Tema 5. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Asignatura: **INVESTIGACIÓN OPERATIVA I**.

2° Grado en Estadística

1. Introducción

En los modelos de programación lineal, los distintos coeficientes de la función objetivo, restricciones y valores de los recursos son datos que pueden estar sujetos a errores o fluctuaciones. El análisis de sensibilidad o de post-optimalidad, se encarga de estudiar cómo afectaría a la solución óptima obtenida y a la función objetivo el cambio de uno de los parámetros, manteniendo fijos los restantes. Este tipo de análisis solo tiene sentido para modelos lineales continuos (no se usa en Programación Entera, ni en problemas no lineales), y los cambios serán discretos en los parámetros, el caso continuo se estudia en la Programación Paramétrica.

Hay dos maneras de estudiar las variaciones de una solución respecto a cambios en alguno de los términos del problema. La primera de ellas sería volver a resolver todo el problema cada vez que alguno de los datos originales se haya modificado, lo cual podría llevar bastante tiempo si nos encontramos con un conjunto grande de cambios posibles. La otra forma, con el análisis de sensibilidad, una vez resuelto un problema se puede analizar cómo afectaría a la solución obtenida la variación dentro de un intervalo de valores de uno de los parámetros, manteniendo fijos los restantes. En caso de pretender estudiar los efectos de la variación de más de un parámetro, se tendrá que reprogramar el problema.

2. Cambios en los coeficientes de la función objetivo.

Dado un problema de programación lineal cuya solución óptima conocemos. Se va a realizar un cambio en el vector $\mathbf{c}$, de tal forma que el nuevo vector de coeficientes es $\widehat{\mathbf{c}}$.

Problema original

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a:} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

Problema modificado

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = \widehat{\mathbf{c}}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a:} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

Partiendo de la tabla óptima del problema original:

max	z	x_1	...	x_n	Ld	VB
R_0	1	$z_1 - c_1$	...	$z_n - c_n$	$\mathbf{c}_B\overline{\mathbf{b}}$	z
R_1	0	y_{11}	...	y_{1n}	$\bar{b}_1$	x_{B_1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_m	0	y_{m1}	...	y_{mn}	$\bar{b}_m$	x_{B_m}

Hay que distinguir si el cambio se produce en el coeficiente de una variable básica óptima o en una variable no básica.

- Si el coeficiente que se cambia corresponde a una **variable no básica** x_k, $c_k \to \widehat{c}_k$ solo cambia el coste reducido de dicha variable:

  $$\widehat{z_k - c_k} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_k - \widehat{c}_k = z_k - \widehat{c}_k$$

  La base óptima no cambia si dicho coste reducido es óptimo, es decir, en el caso de maximizar $\widehat{z_k - c_k} > 0 \Rightarrow \widehat{c}_k \leq z_k$ (si es de minimizar, $\widehat{z_k - c_k} < 0 \Rightarrow \widehat{c}_k \geq z_k$)

  El coste reducido es la cantidad en la que hay que modificar, al menos, el valor del coeficiente de la función objetivo para que la variable deje de ser variable no básica y entre en la base. Por lo tanto, es la cantidad máxima en la que se puede modificar el coeficiente de la función objetivo sin que se modifique la solución óptima del problema.

- Si el coeficiente que se cambia corresponde a una **variable básica** de la tabla óptima x_h, se modifican todos los costes reducidos de las variables no básicas y el valor de la función objetivo, ya que cambia $\mathbf{c}_B$.

  Si el problema es de maximizar la base actual seguirá siendo óptima, si todos los costes reducidos son no negativos (si es de minimizar los costes reducidos tienen que ser no positivos), si alguno es negativo la base actual no es óptima y se tendría que aplicar el algoritmo del símplex para obtener la base óptima. El intervalo en el cual la base no cambia se calcula:

  $$\underbrace{Max\left\{\frac{-(z_k - c_k)}{y_{hk} > 0 \quad {\scriptstyle k \neq h}}\right\}}_{-AD} \leq \widehat{c}_h - c_h \leq \underbrace{Min\left\{\frac{-(z_k - c_k)}{y_{hk} < 0}\right\}}_{AI}$$

  Si $\widehat{c}_h \in (c_h - AD, c_h + AI)$ la base permanece óptima con los mismos valores de las variables, solo cambia el valor de la función objetivo $\widehat{z} = z + x_h(\widehat{c}_h - c_h) = c_1x_1 + ... + \widehat{c}_hx_h + ... + c_nx_n$.

  Si el problema es de minimizar:

  $$Max\left\{\frac{-(z_k - c_k)}{y_{hk} < 0}\right\} \leq \widehat{c}_h - c_h \leq Min\left\{\frac{-(z_k - c_k)}{y_{hk} > 0 \quad {\scriptstyle k \neq h}}\right\}$$

3. Cambio en el vector de términos independientes.

Si se modifica uno de los términos independientes, cambia $\mathbf{b}$, por lo que la solución óptima podría dejar de ser factible primal ($\mathbf{x}_B = \overline{b} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} > 0$). Si se mantiene dicha factibilidad, la base óptima no cambia, pero podrían cambiar los valores de las variables básicas y, por lo tanto, el valor de la función objetivo (no cambia si las variables de holgura asociadas son no nulas, ya que es ese caso la correspondiente variable dual es nula). Si algún $\overline{b}_i$ es negativo, la solución no es óptima y las variables básicas cambian, para obtener la nueva solución hay que utilizar el algoritmo dual del símplex.

Si cambiamos b_i por $\widehat{b}_i$, las variables básicas óptimas no cambian mientras se verifique:

$$Max \left\{ \frac{-(\overline{b}_j)}{\mathbf{B}_i^{-1} > 0} \right\} \leq \widehat{b}_i - b_i \leq Min \left\{ \frac{-(\overline{b}_j)}{\mathbf{B}_i^{-1} < 0} \right\}$$

Como ya se sabe, el vector columna $\mathbf{B}_i^{-1}$ en la tabla óptima, es el vector columna que aparece debajo de la i-ésima variable de holgura, que fueron las primeras variables básicas en el algoritmo del símplex.

El nuevo valor de la función objetivo es $\widehat{z} = z + |w_i|(\widehat{b}_i - b_i)$, donde w_i es el valor de la variable dual correspondiente a la i-ésima restricción, también llamado precio sombra o dual prices, que indica el precio máximo a pagar por conseguir una unidad extra del recurso correspondiente.

4. Cambio en la matriz de restricciones.

Hay que distinguir si el cambio se produce en una variable básica óptima o en una variable no básica.

- Si se modifican los coeficientes de una **variable no básica**, x_k, en las restricciones, cambia $\mathbf{a}_k$ por $\widehat{\mathbf{a}}_k$, la base actual seguirá siendo óptima si se mantiene el signo de su coste reducido, si el problema es de maximizar sería:

  $$\widehat{z_k - c_k} = c_B^T \mathbf{B}^{-1} \widehat{\mathbf{a}}_k - c_k = \widehat{z}_k - c_k > 0$$

  (negativo si es de minimizar), si alguno es negativo la base actual no es óptima y se tendría que aplicar el algoritmo del símplex para obtener la nueva base óptima.

- Si los cambios se realizan en los coeficientes de una **variable básica** de la tabla óptima, cambia $\mathbf{B}^{-1}$ por lo que se tendría que recalcular los costes reducidos de todas las variables para ver si se mantienen óptimos ($\widehat{z_k - c_k} \geq 0$, si es de maximizar) y los valores de las variables, para comprobar que se mantiene la factibilidad primal ($\overline{\mathbf{b}} > 0$), en ese caso la base permanece óptima. Si no es así, se aplicaría el dual o el símplex para obtener la nueva base óptima.

5. Inclusión de una nueva variable.

Al añadir una nueva variable al problema, se calcula su coste reducido, la base actual no cambia si dicho coste es óptimo para el problema (positivo si se está maximizando, negativo si estamos minimizando). Si no lo fuera se calcula la nueva solución mediante el símplex.

6. Inclusión de una nueva restricción.

Si se añade al problema una nueva restricción, lo primero que se hace es comprobar si la solución óptima verifica dicha condición, en caso afirmativo, la solución no cambia. Si la solución óptima no verifica la nueva restricción, se añade al problema y se resuelve de nuevo por el método del símplex (desde el comienzo), o se utiliza el dual del símplex añadiendo la restricción a la tabla óptima del símplex.

7. Introducción a la Programación Paramétrica.

El Análisis de Sensibilidad permite hacer cambios discretos en los valores del problema. En la práctica esto puede resultar insuficiente, ya que los cambios pueden ser continuos. Estos tipos de cambios se estudian en la Programación Paramétrica, que siguiendo lo visto en este tema, se plantea entre qué posibles valores pueden variar los parámetros que se incorporan en el planteamiento para que la solución siga siendo óptima.

Ejemplos de cambios continuos:

1. Cambios en los coeficientes de la función objetivo: $\widehat{\mathbf{c}} = \mathbf{c} + \theta\boldsymbol{\kappa}$

   $\widehat{\mathbf{z}} = (c_1 + \theta\kappa_1)x_1 + (c_2 + \theta\kappa_2)x_2 + ... + (c_n + \theta\kappa_n)x_n$

2. Cambios en los términos independientes: $\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \theta\boldsymbol{\beta}$

   $$\widehat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 + \theta\beta_1 \\ b_2 + \theta\beta_2 \\ ... \\ ... \\ b_m + \theta\beta_m \end{pmatrix}$$

3. Cambios en los coeficientes tecnológicos de las restricciones en variables no básicas: $\widehat{\mathbf{A}_j} = \mathbf{A}_j + \theta\boldsymbol{\alpha}$

En cada uno de los casos anteriores se realizan las cuentas de modo análogo realizado en el Análisis de Sensibilidad. Primero se resuelve el problema suponiendo $\theta = 0$, y partiendo de los resultados obtenidos, se calcula el rango de valores del parámetro θ para los cuales se mantiene la base óptima.