ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Алгоритмы и модели вычислений.
Домашняя работа 9.

Георгий Никишин
Группа Б05-909

Задача 1.

Докажите, что класс P/poly не изменится, если в качестве размера схемы вместо числа вершин брать число рёбер.

Решение.

Пусть в схеме n вершин, тогда количество ребер в ней $O(n^2)$, тогда "реберная"схемная сложность также будет полиномом от числа ребер.

Задача 2.

Докажите, что класс P/poly не зависит от того, какая входящая степень разрешена для вершин типов $\vee$ и $\wedge$.

Решение.

Рассмотрим самые худший случай. Пусть в первом случае $\vee$ и $\wedge$ принимают на вход только два аргумента, а во втором - неограниченное число аргументов. Тогда в первом случае $\vee$ и $\wedge$ занимают $O(\log_2 n)$, тогда если глубина схемы есть полином $p(n)$ от числа вершин, то число $\vee$ и $\wedge$ в этой схеме не превосходят $p(n)$, следовательно, глубина схемы даже в таком случае будет $O(p(n) \cdot (\log_2 n))$ (оценили сверху добавочную глубину от $\vee$ и $\wedge$) , что не превосходит некоторого полинома $q(n)$, таким образом класс не меняется, если ввести ограничение на степени входящих вершин.

Задача 3.

a) Докажите, что любой унарный язык принадлежит классу DTIME(n)/1.

b) Приведите пример неразрешимого языка, лежащего в DTIME(n)/1.

Решение.

a) Возьмем произвольный унарный язык $L \subset \{1\}^*$, подсказкой для распознающей МТ будет 1, если слово x длины $|x|$ принадлежит L, и ноль - иначе. Машина Тьюринга получит на вход слово x и подсказку для слов длины $|x|$, тогда, если слово не лежит в L, то выведем 0, иначе - значение подсказки. Тогда в силу произвольности L, утверждение доказано.

b) Воспользуемся результатом, полученным в предыдущем пункте. Возьмем произвольный неразрешимый язык $L \subset \{0; 1\}^*$. Построим по этому языку L унарный язык L' следующим образом: $L' = \{1^n | n_2 \in L\}$, тогда согласно промежуточному пункту $L' \in DTIME(n)/1$, но он, очевидно, неразрешим, тк иначе разрешим был бы L.

Задача 4.

Докажите, что $\mathrm{NC}^d \subset \mathrm{AC}^d \subset \mathrm{NC}^{d+1}$.

Решение.

Первое включение очевидно. Докажем второе, аналогично задаче 2 оценим глубину схемы, если входная степень $\vee$ и $\wedge$ -k . Из тех же соображений, можно заменить $\vee$ и $\wedge$ в схеме двоичным деревом глубины $O(\log_2 k) = O(\log n)$. Таким образом такая замена на двоичные деревья увеличит глубину изначальной схемы в $O(\log n)$ раз, после чего, ее еглубина станет $O(\log^{d+1})$, тогда получаем, что $\mathrm{AC}^d \subset \mathrm{NC}^{d+1}$.

Задача 5.

Язык палиндромов лежит в AC^0.

Решение.

Возьмем xor от элементов расположенных симметрично относительно середины слова, после чего возьмем $\vee$ от результата, тогда глубина схемы очевидно не превосходит константы.