ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Алгоритмы и модели вычислений.
Домашняя работа 6.

Георгий Никишин
Группа Б05-909

Задача 1.

Найти вероятность того, что случайный граф на n вершинах является простым циклом: найти ее предел при $n \to \infty$

Решение.

Найдем количество простых циклов на n вершинах. Рассмотрим произвольную вершину v из нашего множества вершин V. Она может быть соединена с одной любой вершиной из оставшихся, то есть с одной из $n-1$ вершин, добавляем выбранную вершину к v и продолжаем процесс. Третья вершина может быть выбрана уже $n-2$ способами и так далее. В итоге получим $(n-1)!$, но мы посчитали каждый простой цикл дважды, тогда всего простых циклов на n вершинах: $\frac{(n-1)!}{2}$. Теперь рассмотрим, сколько всего графов может быть на n вершинах. Всего возможных ребер: C_n^2, каждое из этих ребер может быть либо выбрано, либо не выбрано с одинаковой вероятностью, тогда всего графов на n вершинах: $2^{C_n^2}$. Тогда из определения классической вероятности получаем, что искомая вероятность есть:

$\frac{(n-1)!}{2^{C_n^2+1}}$

Задача 2.

Симметричную монетку бросают неограниченное число раз. Какая из последовательностей встретится раньше с большей вероятностью: POP или PPO?

Решение.

Изначально хочется сказать, что вероятности одинаковы, но это не так. Докажем это.

Представим последовательность выпавших орлов и решек как бесконечную прямую из P и O. Тогда рассмотрим произвольный отрезок длиной 2 символа на этой прямой он может быть равен (PP), (PO), (OO) или (OP). Тогда при сдвиге вправо возможны следующие ситуации:

(PP) $\to$ (PP) или (PO)

(PO) $\to$ (OP) или (OO)

(OO) $\to$ (OP) или (OO)

(OP) $\to$ (PP) или (PO)

(*) Все эти переходы просиходят с вероятностью $p = \frac{1}{2}$. Рассмотрим начало этой прямой. Рассмотрим вектор $\begin{pmatrix} PP \\ PO \\ OO \\ OP \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Запретим, случаи (POP) и (PPO). Тогда рассмотрим (*) в качестве матрицы перехода. Тогда :

$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Обозначим через z_n- n-ое рассматриваемое окно. Тогда $z_n = A^{n-1} z_1$ содержит вероятности встретить пары (PP), (PO), (OO), (OP) в позициях n и $n+1$, если до этого не было искомых последовательностей. Пусть теперь $e_1 = (1;0;0;0)$, $e_2 = (0;1;0;0)$, тогда вероятность встретить PPO на позициях, начиная с n-ной есть:

$p(\text{PPO})_n = \frac{1}{2} \cdot e_1 \cdot A^{n-1} \cdot z_1$

Аналогично:

$p(\text{POP})_n = \frac{1}{2} \cdot e_2 \cdot A^{n-1} \cdot z_1$

Тогда вероятность встретить PPO и POP на всей прямой есть:

$p(\text{PPO}) = \sum_{n=1}^{\infty} p(\text{PPO})_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot e_1 \cdot A^{n-1} \cdot z_1 = \frac{1}{2} e_1 \left(E - A\right)^{-1} = \frac{2}{3}$

$p(\text{POP}) = \sum_{n=1}^{\infty} p(\text{POP})_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot e_2 \cdot A^{n-1} \cdot z_1 = \frac{1}{2} e_2 \left(E - A\right)^{-1} = \frac{1}{3}$

Таким образом вероятность встретить последоваетльность вида PPO выше, чем вероятность встретить POP.

Задача 3.

В сумке лежат четыре монеты, каждая из которых при подбрасывании может приземлиться на любую из двух сторон. У одной из них орёл на обеих сторонах, у остальных трёх орел только на одной стороне. Монетку выбирают случайным образом и три раза последовательно подбрасывают. Какова вероятность того, что при четвертом подбрасывании снова выпадет орел, если при предыдущих попытках тоже выпадал орёл?

Решение.

Пронумеруем наши монетки. Пусть 1-имеет орлов с двух сторон, 2, 3, 4 - орла только с одной стороны. Тогда рассмотрим возможные варианты. Вытаскиваем 1, тогда возможен только орел. Вытаскиваем 2, 3, 4, тогда возможен как орел, так и решка. Всего получаем 7 вариантов, из которых нас устраивают 1-орел, 2-орел, 3-орел, 4-орел, в сумме получаем 4 подходящих варианта. Итого в соответствии с определением классической вероятности получаем, что вероятность выпадения орла на 4-ый раз есть $\frac{4}{7}$.

Задача 4.

При двух бросках игральной кости выпало ξ_1 и ξ_2, соответственно. Вычислите $\mathbf{E}\{max(\xi_1; \xi_2)\} + \mathbf{E}\{min(\xi_1; \xi_2)\}$

Решение.

Воспользуемся линейностью математического ожидания:
$\mathbf{E}\{max(\xi_1; \xi_2)\} + \mathbf{E}\{min(\xi_1; \xi_2)\} = \mathbf{E}\{max(\xi_1; \xi_2)\} + min(\xi_1; \xi_2)\} = \mathbf{E}\{\xi_1 + \xi_2\} = \mathbf{E}\{\xi_1\} + \mathbf{E}\{\xi_2\} = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 2 = 7$

Задача 5.

а) Доказать, что coRP $= \{\overline{A} | A \in$ RP$\}$

Решение.

Рассмотрим определение coRP, данное на семинаре: $L \in coRP$,. если $\exists M(x; r)$:

$$\begin{cases} P(M(x; r) = 1) = 1, & \text{если } x \in L \\ P(M(x; r) = 1) \leq \frac{1}{2}, & \text{иначе} \end{cases}$$

А также вспомним определение RP:

$$\begin{cases} P(M(x; r) = 1) \geq \frac{1}{2}, & \text{если } x \in L \\ P(M(x; r) = 1) = 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Рассмотрим машину Тьюринга, которая присутствует в определении RP. Она определяет все слова, которые не принадлежат языку и всегда выдает на них ноль. Тогда рассмотрим работу этой машины на языке $\overline{L}$, очевидно, что $\forall x \in \overline{L} \to M(x; r) = 0$, в силу определения RP. Поменяем нули и единицы для этой машины местами, тогда $\forall x \in \overline{L} \to M(x; r) = 1 \quad \Rightarrow P(M(x; r) = 1) = 1,$ если $x \in L$, также $P(M(x; r) = 1) \leq \frac{1}{2}$, если $x \notin \overline{L}$, что совпадает с определением coRP с семинара, таким образом $\{\overline{A} | A \in$ RP$\} \subset$ coRP, докажем теперь, что $\{\overline{A} | A \in$ RP$\} \supset$ coRP. Теперь рассмотрим МТ из определения coRP с семинара и аналогичным образом "инвертируем" ее. Тогда проделывая те же рассуждения получим, что $\{\overline{A} | A \in$ RP$\} \supset$ coRP $\Rightarrow$ coRP $= \{\overline{A} | A \in$ RP$\}$

Задача 5.

б) Докажите, что RP $\subset$ NP.

Решение.

Предположим, у нас есть МТ RP для языка L. Тогда эту МТ можно рассматривать как верификатор, показывающий, что L находится в NP. Если $x \in$ L, то существует такая случайная последовательность r, что МТ(x;r) = 1. Тогда возьмем r, в качестве сертификата. Если же x не лежит в L, то такое r не существует. Таким образом, получили МТ, которая, имея сертификат, проверят слово на принадлежность языку из RP. Тогда RP $\subset$ NP.