

# 实验题目2 龙贝格(Romberg)积分法

## 实验简介

本实验为龙贝格积分法，需要完成龙贝格积分代码的编写，并对实验题目进行求解。

本次实验过程中，主要是对龙贝格积分法的算法流程进行调试，从数学原理直接构造算法流程用于计算，充分体会了 Julia 编程语言的流畅性，感受到了编写代码时同 Python 一样自如，却能拥有和 C 相比的循环结构。

实验的目的为使用龙贝格积分法计算定积分，并输出T数表。

该实验报告主要分7个部分，大纲罗列如下：

- **实验简介**：即本部分分所有内容
- **数学原理**：即龙贝格积分法的数学公式，用于改写为算法流程
- **代码实现**：使用 Julia 编程语言，根据数学原理，编写实验代码
- **实验题目**：实验指导书中所要求的题目
  - **问题1**：直接使用龙贝格积分法计算定积分的值
- **思考题**：本部分为实验指导书中所要求完成的思考题解答
- **参考资料**：本部分为本次实验过程中查阅的参考资料
- **附录**：本实验的非主体部分
  - **测试代码**：教材上的例题用于对程序结果进行初步的检验

## 数学原理

教材中给出的计算公式如下

$$\begin{cases} T_{0,0} &= \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)], \\ T_{0,i} &= \frac{1}{2} T_{0,i-1} + \frac{1}{2} \frac{b-a}{2^{i-1}} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} f\left[a + \left(j - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2^{i-1}}\right], i = 1, 2, 3, \dots, \\ T_{m,k} &= \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}, m = 1, 2, \dots, i; k = i - m. \end{cases}$$

因 Julia 语言数组类下标的起点为1，同时实验指导书所给T数表为下三角形，故将原公式改写如下

$$\begin{cases} T_{1,1} &= \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)], \\ T_{i+1,1} &= \frac{1}{2} T_{i,1} + \frac{1}{2} \frac{b-a}{2^{i-1}} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} f\left[a + \left(j - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2^{i-1}}\right], i = 1, 2, 3, \dots, n \\ T_{i+1,m+1} &= \frac{4^m T_{i+1,m} - T_{i,m}}{4^m - 1}, m = 1, 2, \dots, i. \end{cases}$$

随后可对照公式完成代码的编写

## 代码实现

使用 Julia 编程语言，根据上述数学原理，编写 romberg 积分法实验代码。

以下部分为 romberg() 函数定义：

```
using Printf
function romberg(f::Function, xlim, n, ε)
    a, b = xlim
    h = b - a
    T = zeros(n, n)
    T[1, 1] = 1 / 2 * h * (f(a) + f(b))
    for i = 1:n
        tmpsum = 0
```

```

jmax = 2^(i - 1)
for j = 1:jmax
    tmpsum += f(a + (j - 1 / 2) * h)
end
T[i+1, 1] = 1 / 2 * T[i, 1] + 1 / 2 * h * tmpsum

for m = 1:i
    T[i+1, m+1] = (4^m * T[i+1, m] - T[i, m]) / (4^m - 1)
end
for m = 1:i
    @printf("%12.9f\t", T[i, m])
end
@printf("\n")
if i > 1 && abs(T[i+1, i+1] - T[i, i]) < ε
    @printf("Accuracy requirement satisfied.\n\n")
    break
end
h /= 2
end
end

```

## 实验题目

### 问题 1

```

iter_num = 30

f(x) = x^2 * exp(x)
ε = 1e-6
xlim = 0, 1
println("f(x) = x^2 * exp(x)")
romberg(f, xlim, iter_num, ε)

f(x) = exp(x)sin(x)
ε = 1e-6
xlim = 1, 3
println("f(x) = exp(x)sin(x)")
romberg(f, xlim, iter_num, ε)

f(x) = 4 / (1 + x^2)
ε = 1e-6
xlim = 0, 1
println("f(x) = 4 / (1 + x^2)")
romberg(f, xlim, iter_num, ε)

f(x) = 1 / (x + 1)
ε = 1e-6
xlim = 0, 1
println("f(x) = 1 / (x + 1)")
romberg(f, xlim, iter_num, ε)

```

```

f(x) = x^2 * exp(x)
1.359140914
0.885660616      0.727833850
0.760596332      0.718908238      0.718313197
0.728890177      0.718321459      0.718282340      0.718281850
Accuracy requirement satisfied.

```

```
f(x) = exp(x)sin(x)
5.121826420
9.279762907    10.665741736
10.520554284    10.934151409    10.952045388
10.842043468    10.949206529    10.950210203    10.950181074
10.923093890    10.950110697    10.950170975    10.950170352    10.950170310
Accuracy requirement satisfied.
```

```
f(x) = 4 / (1 + x^2)
3.000000000
3.100000000    3.133333333
3.131176471    3.141568627    3.142117647
3.138988494    3.141592502    3.141594094    3.141585784
3.140941612    3.141592651    3.141592661    3.141592638    3.141592665
Accuracy requirement satisfied.
```

```
f(x) = 1 / (x + 1)
0.750000000
0.708333333    0.694444444
0.697023810    0.693253968    0.693174603
0.694121850    0.693154531    0.693147901    0.693147478
Accuracy requirement satisfied.
```

## 思考题

1. 略
2. 在实验 1 中二分次数和精度的关系如何？  
二分次数越多所求的精度越高，通常预设较大的二分次数来确保计算结果有足够的精度，同时也设定早停需要满足的精度要求，避免达到所需精度之后继续计算导致增加的运算量
3. 略
4. 略

## 参考资料

1. julia 数值积分 [https://blog.csdn.net/m0\\_37816922/article/details/103475445](https://blog.csdn.net/m0_37816922/article/details/103475445)
2. Romberg Integration-Numerical Analysis <http://homepages.math.uic.edu/~jan/mcs471/romberg.pdf>
3. 《数值分析》吴勃英 196-199

## 附录

### 测试代码

本部分使用教材上的例题用于对程序结果进行初步的检验，计算结果和教材给出数表类似，可以认为测试通过。

```
f(x) = x^2 * exp(x)
f(x) = 1 / x
ε = 1e-6
xlim = 1, 3
romberg(f, xlim, 10, ε)
```

```
1.333333333
1.166666667    1.111111111
1.116666667    1.100000000    1.099259259
1.103210678    1.098725349    1.098640372    1.098630548
1.099767702    1.098620043    1.098613022    1.098612588    1.098612518
Accuracy requirement satisfied.
```

