ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Алгоритмы и модели вычислений.
Домашняя работа 7.

Георгий Никишин
Группа Б05-909

Задача 1.

На рисунке изображен потоковый граф.

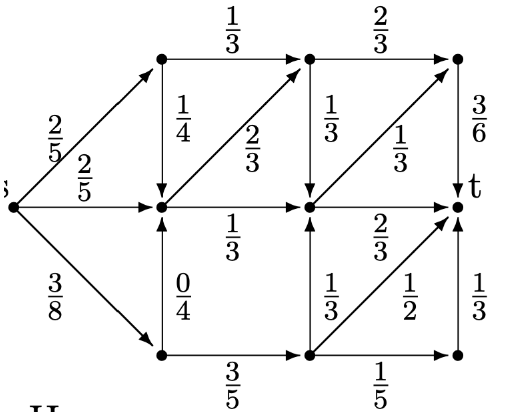
а) Чему равен поток f?

б) Изобразите остаточный граф, соответствующий потоку f

в) Максимален ли поток f?

г)С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найдите максимальный поток. На каждом шаге должен быть построен остаточный граф и указан увеличивающий путь.

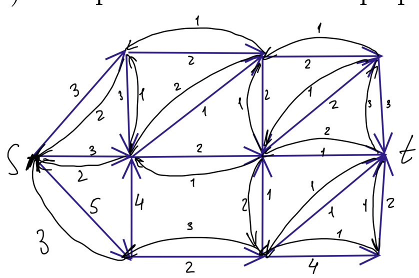
д) Укажите модификацию алгоритма Форда-Фалкерсона для нахождения минимального разреза. По шагам постройте минимальный разрез между s и t. Найдите его пропускную способность.



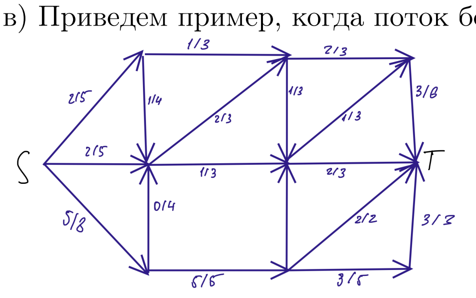
Решение.

а) Поток f равен сумме потоков от входящих в t ребер. Таким образом, $f = 3 + 2 + 1 + 1 = 7$

б) Изобразим остаточный граф:

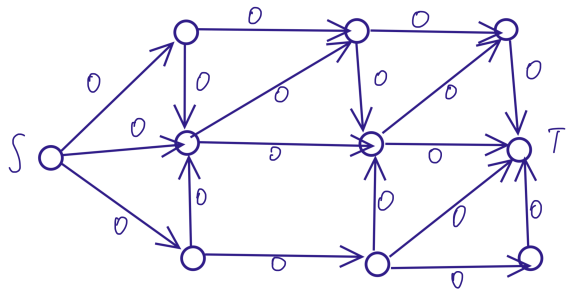


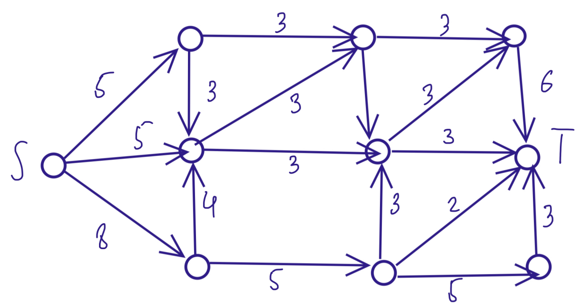
в) Приведем пример, когда поток больше:



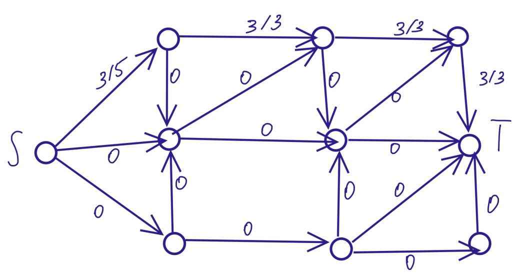
Здесь поток равен 10.

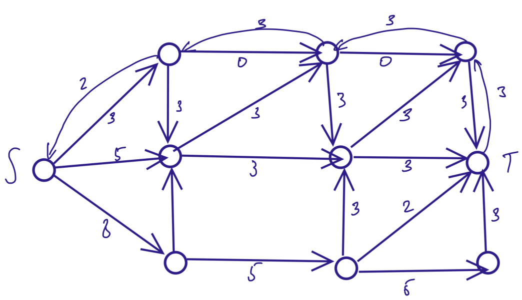
г) первый шаг, поток и сеть



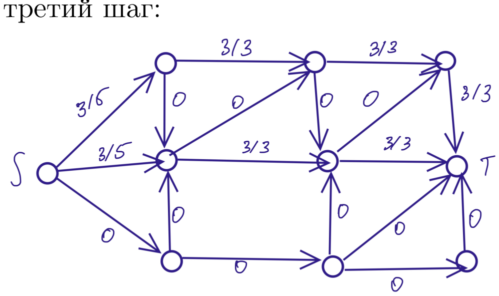


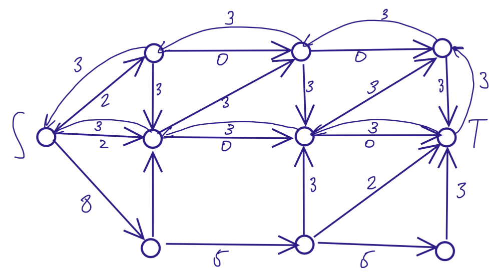
второй шаг:



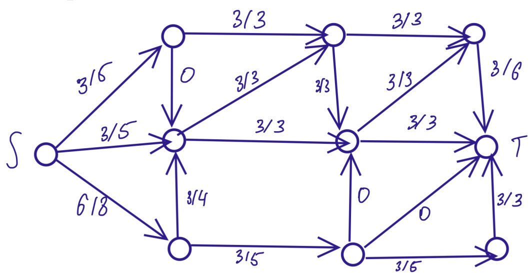


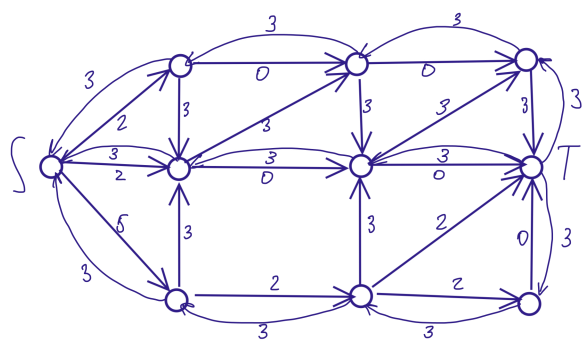
третий шаг:



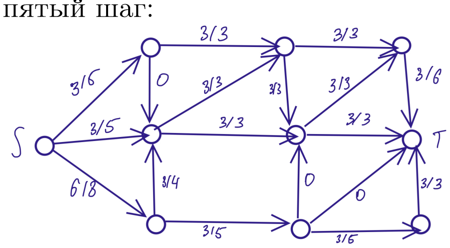


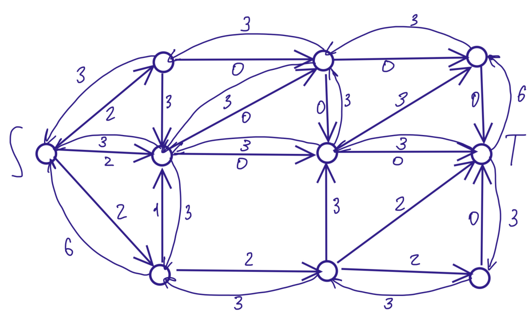
четвертый шаг:



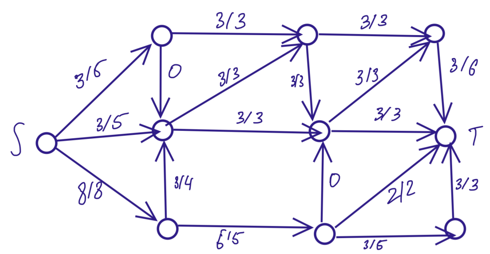


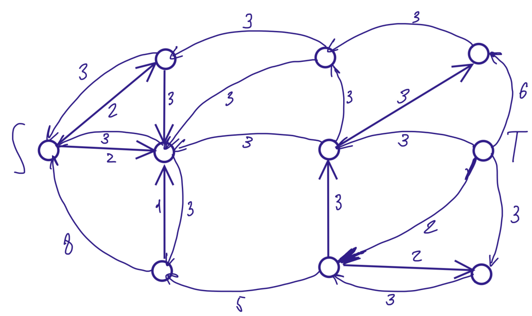
пятый шаг:





шестой шаг:





На этом шаге в остаточной сети нет пути из S в T. Таким образои, поток, полученный на данном шаге- максимелен д) Воспользуемся алгоритмом с семинара. Разделим множества вершин графа на два множества: в первое множество поместим все вершины, которые достижимы из источника по дугам, пропускная способность которых, строго больше потока, проходящего через них; во второе множество - оставшиеся вершины. Вершины входящие в первое множество можно найти с помощью поиска в ширину. Тогда мы разделили нащи вершины на два непересекающихся множества, между которыми и будет проходить минимальный разрез.

Задача 2.

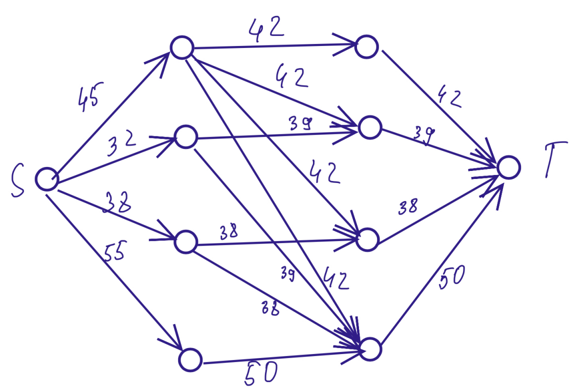
В больнице каждому из 169 пациентов нужно перелить по одной дозе крови. В наличии имеется 170 доз. При этом пациенты, имеющие кровь группы I, могут получать только кровь группы I. Пациенты, имеющие кровь группы II (группы III), могут получать только кровь групп I и II (групп I и III, соответственно). Наконец, пациенты с IV группой могут получать кровь любой группы.

а) Распределите дозы, чтобы обслужить максимальное число пациентов с помощью решения подходящей задачи о максимальном потоке. Решение нужно аккуратно офор- мить: должна быть нарисована потоковая сеть и показаны все шаги алгоритма ФФ, начиная с нулевого потока, т. е. должны быть построены остаточные графы и показа- ны увеличивающие пути.

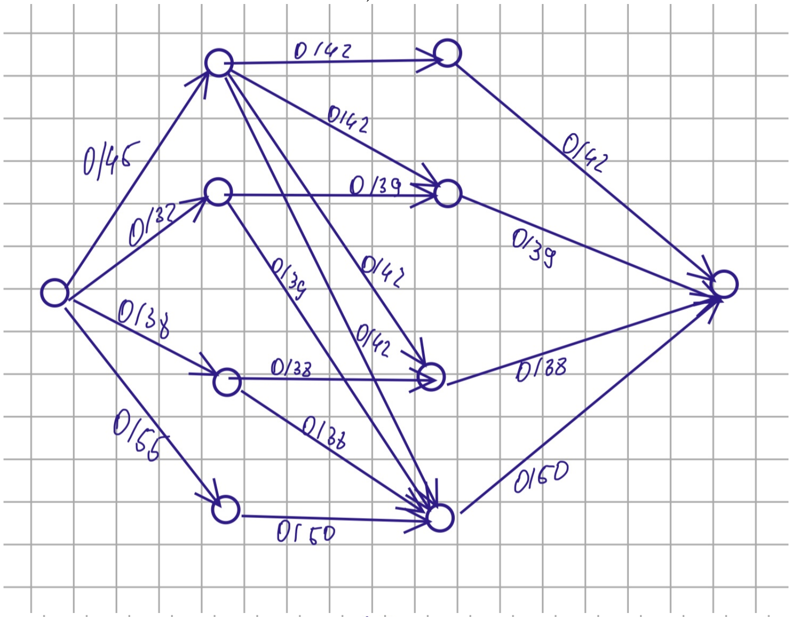
б) Если всех пациентов обслужить нельзя, то приведите простое объяснение этому, доступное администрации больницы.

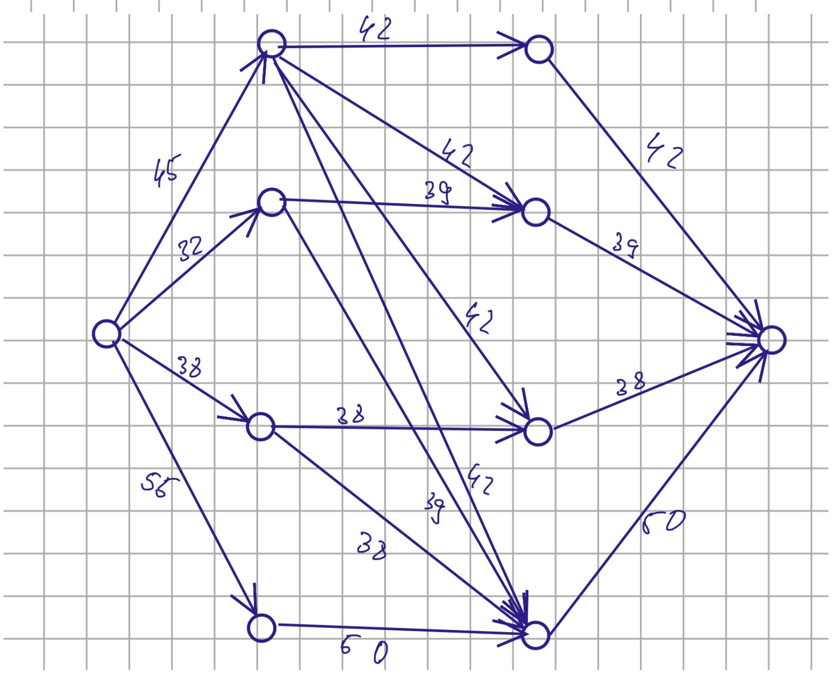
Решение.

Сведем данную задачу к задаче о нахождении максимального потока следующим образом. Рассмотрим следующий граф:

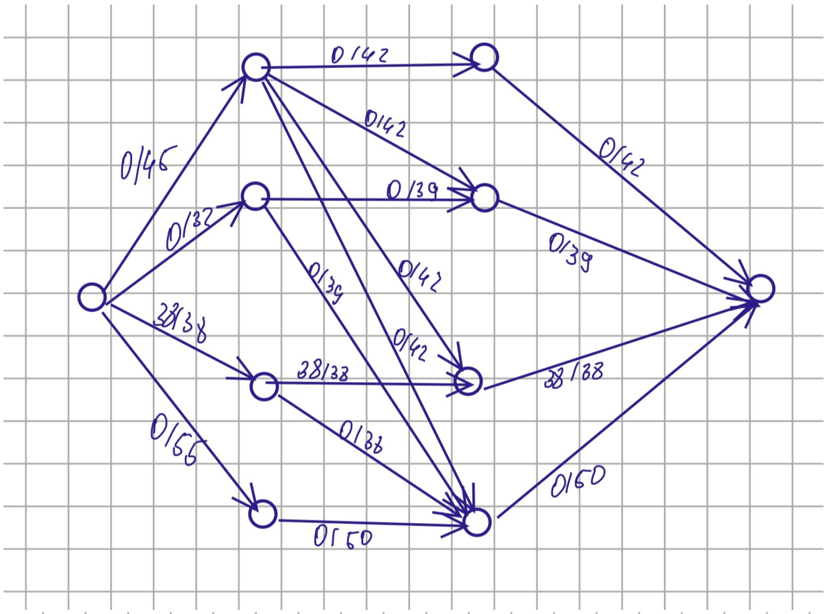


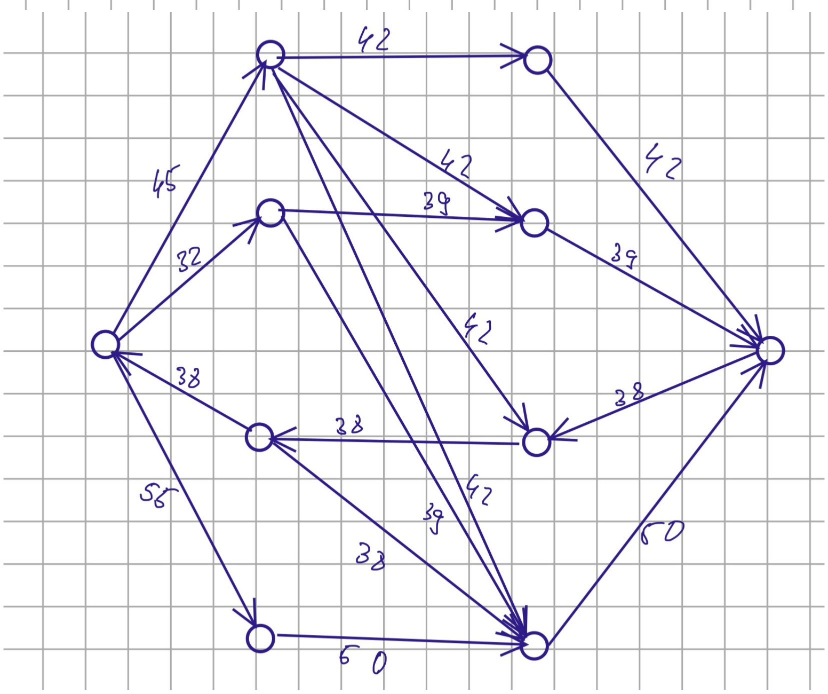
Здесь ребра из S соответствуют количеству доз, имеющихся в наличии, ребра из первого столбца вершин соответствуют кол-ву доз, которое требуется. Таким образов, если мы найдем максимальный поток в таком графе, то он будет равен количеству пациентов, которые получат свою дозу. Применим алгоритм ФФ. 1)



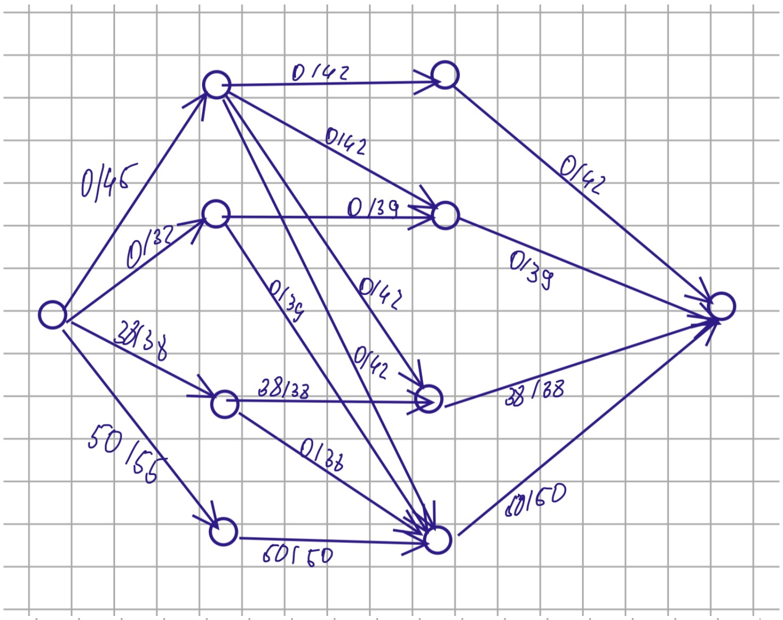


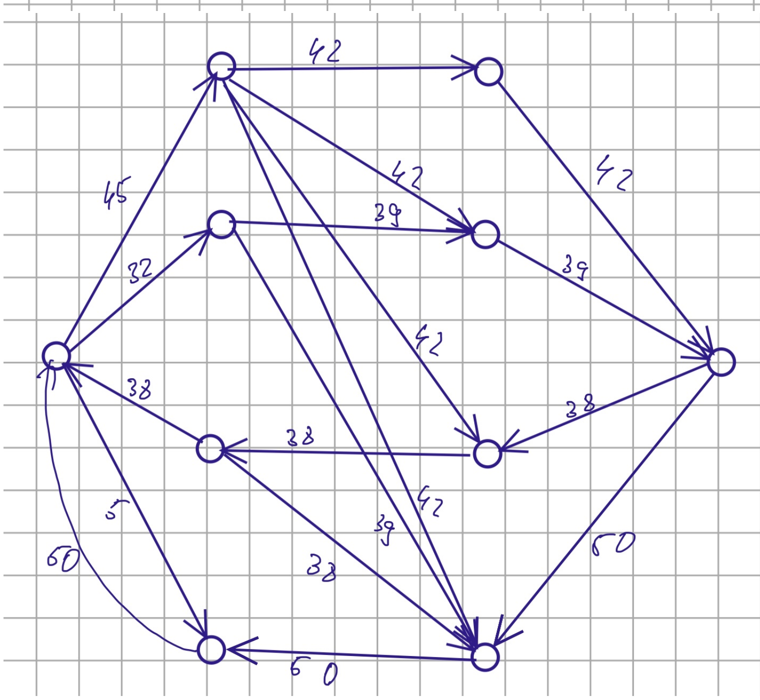
2)


0/42
0/42
0/42
0/45
0/32
0/39
0/39
0/39
0/42
28/38
0/42
28/33
28/38
0/56
0/38
0/50
0/50

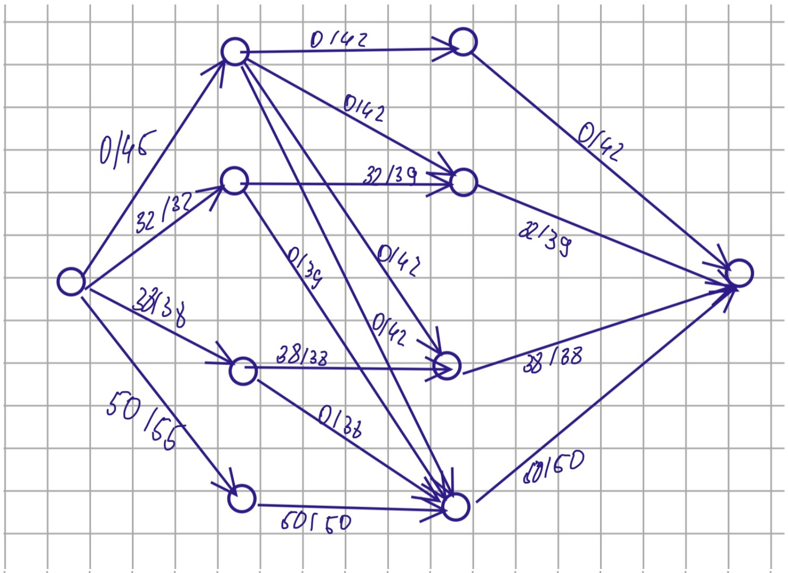

42
42
42
45
32
39
39
42
38
28
28
56
42
39
38
60
50

3)

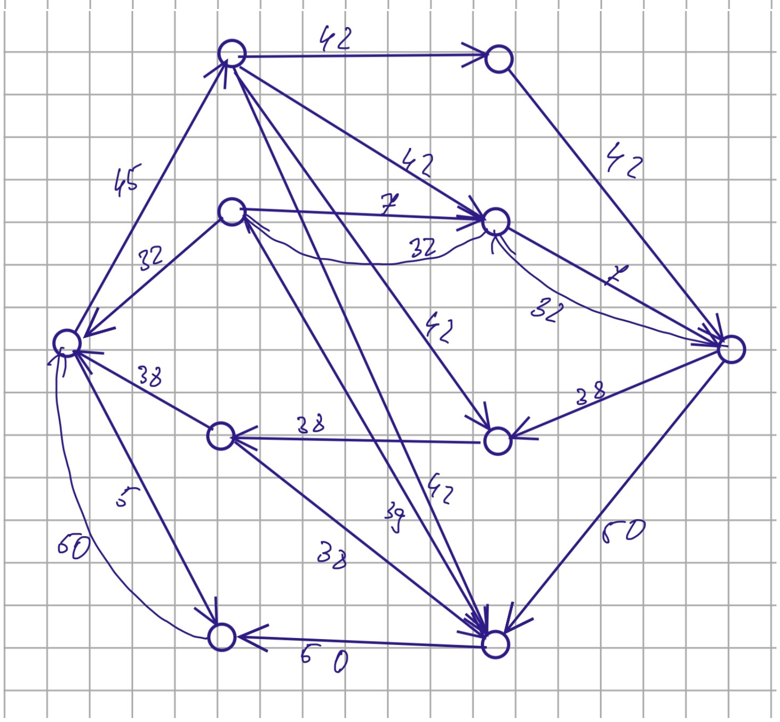

0/42
0/46
0/42
0/39
0/42
0/32
0/39
0/39
0/42
28/38
0/42
28/38
28/38
0/38
50/66
60/50
60/50


42
45
42
42
39
32
39
42
38
38
38
5
60
39
42
38
60
60

4)

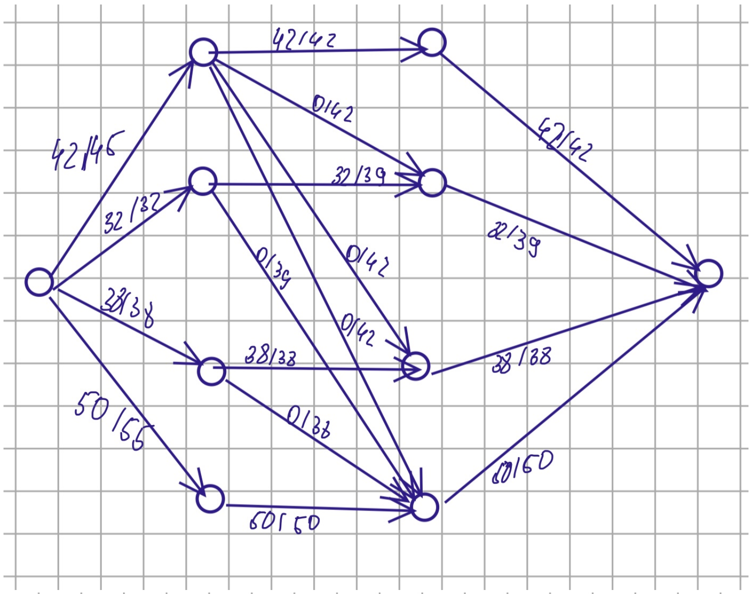


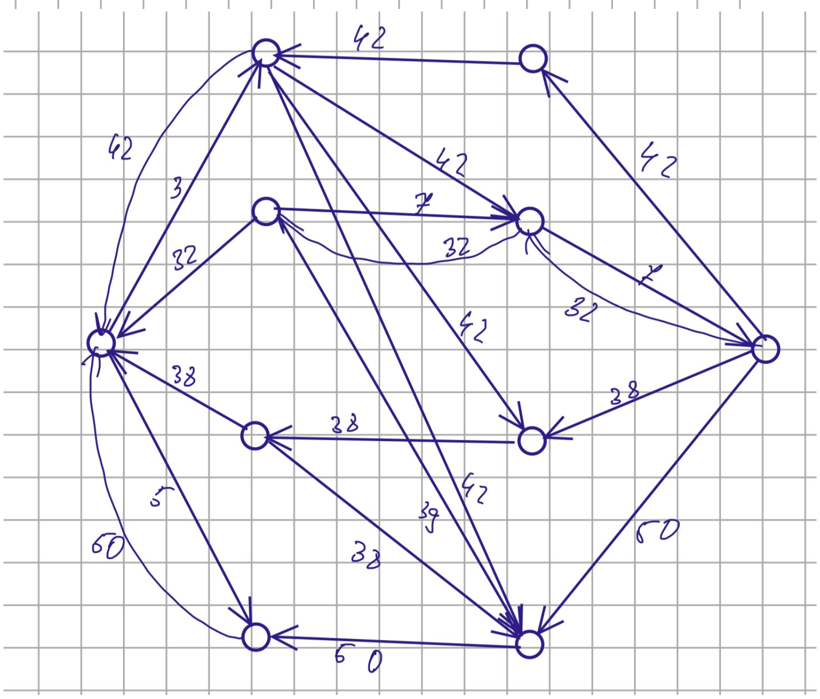
0/42
0/42
0/42
0/46
32/32
32/39
32/39
0/39
0/42
0/42
28/38
28/38
38/38
0/38
50/66
60/60
60/60



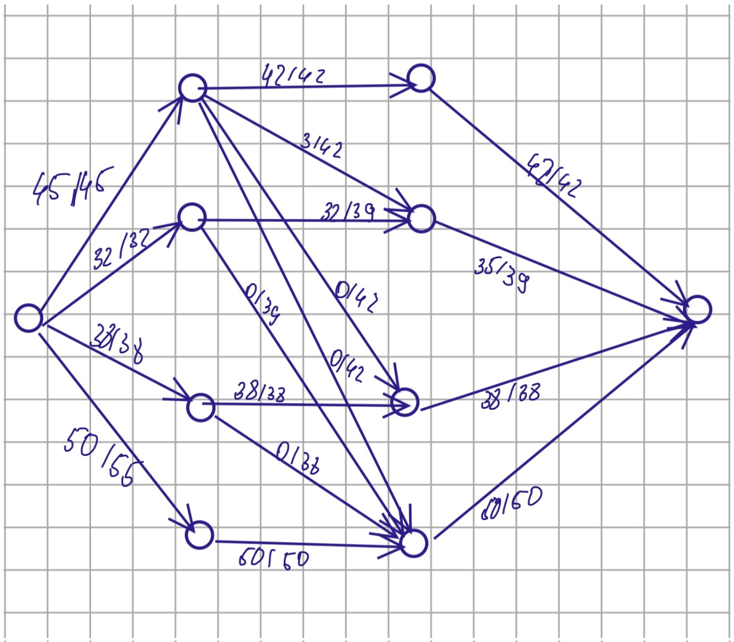
42
42
42
45
7
32
32
7
32
42
38
28
28
42
39
38
5
60
60
60

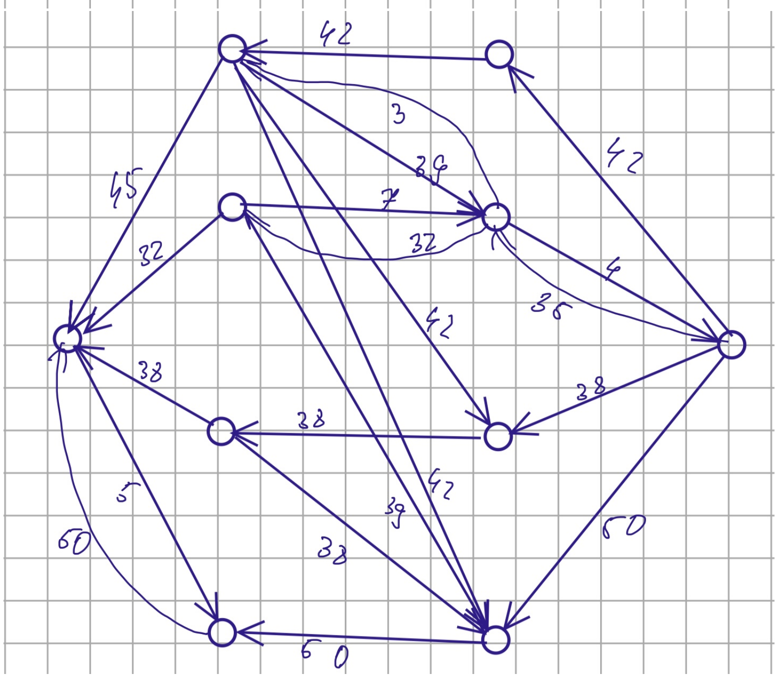
5)


42/42
0/42
42/42
42/46
32/32
32/39
32/39
0/39
0/42
0/42
28/38
28/33
28/38
0/38
50/55
60/50
60/60

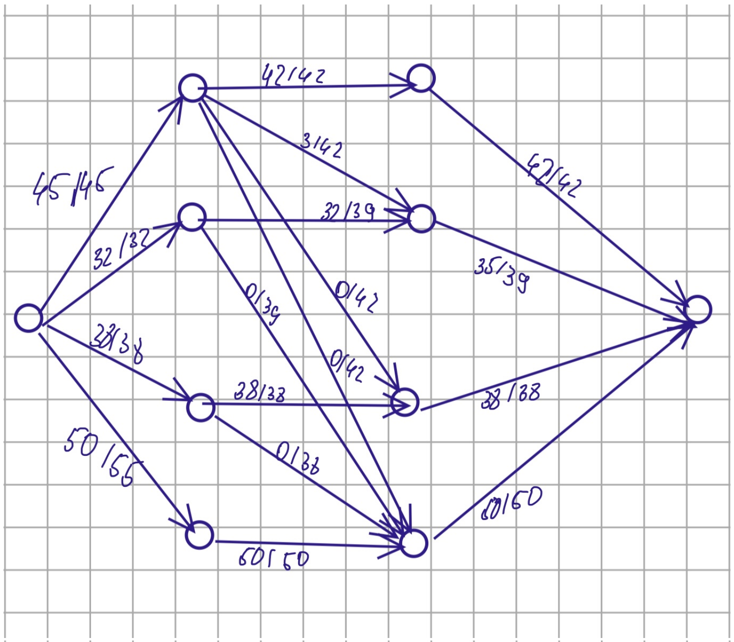

42
42
42
3
7
32
32
32
7
42
42
38
28
28
5
60
38
39
42
60
60

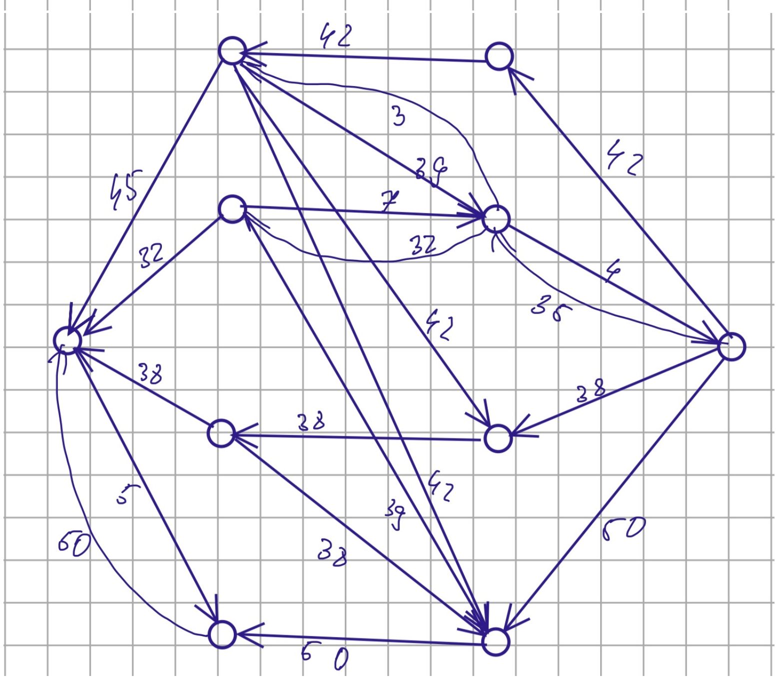
6)


42/42
3/42
32/39
42/42
35/39
0/42
0/39
0/42
38/38
0/38
60/60


42
3
39
45
7
32
32
4
42
36
38
38
28
42
39
38
60
60

7)





После этого шага алгоритма в графе нет путей из истока в сток, значит максимальный поток равен $42 + 35 + 38 + 50 = 165$, что меньше требуемого потока, который равен $42 + 39 + 38 + 50$.

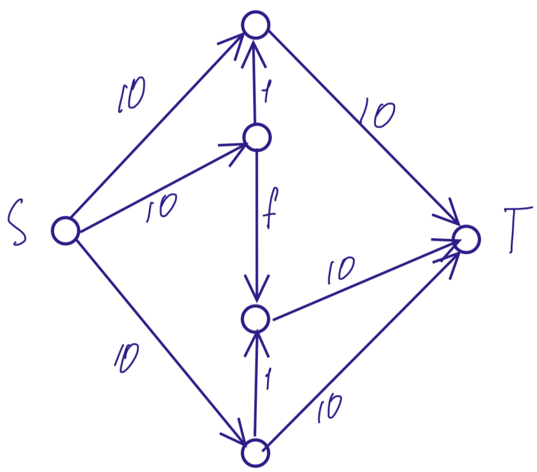
б) То, что помочь всем пациентам не удастся можно заметить следующим образом: заметим, что пациенты, имеющие 1 и 2 группу крови могут получать кровь только 1 и 2 группы. Тогда запрос на 1 и 2 группы: $42 + 39 = 81$, а в наличии: $45 + 32 = 77$. Это, очевидно, говорит о нехватке крови.

Задача 3.

Покажите на примере конкретной потоковой сети, что алгоритм Форда- Фалкерсона (если выбирать для поиска путей алгоритм поиска в глубину) не является полиномиальным.

Решение.

Возьмем граф, у которого пропускными способностями будут иррациональные числа.



где $f = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, заметим, что $f^2 = f - 1$ и запустим алгоритм ФФ на этом графе.
1 шаг: путь $(s; v_2; v_1; t)$; остаточная пропускная способность: $(v_1; v_2)$-1; $(v_2; v_3) - 0$; $(v_4; v_4)$- f
2 шаг: путь $(s; v_4; v_3; v_2; v_1; t)$; остаточная пропускная способность: $(v_1; v_2)$-f^2; $(v_2; v_3) - f$; $(v_4; v_4)$- 0
3 шаг: путь $(s; v_2; v_3; v_4; t)$; остаточная пропускная способность: $(v_1; v_2)$-f^2; $(v_2; v_3) - 0$; $(v_4; v_4)$-f
4 шаг: путь $(s; v_4; v_3; v_2; v_1; t)$; остаточная пропускная способность: $(v_1; v_2)$-0; $(v_2; v_3) - f^2$; $(v_4; v_4) - f^3$
5 шаг: путь $(s; v_1; v_2; v_3; t)$; остаточная пропускная способность: $(v_1; v_2)$-f^2; $(v_2; v_3) - 0$; $(v_4; v_4) - f^3$
Таким образом, после этого шага остаточные пропускные способности имеют форму $(v_1; v_2)$-f^2; $(v_2; v_3) - 0$; $(v_4; v_4) - f^3$, заметим что после первого шага ситуация очень похожа: ; остаточная пропускная способность: $(v_1; v_2)$-1; $(v_2; v_3) - 0$; $(v_4; v_4)$- f, те пропускные способности имеют вид: $r^n; 0; r^{n+1}$. Таким образом, применяя ту же комбинацию путей бесконечное число раз получим, что алгоритм никогда не остановится. Значит на данном графе он не работает за полиномиальное время.