Tema 4. PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

Asignatura: **INVESTIGACIÓN OPERATIVA I**.

2° Grado en Estadística

1. Introducción

En muchas ocasiones no tiene sentido que la solución de un problema planteado por programación lineal tenga valores continuos, por ejemplo si se trata de personas que van a realizar determinados viajes, libros que se editan, ordenadores que se producen... Lo mismo ocurre en problemas en los cuales hay que tomar decisiones, por ejemplo donde colocar cámaras de vigilancia, asignar proyectos, elegir cursos a realizar...

Cuando todas o algunas de las variables usadas deben tener valores enteros, se habla de **Programación Lineal Entera** (PE), y requiere de algoritmos específicos para su resolución. Estos problemas se pueden clasificar en:

- **Problemas enteros puros**, si todas las variables son enteras.
- **Problemas enteros mixtos**, cuando parte de las variables son enteras y el resto continuas.
- **Problemas binarios**, donde las variables no solo han de ser enteras, sino que solo pueden tomar los valores cero o uno.

Existen algoritmos propios para cada tipo de problema. La condición de que las variables tomen valores enteros simplifica mucho el conjunto de soluciones, pero dificulta la obtención de la solución del problema porque el conjunto de soluciones no es convexo.

2. Planteamiento de Problemas de Programación Entera.

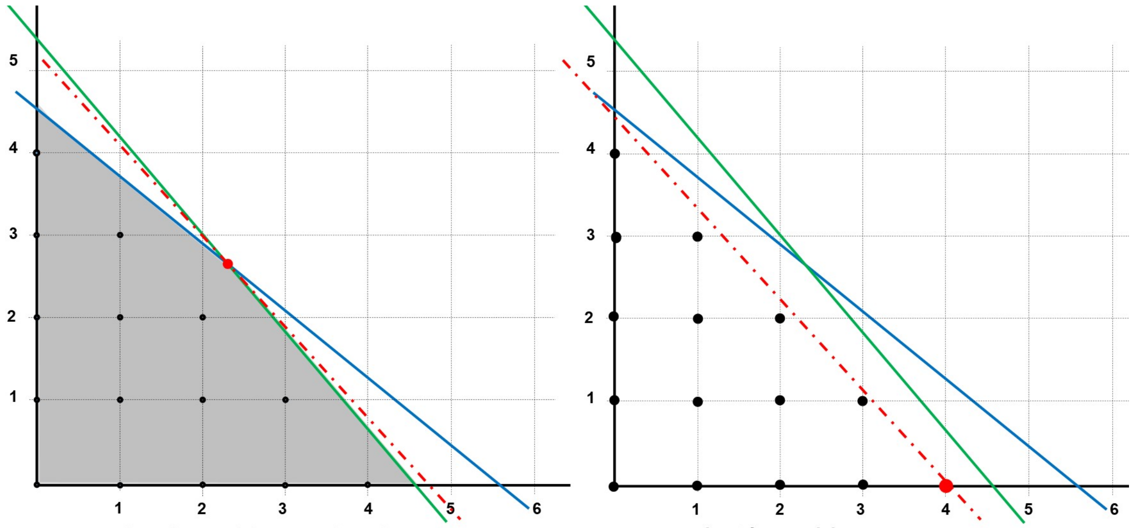
En muchos de los problemas que se plantean, la solución obtenida ya tiene valores enteros, por lo que no es necesario realizar ningún cambio en la modelización, en el caso en que la solución no fuese entera, habría que añadir esas restricciones al modelo y resolverlo.

Por otro lado, están los problemas donde es necesario añadir variables enteras (sobre todo las binarias) para modelizar el problema. Además, algunas de las restricciones necesarias pueden resultar complejas de plantear, por lo que, en el tema **Modelización de problemas de Programación Lineal**, aparecen muchos de los problemas tipo de la PE: problemas de transporte, flujo, producción, asignación, recorridos, mochila, asignación, cubrimiento...., así como la forma de plantear algunas restricciones que con frecuencia suelen presentarse en estos problemas.

3. Algoritmos de resolución de Programación Lineal Entera.

La primera idea que surge al intentar resolver los problemas lineales enteros (PE) es prescindir de las condiciones de integridad de las variables y resolver entonces el problema lineal asociado que se llama problema relajado (PR). Si la solución óptima que se tiene es entera, esta será la solución óptima del PE de partida. Si esto no ocurre, en muchas ocasiones se tiende a aproximar la solución por redondeo, pero esta técnica puede llevar a una solución muy distinta de la verdadera solución óptima del PE o, peor aún, a una solución infactible.

Otro método de solución es el conocido como método de enumeración exhaustiva o explícita. Si la región factible del PE tiene un número finito de puntos se podría evaluar la función objetivo en cada punto y tomar el mejor como solución óptima. Por supuesto, este método con regiones factibles no acotadas es intratable.



Solución problema relajado

Solución problema entera

Proposición

En un problema de minimización, se cumple que el valor de la función objetivo del problema relajado es menor o igual que el valor de la función objetivo del problema entero, $z_{PR} \leq z_{PE}$. *En un problema de maximización ocurre al contrario* $z_{PR} \geq z_{PE}$

3.1. Método de ramificación y acotación.

Se suele conocer por su nombre en inglés **Branch and Bound**, la ramificación se refiere a la partición de la región factible del problema lineal relajado en subproblemas, prescindiendo de aquellas partes del conjunto factible del PR que no lo sean del PE. Por otro lado, la acotación se refiere a la cota superior (si estamos maximizando) que se obtiene del PR y a la cota inferior que se obtiene del valor de las funciones objetivo de los subproblemas obtenidos en el proceso de ramificación, para ordenar las soluciones de dichos subproblemas y así, determinar la solución óptima del problema entero.

Un aspecto importante de la ramificación es el sondeo, proceso mediante el cual se decide si se prescinde de algún conjunto de posibles soluciones enteras porque no puedan contener la solución óptima.

El proceso de ramificación y acotación se suele representar en forma de árbol. En la raíz aparece el PR del que parten las ramificaciones correspondientes, terminando la ramificación en los vértices en los que se tiene solución entera, cuando el problema sea infactible o cuando el valor objetivo asociado sea menor que la cota establecida en ese momento. En estos casos se dice que el vértice es terminal y que ha quedado sondeado.

Algoritmo de ramificación y acotación:

Dado el problema de programación lineal entera, se resuelve el problema lineal relajado. Si la solución óptima obtenida es entera, es la solución del PE. En caso contrario alguna variable $x_i = v_i$ tomará un valor no entero.

La ramificación se lleva a cabo generando nuevos subproblemas, añadiendo a cada nueva parte del PR una de las siguientes restricciones:

- $x_i \leq [v_i]$
- $x_i \geq [v_i] + 1$,

siendo [n] la parte entera del número n. De este modo se va reduciendo la región factible conservando las soluciones enteras del problema original.

El proceso de ramificación continúa con los nuevos subproblemas obtenidos del mismo modo, hasta obtener la primera solución con valores enteros para las variables que correspondan, cuyo valor de la función objetivo será una cota inferior del óptimo, (si se está maximizando), o hasta obtener una solución no factible o si la ramificación tiene un valor en la función objetivo menor que la cota inferior alcanzada, (ya que las soluciones a partir de ese vértice nunca serán mejores que la cota inferior).

Se ramifica por el vértice que tenga el valor óptimo más cerca de la solución del PR. Si se tiene más de una variable con valor no entero se toma la que esté más lejos de ser un entero, es decir, la que tenga la parte fraccional más cercana a 0.5, en caso de empate se tomaría la variable con la parte fraccional más grande.

Si el problema de programación lineal entera tiene dos variables se puede usar el método gráfico para resolverlo, en caso contrario se usa el algoritmo del símplex, M grande, dos Fases o símplex dual para encontrar la nueva solución de cada subproblema generado.

Ejemplo de resolución gráfica de problemas enteros

Se va a mostrar mediante un ejemplo la técnica de ramificación y acotación resolviendo un problema de dos variables de forma gráfica. En primer lugar, se resuelve el problema relajado y, si la solución no es entera, se divide (ramifica) el problema en dos añadiendo restricciones que eliminen valores no enteros. Se vuelve a resolver los nuevos problemas y se reitera el proceso según el algoritmo.

Problema entero (PE)
Maximizar: $z = 16x_1 + 9x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 7$
$6x_1 + 2.5x_2 \leq 30$
$x_1,\ x_2 \geq 0$ enteras

Problema relajado (PR)
Maximizar: $z = 16x_1 + 9x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 7$
$6x_1 + 2.5x_2 \leq 30$
$x_1,\ x_2 \geq 0$

Al ser un problema en dos variables podemos resolverlo gráficamente. En la figura 1, se muestra la región factible y el punto solución del PR, cuya solución es z_{PR} =88.2, x_1 =3.6, x_2 =3.4

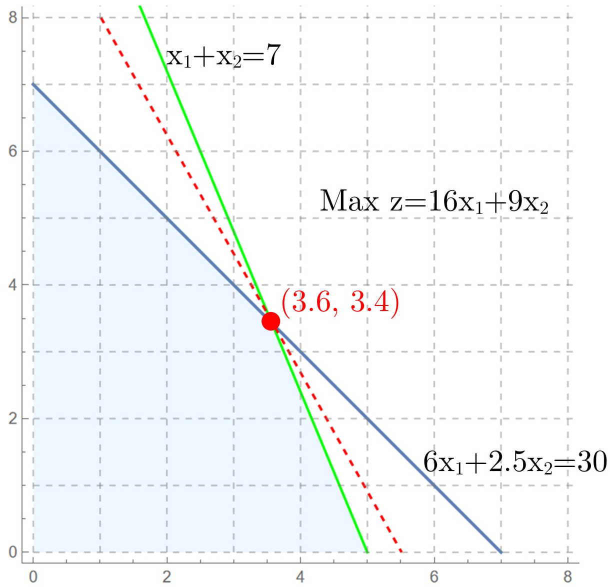


Figura 1. Solución del PR

Se puede pensar que la solución entera puede obtenerse aproximando por redondeo los valores de las variables, en este caso se obtendrían cuatro posibles soluciones (3,3), (3,4), (4,3) y (4,4), y evaluar la función objetivo en estos puntos. En este caso el máximo estaría en (4,4), pero como puede verse en la figura 1, este punto no pertenece a la región factible.

Según el algoritmo de ramificación se va a ramificar el problema creando dos nuevos subproblemas, que van eliminando las posibles soluciones no enteras. Dado que tanto x_1 como x_2 toman valores con decimales igual de próximos a 0.5, se toma x_1 que tiene la parte fraccional mayor. El valor de x_1 es 3.6, por lo que no puede tomar valores comprendidos entre $3 < x_1 < 4$. Se divide acotando los valores de la variable añadiendo que, o bien $x_1 \leq 3$, o bien $x_1 \geq 4$, lo que da lugar a dos nuevos problemas:

P2:
Maximizar: $z = 16x_1 + 9x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 7$
$6x_1 + 2.5x_2 \leq 30$
$x_1 \leq 3$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

P3:
Maximizar: $z = 16x_1 + 9x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 7$
$6x_1 + 2.5x_2 \leq 30$
$x_1 \geq 4$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

En la figura 2 se puede observar las regiones factibles y los puntos solución de los nuevos subproblemas P2 ($z_{P2} = 84$, x_1 =3, x_2 =4) y P3 ($z_{P3} = 85{,}6$, x_1 =4, x_2 =2.4):

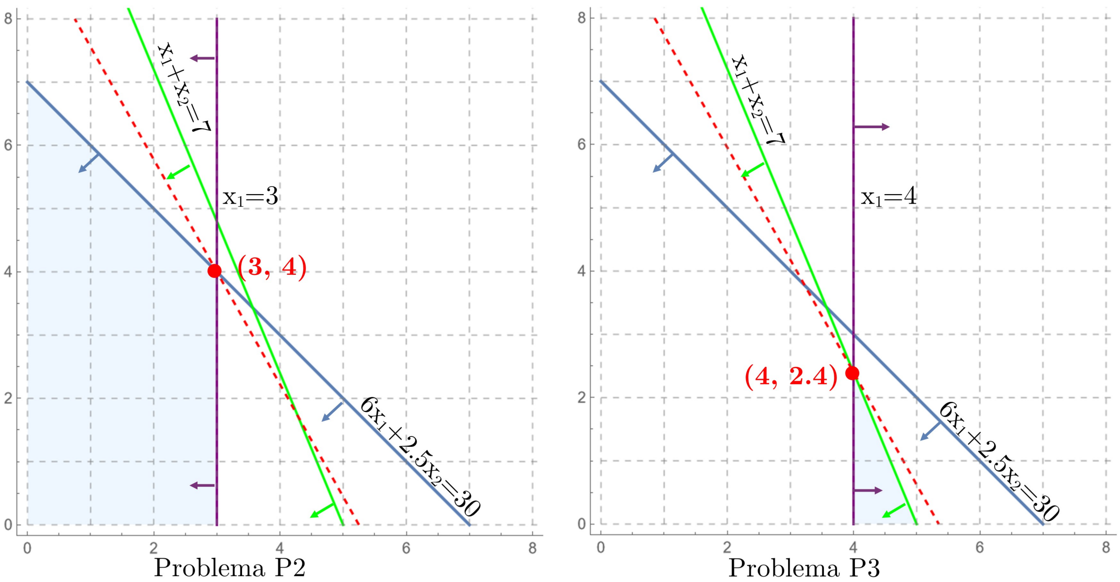


Figura 2. Solución de los problemas **P2** y **P3**

La solución del problema P2, es entera y posible candidata a solución óptima, ya no es necesario ramificando este caso. El valor de la función objetivo $z_{P2} = 84$ es una cota del valor óptimo del problema entero, dado que $z_{P3} = 85{,}6$ es superior, ramificando este problema es posible encontrar soluciones mejores que la cota obtenida.

Se ramifica P3, teniendo en cuenta que solo x_2 =2.4 toma un valor no entero. Se divide el P3 en dos nuevos problemas añadiendo las restricciones $x_2 \leq 2$ y $x_2 \geq 3$:

P4:
Maximizar: $z = 16x_1 + 9x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 7$
$6x_1 + 2.5x_2 \leq 30$
$x_1 \geq 4$
$x_2 \leq 2$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

P5:
Maximizar: $z = 16x_1 + 9x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 7$
$6x_1 + 2.5x_2 \leq 30$
$x_1 \geq 4$
$x_2 \geq 3$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

En la figura 3 se puede observar las regiones factibles y los puntos solución de los nuevos subproblemas P4 (z_{P4} =84.6667, x_1 =4.16667, x_2 =2) y P5 (No factible):

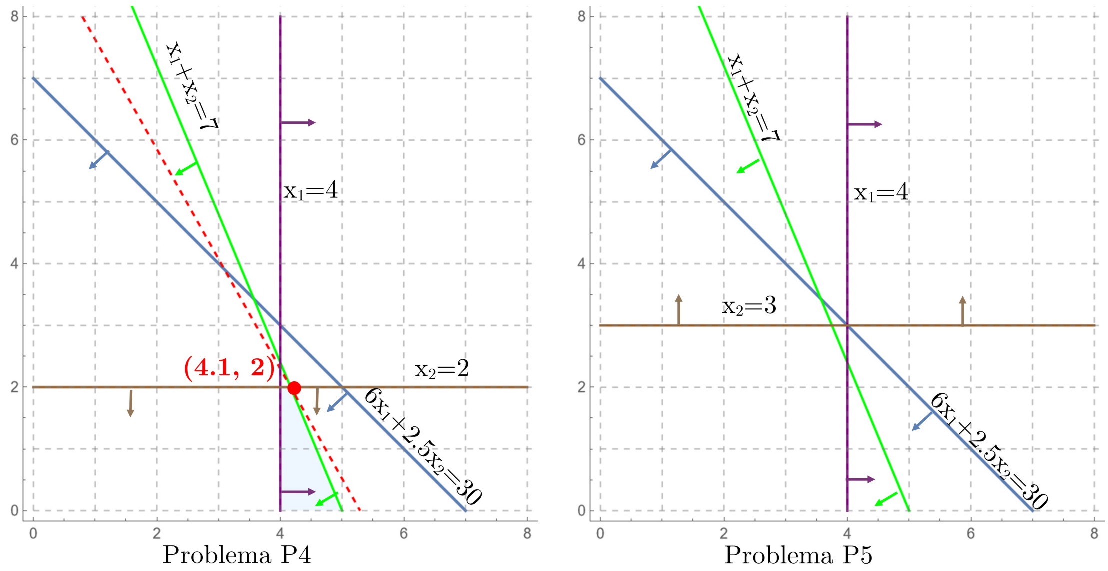


Figura 3. Solución de los problemas **P4** y **P5**

Como el P5 es No factible es un nodo terminal del árbol. Se repite el proceso de ramificación para el P4, ya que z_{P4} es superior a la cota. Ramificando por x_1, se crean los dos nuevos subproblemas añadiendo las restricciones: $x_1 \leq 4$ y $x_1 \geq 5$:

P6:
Maximizar: $z = 16x_1 + 9x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 7$
$6x_1 + 2.5x_2 \leq 30$
$x_1 \geq 4$
$x_2 \leq 2$
$x_1 \leq 4$
$x_1,\ x_2 \geq 0$

P7:
Maximizar: $z = 16x_1 + 9x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 7$
$6x_1 + 2.5x_2 \leq 30$
$x_1 \geq 4$
$x_2 \leq 2$
$x_1 \leq 5$
$x_1,\ x_2 \geq 0$

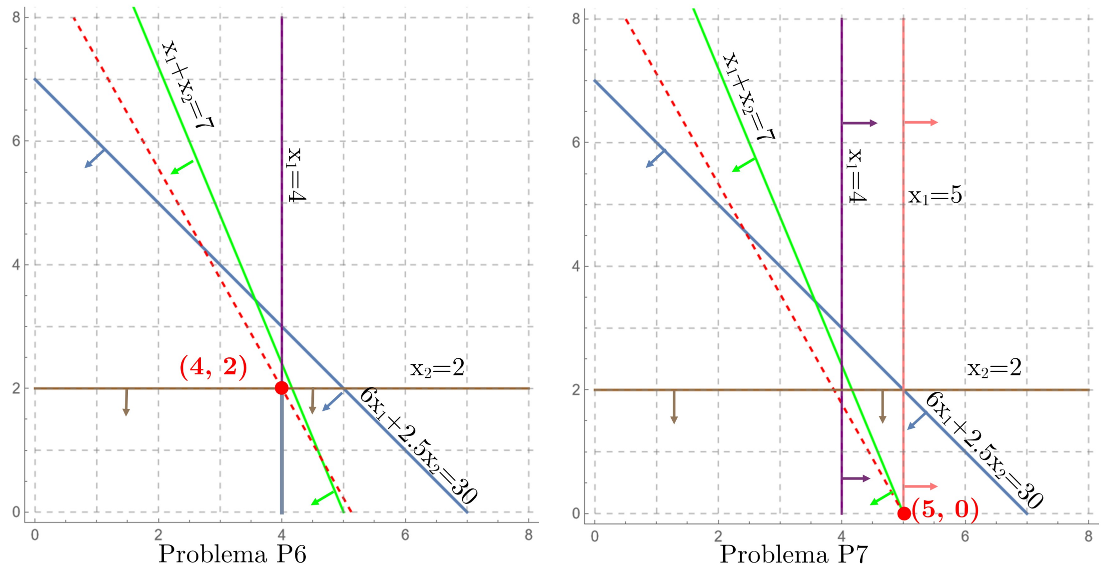
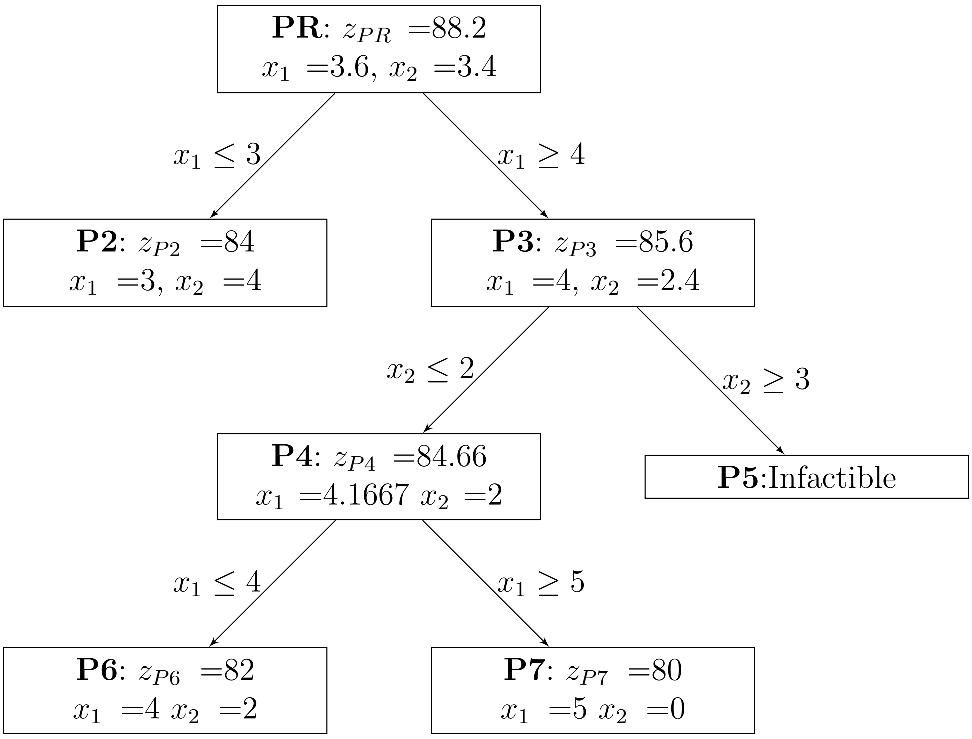


Figura 4. Solución de los problemas **P6** y **P7**

Como puede verse en la figura 4, la región factible del problema P6 se encuentra sobre la recta $x_1 = 4$ para $x_2 \leq 2$, teniendo la solución óptima en el punto (4, 2), $z_{P6} = 82$. Para el problema P7 la región factible es solo el punto (5, 0) que sería la solución con $z_{P7} = 80$. Al tener ambas solución entera, no es necesario ramificar (tampoco se ramificaría si el valor de las variables no fuera entero, ya que z es menor que la cota fijada por el problema P2).

Recopilando todos los pasos se puede dibujar el árbol que resume el método de ramificación y acotación utilizado en este ejemplo:



Del mismo modo que en el ejemplo anterior se realiza la ramificación en problemas con variables binarias. En ese caso, hay que fijar variables, ya que si la variable toma un valor fraccionario será un valor entre 0 y 1 y en cada rama lo que se hace es fijar el valor de esa variable a 0 o a 1. Esto impide que se pueda ramificar dos veces una variable binaria, lo que puede ocurrir en variables enteras.

3.2. Método de los planos de corte

El método de los planos de corte fue inicialmente propuesto por **Gomory** al final de los años cincuenta del siglo pasado. Consiste en ir resolviendo una sucesión de problemas de optimización de programación lineal relajados con una región factible cada vez más restringida hasta alcanzar una solución óptima con valores enteros. De esta manera, si la solución óptima del PR no tiene todas sus componentes enteras, es posible obtener una desigualdad (corte o restricción) válida para la región factible del PE que no la verifique dicha solución.

Esta desigualdad se añade al PL, obteniendo así una región factible más reducida, y se repite sucesivamente este paso hasta alcanzar, si existe, una solución con valores enteros.

Algoritmo del método fraccional de Gomory.

Paso 0. Resolver el problema relajado mediante el método del símplex. Si no existe solución, parar. En otro caso, sea $\mathbf{x}$ la solución óptima del PR.

Paso 1. Si dicha solución es entera para todas las x_j, es la solución del PE. En otro caso, ir al Paso 2.

Paso 2. De la tabla óptima del símplex se toma la restricción cuyo valor en la variable básica tenga la parte fraccional más cercana a 0.5 (o mayor en caso de empate).

Sea la restricción: $\sum_j y_{ij} x_j = \bar{b}_i$.

El plano de corte se obtiene a partir de esta restricción separando la parte entera de la fraccional en cada término numérico ($z = [z] + f_z$, con $f_z \in [0, 1]$)

$$\sum_j [y_{ij}] x_j + \sum_j f_{[y_{ij}]} x_j = [\bar{b}_i] + f_{[\bar{b}_i]}$$

Separando la parte entera (izquierda) de la parte fraccional (derecha de la igualdad):

$$\sum_j [y_{ij}] x_j - [\bar{b}_i] = f_{[\bar{b}_i]} - \sum_j f_{[y_{ij}]} x_j$$

Se forma el plano de corte tomando la Parte fraccional ≤ 0:

$$f_{[\bar{b}_i]} - \sum_j f_{[y_{ij}]} x_j \leq 0$$

Se añade a la tabla óptima del PR el plano de corte, con su correspondiente variable de holgura:

$$-\sum_j f_{[y_{ij}]} x_j + S_i = -f_{[\bar{b}_i]}$$

Paso 3. Se resuelve la nueva tabla del símplex por el método del símplex dual (la nueva restricción tiene el término independiente negativo). Si existe una solución óptima factible ir al Paso 1. En otro caso, no hay solución entera para el problema y parar.

El método de corte anterior no es único, sino que existen una familia de métodos de planos de corte que bajo ciertas condiciones, permiten construir algoritmos finitos para el problema entero general, (corte entero, corte fuerte...)