

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Алгоритмы и модели вычислений.
Домашняя работа 1.

Георгий Никишин
Группа Б05-909

Задача 1.

Как на многоленточной машине Тьюринга смоделировать запрет на движение влево на входной ленте (одноразовое чтение)?

Решение.

Под запретом движения влево подразумевается построение МТ, у которой головка движется только вправо или стоит. Вспомним, что в изначальном определении МТ функции перехода:

$$\delta = Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, N, R\}^k$$

тогда, если считать, что входная лента является первой из лент машины достаточно изменить функции перехода на:

$$\delta = Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{N, R\} \times \{L, N, R\}^{k-1}.$$

Тогда, очевидно, что движение по входной ленте будет происходить только вправо (либо не будет происходить вовсе).

Задача 2.

Опишите класс разрешимых языков R, если в определении машины Тьюринга убрать требование конечности ленточного алфавита Γ .

Решение.

Докажем, что при отсутствии условия конечности алфавита все языки становятся вычислимыми.

Очевидно, что все языки, которые были вычислимы на конечном алфавите, также будут вычислимы и на бесконечном алфавите. Тогда рассмотрим языки, которые ранее были невычислимы, тогда для каждого такого языка можем закодировать все его слова некоторыми символами алфавита, тогда, достаточно просто построить МТ, распознающую необходимые символы алфавита и только их, что, очевидно, можно сделать.

Задача 3.

Докажите, что класс P не изменяется, если вместо многоленточной машины Тьюринга использовать:

- а) машину с ленточным алфавитом $\Sigma = \Gamma \cup \{end\}$, $\Gamma = \{0,1\}$.
- б) непосдливую машину (ту, которая на каждом шаге должна сдвинуться на какой-то из лент).
- в) машину, в которой ленты бесконечны только в одну сторону.
- г) одноленточную машину Тьюринга.

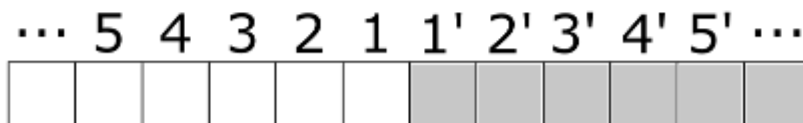
Решение.

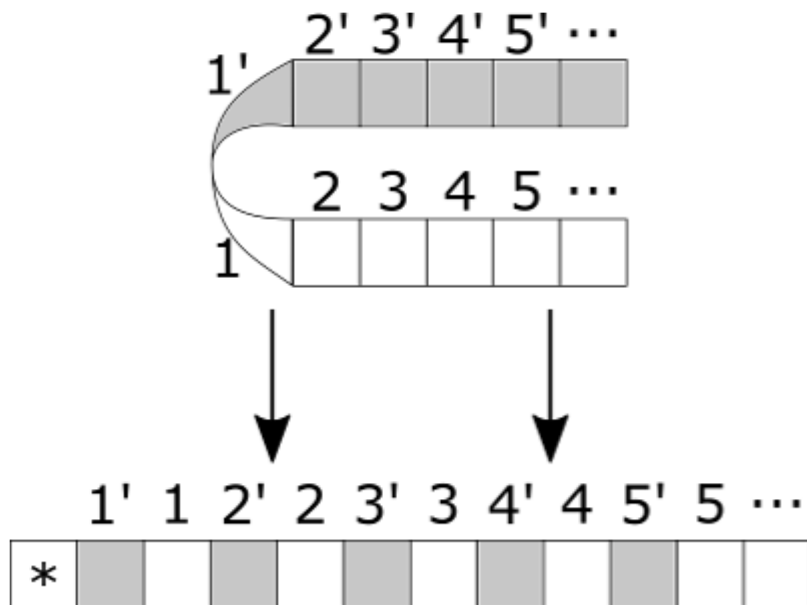
а) Машины эквивалентны, тк алфавит обычной машины можно закодировать двоичным кодом, разделяя полученные символы символом *end*.

б) -

в) Приведем алгоритм, по которому любая МТ с бесконечной лентой сводится к МТ с полубесконечной лентой.

Сначала пометим все элементы, стоящие справа от головки штрихами, а все остальные, то есть стоящие слева оставим прежними. Затем составим из двух частей бесконечной ленты плетение. Поставим в начало входной ленты односторонней машины специальный знак |, затем перенумеруем ячейки ленты, поочередно вставляя туда штрихованные и нештрихованные элементы, находившиеся в симметричном положении относительно головки в начальной ситуации. Начальное состояние новой машины помещается в одну или другую зону (штрихованную или нештрихованную) в зависимости от начальной конфигурации исходной машины. Проще проиллюстрировать данный процесс схемой.





Далее удвоим множество состояний нашей машины, таким образом, чтобы полностью имитировать работу машины на штрихованных участках в одном множестве состояний, и на незаштрихованных - в другой. Причем если в какой-то момент машина встретит символ $|$, то это будет означать, что ее головка достигла границы рабочей зоны. Таким образом, мы построили МТ с полубесконечной лентой.

г) Обозначим МТ, имеющую k лент за M , а одноленточную МТ за M' , тогда нужно доказать, что \forall входа $x \hookrightarrow M(x) = M'(x)$.

Будем считать, что у M множество состояний Q и алфавит Γ , а у M' - Q' и $\Gamma \cup \Gamma'$, где $\Gamma' = \{c' | c \in \Gamma\}$. Разобьем работу M' на несколько тактов, каждый такт будет соответствовать некоторой фазе работы M . Причем разбивать будем так, чтобы после каждого такта были выполнены следующие инварианты:

- 1) В начале ленты M' написан вход, затем символ $|$.
- 2) Если на рабочих лентах машины M , записаны строки $s_1 \dots s_k$, то на ленте M' написано плетение этих строк, то есть $s_1[0]s_2[0] \dots s_k[1] \dots$.
- 3) Если состояние головки для машины M было q , то у машины M' будет в памяти запомнено q .
- 4) Если головка указывала на набор позиций $i_1 \dots i_k$, то соответствующие символы на ленте M' и только они будут помечены $'$.
- 5) Головка указывает на разделитель $|$.

Покажем, как поддерживать такой инвариант:

0) Сначала "инициализируем" ленту машины M' : поставим символ $|$ и скопируем вход еще раз.

Далее промоделируем такт работы машины M на машине M' :

- 1) Мы знаем состояние машины M , тогда, пройдя по ленте до конца, и сохраним все помеченные символы, для этого необходимо запоминать индекс внутри группы, то есть i в s_i . После этого вернемся на начало ленты, то есть на единственный символ $|$.
- 2) После этого действия мы знаем все символы, стоящие под головками на лентах машины M , \rightarrow нам известны все переходы, которые будут предприняты из настоящего положения. Тогда запомним новое состояния и переходы.
- 3) После этого заново проходим по ленте и заменяем символы, которые поместили на предыдущем шаге, на те, которые требуют переходы, после этого возвращаемся на начало ленты, то есть на символ $|$.
- 4) Теперь необходимо перепометить символы. Для этого еще раз проходим по ленте, снимая старые пометки и помечаем необходимые символы.

Таким образом, мы имитируем работу многоленточной машины на одноленточной.

Задача 4.

Язык $L \subseteq \Sigma^*$ называется перечислимым, если выполнено 1 из 3 условий:

- 1) существует МТ, перечисляющая все элементы L в некотором произвольном порядке;
- 2) L является областью определения вычислимой функции f ;
- 3) L является областью значений вычислимой функции f .

Решение.

Пусть выполнено 1) тогда докажем 2) и 3):

1) \Rightarrow 2) Создадим МТ такую, что она завершает работы в состоянии $q_{accept} \Leftrightarrow$ когда входом является слово, перечисленное МТ из пункта 1) в остальных же случаях МТ будет зависать. Тогда L будет областью определения некоторой вычислимой функции.

1) \Rightarrow 3) Создадим МТ, такую что, она будет проверять, лежит ли ее вход в выходе МТ из пункта 1), если да, то просто будет распечатывать поступившее слово, если нет, то будет зависать, таким образом L будет областью значений некоторой вычислимой функции.

2) \Leftrightarrow 3) Возьмем функцию, определенную только на L : $\forall x \in L \hookrightarrow f(x) = x$, тогда множеством значений такой функции будет L . Обратное можно доказать аналогично, только взяв $f^{-1}(x) = x$, тогда L уже будет областью определения.

3) \Rightarrow 1) Если L является множеством значений некоторой вычислимой функции, то можно построить МТ, работа которой будет аналогична работе функции, то есть, подавая на вход область определения исходной функции, на выходе получим все слова из L в некотором произвольном порядке.

Задача 5.

Докажите, что язык $L \subseteq \Sigma^*$ разрешим тогда и только тогда, когда языки L и \bar{L} перечислимы.

Решение.

Вспомним определение: Язык L называется разрешимым, если существует такая вычислимая функция $f : \Sigma^* \rightarrow 0,1 : x \in L \Leftrightarrow f(x) = 1$.

Тогда для того, чтобы определить лежит ли произвольное x в L будем запускать одновременно две МТ, каждая из которых будет определять, лежит ли x в L или в \bar{L} . Такие МТ, очевидно, существуют причем работают за конечное время, тогда мы за конечное время сможем узнать, где лежит произвольное $x \Rightarrow L$ - разрешим.