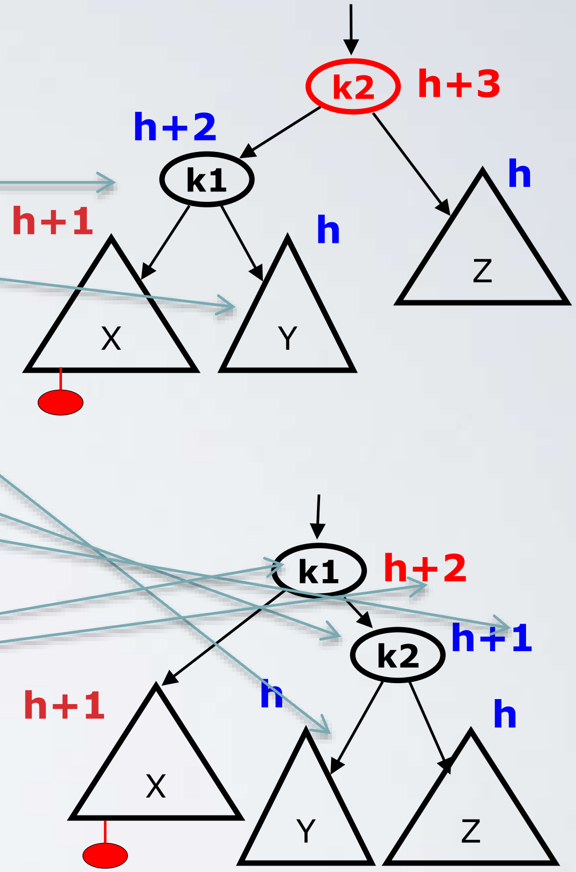
UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA



AVL - ROTATIE DREAPTA (EXEMPLU COD)

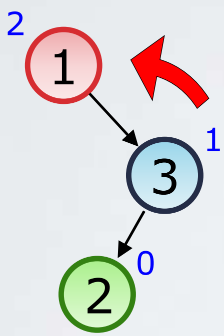
UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

```
void snglRotRight(AVLNodeT **k2)
{
   AVLNodeT *k1 ;
   k1 = (*k2)->left ;
   (*k2)->left  = k1->right ;
   k1->right = *k2 ;
   (*k2)->height = max(
        (*k2)->left->height,
        (*k2)->right->height) + 1;
   k1->height = max(
      k1->left->height,
     (*k2)->height ) + 1 ;
   *k2 = k1; // assign new  root
}
/* snglRotLeft is symmetric */
```



AVL - PROPRIETATI ROTATII

- Nodurile din sub-arborele nodului rotit nu sunt afectate!
- O rotatie ia O(1)
- Inainte si dupa arborele isi pastreaza ordonarea de ABC
- Nota: codul pentru rotatie stanga este simetric

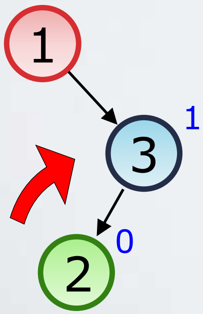


(1)

Rotatiile simple nu sunt suficiente!!!

What if….(2), apoi (1)?

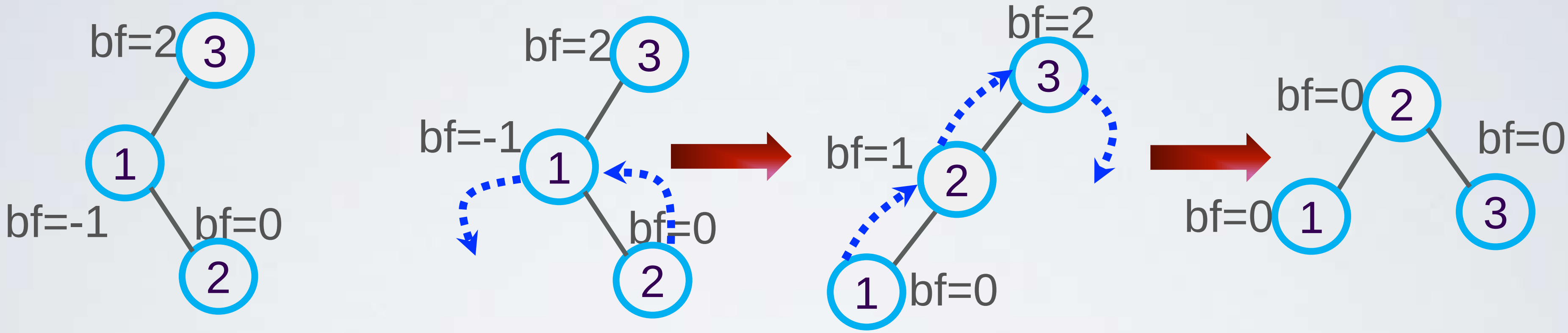
- rotatie intre copil si nepot problematici
- …apoi intre nod si noul copil



(2)

ROTATIE STANGA DREAPTA (LR ROTATION)

Insert 3, 1, 2



Arbore ne-echilibrat deoarece nodul 3 are bf = 2

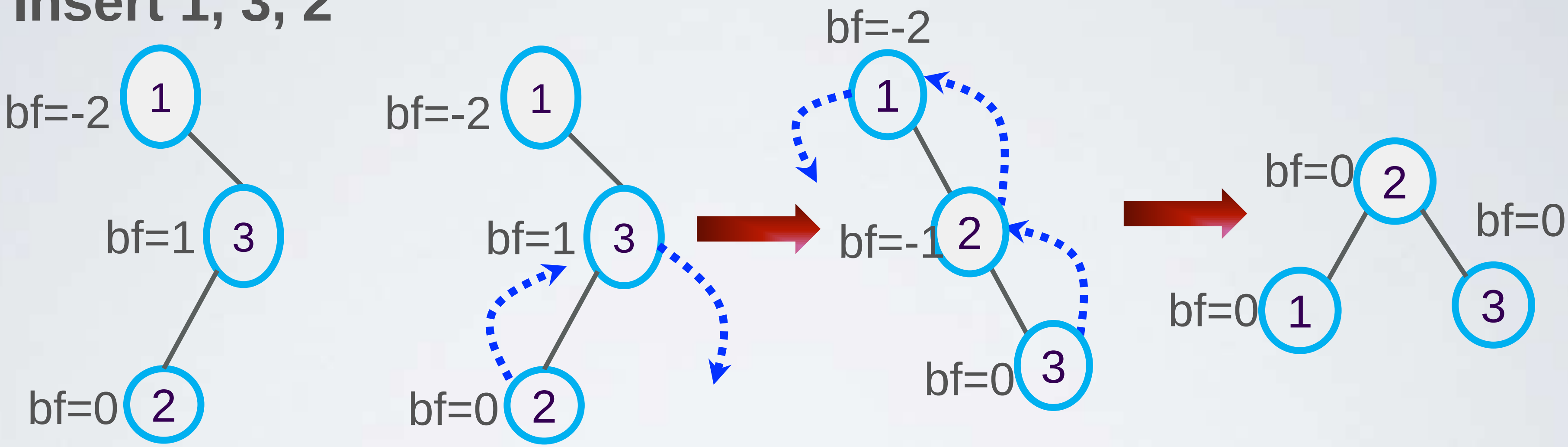
Rotatie stanga

Rotatie dreapta

Arbore echilibrat

ROTATIE DREAPTA STANGA (RL ROTATION)

Insert 1, 3, 2



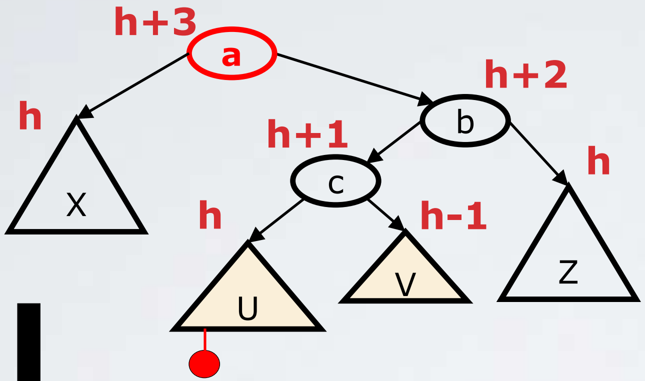
Arbore ne-echilibrat deoarece nodul 1 are bf = -2

Rotatie dreapta

Rotatie stang

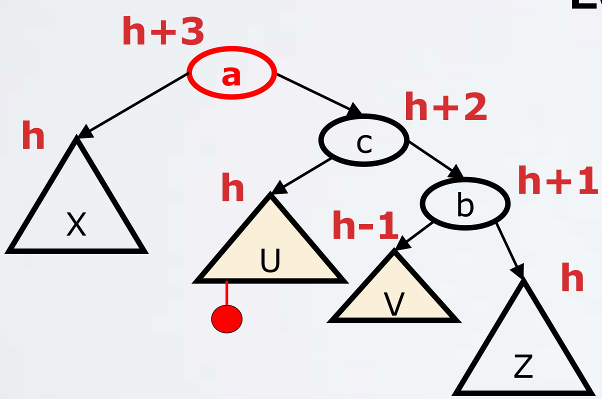
Arbore echilibrat

AVL - ROTATIE DUBLA: DREAPTA-STANGA

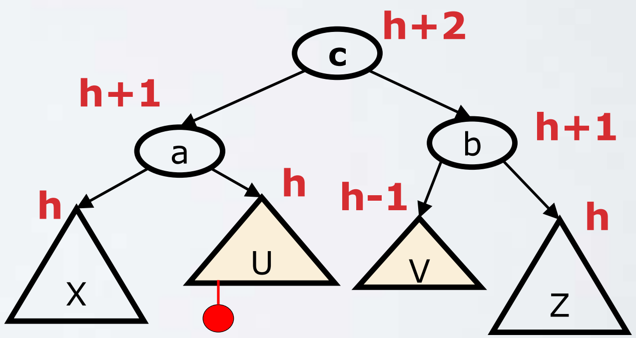



```
void  dblRightLeft(AVLNodeT **root)
{
   // RRoT b
   snglRotRight(&((*root)->right));
   // LRot a
   snglRotLeft(root);
}
```

RightRot (b)

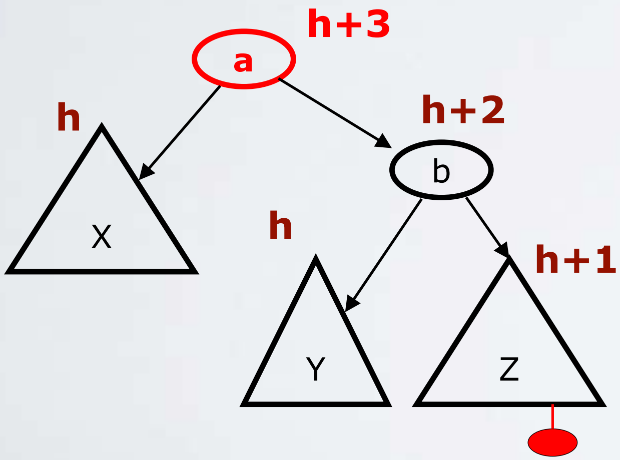


LeftRot (a)

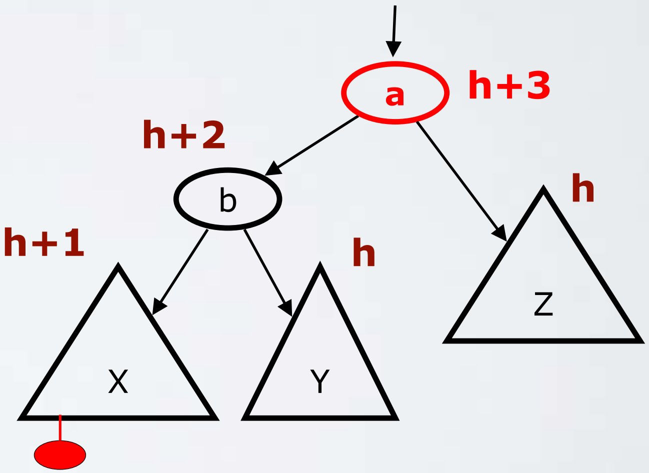


AVL - CUM FOLOSIM ROTATIILE SIMPLE?

Rotatie stanga: cand un nod este inserat la ***dreapta*** copilului **dreapta (b)** a celui mai apropiat stramos cu *bf = -2 (dupa inserare)* **(a)**

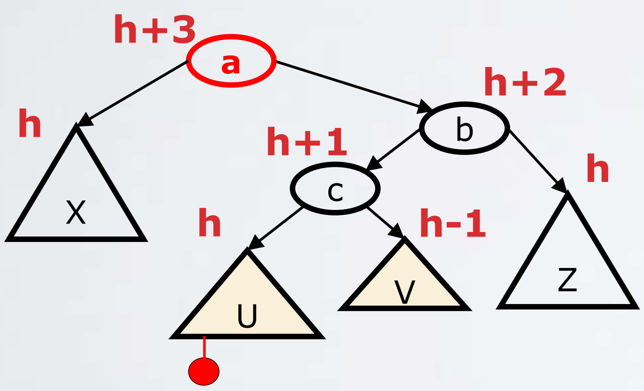


Rotatie dreapta: cand un nod este inserat in sub-arborele **stang** al copilului **stanga (b)** al celui mai apropiat stramos *cu bf = +2 (dupa inserare)* **(a)**

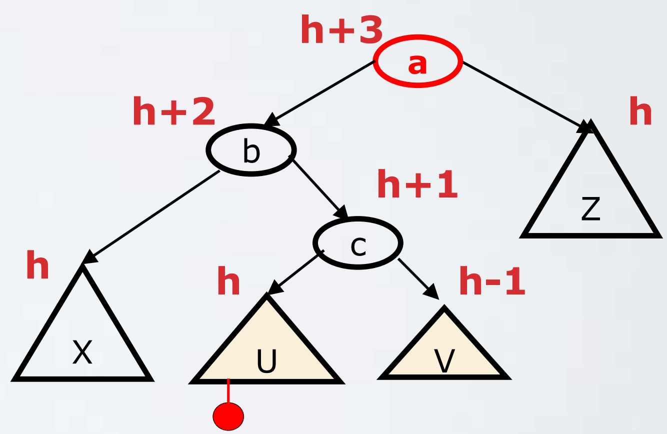


AVL - CUM FOLOSIM ROTATIILE DUBLE?

Dreapta-stanga: cand un nod este inserat in sub-arborele **stang** al copilului **drept (b)** al celui mai apropiat stramos cu *bf = -2 (dupa inserare)* **(a)**



Stanga-dreapta: cand un nod este inserat in sub-arborele **drept** al copilului **stang (b)** al celui mai apropiat stramos cu *bf = +2 (dupa inserare)* **(a)**



AVL - INSERT - COMPLEXITATE

Cazul defavorabil: *O(log n)*

- Rotatie: *O(1)*
- Lungimea caii catre radacina: *O(log n)* (de ce?)
- Cel mult 2 rotatii la o inserare (de ce?)

Complexitate *Search*?

Complexitate *constructie* arbore?

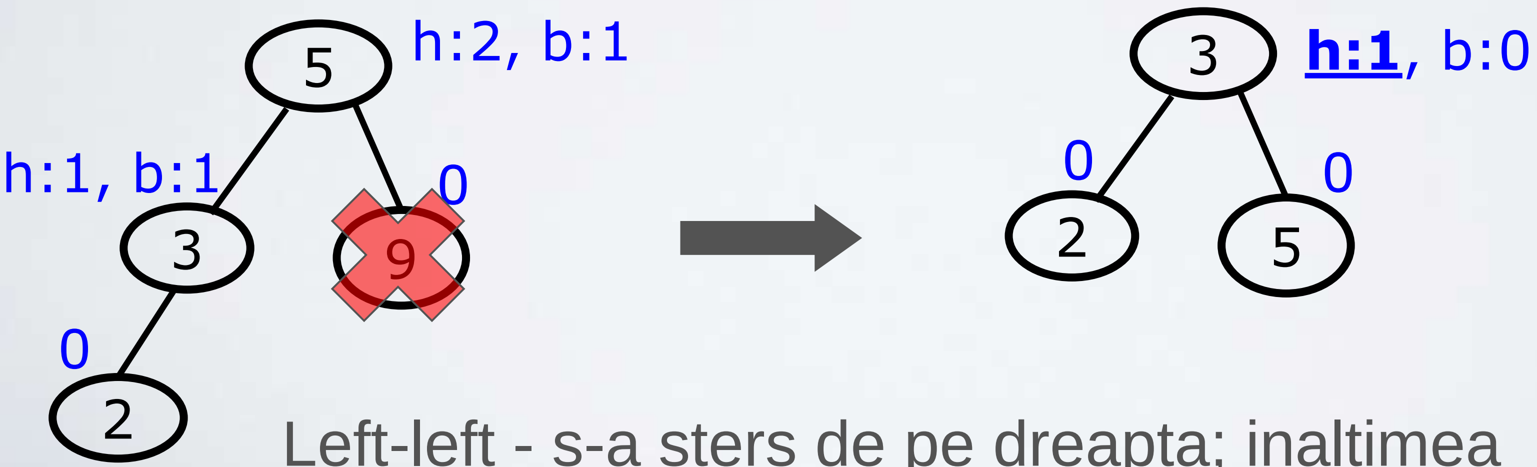
AVL - STERGERE

Eliminarea nodului se face folosind strategia ABC de inlocuire cu succesor/predecesor

Dezechilibrul se repara prin rotatii (simple/duble)

Spre deosebire de inserare, ***1 sau 2 rotatii s-ar putea sa nu fie suficiente pentru a restabili echilibrul in arbore!*** *De ce?*

Exemplu: insert(5), insert(3), insert(9), insert(2), delete(9)

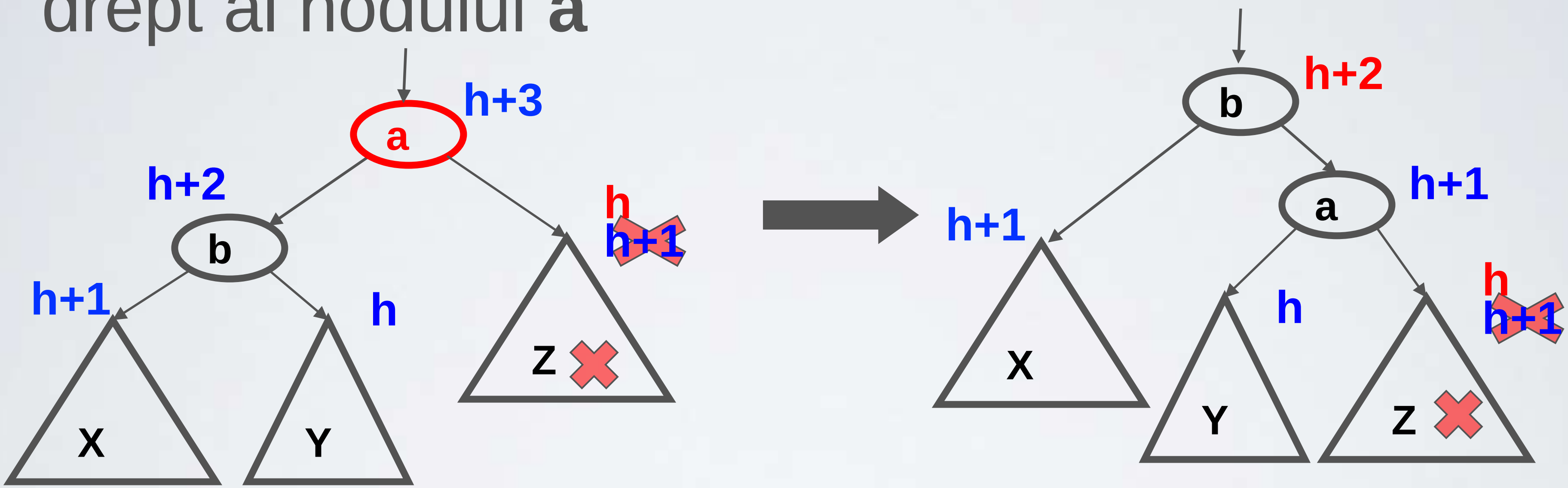


Left-left - s-a sters de pe dreapta; inaltimea subarborelui final se modifica

AVL - STERGERE - RE-ECHILIBRARE

CAZ #1: LEFT-LEFT

- Datorata stergerii unui nod din subarborele drept al nodului **a**

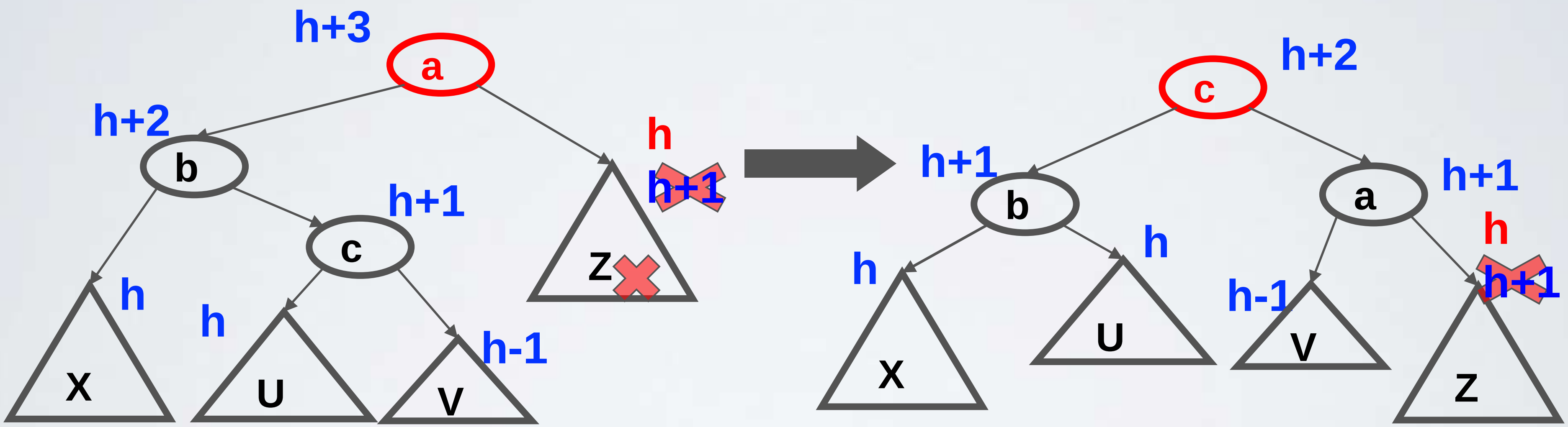


Rotatie simpla la dreapta asupra nodului **a** (ca si la inserare in X)
DAR!
Inaltimea subarborelui rezultat scade cu 1 =>
s-ar putea sa fie nevoie sa reechilibram mai sus !!

AVL - STERGERE - RE-ECHILIBRARE

CAZ #2: LEFT-RIGHT

- Datorata stergerii unui nod din subarborele drept al nodului **a**

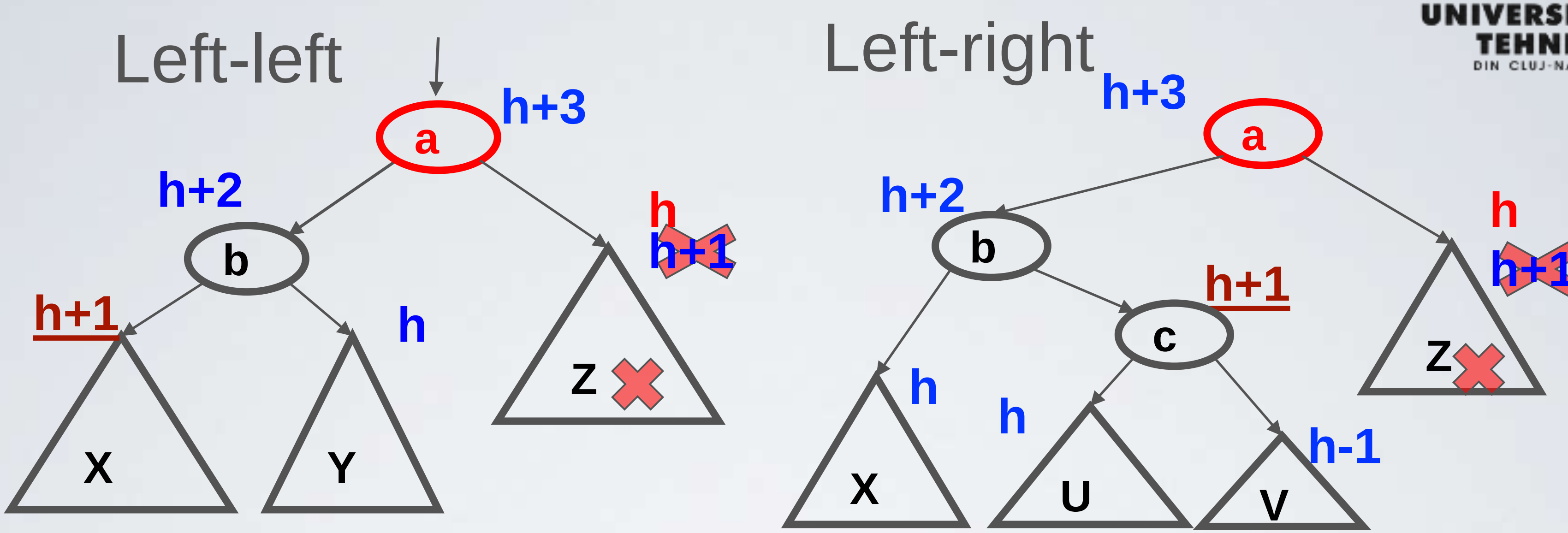


Aceeasi rotatie dubla ca si la inserarea left-right, cand **c** devine mai inalt

DAR!

Inaltimea subarborelui rezultat scade cu 1 =>

s-ar putea sa fie nevoie sa reechilibram mai sus !!



Cazurile de pana acum: unul din nepotii de pe stanga au inaltime h+1

Ce se intampla daca amandoi ajung sa fie “prea inalti”?

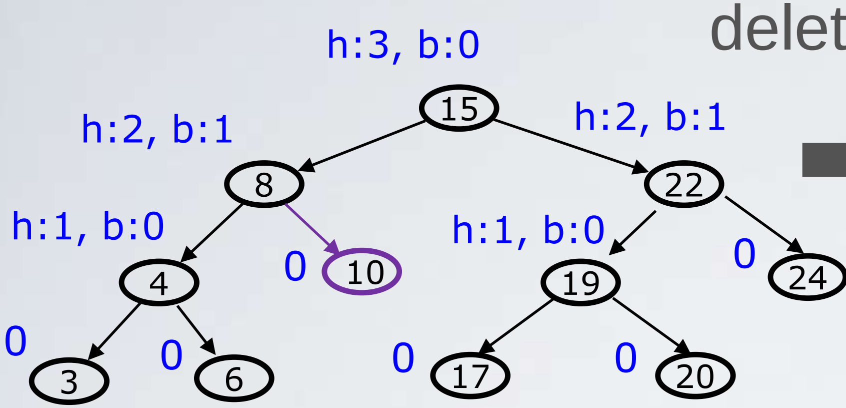
- #1 (Left-left) functioneaza si in cazul asta
- Copiii noului nod din varf vor avea inaltimi de vor diferi cu 1, dar subarborele este echilibrat

AVL - STERGERE - RE-ECHILIBRARE

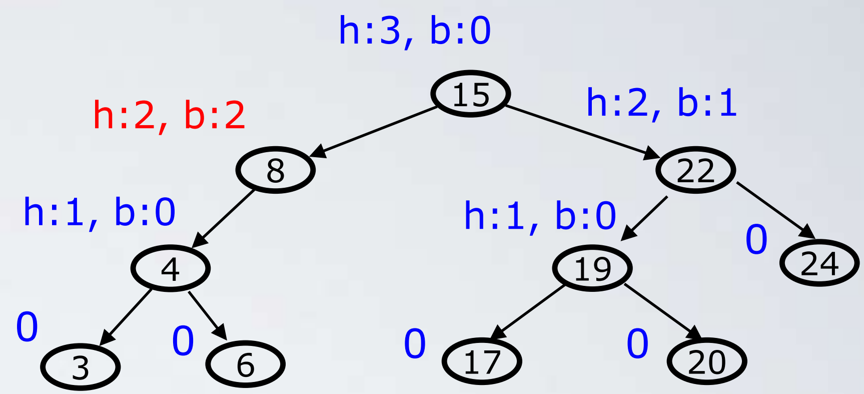
Cazurile #3 RIGHT-RIGHT, #4 RIGHT-LEFT

- Right-right: stergerea de pe stanga face ca nepotul dreapta-dreapta sa devina prea inalt
- Right-left: stergerea de pe stanga face ca nepotul dreapta-stanga sa devina prea inalt
- (daca ambii nepoti dreapta devin prea inalti, cazul #3 functioneaza)

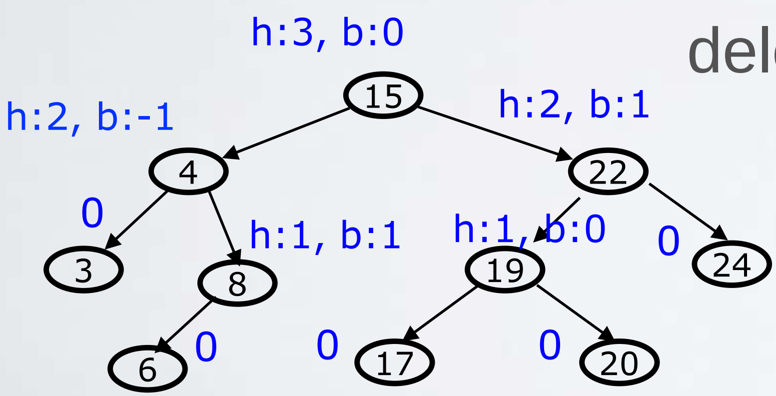
delete(10)



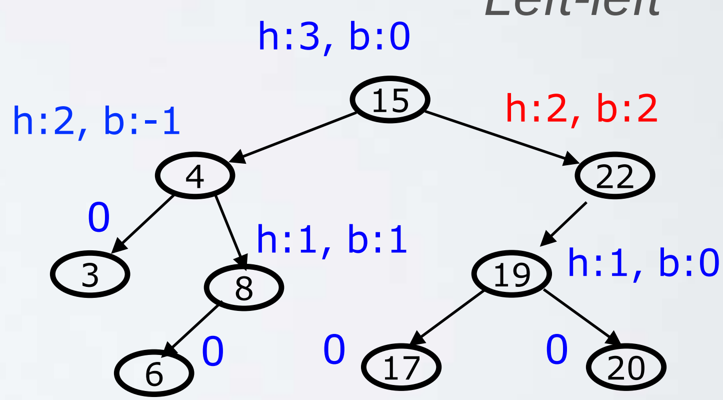
Left-left



delete(24)



Left-left



...

AVL - STERGERE

Delete - Complexitate

- search: *O(log n)*
- reechilibrare prin rotatii *de la nodul sters* ***fizic*** *pana la radacina: O(log n)*

AVL – PROS & CONS

- Pro:
  - Operatii in timp O(log n) in cazul defavorabil
  - Echilibrarea pe inaltime nu creste complexitatea cu mai mult de un factor constant
- Con:
  - Dificil de implementat si depanat
  - Memorie suplimentara pt informatia de inaltime
  - Asimptotic rapizi, dar in practica echilibrarea se simte
  - Multe cautari pe volume mari de date (e.g. baze de date) se fac pe disc, si atunci volumul arborelui il face sa nu mai incapa in memorie => avem nevoie de arbori mai “shallow” (e.g. B-trees)

ARBORI ROSU SI NEGRU

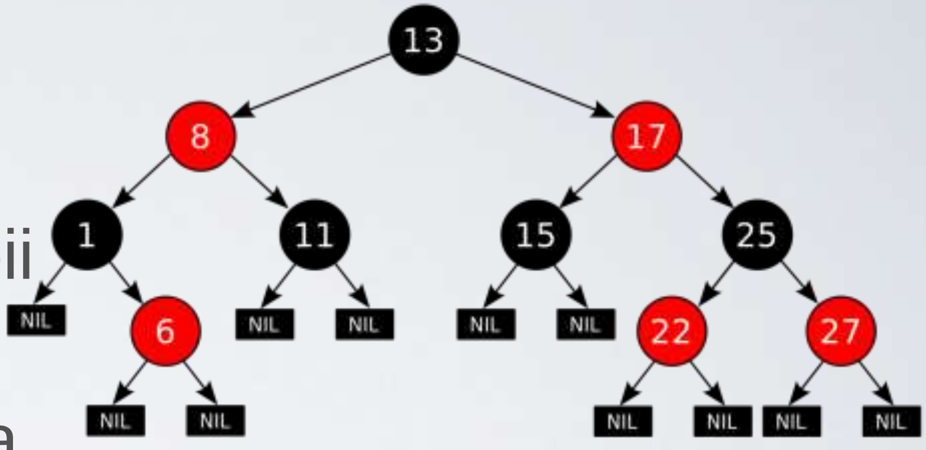
Orice nod: **rosu** sau **negru**

Radacina este **neagra**

Nodurile **NIL** sunt **negre**

Daca un nod este **rosu**, ambii copii sunt **negri**

Orice cale de la un nod dat la un NIL contine acelasi numar de noduri **negre** (*black depth*)



https://en.wikipedia.org/wiki/Red%E2%80%93black_tree#/media/File:Red-black_tree_example.svg

Calea de la radacina la cea mai indepartata frunza nu este mai lunga decat dublul lungimii drumului de la radacina la cea mai apropiata frunza.

Aproximativ echilibrat pe inaltime!

(mai multe detalii anul urmator la AF…)

BIBLIOGRAFIE

U. Washington, CSE332: Data Abstractions Lecture 7: AVL Trees - https://courses.cs.washington.edu/courses/cse332/10sp/lectures/lecture7.pdf
http://btechsmartclass.com/DS/U5_T2.html

1. **Inserare in AVL (sursa: aici)**
2. **Stergere din AVL (sursa: aici)**