

Planificación de proyectos.

Algoritmos CPM y PERT

Asignatura: **Investigación Operativa II**, 2º Grado en Estadística

Autor: Miguel Rodríguez Rosa

Se llama **proyecto** a un conjunto de actividades o tareas diferenciadas, que se realizan en un orden determinado, es decir, cualquier trabajo que se pueda dividir en partes, las cuales se realizan en orden, da lugar a un proyecto.

La planificación de proyectos consiste en llevar a cabo el estudio para determinar cuándo realizar cada una de las actividades de que consta el proyecto, de forma que se realice en el menor tiempo posible. El método **CPM** (Critical Path Method) y el método **PERT** (Program Evaluation and Review Technique) permiten decidir cuál es el orden óptimo de realización de las actividades del proyecto y su tiempo mínimo. El **CPM** se usa cuando la duración de las actividades es un dato **conocido** y el **PERT** cuando es un valor **incierto**.

1. Algoritmo CPM

Dado un proyecto, hay que tener definidas las actividades que lo forman, el tiempo que requieren para llevarlas a cabo y el orden de precedencia entre ellas. El proyecto se representa mediante una red teniendo en cuenta la relación de precedencia, donde los arcos representan las actividades (**red AOA**, *Activity On Arc*), el peso del arco es el tiempo que se tarda en realizar cada una de ellas y los nodos representan instantes temporales (comienzo o fin de actividades).

Es necesario, como en toda red de flujos un nodo origen y uno final, y se numeran los nodos de menor a mayor. Hay que tener en cuenta que dos nodos no pueden estar conectados por más de un arco, añadiendo en caso necesario nodos y actividades artificiales (ficticias) para facilitar la interpretación del orden de precedencia entre actividades.

Asociados a cada nodo de la red se definen:

- $ET(j)$, el **tiempo de evento temprano** (*Early Time*), como el tiempo más temprano en que puede ocurrir el evento i .
- $LT(j)$, el **tiempo de evento tardío** (*Late Time*), como el tiempo más tardío en que puede ocurrir el evento i sin retrasar la terminación del proyecto.

Sea c_{ij} la duración de la actividad que va del nodo i al j (suponemos los nodos ordenados, o sea, $i < j$), siendo 1 el nodo origen y n el nodo final.

- Cálculo de los $ET(j)$:
 - Nodo $j = 1$:
 $ET(1) = 0$, porque es el momento en que comienza el proyecto.
 - Nodo $j = 2, \dots, n$:

$$ET(j) = \max_{i=1, \dots, n} \{ET(i) + c_{ij}\}, \quad \forall \text{ nodo } i \text{ predecesor de } j.$$
- Cálculo de los $LT(i)$:
 - Nodo $i = n$:
 $LT(n) = ET(n)$, porque es el momento en que acaba el proyecto.
 - Nodo $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$:

$$LT(i) = \min_{j=1, \dots, n} \{LT(j) - c_{ij}\}, \quad \forall \text{ nodo } j \text{ sucesor de } i.$$
- La duración total del proyecto es $ET(n) = LT(n)$.

Conocidos los tiempos más temprano y tardío de comienzo de cada actividad, asociadas a cada una de ellas se pueden definir:

- $FF(i, j)$, la **flexibilidad libre** de una actividad (*Free Float*), como el tiempo que se puede retrasar la actividad sin retrasar el inicio de cualquier actividad posterior.

$$FF(i, j) = ET(j) - ET(i) - c_{ij}.$$
- $TF(i, j)$, la **flexibilidad total** de una actividad (*Total Float*), como el tiempo que se puede retrasar la actividad sin retrasar la terminación del proyecto.

$$TF(i, j) = LT(j) - ET(i) - c_{ij}.$$

Se llama **actividad crítica** a aquella que no puede modificar su comienzo o duración sin afectar a la duración total del proyecto. Son las que tienen flexibilidad total nula. Se llama **camino crítico** al formado por las actividades críticas, que corresponde a un camino entre el nodo origen y el final, dando la duración óptima del proyecto.

2. Algoritmo PERT

En muchas situaciones no se conoce con exactitud la duración de las actividades, ya que pueden depender de factores no controlables (agentes externos), en estos casos se supone que las duraciones de las actividades son variables aleatorias siguiendo una distribución.

Sea T_{ij} la variable aleatoria que define la duración de la actividad que va del nodo i al j . Para desarrollar la metodología PERT es necesario conocer tres tiempos sobre las mismas:

- a , la duración más **optimista** o mínima de la actividad.
- m , la duración más **probable** o frecuente.
- b , la duración más **pesimista** o máxima de la actividad.

En la mayoría de las situaciones la distribución de probabilidad de T_{ij} es una beta, y conocidos los tiempos anteriores se estima la media y la varianza de dichas variables:

- $E [T_{ij}] = \frac{a + 4m + b}{6}$
- $Var (T_{ij}) = \frac{(b - a)^2}{36}$

Conocido el tiempo medio de duración de cada actividad, $E [T_{ij}]$, después de haber aplicado el método CPM usando el dato de m como la duración de las actividades para obtener el camino crítico, CP , la duración total esperada en este caso es $E [CP] = \sum_{i \rightarrow j} E [T_{ij}]$, y la varianza de la

duración total será $Var (CP) = \sum_{i \rightarrow j} Var (T_{ij})$ para toda actividad crítica $i \rightarrow j$.

Por el Teorema Central del Límite, podemos aproximar la duración de CP por una distribución normal $\mathcal{N} (E [CP], Var (CP))$, por tanto, podemos tipificar la duración total, y se distribuirá como una normal estándar: $\frac{CP - E [CP]}{\sqrt{Var (CP)}} = Z \cong N (0, 1)$, lo que nos permitirá conocer:

- la probabilidad de terminar el proyecto antes de t unidades de tiempo.
- el tiempo de antelación con el que hay que comenzar el proyecto para tener una confianza γ de completarlo a tiempo.

mediante $P (CP \leq t) = P \left(Z \leq \frac{t - E [CP]}{\sqrt{Var (CP)}} \right) = \gamma$.