Ejemplo de análisis de sensibilidad

Elisa Frutos Bernal

Una compañía produce televisores, tablets y altavoces utilizando una serie de componentes comunes cuyas necesidades aparecen en la tabla. Estos componentes están disponibles en cantidades limitadas, por lo que se trata de plantear el problema que permite obtener los máximos beneficios, sabiendo que por cada uno se obtienen una ganancia de 75€, 50€ y 35€ respectivamente.

Componentes	Televisor	Tablet	Altavoz	Máximo
Carcasa	1	1	0	450
Pantalla	1	0	0	250
Altavoz	2	2	1	800
Batería	1	1	0	450
Base electrónica	2	1	1	600

Plantear y resolver el problema contestando a las siguientes cuestiones:

1. **¿Qué hay que cambiar para que se fabriquen altavoces?**

Se definen las variables:

- x_1= número de televisores que se producen.
- x_2= número de tablets.
- x_3= número de altavoces

El planteamiento según el enunciado del problema es:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Maximizar} \quad z & = & 75x_1 + 50x_2 + 35x_3 \\
\text{sujeto a:} & & \\
\text{carcasas} & & x_1 + x_2 \leq 450 \\
\text{pantallas} & & x_1 \leq 250 \\
\text{altavoces} & & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 800 \\
\text{baterías} & & x_1 + x_2 \leq 450 \\
\text{base el.} & & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 600 \\
 & & x_i \geq 0, \, i = 1, 2, 3
\end{array}$$

- **Utilizando R**

```r
library(lpSolve)
coef <- c(75,50,35)
A <- rbind(c(1,1,0),
           c(1,0,0),
           c(2,2,1),
           c(1,1,0),
           c(2,1,1))
b <- c(450,250,800,450,600)
dir <- c(rep("<=",5))
sol <- lp("max",coef,A,dir,b,compute.sens=TRUE)
sol$objval
```

```
## [1] 25000
```

```r
sol$solution
```

```
## [1] 200 200   0
```

Es decir, para maximizar la ganancia hay que producir 200 televisores y 200 tablets

La variable x_3 es no básica, para que sea variable básica y tome un valor no nulo hay que modificar su coeficiente en la función objetivo c_3 en al menos su coste reducido

```r
sol$duals[6:8] #Costes reducidos
```

```
## [1]  0.0  0.0 -2.5
```

ó también

```r
#Intervalos de variación de los coeficientes de la función objetivo
sol$sens.coef.from
```

```
## [1]  7.00e+01  3.75e+01 -1.00e+30
```

```r
sol$sens.coef.to
```

```
## [1] 100.0  75.0  37.5
```

Es decir, el intervalo en el cual las variables básicas no cambian ante un cambio en el coeficiente de x_3 en la función objetivo es $(\infty, 37.5]$.

2. **Determinar el intervalo de variación del coeficiente de x_1 en la función objetivo para que se mantengan las variables básicas óptimas. Verificar los resultados dando las nuevas soluciones al problema si el nuevo coeficiente es 80, 90, 100, 101 y 110.**

Según los resultados anteriores Si $\widehat{c}_1 \in [70, 100]$ las variables básicas no cambian, tienen el mismo valor, lo que cambia es el valor de la función objetivo.

- Si $\widehat{c}_1 = 80$, como pertenece al intervalo, las variables básicas óptimas no cambian y toman los mismos valores pero cambia z al cambiar la función objetivo:

  $\max = 80x_1 + 50x_2 + 35x_3 = 80(200) + 50(200) + 35(0) = z + (\widehat{c}_1 - c_1)x_1 = 26000.$

- $\widehat{c}_1 = 90$, razonando del mismo modo, las variables básicas óptimas no cambian y toman los mismos valores, pero cambia z al cambiar la función objetivo:

  $\max = 90x_1 + 50x_2 + 35x_3 = 90(200) + 50(200) + 35(0) = z + (\widehat{c}_1 - c_1)x_1 = 28000.$

- Análogamente, si $\widehat{c}_1 = 100$, no cambian las variables básicas, el valor de z es:

  $\max = 100x_1 + 50x_2 + 35x_3 = 100(200) + 50(200) + 35(0) = z + (\widehat{c}_1 - c_1)x_1 = 30000.$

- Si $\widehat{c}_1 = 101$, las variables básicas ya no se mantienen óptimas

- Si $\widehat{c}_1 = 110$, razonando del mismo modo, las variables básicas ya no se mantienen óptimas

3. **Si se cambia el coeficiente de x_2 en la función objetivo por los valores 20, 60 y 80, ¿cómo afectan estos cambios a la solución?**

Según lo anterior el intervalo de variación permitido es [37.5, 75]. Por tanto si $\widehat{c}_2 \in$[37.5, 75] las variables básicas no cambian y mantienen su valor, lo que cambia es el valor de la función objetivo. Se razonaría de forma análoga al apartado anterior.

- Si $\widehat{c}_2 = 60$, como pertenece al intervalo, las variables básicas óptimas no cambian y toman los mismos valores pero cambia z al cambiar la función objetivo:

  $\max = 75x_1 + 60x_2 + 35x_3 = 75(200) + 60(200) + 35(0) = z + (\widehat{c}_2 - c_2)x_2 = 27000.$

- $\widehat{c}_2 = 20$, no pertenece al intervalo, por lo que las variables básicas ya no se mantienen óptimas.

- Análogamente, si $\widehat{c}_2 = 80$, no pertenece al intervalo, por lo que las variables básicas ya no se mantienen óptimas.

4. **Si se dispone de 600 carcasas, ¿cambia la solución? Ver cómo cambia si tenemos 300 y 800.**

Calculo las holguras:

```r
round (abs(A %*%sol$solution -b),4)
```

```
##      [,1]
## [1,]   50
## [2,]   50
## [3,]    0
## [4,]   50
## [5,]    0
```

$\widehat{b}_1$ puede variar entre (450-50,∞)=(400,∞) y las variables básicas permanecen óptimas. Como esta restricción tiene holgura 50 el valor de las variables básicas podría cambiar pero el valor de la función objetivo no cambia.

5. **Si se tienen 100 pantallas, ¿cambia la solución?, ¿y con 300?**

Si $\widehat{b}_2 \in [200, \infty)$ las variables básicas permanecen óptimas. Como esta restricción tiene holgura 50 el valor de las variables puede cambiar pero la función objetivo no cambia.

6. **Determinar como cambia la solución si se tienen 850 altavoces, 600 y 950.**

```r
sol$duals[3]
```

```
## [1] 12.5
```

```r
sol$duals.from[3]
```

```
## [1] 700
```

```r
sol$duals.to[3]
```

```
## [1] 900
```

Es decir, si el nuevo término independiente, $\widehat{b}_3 \in [700, 900]$ las variables básicas permanecen óptimas y cambia la función objetivo:

$\widehat{z} = z + 12.5(\widehat{b}_3 - 800)$

- **Con Excel (Solver):**

EQUIPOS ELECTRÓNICOS						
Z=	75	50	35			
Sujeto a:	Televisores	TDT	Altavoces	Restricción	Disponibles	Utilizados
Chasis	1	1	0	<=	450	400
Tubo de imagen	1	0	0	<=	250	200
Cono altavoz	2	2	1	<=	800	800
Fuente alimentación	1	1	0	<=	450	400
Componentes electr.	2	1	1	<=	600	600
	Televisores	TDT	Altavoces		Beneficio	25000
	200	200	0			

Figure 1: Pantalla de excel

1. **¿Qué hay que cambiar para que se fabriquen altavoces?**

   Como $x_3 = 0$ es variable no básica en la solución óptima, si queremos que sea variable básica y tome valor no nulo, hay que modificar su coeficiente en la función objetivo c_3 en al menos su coste reducido 2.5.

2. **Determinar el intervalo de variación del coeficiente de x_1 en la función objetivo para que se mantengan las variables básicas óptimas.**

   El coeficiente de x_1 en la función objetivo es $c_1 = 75$, es variable básica. El intervalo permitido de variación es $[75 - 5, 75 + 25] = [70, 100]$. Por tanto si $\widehat{c}_1 \in [70, 100]$ las variables básicas no cambian, tienen el mismo valor, lo que cambia es el valor de la función objetivo.

Microsoft Excel 16.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [Problema solver con sensiblidad.xlsx]Hoja1
Informe creado: 07/11/2023 11:02:25

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
C14	Televisores	200	0	75	25	5
D14	TDT	200	0	50	25	12,5
E14	Altavoces	0	-2,5	35	2,5	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
H10	<= Utilizados	400	0	450	1E+30	50
H11	<= Utilizados	600	25	600	50	200
H7	<= Utilizados	400	0	450	1E+30	50
H8	<= Utilizados	200	0	250	1E+30	50
H9	<= Utilizados	800	12,5	800	100	100

Figure 2: Informe de sensibilidad

3. **Si se cambia el coeficiente de x_2 en la función objetivo por los valores 20, 60 y 80, ¿cómo afectan estos cambios a la solución?**

   x_2 es variable básica. El intervalo permisible es $[50 - 12.5, 50 + 25] = [37.5, 75]$. Por tanto si $\widehat{c}_2 \in [37.5, 75]$ las variables básicas no cambian, tienen el mismo valor, lo que cambia es el valor de la función objetivo.

4. **Si se dispone de 600 carcasas, ¿cambia la solución? Ver cómo cambia si tenemos 300 y 800.**

   En el planteamiento original se dispone de $b_1 = 450$ carcasas, las variables básicas permanecen óptimas dentro del intervalo $[450 - 50, \infty] = [400, \infty)$. Como esta restricción tiene holgura 50 el valor de las variables básicas podría cambiar pero el valor de la función objetivo no cambia.

5. **Si se tienen 100 pantallas, ¿cambia la solución?, ¿y con 300?**

   En el planteamiento original se dispone de $b_2 = 250$ tubos de imagen. Si $\widehat{b}_2 \in [200, \infty]$ la base permanece óptima y como esta restricción tiene holgura 50 el valor de las variables puede cambiar pero la función objetivo no cambia.

6. **Determinar como cambia la solución si se tienen 850 altavoces, 600 y 950.**

   En el planteamiento original se dispone de $b_3 = 800$ conos de altavoces, las variables básicas permanecen óptimas dentro del intervalo $[800 - 100, 800 + 100] = [700, 900]$. Esta restricción no tiene holgura, el precio sombra es 12.5, el valor de las variables básicas y el valor de la función objetivo cambia.