# Домашняя работа 3 (дедлайн – 12:00 23.10.21)

October 22, 2021

**Задача 1** (5 баллов) Пусть $\xi, \eta \sim \mathrm{Exp}(1)$ – независимые случайные величины. Найдите распределение случайной величины $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ (подсказка: рассмотрите преобразование обратное к преобразованию $(\xi, \eta) \longrightarrow (\zeta, \theta), \zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}, \theta = \xi + \eta$ и выразите $f_{\zeta,\theta}(z, u)$, используя $f_{\zeta,\theta}(z, u)$).

**Задача 2** (3 балла)

Пусть $\xi \sim \mathrm{Poly}(k, p_1, p_2, \dots, p_n)$. Покажите, что $\xi_i \sim \mathrm{Bi}(k, p_i)$

**Решение**

Рассмотрим полиномиальное распределение: $\xi \sim \mathrm{Poly}(k, p_1, p_2, \dots, p_n)$:

$F_\xi(x_1, \cdots, x_i, \cdots x_n) = P(\xi_1 < x_1, \cdots, \xi_i < x_i, \cdots, \xi_n < x_n)$, устремляя $x_1, \cdots, x_{i-1}, \cdots, x_n$ к $\infty$, получаем:

$F_{\xi_i}(x_i) \Rightarrow \xi_i \sim \mathrm{Bi}(k, p_i)$

**Задача 3** (5 баллов) Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках $(-1, 0), (0, 1), (1, 0)$. Найти распределение случайной величины $\eta = \frac{\xi_1+\xi_2}{2}$

**Решение**

Рассмотрим преобразование:

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{\xi_1+\xi_2}{2} \\ \eta_2 = \frac{\xi_1-\xi_2}{2} \end{cases}$$

$\det(\mathrm{A}) = \frac{-1}{2}$, где A-матрица преобразования. Обозначим треугольник с вершинами в точках $(-1, 0), (0, 1), (1, 0)$ за $G$. Тогда

$$\begin{cases} f_{\xi_1,\xi_2} = 1, (x, y) \in G \\ f_{\xi_1,\xi_2} = 0, (x, y) \notin G \end{cases}$$

Найдем обратно преобразование:

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1 + \eta_2 \\ \xi_2 = \eta_1 - \eta_2 \end{cases}$$

, тогда новая область $G'$ задается совокупностью двух систем:

$$\begin{cases} -1 \le \eta_1 + \eta_2 \le 0 \\ 0 \le \eta_1 - \eta_2 \le \eta_1 + \eta_2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le \eta_1 + \eta_2 \le 1 \\ 0 \le \eta_1 - \eta_2 \le 1 - (\eta_1 + \eta_2) \end{cases}$$

Данная область является треугольников с вершинами в $(-1/2, -1/2), (1/2, -1/2), (1/2, 1/2)$, тогда

$f_{\eta_1} = \int\limits_{-1/2}^{x} 2dv = 2x + 1$

**Задача 4** (3 балла) В каждую $i$-ую единицу времени живая клетка получает случайную дозу облучения $X_i$, причем $\{X_i\}_{i=1}^t$ имеют одинаковую функцию распределения $F_X(x)$ и независимы в совокупности для любого

$t$. Получив интегральную дозу облучения, равную $\nu$, клетка погибает. Оценить среднее время жизни клетки $\mathrm{E}T$.

**Решение**

Клетка жива в момент времени $\tau$, если (1) $\sum\limits_{i=1}^{T} X_i < \nu$, и мертва, если (2) $\sum\limits_{i=1}^{T} X_i \geq \nu$ возьмем мат ожидание от обеих частей (2): $\mathrm{E}(\sum\limits_{i=1}^{T} X_i) \geq \mathrm{E}\nu = \nu$, в то время , как:

$\mathrm{E}(\sum\limits_{i=1}^{T} X_i) = \mathrm{E}T\mathrm{E}X_i = \mathrm{E}T \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x)$, тогда :

$\mathrm{E}T \geq \frac{\nu}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x)}$

**Задача 5** (4 балла) Пусть $N$ – случайная величина, принимающая натуральные значения, $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – некоррелированные одинаково распределенные случайные величины с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями, не зависящие от $N$. Рассмотрим $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i$. Посчитайте $\mathrm{D}S_N$.

**Решение**

Сначала посчитаем мат ожидание $S_N$: $\mathrm{E}S_N = \mathrm{E}N \cdot \mathrm{E}\xi_i$

Тогда $\mathrm{D}S_N = \mathrm{E}(S_N)^2 - (\mathrm{E}(S_N))^2 = \mathrm{E}(\sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i^2 + \sum\limits_{j \neq k} \xi_j \xi_k) - (\mathrm{E}N \cdot \mathrm{E}\xi_i)^2 = \mathrm{E}N\mathrm{D}\xi_i + \mathrm{D}N(\mathrm{E}\xi_i)^2$

**Задача 6** (5 баллов) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимые одинаково распределённые с.в. с конечным мат.ожиданием, $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Доказать, что

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \eta_n, \eta_{n+1}, \dots) = \frac{\eta_n}{n}$$