Tema 3. DUALIDAD

Asignatura: **INVESTIGACIÓN OPERATIVA I**.

2° Grado en Estadística

1. Introducción

Uno de los descubrimientos más importantes durante el desarrollo inicial de la programación lineal fue el concepto de dualidad. Este descubrimiento reveló que asociado a todo problema de programación lineal existe otro problema lineal llamado dual. Las relaciones entre el dual y su original (llamado primal) son muy útiles en una gran variedad de situaciones. Una de sus principales aplicaciones son el análisis de sensibilidad, donde se puede observar los efectos producidos en la solución óptima por un cambio en cualquier parámetro del modelo. Los orígenes de la dualidad se deben a John Von Neumann, quien, en octubre de 1947, conjeturo por primera vez la existencia de un problema dual asociado al primal, al observar la relación entre los juegos de suma nula de dos jugadores y la programación lineal.

Además, resolviendo uno de los dos problemas se obtiene la solución del otro; en la tabla óptima del modelo resuelto aparece también la solución del dual asociado. Lo cual resulta útil, ya que el número de iteraciones del algoritmo del símplex depende más del número de restricciones que del número de variables, por lo que se puede elegir cuál de los dos problemas se resuelve para obtener la solución de ambos.

Teniendo en cuenta las propiedades de dualidad, se puede hacer la interpretación económica del problema lineal, lo que proporciona, por ejemplo, información sobre cuánto se debe estar dispuesto a pagar o cuánto se puede obtener al modificar una restricción en el problema primal. También se tiene un nuevo algoritmo de resolución, el *símplex dual*, que es más eficaz que el algoritmo del símplex en algunos modelos de programación.

2. Formulación del Problema Dual

Definición. Un problema de programación lineal está escrito en **forma simétrica de maximización** si, el objetivo es maximizar, todas las restricciones son del tipo $\leq$ y todas las variables no son negativas.

Definición. Un problema de programación lineal está escrito en **forma simétrica de minimización** si, el objetivo es minimizar, todas las restricciones son del tipo $\geq$ y todas las variables no son negativas.

Dado un problema de programación lineal, en forma simétrica de maximización, que se llamará **Primal**, del tipo:

$$\begin{aligned} \text{PRIMAL: Max} \quad z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a:} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector $n \times 1$, $\mathbf{b}$ es un vector $m \times 1$, $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{x}$ es un vector $n \times 1$.

Se define el problema **Dual** de anterior como el siguiente modelo en forma simétrica de minimización:

$$\begin{aligned} \text{DUAL: Min} \quad z^* &= \mathbf{b}^T\mathbf{w} \\ \text{sujeto a:} & \\ & \mathbf{A}^T\mathbf{w} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{w} \geq 0 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{w}$ es el vector $m \times 1$ de **variables duale**s. Ambos están escritos en su forma simétrica y se puede apreciar que:

- Si la matriz $\mathbf{A}$ del primal es de tamaño $m \times n$, que se corresponden a las m restricciones y n variables, la correspondiente $\mathbf{A}^T$ del dual indica que el problema tiene n restricciones y m variables.
- El vector de recursos del problema primal $\mathbf{b}$, es el vector de costes del dual. Del mismo modo, el vector de costes del primal $\mathbf{c}$ es el vector de recursos del problema dual. Es decir, los términos independientes de las restricciones de un problema son los coeficientes de la función objetivo en el otro y viceversa.
- El número de restricciones del primal es igual al número de variables del dual. El número de variables del primal es igual al número de restricciones del dual. Es decir, por cada variable en un problema se tiene una restricción en el otro, y por cada restricción de un modelo se tiene una variable en el otro.

Como no todos los problemas se presentan en forma simétrica, es necesario conocer las reglas que permitan, dado un problema de programación lineal, plantear su correspondiente problema dual. Las reglas para determinar el sentido de la optimización, el tipo de restricción y el signo de las variables se dan en la siguiente tabla:

Problema de Minimizar		$\Leftrightarrow$	**Problema de Maximizar**	
	≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$	
Variables	≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$	Restricciones
	No restringida	$\Leftrightarrow$	$=$	
	$\geq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0	
Restricciones	$\leq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0	Variables
	$=$	$\Leftrightarrow$	No restringida	
Términos independientes		$\Leftrightarrow$	Coeficientes f. objetivo	
Coeficientes f. objetivo		$\Leftrightarrow$	Términos independientes	
Matriz de restricciones		$\Leftrightarrow$	Transpuesta matriz restricciones	

3. Teoremas de dualidad

Las relaciones estructurales que se han establecido entre los problemas primal y su dual conducen a un importante conjunto de relaciones algebraicas entre ambos, que se agrupan bajo el nombre de *relaciones en dualidad* y vienen dadas en los siguientes teoremas, considerando la forma primal-dual simétrica.

Primal
Max $\quad z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$
sujeto a:
$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
$\mathbf{x} \geq 0$

Dual
Min $\quad z^* = \mathbf{b}^T\mathbf{w}$
sujeto a:
$\mathbf{A}^T\mathbf{w} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{w} \geq 0$

Teorema 1. *El dual del problema dual es el problema primal.*

Teorema 2. Dualidad débil. *El valor de la función objetivo z del problema de maximizar del primal es menor o igual que el valor de la función objetivo z^* del problema de minimizar, si ambos son factibles. Es decir, sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{w}$ soluciones factibles para los problemas primal y dual respectivamente. Entonces se verifica:*

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{w} = z^*$$

Del teorema anterior se puede deducir que el valor máximo del objetivo primal es una cota inferior del valor mínimo del objetivo dual. Los siguientes resultados son consecuencia del teorema anterior.

Corolario 1. *Si el problema primal y el dual tiene soluciones factibles, ambos tienen soluciones óptimas.*

Corolario 2. *Si el primal es factible pero no acotado, el dual es infactible, y recíprocamente, si el dual es factible pero no acotado, el primal es infactible.*

Corolario 3. *Si el primal es infactible, el dual puede ser no acotado o no factible, y recíprocamente, si el dual es infactible, el primal puede ser no acotado o infactible.*

Teorema 3. Teorema de Dualidad Fuerte. *Si existen soluciones factibles para los problemas primal y dual* $\mathbf{x}$, $\mathbf{w}$ *que dan igual valor en las respectivas funciones objetivo,* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{w}$ *tales soluciones son óptimas; y los valores óptimos* z *y* z^* *de los problemas primal y dual son iguales.*

Una de las propiedades principales de una pareja primal-dual reside en la posibilidad de obtener, cuando los dos problemas tienen soluciones óptimas finitas, la solución óptima de uno a partir de la del otro, y viceversa. Esta propiedad denominada de **holgura complementaria** juega un papel fundamental a la hora de resolver los problemas de programación lineal para los que el correspondiente dual es bastante más sencillo de resolver que el primal. Además, las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker que se usarán en la programación no lineal, son una extensión de estas propiedades.

Teorema 4. Holgura complementaria. *Sean* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{w}$ *soluciones factibles para los problemas primal y dual, respectivamente. Tales soluciones son óptimas si y solo si:*

$$(\mathbf{w}^T\mathbf{A} - \mathbf{c}^T)\mathbf{x} + \mathbf{w}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = 0$$

La interpretación de este resultado proporciona las condiciones de holgura complementaria, teniendo en cuenta las formas primal y dual simétricas.

Sean $\mathbf{u}$ vector $(m \times 1)$ y $\mathbf{v}$ vector $(n \times 1)$ de variables de holgura de los problemas primal y dual, respectivamente. Es decir $\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{u}= \mathbf{b}$ y $\mathbf{w}^T\mathbf{A} - \mathbf{v}^T = \mathbf{c}^T$.

De donde se tiene que $\mathbf{w}^T\mathbf{u} + \mathbf{v}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b} - \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ y como para la solución óptima $\mathbf{w}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, se concluye qué $\mathbf{w}^T\mathbf{u} + \mathbf{v}^T\mathbf{x} = 0$.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{x}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son no negativas, podemos poner $u_i \times w_i = 0$ para todo $i = 1, ..., m$ y $v_j \times x_j = 0$ para todo $j = 1, ..., n$, por lo que de estas condiciones se puede interpretar que para que exista una solución óptima:

- *Si una variable primal es positiva* ($x_j > 0$) *la correspondiente restricción dual es una igualdad (es decir, la restricción dual se cumple con igualdad en el óptimo), por lo tanto, su variable de holgura es nula* $v_j = 0$
- *Si una restricción del primal se verifica con desigualdad en el óptimo* ($u_i > 0$)*, la correspondiente variable dual es cero para la solución óptima* ($w_i = 0$)
- *Si una variable dual es positiva* ($w_i > 0$)*, la correspondiente restricción primal se verifica con igualdad* ($u_i = 0$).
- *Si una restricción dual se verifica con desigualdad* ($v_j > 0$)*, la correspondiente variable primal es cero en la solución óptima* ($x_j = 0$)

Establecidas las relaciones de dualidad, al resolver un problema (primal o dual), queda resuelto el otro, obteniendo la solución óptima del dual a partir de la solución óptima del primal por las condiciones de holgura complementaria. Veamos cómo obtener la solución del dual dada la tabla óptima del símplex del problema primal.

Teorema 5. *Si el problema primal de programación lineal tiene una solución óptima correspondiente a una base* $\mathbf{B}$, *entonces* $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ *es una solución óptima para su problema dual.*

Los costes reducidos en la tabla óptima de las variables de holgura (y/o artificiales) proporcionan el valor de la variable dual asociada a la restricción en la que se ha añadido dicha variable de holgura (y/o artificial). Solamente hay que tener en cuenta los siguientes detalles:

- *Si la restricción es de* $\leq$, *la variable dual correspondiente a esa restricción es igual al coste reducido en la tabla óptima de la variable de holgura asociada a dicha restricción.*
- *Si la restricción es de* $\geq$, *la variable dual correspondiente a esa restricción es igual al coste reducido cambiado de signo de la variable de holgura asociada a dicha restricción.*
- *Si la restricción es de* $=$, *la variable dual correspondiente a esa restricción es igual al coste reducido de la variable artificial asociada a dicha restricción menos* M.

4. El Algoritmo Símplex Dual

Las propiedades entre el problema primal y dual dieron origen a nuevos algoritmos para resolver los problemas de programación lineal. En cada iteración del algoritmo del símplex se pasa de una solución primal factible ($\overline{\mathbf{b}} \geq 0$) a otra, hasta alcanzar la factibilidad dual ($z_j - c_j \geq 0$ si z es de maximizar).

En ocasiones puede resultar más sencillo encontrar soluciones factibles duales pero no factibles primales. Apoyados en esta idea, Lemke y Beale (1954) propusieron un algoritmo conocido como *Algoritmo del Símplex Dual* (o algoritmo dual del símplex), en cada iteración se mantiene la factibilidad dual, mejorando el valor de la función objetivo hasta alcanzar la solución óptima, (que sería factibilidad primal si existe la solución).

En realidad, el Símplex Dual equivale a resolver con el método del Símplex el problema dual, pero, sobre la tabla del Símplex para el problema primal. Se trata de un método alternativo al método del Símplex que en ocasiones puede resultar más eficiente, sobre todo si el problema dual es mucho más sencillo que el primal.

4.1. Pasos del Algoritmo Símplex Dual:

Paso 1 Supongamos el problema de maximizar, dada $\mathbf{x}_B$ una solución básica dual factible ($z_j - c_j \geq 0$), si $\mathbf{x}_B \geq 0$ la solución es óptima y parar. En caso contrario, si uno o varios $x_{B_i} < 0$, ir al Paso 2. (Si el problema es de minimizar la solución básica dual factible debe verificar $z_j - c_j \leq 0$)

Paso 2 Variable de salida: Seleccionar como variable de salida aquella variable básica con el valor más negativo, sea x_{B_r}, (por lo que la fila r será la fila pivote). Ir al Paso 3.

Paso 3 Variable de entrada: Determinar para aquellas columnas no básicas ($j \notin \mathbf{B}$) con elemento $y_{rj} < 0$ el valor:

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_{j \notin \mathbf{B}} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}}, \quad y_{rj} < 0 \right\}$$

(si el problema es de minimizar se toma el mínimo), sea la columna k donde se alcanza el mayor valor, la variable x_k entra en la base y el elemento y_{rk} es el pivote. Ir al Paso 4.

Si $y_{rj} \geq 0$ para todo $j \notin \mathbf{B}$, el problema no tiene solución (el primal es infactible y el dual es no acotado)

Paso 4 Pivotar sobre y_{rk} para obtener la nueva tabla mediante el método del símplex. Volver al Paso 1.

4.2. Método de la restricción artificial

El algoritmo símplex dual requiere que en la primera tabla haya factibilidad dual, lo cual no ocurre para todos los problemas. Una extensión del algoritmo del símplex dual que permite que pueda ser aplicado es el *método de la restricción artificial*.

Cuando no hay factibilidad dual en la tabla inicial, se añade una restricción artificial que no modifique la región factible del problema, es decir, que no elimine posibles soluciones factibles. Se añade con el objetivo de obtener la factibilidad dual y poder continuar con el algoritmo símplex dual. La restricción artificial que se añade es:

$$\sum_{j/j \in \mathbf{N}} x_j \leq M$$

donde $\mathbf{N}$ es el conjunto de variables para las que $z_j - c_j$ es negativo en la primera tabla y M es un valor positivo muy grande, de manera que la restricción añadida no modifique la región factible original. En la primera etapa se fuerza a que su correspondiente variable de holgura S_{m+1} entre como variable básica, dejando la base aquella variable con su coste reducido mayor en valor absoluto.

En estas ocasiones conviene plantearse la utilización del algoritmo del símplex en vez del dual del símplex.

5. Interpretación económica de la dualidad

Las condiciones de holgura complementaria formalizan matemáticamente algunos principios básicos de economía. Se puede interpretar la i-ésima variable dual como la razón de cambio de la función objetivo cuando el término independiente de la restricción i-ésima primal es sometida a pequeños cambios. En la mayoría de los problemas, el término independiente de las restricciones representa la cantidad de recurso de que se dispone.

En estas condiciones la variable dual representa el beneficio extra que se conseguiría si se dispusiera de una unidad más de dicho recurso, por lo tanto, es precisamente el precio máximo que estaremos dispuestos a pagar por conseguir una unidad extra del recurso, de ahí que las variables duales se denominen también **precios sombra**. En muchos problemas, los precios sombra son tan importantes como la solución del problema, ya que proporcionan información sobre el efecto en la función objetivo de cambios en los recursos disponibles.

Por las condiciones de holgura complementaria, si una restricción se verifica con desigualdad en la solución óptima (variable de holgura no nula), entonces el recurso (lado derecho) no se agota, por lo que disponer de una unidad más de recurso no reportará ningún beneficio y el precio que se estaría dispuesto a pagar por disponer de una unidad extra del mismo es cero, que es el valor de la correspondiente variable dual.

Los precios sombra son de gran utilidad en el mundo empresarial, sirven para valorar la estabilidad de la solución óptima alcanzada, evaluar la conveniencia de introducir o no nuevos productos en el mercado, justificar cambios de precios...

Hay que tener en cuenta que en presencia de degeneración, la interpretación de las variables duales requiere consideraciones adicionales. La degeneración puede implicar que haya más de una base asociada a una solución óptima, lo que significa que los precios sombra no están unívocamente determinados por el valor de las variables duales en el óptimo, ya que estas no son únicas. En estas circunstancias, la variable dual sería una cota superior del cambio que experimentaría la función objetivo si se incrementa en una unidad el recurso (o cota inferior si se disminuyese).