Problemas del Tema 2. Programación Lineal

INVESTIGACIÓN OPERATIVA I.

2° Grado en Estadística

2.1.- (Problema EBAU-Andalucía 2021. https://www.ebaumatematicas.com)

Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción. Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, plantea y resuelve el problema para determinar cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio sea máximo.

2.2.- (Problema EBAU-Aragón 2021. https://www.ebaumatematicas.com)

El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3 y 2 euros, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60 euros. Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo. Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

2.3.- Resolver gráficamente los siguientes problemas de programación lineal:

a) Maximizar: $z = x_1 + x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1 - x_2 \geq 5$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

b) Maximizar: $z = 4x_1 + x_2$
sujeto a:
$8x_1 + 2x_2 \leq 16$
$5x_1 + 2x_2 \leq 12$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

c) Maximizar: $z = -x_1 + 3x_2$
sujeto a:
$x_1 - x_2 \leq 4$
$x_1 + 2x_2 \geq 4$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

d) Maximizar: $z = 3x_1 + x_2$
sujeto a:
$2x_1 + x_2 \leq 6$
$x_1 + 3x_2 \leq 9$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

2.4.- Escribe el siguiente PL en formato estándar:

$$\begin{array}{rcl} \text{Min} \quad z & = & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a:} & & x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & & x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq -10 \\ & & x_1 + x_3 \leq 4 \\ & & x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3, \quad \text{sin restricción de signo} \end{array}$$

2.5.- Resolver mediante el algoritmo del simplex:

a) **Maximizar:** $z = 3x_1 + x_2$
sujeto a:
$2x_1 + x_2 \leq 6$
$x_1 + 3x_2 \leq 9$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

b) **Maximizar:** $z = 4x_1 + x_2$
sujeto a:
$8x_1 + 2x_2 \leq 16$
$5x_1 + 2x_2 \leq 12$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

c) **Maximizar:** $z = 2x_2$
sujeto a:
$x_1 - x_2 \leq 4$
$-x_1 + x_2 \leq 1$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

d) **Maximizar:** $z = x_1 + x_2$
sujeto a:
$x_1 + 5x_2 \leq 5$
$2x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

e) Conociendo las variables básicas de la tabla óptima, obtén la tabla óptima de los casos **a)** y **b)**

2.6.- Obtener la solución de los siguientes problemas de PL, conociendo las variables básicas de la tabla óptima:

a) **Maximizar:** $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$
sujeto a:
$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$
$8x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 40$
$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 16$
$x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0$
VB: $[s_1, x_3, x_1]$

b) **Maximizar:** $z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$
sujeto a:
$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$
$x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0$
VB: $[x_1, x_3, s_3]$

2.7.- Resolver por el Método de la M grande:

a) **Maximizar:** $z = x_1 + 2x_2$
sujeto a:
$4x_1 + x_2 \leq 12$
$x_1 + x_2 \geq 2$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

b) **Minimizar:** $z = x_1 + x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 1$
$4x_1 + 2x_2 \geq 6$
$x_1,\, x_2 \geq 0$

2.8.- Resolver por el Método de las dos fases:

a) **Minimizar:** $z = x_1 + x_2 + 4x_3$
sujeto a:
$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 20$
$3x_1 + x_3 = 14$
$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

b) **Maximizar:** $z = x_1 + 3x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 2$
$-x_1 + x_2 \leq 5$
$2x_1 + x_2 = 6$
$x_1,\ x_2 \geq 0$

2.9.- Resolver los siguientes problemas de programación lineal:

a) **Max:** $z = x_1 + x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1 - x_2 \geq 5$
$x_1,\ x_2 \geq 0$

b) **Min:** $z = 5x_1 - 3x_2$
sujeto a:
$2x_1 + x_2 \leq 5$
$-x_1 + x_2 \geq -8$
$x_1 \geq 0$
x_2 libre

c) **Max:** $z = 3x_1 - 2x_2$
sujeto a:
$x_1 + 2x_2 \geq 3$
$2x_1 - x_2 \geq -8$
$x_1,\ x_2 \geq 0$

2.10.- Obtener la solución de los siguientes problemas de PL, conociendo las variables básicas de la tabla óptima:

a) **Min:** $z = 4x_1 + x_2 + x_3$
sujeto a:
$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$
$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$
$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$
VB: $[x_3, x_2]$

b) **Max:** $z = 4x_1 + 8x_2$
sujeto a:
$2x_1 + 2x_2 \leq 10$
$-x_1 + x_2 \geq 8$
$x_1,\ x_2 \geq 0$
VB: $[x_2, a_2]$

c) **Min:** $z = x_1 - 2x_2$
sujeto a:
$x_1 + x_2 \geq 2$
$-x_1 + x_2 \geq 1$
$x_2 \leq 3$
$x_1,\ x_2 \geq 0$
VB: $[e_2, x_2, e_1]$

2.11.- Una empresa minera explota tres minas en Castilla y León. El mineral extraído se separa según si es de alto o bajo grado. La capacidad diaria de producción de cada mina, así como sus costes diarios de producción, son los que aparecen en la tabla:

	Ton/día mineral de alto grado	Ton/día mineral de bajo grado	Costes/ día en miles de euros
Mina I	4	4	20
Mina II	6	4	22
Mina III	1	6	18

La empresa se comprometió a entregar 54 toneladas de mineral de alto grado y 65 toneladas de bajo grado para la próxima semana. Plantea y resuelve el correspondiente problema de programación lineal que permita determinar el número de días que cada mina debe operar en la semana para que la empresa cumpla con sus compromisos con el menor coste total. ¿Cambia la solución anterior si la empresa solo trabaja cinco días a la semana?