Домашняя работа 1 (**Дедлайн 12:00 25.09.2021**)

September 22, 2021

Задача 1 (5 баллов)

Отрезок длины $a_1 + a_2$ поделён на две части длины a_1 и a_2 соответственно. n точек последовательно бросаются на удачу на отрезок. Найти вероятность того, что ровно m из n точек попадут на часть отрезка длины a_1.

Решение

Очевидно, что вероятность того, что одна точка попадет на отвезок есть: $\frac{a_1}{a_1+a_2}$, тогда выберем m точек, которые должны оказаться на отрезке. Это можно сделать C_n^k способами. Остальные же точки должны попасть на отрезок a_2, вероятность этого составляет $\frac{a_2}{a_1+a_2}$. Итоговая вероятность есть:

p $= C_n^k \cdot \left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)^m \cdot \left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^{n-m}$.

Также подойти к решению задачи можно через схему испытаний Бернулли, ответ получится такой же.

Задача 2 (2 балла)

На плоскость нанесены горизонтальные параллельные прямые на одинаковом расстоянии a друг от друга. На плоскость наудачу бросается монета (круг) радиуса R ($R < \frac{a}{2}$). Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одну из прямых.

Решение

Без ограничения общности будем считать, что одна из линий совпадает с осью Ох и монета падает между этой осью и следующей прямой. Вероятность того, что ни одна из прямых не пересекает окружность, координаты центра которой есть $(x_c; y_c)$ определяется из соотношений:

$$\begin{cases} a - y_c \geq R \\ y_c \geq R \end{cases}$$

$\Rightarrow$ из всех $y \in [0; a]$ неравенству удовлетворяют только $y \in [R; a - R]$ $\Rightarrow$ вероятность есть:

$p = \frac{a-2R}{a}$

Задача 3 (3 балла)

На шахматную доску случайным образом ставятся два белых короля. Найти вероятность того, что эти два короля будут бить друг друга.

Решение

Рассмотрмм сколько всего существует вариантов расстановки двух королей на щахматной доске: $n = 64 \cdot 63$ (первого ставим в любоую клетку, второго в любую из оставшихся). Рассмотрим отдельные ситуации. Будем расставлять одного короля, а для второго выбирать нужные позиции:

1) Первый король стоит в одном из углов. Тогда для второго короля есть три подходящих места. (x4) 2) Первый король стоит вдоль края доски. Тогда для второго короля есть пять подходящих мест (x24) 3) Все остальное. Тогда для второго короля есть восемь подходящих мест (x36)

Итого подходящих вариантов: $m = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 24 + 8 \cdot 36 = 420 \Rightarrow p = \frac{m}{n} = \frac{420}{4032} = \frac{5}{48}$

Задача 4 (1.5 балла)

В n ящиках размещают $2n$ шаров. Найти вероятность того, что ни один ящик не пуст, если шары неразличимы и все различимые размещения имеют равные вероятности.

Решение

Рассмотрим сколько всего существует исходов. Заметим, что эта задача совпадает с задачей о шарах и перегородках, где ящики могут оставаться пустыми. Таким образом, количество способов есть: C_{3n-1}^{n-1}. Подходящими для нас исходами будут те, при которых каждый ящик заполнен. Что совпадает с задачей о шарах перегородках, где ящики не могут оставаться пустыми. Тогда таких способов: C_{2n-1}^{n-1}. По определению вероятности получаем:

$p=\frac{C_{2n-1}^{n-1}}{C_{3n-1}^{n-1}}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}\frac{(2n)!(n-1)!}{(3n-1)!}=\frac{\prod_{i=1}^{2n} i}{\prod_{i=2n}^{3n-1} i}$

Задача 5 (*продолжение 4*) (1.5 балла)

Найти вероятность того, что заданный ящик содержит ровно m шаров.

Решение

Количество всех исходов остается таким же: C_{3n-1}^{n-1}. Количество исходом, устраивающих нас можно найти из условия того, что в один ящик заведомо положили m шаров, а остальные $n-m$ распределяются между оставшмимися $n-1$ ящиками. Используем метод шаров и перегородок, получим, что число вариантов распределить $n-m$ шаров между $n-1$ есть: $C_{n-1+m-1}^{m-1}$, тогда по определению вероятности:

$p=\frac{C_{n-1+m-1}^{m-1}}{C_{3n-1}^{n-1}}$

Задача 6 (4 балла)

Пусть $A_1, A_2, \dots$ – последовательность независимых событий. Доказать, что

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_k)$$

Решение

Рассмотрим сперва пересечение конечного числа (n) независимых в совокупности событий:

(1) $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)$. Тут мы воспользовались определением независимых в совокупности событий. Тогда:

$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)$ (тут пользуемся предыдущим пунктом (1), тк

$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_k)$, то

$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_k)$, чтд.

Задача 7 (3 балла)

В самолете n мест. Есть n пассажиров, выстроившихся друг за другом в очередь. Во главе очереди – «заяц» (пассажир без билета). У всех, кроме «зайца», есть билет, на котором указан номер посадочного билета. Так как «заяц» входит первым, он случайным образом занимает некоторое место. Каждый следующий пассажир, входящий в салон самолета, действует по такому принципу: если его место свободно, то садится на него, если занято, то занимает с равной вероятностью любое свободное. Найдите вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место.

Решение

Возможны следующте ситуации: заяц сядет на свободное место, заяц занимает чье-то место. Если происходит первый вариант, то все остальные пассажиры просто садятся на свои места. Вероятность этого $p_1=\frac{1}{n}$.Если же заяц садится на чужое место, то вероятность будет зависеть от номера пассажира, на чье место он сел. Пусть этот пассажир под номером k, тогда все пассажиры до k садятся на свои места, а пассажир с номером $k+1$ снова играет роль зайца, только уже в задаче с $n-k$ мест.

Рассмотрим задачу при $n=2$: тогда заяц либо садится на свободное место, либо занимает место второго пассажира, $\Rightarrow p_2=\frac{1}{2}$. При $n=3$, тогда либо заяц садится на свободное, либо на место второго пассажира, при этом задача сводится к задаче при $n=2 \Rightarrow p_3=\frac{1}{3}(p_2+1)=\frac{1}{2}$. При $n=4$, аналогичными рассуждениями получаем: $p_4=\frac{1}{4}(p_3+p_2+1)=\frac{1}{2}$, что наталкивает на мысли о том, что $p_n=\frac{1}{2}$. Докажем это по индукции. Пусть $p_{n-1}=\frac{1}{2}$, тогда применяя рассуждения из начала решения получаем, что $p_n=\frac{1}{n}(p_{n-1}+\dots+p_3+p_2+1)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\cdot(n-2)+1\right)=\frac{1}{2}$. чтд

Ответ: $p=\frac{1}{2}$

Задача 8 (5 баллов)

Пусть мужик производит эксперимент, который может завершиться любым из N способов, причем i-й результат происходит (независимо от мужика) с вероятностью p_i. Пусть мужик может врать или говорить правду вне зависимости от того, какой результат наблюдает (хотя его ответ, естественно, от наблюдения зависит), причем говорит правду с вероятностью p_{true}, а врет с вероятностью $p_{lie}=1-p_{true}$. Если он говорит правду, он называет результат, который имеет место. Если он врет, то он равновероятно говорит любой из оставшихся $N-1$ вариантов. Требуется найти вероятность того, что произошло условие i, при условии, что мужик сказал, что произошло условие i.

Решение

Воспользуемся формулой условной вероятности:

$p(i-happen|mansaidthatithappen) =$

$= \frac{p(mansaidthatithappen|i-happen)\cdot p(i-happen)}{p(mansaidthatithappen|i-happen)\cdot p(i-happen)+p(mansaidthatithappen|not \quad i-happen)\cdot p(not \quad i-happen)}$

$= \frac{p_{true}\cdot p_i}{p_{true}\cdot p_i+(1-p_{true})(1-p_i)/(N-1)} = \frac{p_{true}\cdot p_i\cdot(N-1)}{p_{true}\cdot p_i\cdot(N-1)+(1-p_{true})(1-p_i)}$