# Домашняя работа 4 (Дедлайн 15 ноября, 21:00)

November 14, 2021

**Задача 1** (5 баллов)

Гамма-распределение Gamma$(\alpha, \lambda)$ - это распредление с плотностью вероятности $f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ ($\Gamma(\alpha)$ - гамма-функция Эйлера) Посчитайте мат.ожидание и дисперсию для гамма-распределения. Как распределена сумма $n$ независимых случайных величин, каждая из которых распределена как $\Gamma(\alpha, \lambda)$? Если $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, то как распределена с.в. $aX$, где $a > 0$ - произвольная константа? (приведите все! выкладки)

**Решение**

Мы знаем, что характеристическая функция Гамма-распределения есть: $\phi_\eta(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-n}$. Воспользуемся свойством характеристической функции: $\phi'_\eta(0) = iE(\xi) \Rightarrow \phi'_\eta(t) = \frac{ni}{\lambda}(1 - \frac{it}{\lambda})^{-n-1}$ Тогда $E(\eta) = \frac{n}{\lambda}$. Для определения диспресии воспользуемся аналогичным свойством: $\phi''_\eta(0) = (i)^2 E(\eta^2) \Rightarrow \phi''_\eta(0) = -\dfrac{n(n+1)}{\lambda^2} \Rightarrow E\eta^2 = \dfrac{n(n+1)}{\lambda^2}$ Найдем дисперсию: $D\eta = E(\eta^2) - (E\eta)^2 = \dfrac{n(n+1)}{\lambda^2} - \dfrac{n^2}{\lambda^2} = \dfrac{n}{\lambda^2}$

Если с. в. $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, то она имеет характеристическую функцию $\phi_X(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-n}$. Рассмотрим характеристическую функцию с. в. $\alpha X$: $\phi_{\alpha X}(t) = Ee^{it(\alpha X)} = Ee^{iX(t\alpha)} = \phi_X(\alpha t) = (1 - \frac{it\alpha}{\lambda})^{-n} \Rightarrow \alpha X \sim \Gamma(\alpha, \dfrac{\lambda}{\alpha})$

**Задача 2** (4 балла)

Пусть $\xi$ с.в. с действительной характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией $\sigma^2$. Доказать, что:

$$f(t) \geq 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2}$$

**Решение**

Пусть $\Omega$- единичная корушность и пусть $E_n = \{\omega = e^{i\theta} : \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k} \leq \theta \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\}$. Заметим, что $P(E_n) = \dfrac{1}{2\pi n} \to 0$ при $n \to 0$. Тогда $\forall p > 0$ последовательность $\xi_n = ind(E_n)$ сходится в среднем порядка $p$ и $\xi(\omega) = 0$.

С другой стороны, тк $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k} = \infty$, то каждое элементарное событие $\omega$ принадлежит бесконечному числу событий из последовательности $\{E_n\}$, те $\overline{\lim}_{n\to\infty} = \Omega$. Это означает, что $\xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)$ ни при каких $\omega \in \Omega$, т.е. последовательность $\xi_n(\omega)$ не сходится почти наверное.

**Задача 3** (2 балла)

Приведите пример, который показывает, что есть сходимость в среднем ($L_p$), но нет сходимости п.н.

**Задача 3** (5 баллов)

Докажите, что сумма $n$ независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[-1, 1]$, имеет плотность $f$, задаваемую формулой

$$f(x) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\tfrac{\sin t}{t}\right)^n \cos(tx) dt$$

Верна ли эта формула при $n = 1$?

**Решение**

Обозначим исходные с. в. за $\xi_1 \cdots \xi_n$, $S = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ тогда $\varphi_{\xi_i}(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2it}$ $\forall i \in [1; n]$, воспользуемся представлением $\sin t$, известным из комплексного анализа. Тогда: $\varphi_{\xi_i}(t) = \dfrac{\sin t}{t}$. По свойствам характеристической функции $\varphi_S(t) = \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_i}(t) = \dfrac{\sin^n t}{t^n}$. Плотность вероятности определеяется через характеристическую функцию, как:

$f_S(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\varphi_S(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{\sin^n t}{t^n}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}\right) e^{itx}\frac{\sin^n t}{t^n}dt$. Рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{itx}\frac{\sin^n t}{t^n}dt$. Сделаем замену: $\tau = -t$, тогда: $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{itx}\frac{\sin^n t}{t^n}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\tau x}\frac{\sin^n \tau}{\tau^n}d\tau$, теперь просто формально переименуем переменную, тогда: $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{itx}\frac{\sin^n t}{t^n}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-itx}\frac{\sin^n t}{t^n}dt$, возвращаясь к исходному равенству, получим

$$f_S(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{itx}+e^{-itx}}{2}\frac{\sin^n t}{t^n}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^n}\cos txdt$$

При $n = 1$ $\varphi_S(t) = \varphi_{xi_i}(t) = \frac{\sin t}{t}$, а преобразования, проделанные с интегралом остаютсся справедливыми, тк характеристическая функция остается четной. Т. е. для $n = 1$ формула верна.

**Задача 5** (4 балла)

Пусть $f$ - непрерывная, монотонно-возрастающая, неотрицательная, ограниченная функция, такая, что $f(0) = 0$.

Докажите, что для сходимости $\xi_n$ к 0 по вероятности необходимо и достаточно, чтобы сходилась к 0 последовательность $\mathbb{E}f(|\xi_n|)$

**Решение**

Докажем: $\xi_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow E(f|\xi|) = 0$:

$P(|\xi_n| > \varepsilon) \to 0 \Rightarrow 0 \leq E(f(|\xi_n|)) = f(|\xi_n|) < \varepsilon \;\; \forall\varepsilon > 0 \Rightarrow E(f(|\xi_n|)) = 0$ при достаточно больших $n$.

Докажем: $\xi_n \xrightarrow{P} 0 \Leftarrow E(f|\xi|) = 0$:

$f(|\xi_n|) \geq 0, Ef(|\xi_n|) = 0 \Rightarrow P(f(|\xi_n|) = 0) = 1$, что при условии сторогой монотонности функции эквивалентно $P(|\xi_n| > \varepsilon) \to 0$

**Задача 6** (5 баллов) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – последовательность случайных величин с конечными дисперсиями. Положим $a_n = \mathbb{E}\xi_n$, $\sigma_n^2 = \mathbb{D}\xi_n$. Доказать, что если $a_n \to \infty$ и $\sigma_n^2 = o(a_n^2)$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{\xi_n}{a_n} \xrightarrow{P} 1, n \to \infty$$

**Решение**

Рассмотрим последнее условие: $\sigma_n^2 = o(a_n^2)$ титтк $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N : \forall n \geq N \mapsto \frac{\sigma_n^2}{a_n^2} < \varepsilon^2(1)$ . Теперь напишем определение сходимости по вероятности: $\forall\varepsilon > 0 \mapsto P\left(|\frac{\xi_n}{a_n} - 1| > \varepsilon\right) \to 0$

$P\left(|\frac{\xi_n}{a_n} - 1| > \varepsilon\right) = P(|\xi_n - a_n| < \varepsilon|a_n|) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon a_n^2}$, тут использовано неравенство Чебышева. Для доказательтва $\frac{\sigma^2}{\varepsilon a_n^2} \to 0$ возьмем $N$ из (1), тогда $\forall\varepsilon > 0 \mapsto \frac{\sigma^2}{\varepsilon a_n^2} < \varepsilon$, что и есть стремление к 0 по определению. Получили:

$$\frac{\xi_n}{a_n} \xrightarrow{P} 1, n \to \infty$$