Flujo máximo.
Algoritmo de Ford-Fulkerson

Asignatura: **Investigación Operativa II**, 2° Grado en Estadística

Autor: Miguel Rodríguez Rosa

El problema del flujo máximo consiste en determinar el **mayor** número de unidades que pasan por toda la red desde un nodo fuente (el origen, de donde parte todo el flujo) a un nodo sumidero (el destino, a donde llega todo el flujo), usando los arcos en un sentido dado (**grafo dirigido**), sobre los cuales existe una limitación de capacidad (**grafo ponderado**), con la restricción de que en cada nodo intermedio se cumpla la **Ley de Conservación de Flujo**, mediante la cual el flujo que llega a cada nodo tiene que coincidir con el flujo que sale de él.

Se puede resolver por programación lineal, definiendo las variables x_{ij} como el número de unidades (la cantidad de flujo) que pasan del nodo i al nodo j, siendo n el número de nodos, F el nodo fuente, S el nodo sumidero, f el flujo total que pasa por la red, y c_{ij} la capacidad máxima a la que está limitado el arco que va del nodo i al nodo j.

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & z = f & \\
s.\,a. & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{Fj} = f & \text{(el flujo es todo lo que sale del nodo fuente)} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{iS} = f & \text{(el flujo es todo lo que llega al nodo sumidero)} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} x_{kj} & \text{(Ley de Conservación de Flujo para el nodo } k\text{)} \quad \forall \text{ otro nodo } k \\
& 0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} & \text{(limitación de capacidad para el arco de } i \text{ a } j\text{)} \quad \forall \text{ arco } i \to j
\end{array}
$$

A continuación se presenta el algoritmo más usual para realizar la búsqueda de un flujo máximo.

1. Algoritmo de Ford-Fulkerson

Suponiendo que las capacidades de los arcos entre los pares de nodos son **positivas**, el algoritmo de Ford-Fulkerson encuentra el número de unidades que deben pasar por cada arco para alcanzar el flujo máximo entre el **nodo fuente** y el **nodo sumidero**. Durante el proceso, los arcos se marcan con etiquetas temporales, que representan si se puede aumentar o disminuir el número de unidades en cada arco y mejorar el flujo encontrado hasta el momento entre el nodo fuente y el sumidero, y se repite hasta llegar a una iteración en la que esto ya no sea posible.

La idea es marcar cada arco como D (directo) si es posible aumentar el número de unidades que pasan por él (porque no se sobrepasa la capacidad máxima), y/o como I (inverso) si es posible disminuir el número de unidades que pasan por él (porque es una cantidad positiva).

- Iteración $k = 0$:
  - $x_{ij} = 0$ para todo arco $i \to j$.
  - Se marcan solamente como D todos los arcos (puesto que todavía ningún arco sobrepasa su capacidad máxima, y ninguno tiene $x_{ij} > 0$).
- Iteración $k = 1, 2, \ldots$:
  - Se busca un camino no dirigido que una el nodo fuente con el nodo sumidero, pudiendo usar:
    - El arco $i \to j$ en su sentido si está etiquetado como D.
    - El arco $i \to j$ en su sentido contrario si está etiquetado como I.
  - Si no es posible encontrar dicho camino, es decir, si no es posible llegar del nodo fuente al nodo sumidero teniendo en cuenta las dos normas anteriores, se deja de iterar el algoritmo de Ford-Fulkerson.
  - Si sí ha sido posible encontrar dicho camino:
    - Si los arcos $i \to j$ que se han usado han sido todos en su sentido:
      - Se calcula $K = \min\limits_{i \to j} \left\{ c_{ij} - x_{ij} \right\}$, es decir, el mínimo de lo que se puede aumentar a todos los arcos usados sin sobrepasar sus capacidades máximas.
      - Se aumentan en K unidades dichos arcos.
    - Si ha habido arcos $i \to j$ que se han usado en su sentido, y arcos $i' \to j'$ que se han usado en su sentido contrario:
      - Se calcula $K_1 = \min\limits_{i \to j} \left\{ c_{ij} - x_{ij} \right\}$, es decir, el mínimo de lo que se puede aumentar a todos los arcos usados en su sentido sin sobrepasar sus capacidades máximas.
      - Se calcula $K_2 = \min\limits_{i' \to j'} \left\{ x_{i'j'} \right\}$, es decir, el mínimo de lo que se puede disminuir a todos los arcos usados en su sentido contrario.
      - $K = \min \{K_1, K_2\}$.
      - Se aumentan en K unidades los arcos usados en su sentido.
      - Se disminuyen en K unidades los arcos usados en su sentido contrario.
    - Se marcan todos los arcos con nuevas etiquetas D y/o I según sus nuevas x_{ij}.
- Se repite el paso anterior hasta que se no sea posible encontrar un camino no dirigido que una el nodo fuente con el nodo sumidero, obteniendo así:
  - El número de unidades que pasan por cada arco, x_{ij}.
  - El flujo máximo de la red como $f = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{Fj} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{iS}$.