工程问题建模与实践

马尔科夫链和工程系统可靠性问题仿真求解

上海交通大学

电子工程系

2020年4月

Agenda

- 安德烈·马尔科夫
- 马尔科夫链的概念
  - 马尔科夫过程
  - 随机过程的（时间）离散化
  - 马尔科夫链
- 可靠性问题的元件模型
  - 状态和状态转移图
  - 元件使用寿命的概率密度指数分布
  - 用马尔科夫链描述元件工作状态变化
- 工程系统可靠性问题仿真求解举例
  - 从元件到系统
  - 求解举例

安德烈·马尔科夫

Андрей Андреевич Марков

Andrey Andreyevich Markov

（1856—1922）

俄罗斯数学家，彼得堡数学学派代表人物之一。

1856年出生于俄罗斯梁赞省。1874年进入圣彼得堡大学，师从切比雪夫，后留校任教。

彼得堡学派在完善概率统计理论体系方面贡献巨大，将概率论发展成为现代数学的一个重要分支。马尔科夫是随机过程理论的开拓者，以他名字命名的马尔科夫链是第一个在理论上被研究的过程模型。

有《概率演算》等经典著作。

马尔科夫过程

在已知“现在”的条件下，随机过程的“未来”与其“过去”彼此独立，称为马尔科夫过程。

- 条件独立性
- 无后效性

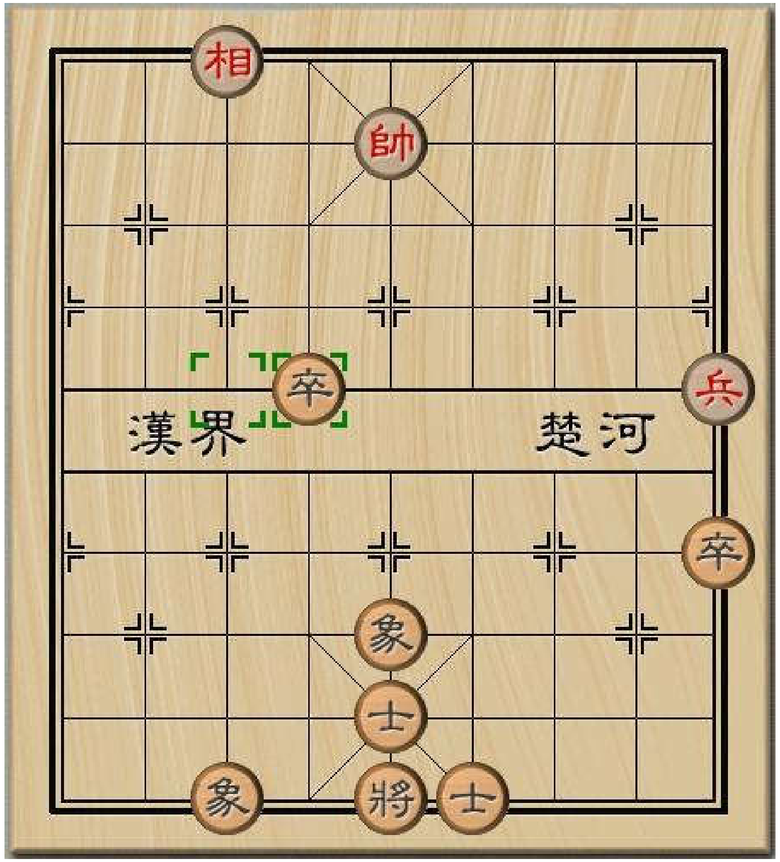
对比中国象棋的两条游戏规则：

（1）关于过河卒的允许走法

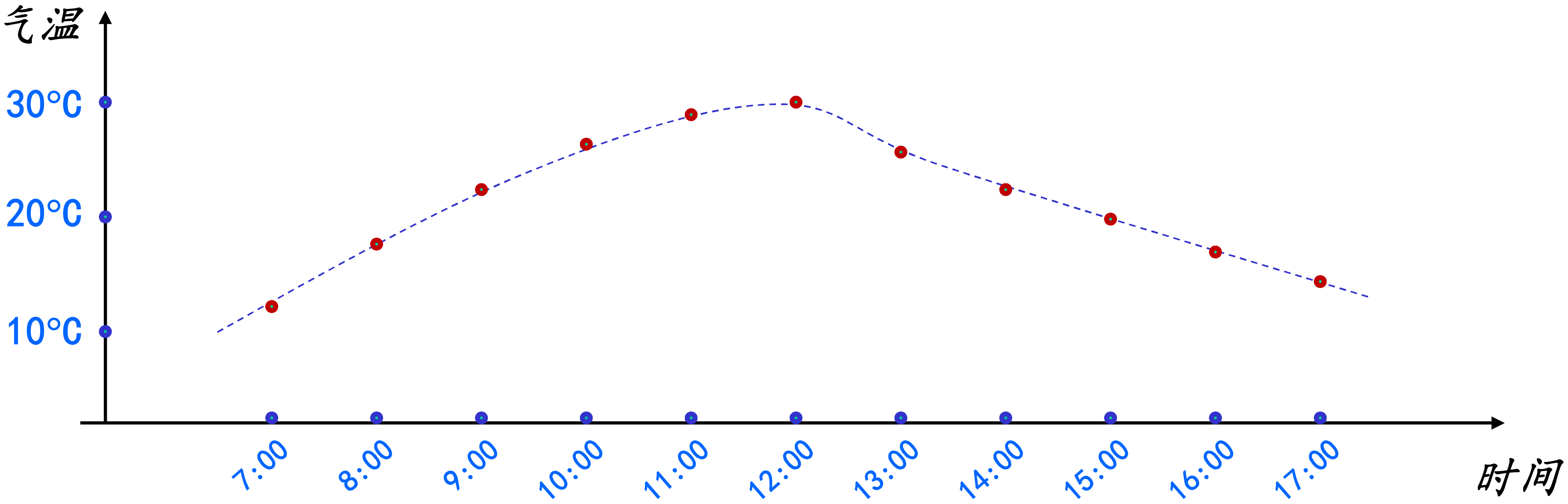
只看“现在”，跟“历史”步骤无关

（2）关于禁止长将

要看“历史”

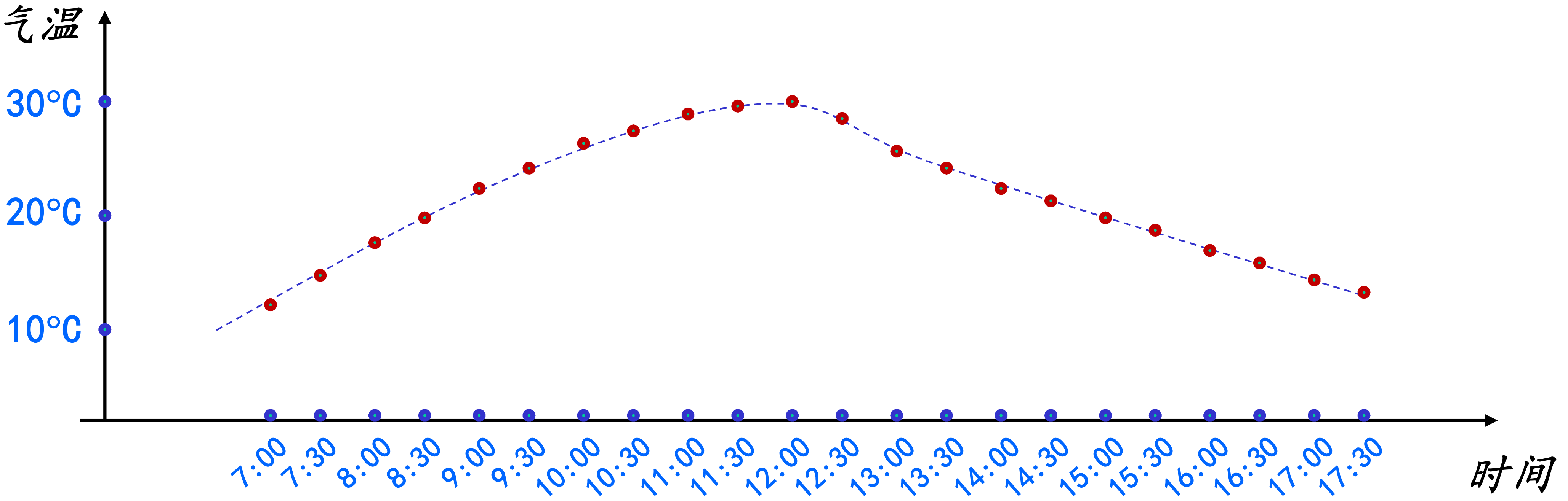


□ 随机过程的（时间）离散化



气温
30°C
20°C
10°C
7:00
8:00
9:00
10:00
11:00
12:00
13:00
14:00
15:00
16:00
17:00
时间

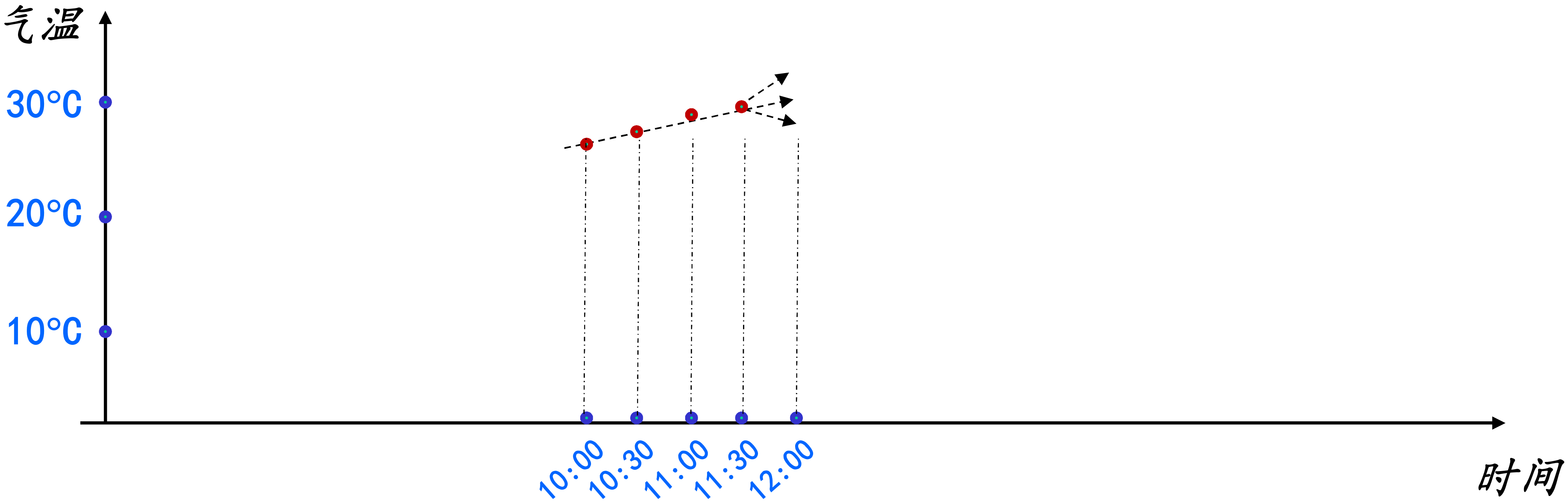
随机过程的（时间）离散化



- 关于时间的仿真颗粒度

时间离散间隔越小，仿真越精细，但运算量越大，运行速率越低。

□ 随机过程的（时间）离散化



□ 马尔科夫链

随机过程 X(t)的时间取值为离散，如果对 $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$，X(t) 的条件概率函数满足

$$\Pr\{X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_2) = x_2, X(t_1) = x_1\}$$
$$= \Pr\{X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

即在X(t_{n-1}) 确定的情况下，X(t_n)的取值不依赖于t_{n-1}之前时刻的取值，则称其为马尔科夫链。

Agenda

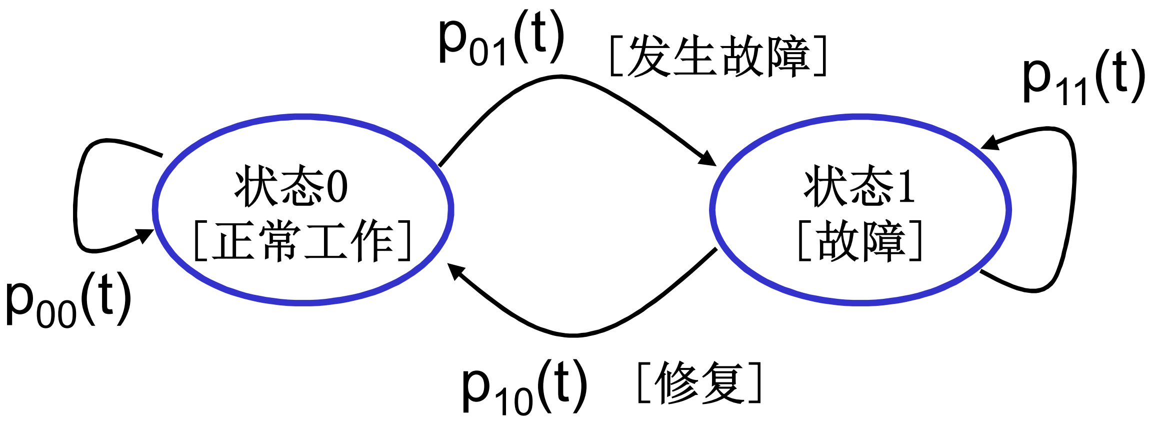
- 安德烈·马尔科夫
- 马尔科夫链的概念
  - 马尔科夫过程
  - 随机过程的（时间）离散化
  - 马尔科夫链
- 可靠性问题的元件模型
  - 状态和状态转移图
  - 元件使用寿命的概率密度指数分布
  - 用马尔科夫链描述元件工作状态变化
- 工程系统可靠性问题仿真求解举例
  - 从元件到系统
  - 求解举例

状态和状态转移图

元件的概念

在研究工程系统可靠性问题所建立的模型中，系统的最小组成单位称为元件。它具有“原子性”，不对其分割研究。

元件的两状态模型



现状态 \ 下个状态	状态0 [正常工作]	状态1 [故障]
状态0 [正常工作]	$p_{00}(t)$	$p_{01}(t)$
状态1 [故障]	$p_{10}(t)$	$p_{11}(t)$

$$p_{00}(t) + p_{01}(t) \equiv 1$$

$$p_{10}(t) + p_{11}(t) \equiv 1$$

当 $p_{10}(t) = 0$，表示不可修复

元件使用寿命的概率密度指数分布

- （负）指数分布

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

期望寿命 $E\{T\} = \dfrac{1}{\lambda}$

从t=0 时刻开始，相应随机事件（故障）在t_0时刻之前发生的概率

$$\Pr\{T \le t_0\} = \int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t_0}$$

元件使用寿命的概率密度指数分布

无记忆性

若$t=t_0$ 时随机事件（故障）尚未发生，则事件在t_0+t'时刻之后发生的概率

$$\Pr\{T>t_0+t' \mid T>t_0\}$$
$$=\frac{\Pr\{T>t_0+t'且T>t_0\}}{\Pr\{T>t_0\}}=\frac{\Pr\{T>t_0+t'\}}{\Pr\{T>t_0\}}=\frac{1-\Pr\{T\le t_0+t'\}}{1-\Pr\{T\le t_0\}}$$
$$=\frac{1-[1-e^{-\lambda(t_0+t')}]}{1-(1-e^{-\lambda t_0})}=e^{-\lambda t'}$$

进一步求此条件下的概率密度表达式

令 $T'=T-t_0$ 则 $f_{T'}(t')=\dfrac{d}{dt'}(1-e^{-\lambda t'})=\lambda e^{-\lambda t'}$

可见，T'与T一样，是参数相等的指数分布

用了一段时间未出故障的元件，跟全新元件有同样的继续使用寿命（期望寿命）！

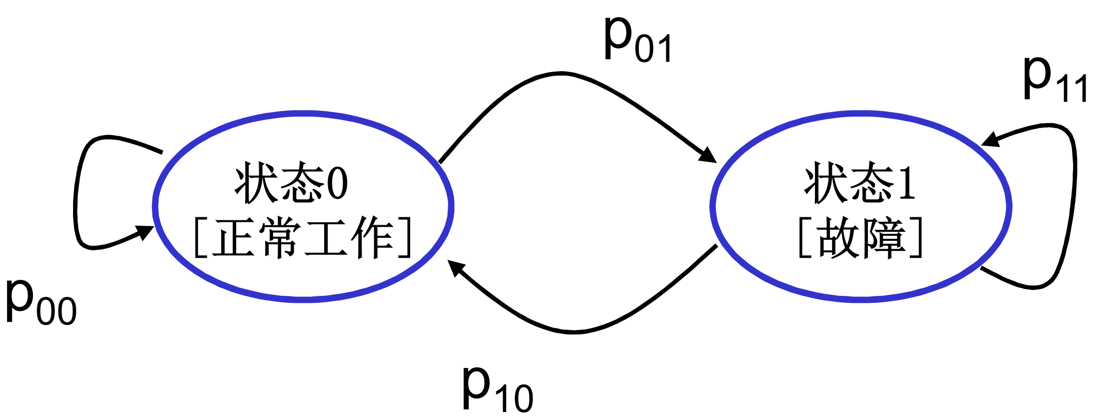
元件使用寿命的概率密度指数分布

用指数分布描述电子元件寿命特性

【1】只限于用在工程系统可靠性问题的理论分析中；

【2】它是一种带有数学简化目的的近似模型；

【3】工程实践中观察发现，在一定的合理限度内比较符合客观实际。



下个状态 \ 现状态	状态1 [正常工作]	状态2 [故障]
状态1 [正常工作]	p_{00}	p_{01}
状态2 [故障]	p_{10}	p_{11}

$$p_{00} + p_{01} \equiv 1$$

$$p_{10} + p_{11} \equiv 1$$

Agenda

- 安德烈·马尔科夫
- 马尔科夫链的概念
- 可靠性问题的元件模型

  状态和状态转移图

  元件使用寿命的概率密度指数分布

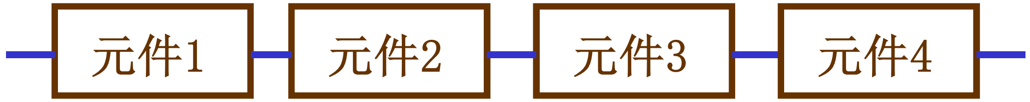
  用马尔科夫链描述元件工作状态变化
- 工程系统可靠性问题仿真求解举例

  从元件到系统

  求解举例

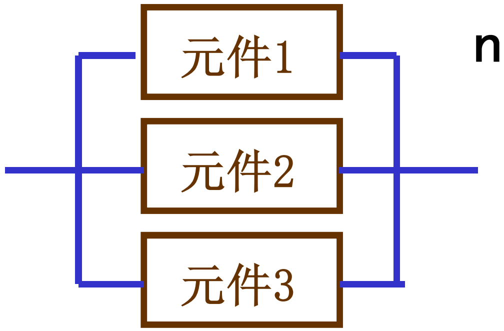
从元件到系统

- 可靠性模型中的串联组合

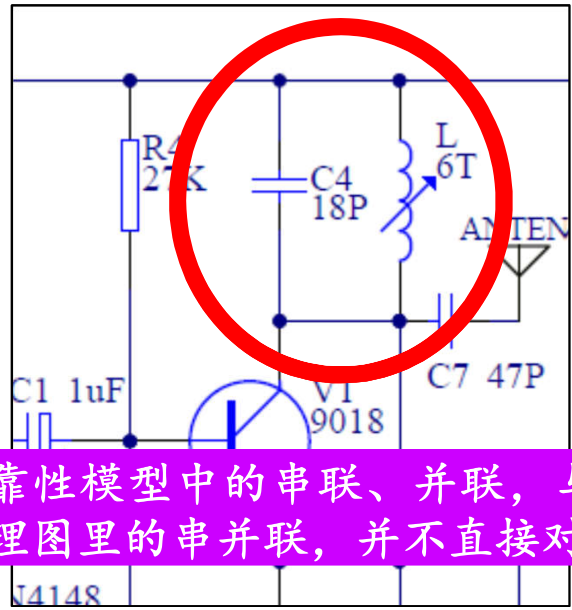


n个元件，其中任意一个失效（故障），则整体失效（故障）

- 可靠性模型中的并联组合



n个元件，仅当全部失效（故障），则整体才失效（故障）



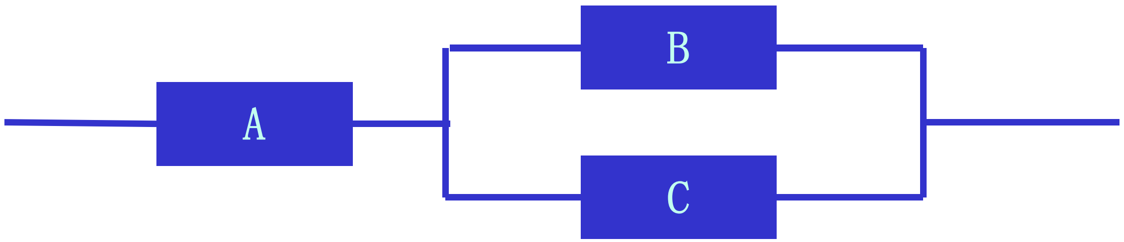
可靠性模型中的串联、并联，与电气原理图里的串并联，并不直接对应！

- 可靠性模型中的其他组合形态

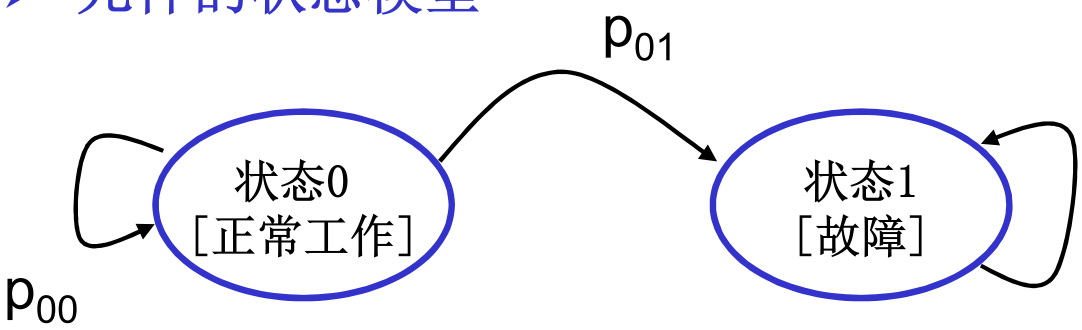
求解举例

- 一个系统的可靠性模型，表现为三个不可修复元件A、B、C构成，三个元件的寿命统计独立，概率密度分布特性相同。欲求系统的平均寿命。

$$f_{life} = \lambda e^{-\lambda t} \qquad \lambda = 10^{-3}(hour^{-1})$$



- 元件的状态模型

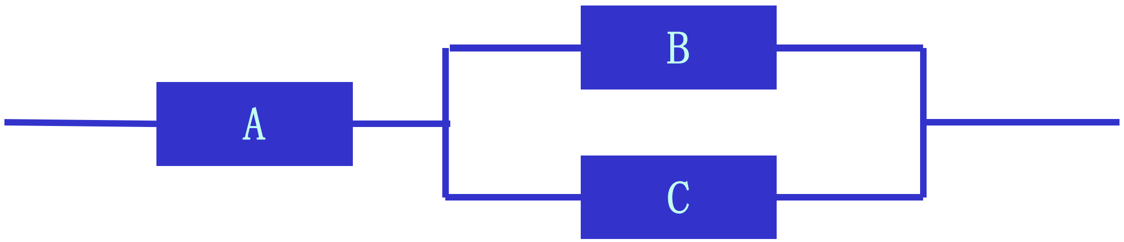


下个状态 / 现状态	状态1 [正常工作]	状态2 [故障]
状态1 [正常工作]	p_{00}	p_{01}
状态2 [故障]	0	$p_{11}=1$

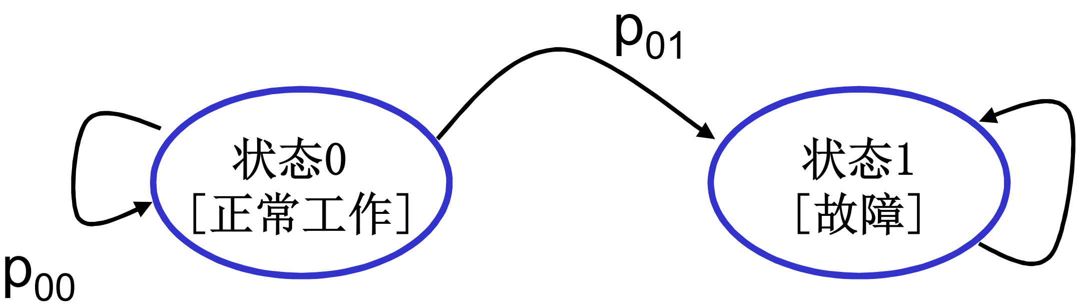
□ 求解举例

➢ 一个系统的可靠性模型，表现为三个不可修复元件A、B、C构成，三个元件的寿命统计独立，概率密度分布特性相同。欲求系统的平均寿命。

$$f_{life} = \lambda e^{-\lambda t} \qquad \lambda = 10^{-3}(hour^{-1})$$



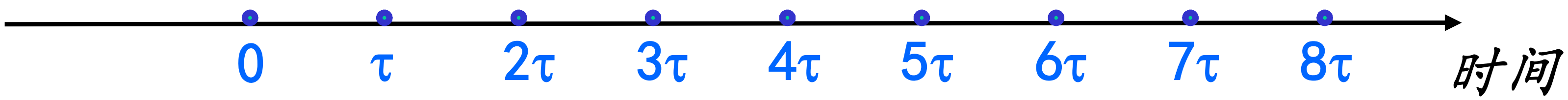
➢ 转移概率与离散时间间隔（仿真颗粒度）的关系



$$p_{01} = \Pr\{T \le \tau\} = \int_0^{\tau} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

当取τ=1小时，$p_{01} \approx 9.995 \times 10^{-4}$

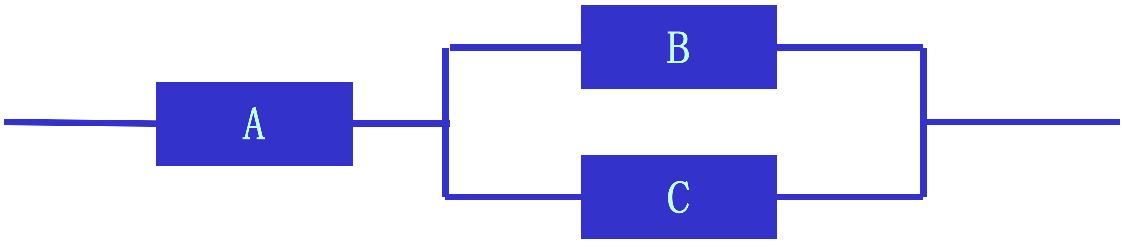
当取τ=1分钟，$p_{01} \approx 1.6667 \times 10^{-5}$



求解举例

➢ 一个系统的可靠性模型，表现为三个不可修复元件A、B、C构成，三个元件的寿命统计独立，概率密度分布特性相同。欲求系统的平均寿命。

$$f_{life} = \lambda e^{-\lambda t} \qquad \lambda = 10^{-3}(hour^{-1})$$



理论推算可知，系统平均寿命为 $\dfrac{2}{3\lambda}$

使用蒙特卡罗法编程求解系统的平均使用寿命，建议仿真颗粒度1小时。随机试验的样本总数不少于50000。

求解举例

➢ 参考代码

```
% parameters
Nsample=50000;
Lamda=1/1000;
P01=1-exp(-Lamda);

life=zeros(1,Nsample);

for k=1:Nsample
    state_system=0;
    state_comp=zeros(1,3);
    while state_system==0;
        if state_comp(1)==0
            state_comp(1)=(rand(1)<=P01);
        end
        if state_comp(2)==0
            state_comp(2)=(rand(1)<=P01);
        end
        if state_comp(3)==0
            state_comp(3)=(rand(1)<=P01);
        end
        state_system=(state_comp(1)|(state_comp(2)&state_comp(3)));
        life(k)=life(k)+1;
    end
end
mean_life=mean(life);
fprintf('mean_life=%7.2f\n',mean_life);
```

元件A下一小时状态

元件B下一小时状态

元件C下一小时状态

系统下一小时状态

感谢聆听！