ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Алгоритмы и модели вычислений.
Домашняя работа 4.

Георгий Никишин
Группа Б05-909

Задача 1.

Докажите, что язык SUBSETSUM=$\{(n_1, \cdots n_k, N)|$из $n_1 \cdots n_k$можно выбрать подмножество с суммой$N\}$

Решение.

Для начала, докажем, что данная задача лежит в NP. В качестве сертификата выберем вектор из 0 и 1, при умножении на который наша исходная строчка $n_1 \cdots n_k$ будет, предположительно, давать N. Тогда мы, очеевидно, сможем проверить правдивость этого сертификата за полиномиальное время, используя не более k умножений и сложений.
Теперь докажем, что задача лежит в NPH. Для этого сведем 3CNF к нашей задаче. Пусть заданы формула ϕ от n переменных, состоящая из k пар скобок (C_i).

Задача 2.

Приведите три языка A, B и C такие, что $A \subset B \subset C : B \in P$, но $A, \ C \in NPC$.

Решение.

Возьмем в качестве B язык двураскрашиваемых графов $(2 - COL)$, в качестве $C - 3COL$, докажем, что $2COL \subset 3COL$, пусть граф 2-раскрашиваемый, тогда покрасим произвольную вершину графа в цвет, отличный от первых двух, тогда получили, что граф 3-раскрашиваемый. Возьмем в качестве A язык 2-раскрашиваемых графов, в которых есть гамильтонов путь. Тогда получили, что $A \subset B \subset C$.
Далее считаем,что ни одна скобка не содержит ондновременно саму переменнную x_i и ее отрицание $\overline{x_i}$, также считаем, что каждая переменная x_i входит хотя бы в одну пару скобок. Построим сводимость следющим образом. Каждой переменной x_i и каждой паре скобок C_i сопоставим два числа длиной $n + k$, эти числа образуют наш набор $n_1 \cdots n_k$, также создадим наше число N, такой же длины. Далее пометим каждый разряд этих чисел собственной меткой, метка одинакова для всех чисел, но отличается для разрядов, кроме того, метки для переменных и скобок отличны. Метки, соответствующие скобкам стоят в младших k разрядах. В нашем числе N разряды, соответвующие переменным назначим 1, остальные - 4. Теперь рассмотрим x_i. Каждой такой переменной соответсвуют два числа: v_i и u_i. Поставим в разряд, соответствующий x_i 1, а в остальные разряды, соотв. переменным,- 0. Для v_i все разряды, соответвующий скобкам, в которых есть x_i, поставим равными 1, во все остальные разряды, не соотв. x_i, ставим 0. В u_i, аналогично, ставим 1 в разряды, соотв. $\overline{x_i}$, и 0 в остальные. Каждым скобкам C_i соотв. два числа d_i и e_i. Эти числа сожержат нули во всех разрядов, кроме тех, которые соотв C_i.В эти разрядвх поставим 1 у d и 2 у e.
Докажем, что такое сведение корректно. Рассмотим полученное множество чисел. Его мощность 2(n+k), каждое число длиной n+k, а его построение занимает полиномиальное время. Таким образом сведение работает за полиномиальное время.
Пусть функция ϕ выполнима: $\phi(x_1 \cdots x_k) = 1$ и $f(\phi) = \{(n_1 \cdots n_k)|N\}$. Тогда существует подмнржество с суммой N. Докажем это. Если $x_i = 1$, то добавляем в наше подмножество v_i, иначе u_i. Тогда в нашем подмножестве n чисел. Заметим, что для каждого скобочного разряда в уже набранной части подмножества есть не менее одного и не более трех чисел, у которых в данном разряде стоит единица. Также заметим, что для каждого разряда, соотв. скобкам C_i мы можем выбрать d и e, так что сумма в данном разряде станет равной 4. Добавим их в наше подмножество. Кроме того, что суммы в разрядах, соотв. переменным , равны 1 тк одна скобка не может одновременно содержать переменную и ее отрицание. Тогда сумма элементов подмножества есть N. Тогда 3CNF сводится к задаче о сумме подмножества. $\Rightarrow$ эта задача лежит в NPC.