Soluciones de los Problemas del Tema 2. Programación Lineal. IO I

2.1.- Problema EBAU-Andalucía 2021. https://www.ebaumatematicas.com
Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción. Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, plantea y resuelve el problema para determinar cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio sea máximo.

Solución

Solución en la web

- Lo primero que hay que hacer es definir las *variables de decisión*:

  x_1 = número de baterías del tipo A que hay que producir a la semana.

  x_2 = número de baterías del tipo B que hay que producir a la semana.

- La *función objetivo* es maximizar el beneficio: Max $z = 130x_1 + 140x_2$

  Esta función objetivo se puede modificar si tenemos en cuenta el coste de producción de cada batería, en cuyo caso sería Max $z = (130 - 150)x_1 + (140 - 100)x_2 = -20x_1 + 40x_2$.

- Las restricciones del problema son:

  \- La producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total:

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

  \- El número del tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las de tipo A:

$$x_2 - x_1 \leq 10$$

  \- Máximo de 6000 euros semanales en gastos de producción:

$$150x_1 + 100x_2 \leq 6000$$

  \- El número de baterías es no negativo:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Al ser un problema en dos variables se puede resolver de forma gráfica. La Figura 1 muestra la región factible resultante de la intersección de las restricciones.

Figura 1. Resolución gráfica del Problema 2.1

Los puntos de corte A=(0,10), B=(10,0), C=(20, 30) y E=(40, 0) son posibles puntos solución al encontrarse en los extremos de la región factible.

Gráficamente, se puede ver que el que maximiza la función objetivo (en rojo) es el punto C. Bastaría con dibujar $z = 130x_1 + 140x_2$ para diferentes valores de z y observar en que sentido se hace máximo su valor. También se puede comprobar sustituyendo los puntos anteriores en la función objetivo:

- $z_A = 130(0) + 140(10) = 1400$

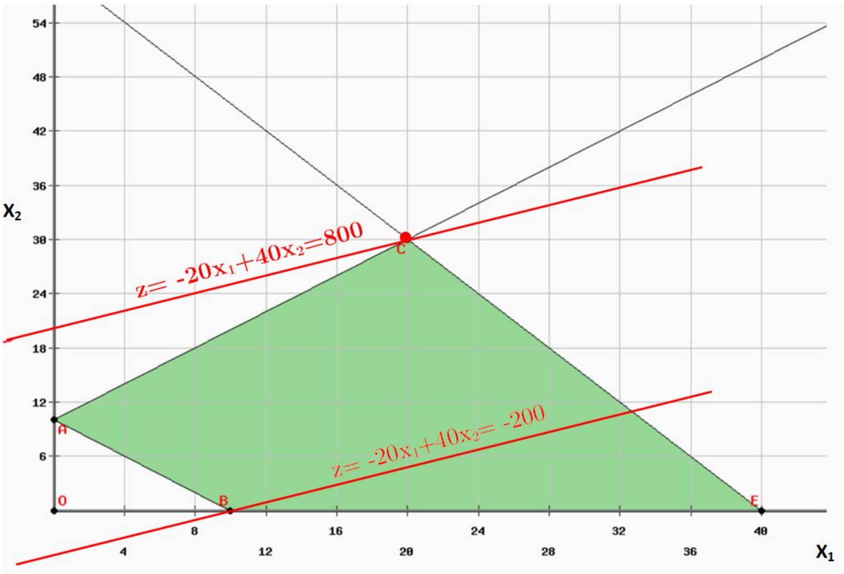
- $z_B = 130(10) + 140(0) = 1300$

- $z_C = 130(20) + 140(30) = 6800$

- $z_E = 130(40) + 140(0) = 5200$

Por lo que la solución óptima se encuentra el punto C= (20, 30). Es decir, hay que producir 20 baterías del tipo A y 30 del tipo B a la semana y el beneficio máximo es de, 6800 euros.

Si se usa como función objetivo Max $z = -20x_1 + 40x_2$, *la solución óptima es la misma, C=(20, 30), y el valor de la función objetivo es z=800.*



2.2.- Problema EBAU-Aragón 2021. https://www.ebaumatematicas.com

El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3 y 2 euros, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60 euros. Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo. Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

Solución

Solución en la web

- *Variables de decisión*:

  x_1 = kilos de soja que deben consumir los cerdos.

  x_2 = kilos de maíz que deben consumir los cerdos.

- La *función objetivo* es minimizar los costes: Min $z = 3x_1 + 2x_2$

- Las restricciones del problema son:

  - Ingesta de, al menos 28, unidades de proteína:

  $$5x_1 + x_2 \geq 28$$

  - Ingesta de, al menos 36, unidades de grasa vegetal:

  $$3x_1 + 3x_2 \geq 36 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 \geq 12$$

  - Presupuesto máximo de 60 euros:

  $$3x_1 + 2x_2 \leq 60$$

  - El número de kilos es no negativo:

  $$x_1, x_2 \geq 0$$

Al ser un problema de programación lineal en dos variables se puede resolver gráficamente. Se dibujan las restricciones delimitando su intersección la región factible. Los puntos de los extremos son posibles soluciones del problema, ya que verifican todas las restricciones planteadas.

Se dibuja la función objetivo para diferentes valores de z, determinando donde corta a la región factible en el sentido en el que se minimice.

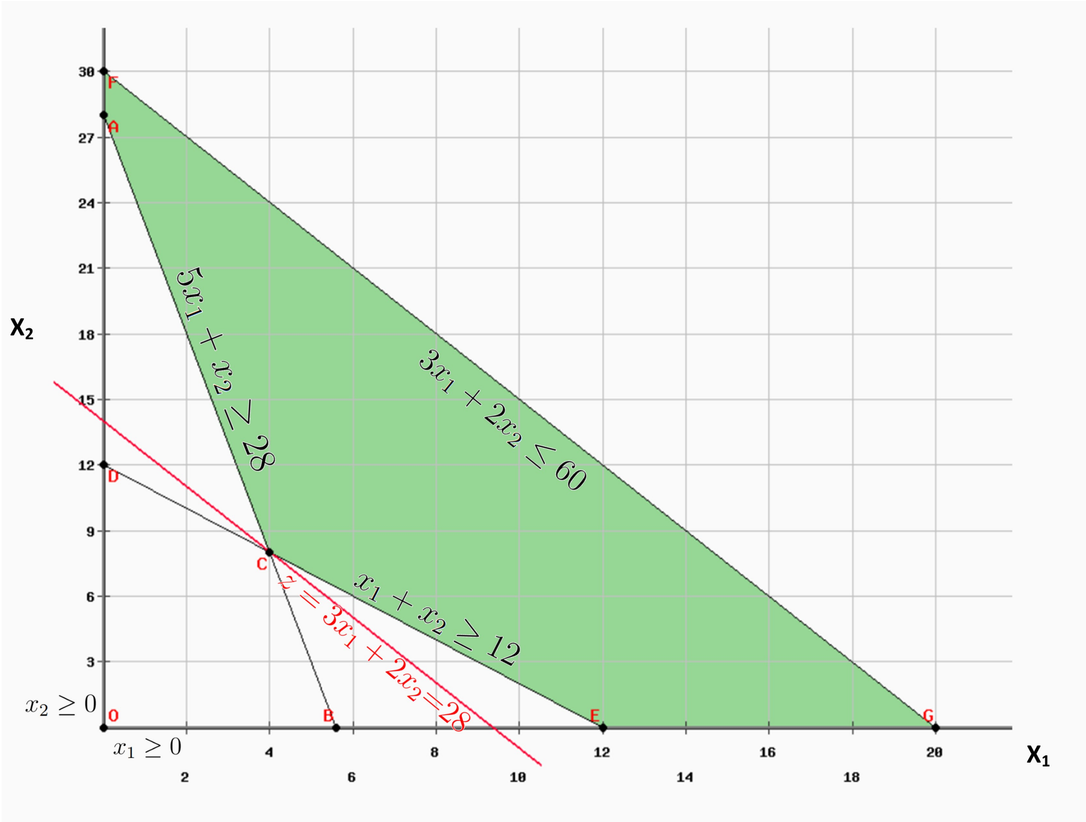


Figura 2. Resolución gráfica del Problema 2.2

También se pueden calcular todos los puntos de corte y evaluar en cuál de ellos la función objetivo tiene un valor menor. Los puntos extremos de la región factible, tal y como aparecen en la Figura 2 son: A=(0,28), C=(4, 8), E=(12,0), F=(0,30) y G=(20, 0). El valor de la función objetivo para estos puntos es:

- $z_A = 3(0) + 2(28) = 56$
- $z_C = 3(4) + 2(8) = 28$
- $z_E = 3(12) + 2(0) = 36$
- $z_F = 3(0) + 2(30) = 60$
- $z_G = 3(20) + 2(0) = 60$

El valor mínimo se alcanza en el punto C=(4,8), por lo que los cerdos debe consumir 4 kilos de soja y 8 kilos de maíz para que se minimice el coste de la alimentación, cuyo valor es de 28 euros.

Observar que si la función objetivo fuera de maximizar (si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor) la solución tendría infinitas soluciones posibles, todos los puntos del segmento que une los puntos F-G. Todos con un coste total de 60 euros.

El enunciado del problema pregunta que si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz? La respuesta es no, ya que el punto (12, 15) no se encuentra en la región factible, no cumple todas las restricciones del problema.