# Tema 2. PROGRAMACIÓN LINEAL

Asignatura: **INVESTIGACIÓN OPERATIVA I**.

2° Grado en Estadística

## 1. Introducción

La Programación Lineal (PL) engloba los modelos de programación matemática donde todas las funciones que aparecen en el modelo son lineales. El auge de su desarrollo tuvo lugar a partir de la Segunda Guerra Mundial para resolver principalmente problemas de asignación de recursos. Las aplicaciones posteriores han sido muy numerosas y esto ha llevado a que los modelos de optimización lineal sean una de las herramientas básicas más utilizadas de la Investigación Operativa. Ejemplos de aplicaciones son: problemas de transporte y distribución de mercancías, planificación de personal, producción y mezcla de productos, cubrimientos, problemas de dietas, modelos de energía...

## 2. Formulación de modelos

El proceso de formulación o planteamiento del problema real a estudio es el primer paso, dependiendo del modelo que se construya se tendrá una u otra solución para el problema, por lo que una modelización errónea puede derivar en grandes pérdidas.

A la hora de formular un problema, lo primero que hay que determinar son las ***variables de decisión***, $x_j$, que son los factores sujetos a cambios cuyos valores pueden variar, o al menos hacerlo dentro de unos límites, según las características del problema. El objetivo será encontrar una solución óptima $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ para estas variables cumpliendo las condiciones establecidas del problema.

En segundo lugar, se formulan las ***restricciones*** que se expresan como ecuaciones o inecuaciones lineales en las variables de decisión y que representan la limitación en la disponibilidad de algún recurso:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq b_i \qquad o \qquad g_i(\mathbf{x}) \geq b_i \qquad o \qquad g_i(\mathbf{x}) = b_i$$

siendo $g_i$ una función lineal en $\mathbf{x}$ y $b_i$ un número real. Existen también las restricciones de signo de las variables, ($x_j \geq 0$), que en muchos casos se evitan en la formulación porque se suponen obvias, pero que deben de cumplirse si la solución del problema lo requiere.

Para terminar la modelización es necesario formular la ***función objetivo*** a optimizar, que será una función lineal en las variables y que generalmente representa los deseos del decisor de maximizar un beneficio o minimizar un coste:

$$max \quad z = f(\mathbf{x}) \qquad o \qquad min \quad z = f(\mathbf{x})$$

# 3. Solución gráfica de problemas bidimensionales

La resolución de problemas lineales con sólo dos variables de decisión, $x_1$ y $x_2$, se puede realizar gráficamente permitiendo de forma visual comprender conceptos y términos que se utilizan en problemas más complejos, como son los diferentes tipos de solución que se pueden encontrar: solución única, más de una solución óptima, la no existencia de solución y la no acotación.

Para encontrar la solución de un PL con dos variables, se dibuja un sistema de coordenadas cartesianas en el que cada variable está representada por un eje. Sobre los ejes anteriores se representan las restricciones del problema (incluyendo las de no negatividad), teniendo en cuenta que si una restricción es una inecuación define una región que será uno de los semiplanos limitados por la línea recta que se tiene al considerar la restricción como una igualdad.

La intersección de todas las regiones determina la ***región factible*** o espacio de soluciones que es un conjunto convexo (al ser las restricciones lineales). Para finalizar se determinan los ***puntos extremos*** de la región factible que son los candidatos a solución óptima. Se evalua el valor de estos puntos en la función objetivo y aquel o aquellos que la maximicen (o minimicen) serán la solución óptima del problema.

Gráficamente la solución se alcanza dibujando la función objetivo igualada a un valor cualquiera $f(\mathbf{x}) = z_0$ y trazando rectas paralelas de modo que al cortar en los puntos extremos de la región factible se mejore el valor de $z$.

**Tipos de soluciones**

- **Problema no factible**. Si la intersección de todas las restricciones es una región vacía, se dice que el problema no tiene solución y que es *infactible* o no factible, esto ocurre porque no se pueden encontrar valores de las variables de decisión que cumplan todas las restricciones.
- **Solución única**. El PL tiene solución única cuando el valor óptimo se encuentra en un único punto, vértice de la región factible.
- **Infinitas soluciones**. Si el valor óptimo se encuentra en dos vértices de la región factible, existen infinitas soluciones (varias en caso discreto), con el mismo valor en la función objetivo, correspondientes a los puntos del segmento que une ambos vértices.
- **Problema no acotado**. Ocurre cuando la región factible no está acotada y el óptimo se alcanza en el valor infinito.

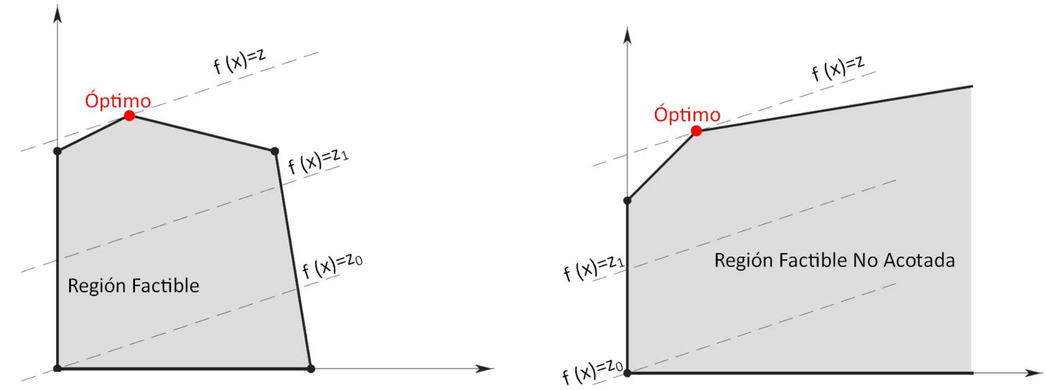



**Figura 1.** Única solución óptima

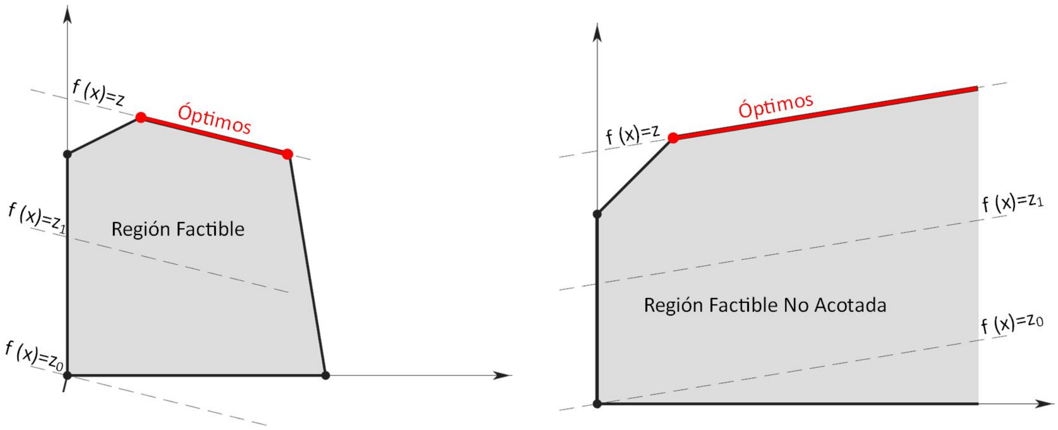



**Figura 2.** Múltiples soluciones óptimas

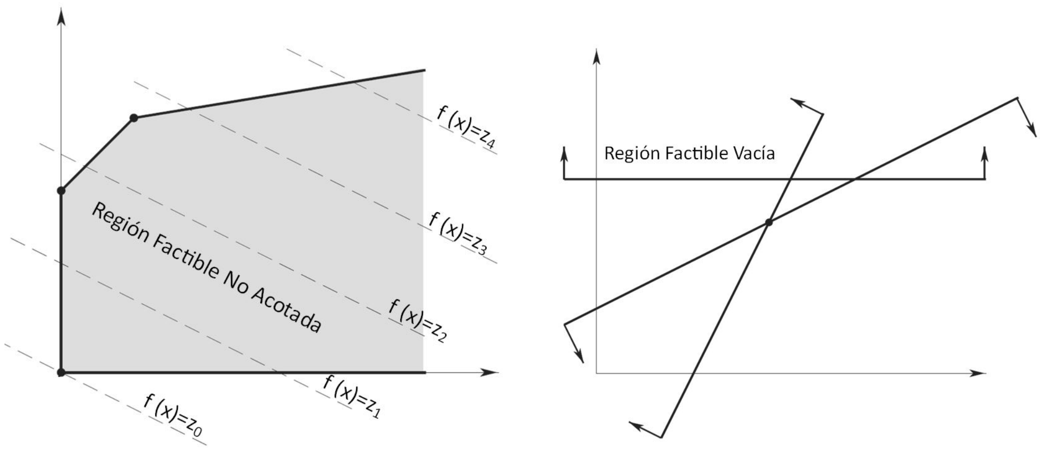



**Figura 3.** Problema no acotado y Problema no factible

# 4. El Método del Simplex

Desarrollado por Dantzig en 1947, es un procedimiento matemático para resolver los problemas de programación lineal. Se basa en la idea de que la solución óptima, si existe, se encuentra en al menos un punto extremo de la región factible. Como el conjunto de puntos extremos puede ser muy grande, este método no evalúa todos los puntos extremos, sino solamente un subconjunto reducido de él. El algoritmo parte de una solución básica factible y se mueve de una solución a otra de forma iterativa, mejorando continuamente el valor de la función objetivo.

## 4.1. Formulación algebraica

El objetivo es determinar el valor de las variables $x_1, ..., x_n$ tal que:

$$\begin{aligned}
\text{Max o Min} \quad z &= c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\
\text{sujeto a} \quad & \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n(\leq, \geq, =)b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n(\leq, \geq, =)b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n(\leq, \geq, =)b_m \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

donde $c_j$, $a_{ij}$ y $b_i$ son constantes conocidas, para todo $i = 1, 2, ..., m$, y $j = 1, 2, ...n$, siendo $m$ el número de restricciones y $n$ el número de variables. Si en el modelo anterior todas las restricciones son de igualdad, los términos independientes son positivos ($b_j \geq 0$) y hay que maximizar la función objetivo, se dice que el problema esta en *formato estándar*, y se representa en forma matricial:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{sujeto a} \quad & \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}$$

donde **A** es la matriz de **coeficientes tecnológicos**, **x** es el vector de **variables de decisión**, **b** es el vector de **términos independientes** correspondiente a los recursos, y **c** es el vector de **costes o beneficios** del problema lineal.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

Además, se asume la hipótesis de que el rango de la matriz A es $m$, siendo $m < n$, lo que equivale a que no existen ecuaciones redundantes y el sistema es compatible indeterminado, es decir, existen infinitas soluciones que cumplen las restricciones del problema y hay que encontrar aquella que optimice la función objetivo.

El Método del Simplex se aplica a problemas de programación lineal en formato estándar, donde la función objetivo es de maximizar, las restricciones son de igualdad y todas las variables y los términos independientes de las restricciones son no negativos. Por lo que el primer paso será modificar cualquier problema de programación lineal para expresarlo en su forma estándar.

⋄ *Cambio en el sentido de la optimización.*

Cualquier problema de minimizar se puede considerar equivalente a uno de maximizar y recíprocamente, basta cambiar el sentido de la optimización cambiando el signo de la función objetivo:

$$min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{es equivalente a} \quad max \quad z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

y recíprocamente, de forma que $z = -z'$

⋄ *Conversión de restricciones.*

Los términos independientes deben ser positivos, si existe $b_i < 0$, basta con cambiar de signo toda la restricción:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{se puede escribir} \quad \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \geq -b_i$$

Cualquier inecuación se puede convertir en una igualdad introduciendo una variable no negativa como suma o resta según el signo de la desigualdad:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{se puede escribir} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \text{se puede escribir} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - e_i = b_i$$

con $s_i, e_i \geq 0$, llamándose $s_i$ **variables de holgura** (representa la cantidad de recurso correspondiente que no se habría utilizado), y $e_i$ **variables de exceso**.

⋄ *Conversión de ecuaciones en inecuaciones.*

Cualquier igualdad lineal se puede sustituir por dos desigualdades lineales. Dada la restricción $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ es equivalente al conjunto:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

Multiplicando la segunda por -1, se pueden escribir las dos desigualdades con el mismo sentido.

⋄ *Conversión de variables no restringidas.*

Si $x_j$ es una variable no restringida en signo, (puede tomar valores positivos o negativos) se transforma poniéndola como diferencia de dos variables no negativas, $x'_j, x''_j \geq 0$

$$x_j = x'_j - x''_j$$

## 4.2. Soluciones básicas

Dado un problema de programación lineal en forma estándar:

$$\begin{array}{lcl} \text{Max} \quad z & = & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} & & \\ & & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

donde los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{x}$ son de dimensión $n \times 1$, $\mathbf{b}$ es un vector $m \times 1$ y $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$. Se supone que el rango de $A$ es $m$, con $m < n$, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones, siendo el objetivo del problema encontrar aquella que tenga el valor óptimo para la función objetivo.

**Definición**. Un vector $\mathbf{x}$ se dice que es **solución factible** del problema si satisface $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq 0$.

Toda matriz cuadrada $\mathbf{B}$ de orden $m$ no singular formada por un conjunto de vectores columna de $\mathbf{A}$ se denomina **base o matriz básica**. Como $\mathbf{B}$ es regular, la ecuación $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ se puede resolver de forma única, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ . El vector $\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})^T$ es una de las múltiples soluciones de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, siendo $\mathbf{x}_B$ las **variables básicas** de la solución actual. Las $n - m$ columnas de $\mathbf{A}$ que no forman parte de $\mathbf{B}$ se las agrupa en una matriz $m \times (n - m)$ denominada matriz no básica $\mathbf{N}$ (asociada a las variables no básicas), en correspondencia, a estas variables no básicas de la solución se las denota por $\mathbf{x}_N$. Quedando la matriz de coeficientes tecnológicos dividida en dos partes: $\mathbf{A}$=$\mathbf{B}|\mathbf{N}$, al igual que las variables $\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)^T$.

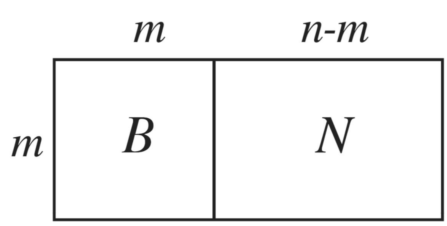



**Figura 4.** Descomposición de la matriz **A**

**Definición**. Una solución donde los valores de todas las variables básicas son no negativos se denomina **solución básica factible**. Si en una solución, una o más variables básicas tienen valor nulo, la solución se denomina **básica degenerada**.

**Definición**. Se llama **región factible**, $F$, al conjunto de todas las posibles soluciones factibles de un problema de programación lineal:

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0\}$$

si dicho conjunto es vacío el problema se dice que es *infactible* o *no factible*.

Denotando por $c_{B_i}$ al coeficiente de la variable básica $x_{B_i}$ en la función objetivo, el vector $\mathbf{c}_B = (c_{B_1}, ..., c_{B_m})$ está formado por los coeficientes en la función objetivo de las variables básicas. Dada una solución básica factible $\mathbf{x}_B$, el valor de la función objetivo es $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$.

**Definición**. Una solución factible se dice que es **solución óptima** y se representa por $\mathbf{x}^*$, si su valor en la función objetivo es mayor que el valor de cualquier solución factible (suponiendo la función objetivo de maximizar), es decir, si $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in F$. El valor de la función objetivo en la solución óptima se denomina **valor óptimo** y se representa por $z^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*$.

Un problema de programación lineal se dice *no acotado* si no tiene un valor óptimo finito. Y se dice que tiene soluciones múltiples o alternativas, si tiene más de una solución óptima.

**Teorema 1.** *El conjunto de soluciones factibles de un problema de programación lineal estándar es un conjunto convexo y cerrado. Más aún, es un poliedro.*

**Teorema 2.** *Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $m \times n$ con rango $m$, y $\boldsymbol{b}$ un vector $m \times 1$. Sea $F$ el poliedro convexo formado por los vectores $\mathbf{x}$ que verifican las restricciones del problema en forma estándar. Un vector $\mathbf{x}$ es una solución factible para el problema si y sólo si $\mathbf{x}$ es un punto extremo de la región factible, $F$.*

**Teorema 3.** *Dado el problema de programación lineal estándar (factible y acotado), el valor óptimo de la función objetivo se alcanza en un punto extremo de la región factible $F$.*

Una base $\mathbf{B}$ está formada por $m$ vectores $(\mathbf{B}_1, ..., \mathbf{B}_m)$ linealmente independientes y cada vector $\mathbf{a}_j$, que es un vector de dimensión $m \times 1$ de $\mathbf{A}$, se puede poner como combinación lineal de los vectores de la base. Es decir, si $\mathbf{a}_j$ es un vector no básico (que no está en la base $\mathbf{B}$), entonces

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\mathbf{B}_i = \mathbf{B}\mathbf{y}_j.$$

Al ser $\mathbf{B}$ no singular, también se puede escribir $\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$, con $\mathbf{y}_j^T = (y_{1j}, ..., y_{mj})$, donde $y_{ij}$ es un escalar en el que el subíndice i se refiere al vector columna $\mathbf{B}_i$ de $\mathbf{B}$ y el $j$ al vector columna $\mathbf{a}_j$ de $\mathbf{A}$, (si $\mathbf{B}$ es la matriz identidad, entonces $\mathbf{y}_j = \mathbf{a}_j$ para todo $j$). Otro escalar de interés es $\mathbf{z}_j$ que está asociado a cada vector $\mathbf{a}_j$ de $\mathbf{A}$, y se define como

$$\mathbf{z}_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}c_{B_i}$$

## 4.3. Pasos del Método Símplex

El Método Símplex es un algoritmo mediante el cual partiendo de una solución básica factible inicial se busca otra solución básica factible adyacente (puntos extremos del espacio de soluciones), mejorando o por lo menos no empeorando el valor de la función objetivo.

Paso 0. Iniciar la búsqueda con una solución básica factible (punto extremo).

Paso 1. Determinar si el cambio a una solución básica factible adyacente puede mejorar el valor del objetivo. Si es así, ir al paso siguiente. En caso contrario, la solución es óptima.

Paso 2. Determinar la solución básica factible adyacente que proporcione una mayor mejora en el valor de la función objetivo. Volver al Paso 1 y repetir el proceso hasta alcanzar una solución óptima o bien se tenga un problema que sea infactible o no acotado.

Regla de la variable de salida. Dada la solución básica factible $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}b$, si el vector columna $\mathbf{y}_j$ de fuera de la base tiene $y_{ij} > 0$ para algún $i$, entonces puede entrar en la base en lugar de un vector $\mathbf{B}_k$ de la base que verifique

$$\frac{\bar{b}_k}{y_{kj}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}}, y_{ij} > 0 \right\}$$

**Teorema 4. Optimalidad.** *Dada la solución básica factible $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, con un valor para la función objetivo de $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$, la actual solución es óptima si $z_j - c_j \geq 0$ para la columna $\boldsymbol{y}_j$ de $\boldsymbol{A}$ (z de maximizar). Si el problema es de minimización la condición $z_j - c_j \leq 0$ para todo $j$ indicará la optimalidad.*

Al término $z_j - c_j$ se le llama **coste reducido** de la variable $x_j$ e indica cuánto cambia el objetivo si la variable no básica $x_j$ se incrementa de 0 a 1.

**Corolario.** *La solución básica factible $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ es una solución óptima única si $z_j - c_j > 0$ para toda columna $\boldsymbol{y}_j$ de fuera de la base.*

**Teorema 5. Mejora de la solución.** *Sea una solución básica factible $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, con un valor para el objetivo $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$. Si para un vector $\mathbf{y}_j$ no perteneciente a la base es $z_j - c_j < 0$ con al menos un $y_{ij} > 0$, entonces la sustitución por $\boldsymbol{y}_j$ de un vector $\mathbf{B}_j$ de $\mathbf{B}$ proporciona una nueva solución básica factible con al menos el mismo valor para la función objetivo.*

Regla de la variable de entrada. Dadas las condiciones de mejora, la variable de entrada en la base será aquella con el $z_j - c_j$ más negativo, que será la que más incremente el valor de la función objetivo. En caso de empate se puede elegir uno arbitrariamente.

**Teorema 6. Óptimos alternativos.** *Dada una solución básica factible $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, si para algún vector $\mathbf{a}_j$ de fuera de la base es $z_j - c_j = 0$, el problema tiene infinitas soluciones óptimas.*

Como se ha visto, en la fase inicial del método del símplex se necesita disponer de una solución básica factible, siendo conveniente que dicha solución inicial se pueda encontrar de una manera rápida. Para resolver este inconveniente se suman **variables artificiales** $a_i > 0$ a las restricciones que originalmente fueran igualdades y a aquellas con signo $\geq$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \geq b_p \quad \text{pasará a ser} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j - e_p + a_p = b_p$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{qj}x_j = b_q \quad \text{pasará a ser} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{qj}x_j + a_q = b_q$$

Las variables artificiales se han añadido como un artificio para poder iniciar de manera sencilla el método del símplex, lo deseable será que estas variables tomen valor cero para que no aparezcan en la solución óptima.

**Teorema 7. Infactibilidad.** *Dada una solución básica factible* $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, *supuesto que* $z_j - c_j \geq 0$ *para todo vector* $\mathbf{y}_j$, *el problema es infactible si alguna de las variables en* $\mathbf{x}_B$ *es artificial con valor positivo.*

La infactibilidad de un problema se interpreta como que los recursos del sistema no son suficientes para satisfacer las demandas o requisitos planteados.

**Teorema 8. No acotación.** *Dada la solución básica factible* $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, *si para algún vector columna* $\mathbf{y}_j$ *no básico es* $z_j - c_j < 0$ *con* $y_{ij} \leq 0$, $\forall i$, *el problema es no acotado.*

Por otra parte, si $z_j - c_j = 0$ para un vector $\mathbf{y}_j$ de fuera de la base y ninguno de los coeficientes del vector $\mathbf{y}_j$ asociado es positivo, entonces se dice que hay un *rayo óptimo.* En tales casos se puede afirmar que hay puntos para los que el valor del objetivo es igual a un valor óptimo finito, pero sus coordenadas se pueden hacer arbitrariamente grandes. Diremos que el problema es no acotado o que tiene un rayo óptimo.

## 4.4. Resolución por tablas

El Método del Símplex es un proceso iterativo que comienza con una solución básica factible, partiendo de la forma estándar (maximización) y se mueve a una solución básica factible adyacente con mayor o igual valor para el objetivo, teniendo en cada iteración alguna de las indicaciones de mejora, optimalidad, soluciones óptimas alternativas, no acotación o infactibilidad. Las iteraciones se expresan mediante tablas para facilitar el proceso, (existen diversas variantes de las mismas).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $c_1$ | ... | $c_n$ | |
| | | $x_1$ | ... | $x_n$ | |
| $\mathbf{c}_B$ | **VB** | $z_1 - c_1$ | ... | $z_n - c_n$ | $z$ |
| $c_{B_1}$ | $x_{B_1}$ | $y_{11}$ | ... | $y_{1n}$ | $\bar{b}_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | ... | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $c_{B_m}$ | $x_{B_m}$ | $y_{m1}$ | ... | $y_{mn}$ | $\bar{b}_m$ |

La información que se muestra en la tabla es la siguiente:

- La columna $\mathbf{c}_B$ está formada por los coeficientes de las variables básicas de la tabla en la función objetivo.
- La columna **VB** contiene las variables básicas de cada paso.
- La última columna recoge los valores de las variables básicas en cada tabla $\bar{b}$ y el valor de la función objetivo en cada paso $z$.
- En la parte superior aparecen todas las variables, $x_j$ incluidas las de holgura, exceso y artificiales. Sobre ellas sus correspondientes coeficientes $c_j$ en la función objetivo.
- Los valores $z_j - c_j$ son los costes reducidos.
- Los elementos interiores son los vectores columna $y_j$ asociados a cada una de las variables.

Una versión de la tabla anterior más resumida que suele utilizarse frecuentemente es la siguiente:

| $max$ | $z$ | $x_1$ | ... | $x_n$ | $Ld$ | $VB$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_0$ | 1 | $z_1 - c_1$ | ... | $z_n - c_n$ | $\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$ | $z$ |
| $R_1$ | 0 | $y_{11}$ | ... | $y_{1n}$ | $\bar{b}_1$ | $x_{B_1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | ... | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $R_m$ | 0 | $y_{m1}$ | ... | $y_{mn}$ | $\bar{b}_m$ | $x_{B_m}$ |

En la cual se han eliminado los coeficientes de las variables en la función objetivo, apareciendo una primera columna que va marcando las filas o “renglones”de la tabla, que se usarán para marcar las cuentas de cada pivotaje, y donde se incluye el valor de la función objetivo, z, como una variable más del problema.

Una vez construida la tabla se puede aplicar el Algoritmo del Símplex tal y como se describe:

Paso 0. Construir la tabla inicial del problema de maximización.

Paso 1. Si hay algún indicador $z_j - c_j < 0$ (*posibilidad de mejora*), ir al Paso 3. Si todos $z_j - c_j \geq 0$, ir al Paso 2

Paso 2. Si todos $z_j - c_j \geq 0$ y no hay variables artificiales en la base con valor positivo, la actual solución es óptima (*optimalidad*). Por el contrario, si hay alguna variable artificial en la base con valor positivo, el problema es infactible (*infactibilidad*) y parar.

Paso 3. Si para algún valor indicador $z_j - c_j < 0$ su vector asociado $\mathbf{y}_j \leq 0$, el problema es no acotado (*no acotación*). En otro caso, es posible la mejora e ir al Paso 4.

Paso 4. *Variables de entrada y salida*: Seleccionar como variable de entrada aquella con el valor más negativo de $z_j - c_j$, sea $x_k$ (por lo que $k$ será la columna pivote). Seleccionar como variable de salida aquella que haga mínima la razón $\theta_i = \{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}, y_{ik} > 0\}$ para cada fila. Este cociente mínimo indica la restricción más restrictiva en términos de la variable de entrada. El criterio de salida se basa en encontrar la variable básica que limita más la mejora de la función objetivo. La variable básica que tenga la restricción más restrictiva en relación con la variable de entrada se elige para salir de la base. Si el valor mínimo es $\theta_r$, ($r$ es la fila pivote), el elemento $y_{rk}$ es el pivote de la tabla.

Paso 5. *Pivotaje*: Se construye la nueva tabla del símplex sustituyendo la variable básica $x_{B_r}$ de salida por la nueva variable básica $x_r$, y $c_{B_r}$ por $c_r$. La fila $r$ de la nueva tabla se obtiene dividiendo la fila r de la tabla precedente por el pivote $y_{rk}$ y la nueva columna $k$ se forma con ceros salvo el lugar $(r,k)$ en el que se pone un 1. Los demás valores de la tabla (denotados por$\widehat{\ }$) se obtienen de:

$$\widehat{y}_{ij} = y_{ij} - p, \quad \widehat{b}_{x_{B_i}} = b_{x_{B_i}} - p, \quad \widehat{z}_j - \widehat{c}_j = z_j - c_j - p, \quad \widehat{z} = z - p$$

donde $p = \dfrac{e_{rj}e_{ik}}{y_{rk}}$, $(i \neq r)$, donde $e_{rj}$ es el elemento en la fila pivote de la columna $j$ y $e_{ik}$ el de la fila $i$ en la columna pivote.

Obtenida la nueva tabla, volver al paso 1.

Es decir, si se tiene la siguiente tabla antes de pivotar:

| | $x_{B_1}$ | $\dots$ | $x_{B_r}$ | $\dots$ | $x_{B_m}$ | $\dots$ | $x_j$ | $\dots$ | $x_k$ | $\dots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | $\dots$ | 0 | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $z_j - c_j$ | $\dots$ | $z_k - c_k$ | $\dots$ | $\mathbf{c}_B\overline{\mathbf{b}}$ |
| $x_{B_1}$ | 1 | $\dots$ | 0 | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $y_{1j}$ | $\dots$ | $y_{1k}$ | $\dots$ | $\overline{b}_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_{B_r}$ | 0 | $\dots$ | 1 | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $y_{rj}$ | $\dots$ | $y_{rk}$ | $\dots$ | $\overline{b}_r$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_{B_m}$ | 0 | $\dots$ | 0 | $\dots$ | 1 | $\dots$ | $y_{mj}$ | $\dots$ | $y_{mk}$ | $\dots$ | $\overline{b}_m$ |

siendo la variable de entrada: $z_k - c_k = \min\limits_{j \notin B}\{z_j - c_j\} \to x_k$

y la variable de salida: $\dfrac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = \min\limits_{1 \le i \le m} \left\{ \dfrac{\overline{b}_i}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right\} \to x_{B_r}$.

Después de pivotar la tabla quedaría:

| | $x_{B_1}$ | $\dots$ | $x_{B_r}$ | $\dots$ | $x_{B_m}$ | $\dots$ | $x_j$ | $\dots$ | $x_k$ | $\dots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | $\dots$ | $\frac{z_k - c_k}{y_{rk}}$ | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $z_j - c_j - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} y_{rj}$ | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $c_B\overline{b} - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}}\overline{b}_r$ |
| $x_{B_1}$ | 1 | $\dots$ | $-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}$ | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $y_{1j} - \frac{y_{1k}}{y_{rk}} y_{rj}$ | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $\overline{b}_1 - \frac{y_{1k}}{y_{rk}}\overline{b}_r$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_k$ | 0 | $\dots$ | $\frac{1}{y_{rk}}$ | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $\frac{y_{rj}}{y_{rk}}$ | $\dots$ | 1 | $\dots$ | $\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_{B_m}$ | 0 | $\dots$ | $-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}$ | $\dots$ | 1 | $\dots$ | $y_{mj} - \frac{y_{mk}}{y_{rk}} y_{rj}$ | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $\overline{b}_m - \frac{y_{mk}}{y_{rk}}\overline{b}_r$ |

## 5. Método de penalización o de la M grande

El algoritmo del símplex parte de una solución inicial que se construye con una primera base canónica que permite iniciar el método de forma sencilla.

Para obtener dicha base (matriz identidad), se añaden al problema variables artificiales (restricciones $=$ y $\geq$), cuyo valor debe ser nulo en la solución final (salvo que el problema sea no factible).

Por lo que parece deseable sacar de la base lo antes posible dichas las variables artificiales, para que su valor sea cero en la solución final.

Una forma de llevar a cero estas variables consiste en asignarles como coeficiente en la función objetivo un valor negativo muy grande (función objetivo de maximizar) que se representa por $-M$ de manera que sea demasiado costoso mantener esas variables en la base (en caso de minimizar las variables artificiales llevarían coeficiente positivo M).

Este procedimiento recibe el nombre de **Método de la M grande** o **Método de Penalización**, el cual se resuelve siguiendo los pasos del algoritmo del símplex. Teniendo en cuenta que si en la solución óptima aparece una variable artificial con valor no nulo en la base, el problema es infactible.

## 6. Método de las dos Fases

El Método de Penalización puede tener problemas de redondeo en el cálculo computacional al tener que proporcionar un valor a $M$. Otro procedimiento alternativo, cuando es necesario el uso de variables artificiales para obtener la primera base **B=Id**, es el **Método de las dos Fases**.

- *Fase 1.* En este primer paso, usando las restricciones del problema, se cambia la función objetivo por una nueva función artificial que minimice la suma de todas las variables artificiales y se resuelve por el algoritmo del símplex. Si el valor de la solución final de esta función objetivo es cero, se tiene una solución inicial para el problema original y se pasa a la Fase 2, en otro caso el problema es infactible.

- *Fase 2.* En esta segunda fase se aplica el método del símplex al problema original utilizando la solución básica factible obtenida en la primera fase como solución inicial. Si al final de la Fase 1 hay variables artificiales en la base (con valor 0), se puede resolver el problema original asignándole coeficiente nulo a esas variables en la función objetivo original.

  Al principio de la Fase 2 se eliminan de la tabla del símplex las columnas correspondientes a las variables artificiales que no estén en la base al final de la Fase 1.

# 7. Tabla final conocidas las variables básicas óptimas

Los cálculos anteriores del Método del Símplex permiten obtener la tabla final del Símplex, sin tener que realizar todas las iteraciones del método, si se conocen las variables básicas de la solución óptima.

Partiendo del problema en forma estándar, sea:

**VB**, el conjunto de las variables básicas de la tabla óptima.

$\mathbf{x}_B$ el vector $m \times 1$ de **VB**.

**B**, la matriz formada por las columnas de las **VB** en el problema original.

$\mathbf{a}_j$ el vector $m \times 1$ que se corresponde con la columna de la variable j-ésima de las restricciones del problema.

**b** el vector $m \times 1$ de términos independientes del problema inicial.

$\mathbf{c}_B$ el vector $1 \times m$ de los coeficientes de las **VB** en la función objetivo.

$\mathbf{c}_{NB}$ el vector $1 \times (n-m)$ de los coeficientes de las variables no básicas en la función objetivo.

Conocidas las **VB** asociadas a cada restricción (hay que tener en cuenta el orden), se sabe que:

- Todas las **VB** tienen coeficiente 0 en el $R_0$, y forman la matriz identidad en el resto de filas o renglones, identificando la unidad, la correspondiente variable básica de cada renglón.
- El coeficiente de una variable no básica $x_j$ en el $R_0$ es $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$.
- El coeficiente de una variable de holgura $s_i$ en el $R_0$ es el i-ésimo elemento de $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$.
- El coeficiente de una variable de exceso $e_i$ en el $R_0$ es el i-ésimo elemento de $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ cambiado de signo.
- El coeficiente de una variable artificial $a_i$ en el $R_0$ es M más el i-ésimo elemento de $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$, suponiendo maximización (si la función objetivo es de minimizar es -M).
- La inversa $\mathbf{B}^{-1}$ se encuentra en la tabla óptima del símplex en las columnas de las VB iniciales del problema.
- La columna de una variable no básica $x_j$ en la tabla óptima es $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$.
- El lado derecho del $R_0$ tiene el valor de la función objetivo para la solución óptima, $z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. El resto de valores de la columna de los lados derechos, Ld, son los valores de las variables básicas correspondientes a cada renglón o fila $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. Las variables no básicas tiene valor nulo en la solución óptima.

# 8. Anexo. Nociones básicas sobre conjuntos convexos

**Definición**. Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Se llama **segmento cerrado** que une $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

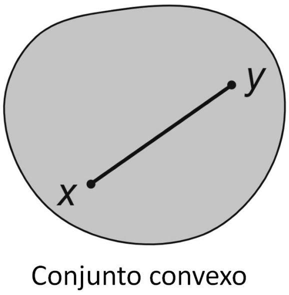
$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

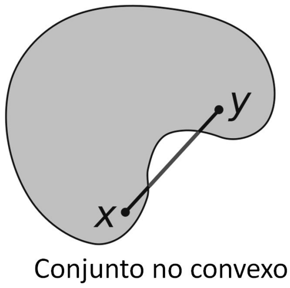
**Definición**. Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Se llama segmento **abierto** que une $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ al subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 < \lambda < 1\}$$

**Definición**. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. Se dice que $A$ es **convexo** si para todos $\mathbf{x}$ , $\mathbf{y} \in A$, se cumple que el segmento cerrado está incluido en A, $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq A$

Por convenio el conjunto vacío ($\emptyset$) se considera convexo y si $A = \{\mathbf{x}\}$ es convexo.




**Definición**. Sean $\mathbf{x}_1$, ..., $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ Se llama **combinación lineal convexa** de $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_s$ a todo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ tal que: $\mathbf{z} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_s\mathbf{x}_s$ donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}^+$ y siendo $\lambda_1 + \ldots + \lambda_s = 1$

**Proposición**. Sea $S \in \mathbb{R}^n$ un convexo no vacío y sean $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_s \in S$. Cualquier combinación lineal convexa de $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_s$ pertenece a $S$.

**Proposición**. El conjunto de combinaciones lineales convexas de un conjunto de puntos Sean $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.

**Definición**. Sea $S$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se denomina **envolvente convexa** de $S$, $C_o(S)$, a la intersección de todos los convexos que contienen a $S$.

Se cumple que si $S$ es convexo entonces $C_o(S) = S$ y que si $S$ está formado por un número finito de puntos, $C_o(S)$ es precisamente el conjunto de combinaciones lineales convexas de esos puntos.

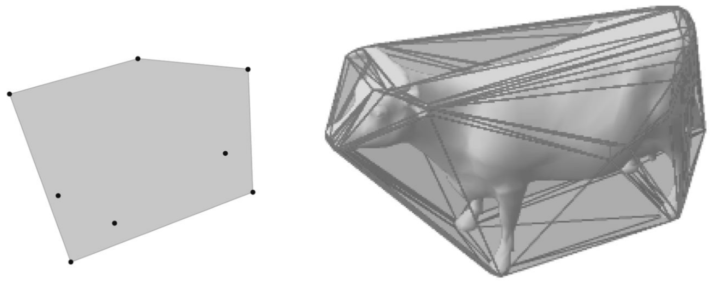


**Figura 5.** Ejemplos de envolvente conexa

**Proposición**. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Sea

$$T = \left\{ \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_s \mathbf{x}_s \ : \ \begin{array}{l} \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}^+ \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = 1 \\ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s \in A \end{array} , \forall s \in \mathbb{N} \right\}$$

Entonces $C_o(A) = T$.

**Definición**. Se llama **poliedro convexo** a la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos.

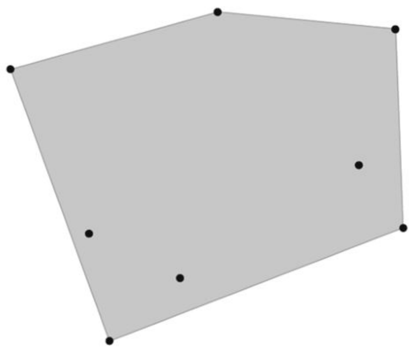


**Figura 6.** Poliedro convexo

**Definición**. Sea $S$ un convexo de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in S$. Se dice que $\mathbf{x}$ es un **punto extremo o vértice** de $S$ si no puede expresarse como combinación lineal convexa de dos puntos distintos de $S$, es decir si no existen dos puntos distintos $x_1$ y $x_2$ en $S$ tal que $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ para algún $\lambda \in (0, 1)$. Por lo tanto, los puntos extremos no está en el interior de ningún segmento que une puntos de $S$.

Un punto extremo de $S$ está en la frontera de $S$, pero no todos los puntos frontera de $S$ son extremos. Dos puntos extremos $x_1, x_2 \in S$, con $x_1 \neq x_2$, son puntos extremos adyacentes, si el segmento que los une es una arista del conjunto convexo $S$.

**Teorema de Krein-Milman**. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, cerrado y acotado. Entonces, $A$ contiene a sus puntos extremos y además es la envolvente convexa de los mismos.

**Teorema de Carátheodory**. Sea $S$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $C_o(S)$ su envolvente convexa. Entonces todo punto de $C_o(S)$ puede expresarse como combinación lineal convexa de $n+1$ puntos de $S$.

A partir de este Teorema se deduce que todo punto de un poliedro convexo de $\mathbb{R}^n$ puede expresarse como combinación lineal convexa de $n+1$ de los vértices del poliedro.

**Definición**. Se llama hiperplano $H$ de vector característico $a \in \mathbb{R}^n$, con $a \neq 0$ al conjunto $H = \{\mathbf{x}\mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$, con $b \in \mathbb{R}$, Un hiperplano es el conjunto de soluciones de una ecuación lineal en $\mathbb{R}^n$.

**Definición**. Dado un hiperplano $H$, se llama **semiespacios cerrados** de borde $H$ a los conjuntos:

$$H_+ = \{\mathbf{x}\mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b\}$$
$$H_- = \{\mathbf{x}\mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq b\}$$

**Definición**. Un **politopo** es un conjunto formado por la intersección de un número finito de semiespacios cerrados.

**Definición**. Un **politopo cónico** es un conjunto formado por la intersección de un número finito de semiespacios cerrados que pasan por un punto.

Por lo que un poliedro es un politopo acotado y no vacío.

Es fácil comprobar que la intersección de conjuntos convexos es convexa y que, por lo tanto, los politopos y los poliedros son conjuntos convexos.

Si un politopo es un poliedro, cualquier punto se puede expresar como combinación convexa de los vértices o puntos extremos.