

实验题目2 龙贝格(Romberg)积分法

实验简介

本实验为龙贝格积分法，需要完成龙贝格积分代码的编写，并对实验题目进行求解。

本次实验过程中，主要是对龙贝格积分法的算法流程进行调试，从数学原理直接构造算法流程用于计算，充分体会了 Julia 编程语言的流畅性，感受到了编写代码时同 Python 一样自如，却能拥有和 C 相比的循环结构。

实验的目的为使用龙贝格积分法计算定积分，并输出T数表。

该实验报告主要分7个部分，大纲罗列如下：

- 实验简介：即本部分分所有内容
- 数学原理：即龙贝格积分法的数学公式，用于改写为算法流程
- 代码实现：使用 Julia 编程语言，根据数学原理，编写实验代码
- 测试代码：教材上的例题用于对程序结果进行初步的检验
- 实验题目：实验指导书中所要求的题目
 - 问题1：直接使用龙贝格积分法计算定积分的值
- 思考题：本部分为实验指导书中所要求完成的思考题解答
- 参考资料：本部分为本次实验过程中查阅的参考资料

数学原理

教材中给出的计算公式如下

$$\begin{cases} T_{0,0} &= \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)], \\ T_{0,i} &= \frac{1}{2} T_{0,i-1} + \frac{1}{2} \frac{b-a}{2^{i-1}} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} f\left[a + \left(j - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2^{i-1}}\right], i = 1, 2, 3, \dots, \\ T_{m,k} &= \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}, m = 1, 2, \dots, i; k = i - m. \end{cases}$$

因 Julia 语言数组类下标的起点为1，同时实验指导书所给T数表为下三角形，故将原公式改写如下

$$\begin{cases} T_{1,1} &= \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)], \\ T_{i+1,1} &= \frac{1}{2} T_{i,1} + \frac{1}{2} \frac{b-a}{2^{i-1}} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} f\left[a + \left(j - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2^{i-1}}\right], i = 1, 2, 3, \dots, n \\ T_{i+1,m+1} &= \frac{4^m T_{i+1,m} - T_{i,m}}{4^m - 1}, m = 1, 2, \dots, i. \end{cases}$$

随后可对照公式完成代码的编写

代码实现

使用 Julia 编程语言，根据上述数学原理，编写 romberg 积分法实验代码。

以下部分为 romberg() 函数定义：

```
1 using Printf
2 function romberg(f::Function, xlim, n, ε)
3     a, b = xlim
4     h = b - a
5     T = zeros(n, n)
6     T[1, 1] = 1 / 2 * h * (f(a) + f(b))
```

```

7     for i = 1:n
8         tmpsum = 0
9         jmax = 2^(i - 1)
10        for j = 1:jmax
11            tmpsum += f(a + (j - 1 / 2) * h)
12        end
13        T[i+1, 1] = 1 / 2 * T[i, 1] + 1 / 2 * h * tmpsum
14
15        for m = 1:i
16            T[i+1, m+1] = (4^m * T[i+1, m] - T[i, m]) / (4^m - 1)
17        end
18        for m = 1:i
19            @printf("%12.9f\t", T[i, m])
20        end
21        @printf("\n")
22        if i > 1 && abs(T[i+1, i+1] - T[i, i]) < ε
23            @printf("Accuracy requirement satisfied.\n\n")
24            break
25        end
26        h /= 2
27    end
28 end

```

测试代码

本部分使用教材上的例题用于对程序结果进行初步的检验，计算结果和教材给出数表类似，可以认为测试通过。

```

1  f(x) = x^2 * exp(x)
2  f(x) = 1 / x
3  ε = 1e-6
4  xlim = 1, 3
5
6  romberg(f, xlim, 10, ε)

```

```

1  1.333333333
2  1.166666667    1.111111111
3  1.116666667    1.100000000    1.099259259
4  1.103210678    1.098725349    1.098640372    1.098630548
5  1.099767702    1.098620043    1.098613022    1.098612588    1.098612518
6  Accuracy requirement satisfied.

```

实验题目

问题 1

```

1  iter_num = 30
2
3  f(x) = x^2 * exp(x)
4  ε = 1e-6
5  xlim = 0, 1
6  println("f(x) = x^2 * exp(x)")
7  romberg(f, xlim, iter_num, ε)
8
9  f(x) = exp(x)sin(x)
10 ε = 1e-6
11 xlim = 1, 3

```

```

12 println("f(x) = exp(x)sin(x)")
13 romberg(f, xlim, iter_num, ε)
14
15
16 f(x) = 4 / (1 + x^2)
17 ε = 1e-6
18 xlim = 0, 1
19 println("f(x) = 4 / (1 + x^2)")
20 romberg(f, xlim, iter_num, ε)
21
22 f(x) = 1 / (x + 1)
23 ε = 1e-6
24 xlim = 0, 1
25 println("f(x) = 1 / (x + 1)")
26 romberg(f, xlim, iter_num, ε)

```

```

1 f(x) = x^2 * exp(x)
2 1.359140914
3 0.885660616      0.727833850
4 0.760596332      0.718908238      0.718313197
5 0.728890177      0.718321459      0.718282340      0.718281850
6 Accuracy requirement satisfied.
7
8 f(x) = exp(x)sin(x)
9 5.121826420
10 9.279762907      10.665741736
11 10.520554284      10.934151409      10.952045388
12 10.842043468      10.949206529      10.950210203      10.950181074
13 10.923093890      10.950110697      10.950170975      10.950170352      10.950170310
14 Accuracy requirement satisfied.
15
16 f(x) = 4 / (1 + x^2)
17 3.000000000
18 3.100000000      3.133333333
19 3.131176471      3.141568627      3.142117647
20 3.138988494      3.141592502      3.141594094      3.141585784
21 3.140941612      3.141592651      3.141592661      3.141592638      3.141592665
22 Accuracy requirement satisfied.
23
24 f(x) = 1 / (x + 1)
25 0.750000000
26 0.708333333      0.694444444
27 0.697023810      0.693253968      0.693174603
28 0.694121850      0.693154531      0.693147901      0.693147478
29 Accuracy requirement satisfied.

```

思考题

1. 略
2. 在实验 1 中二分次数和精度的关系如何？

二分次数越多所求的精度越高，通常预设较大的二分次数来确保计算结果有足够的精度，同时也设定早停需要满足的精度要求，避免达到所需精度之后继续计算导致增加的运算量

3. 略
4. 略

参考资料

1. julia 数值积分 https://blog.csdn.net/m0_37816922/article/details/103475445
2. Romberg Integration-Numerical Analysis <http://homepages.math.uic.edu/~jan/mcs471/romberg.pdf>
3. 《数值分析》吴勃英 196-199