Домашняя работа 2 (дедлайн – 12:00 9.10.21)

October 8, 2021

Задача 1 (3 балла)

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.) с функцией распределения $F(x)$. Найти функции распределения $\max\limits_{1 \le i \le n} X_i$ и $\min\limits_{1 \le i \le n} X_i$.

Решение

По определению: $F_{X_i}(x) = P(X_i < x)$, тогда рассмотрим фунцию распределения случайной величины $\eta = \max\limits_{1 \le i \le n} X_i \Rightarrow F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\max\limits_{1 \le i \le n} X_i < x) = P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i < x))$, тогда пользуясь независимостью величин:

$F_\eta(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i < x) = F^n(x)$. Аналогично во втором пункте: $\eta = \min\limits_{1 \le i \le n} X_i \Rightarrow F_\eta(x) = P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}(X_i < x))$, используя формулу вулючений-исключений, получаем:

$F_\eta(x) = \sum\limits_{J \subset [n]} (-1)^{|J|+1} P(B_J)$, где $B_J = \bigcap\limits_{j \in J}(X_j < x)$

Задача 2 (3 балла) Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\frac{1}{2}(\xi + |\xi|)$

Решение

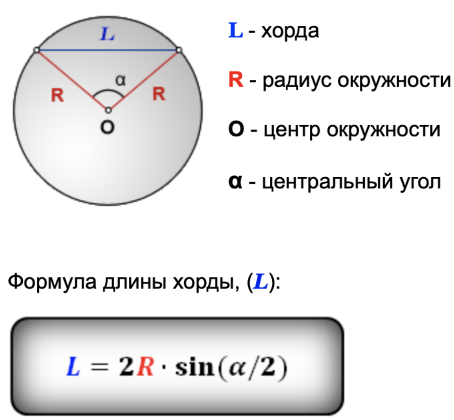
Заметим, что при $\xi > 0$ $\eta = \frac{1}{2}(\xi + |\xi|) = \xi$, а при $\xi < 0 : \eta = 0$. Тогда : $F_\eta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ F_\xi(x) & x \ge 0 \end{cases}$

Задача 3 (3 балла)

В круглой комнате произвольным образом провели диаметр и в одном из концов этого диаметра поставили прожектор так, чтобы он мог светить внутрь комнаты (направление, в котором светит прожектор задаётся углом α, который отсчитывается от направления проведённого диаметра; $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ – отрицательный угол отсчитывается по часовой стрелке от направления диаметра, положительный – против часовой). Найти функцию распределения длины луча от прожектора до стены, если угол α – это равномерно распределённая случайная величина на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Решение

Перефразируем задачу в терминах теории вероятности: для этого найдем, как зависит длина хорды от



угла, образованного хордой и диаметром.

Положим радиус окружности равным 1 для удобства. Тогда, обозначив угол между хордой и диаметром за β, получим, что длина луча будет равна:

$L = 2\cos\beta$, то есть задача сводится к нахождению фунции распределения случайной величины $\eta = 2\cos\alpha$, где α- с.в., равномерно распределенная на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Рассмотрим фунцию распределения α: $F_\alpha(x) = P(\alpha < x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} & x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ 1 & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $F_\eta(y) = P(2\cos\alpha < y)$, если $y < 0$, то $F_\eta(y) = 0$, при $y > 2$ $F_\eta(y) = 1$, если $y \in (0; 2]$, то

$F_\eta(y) = P(2\cos\alpha < y) = P(-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\arccos y \bigcup \arccos y < \alpha < \frac{\pi}{2}) = P(-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\arccos y) + P(\arccos y < \alpha < \frac{\pi}{2}) = \frac{-\arccos y + \frac{\pi}{2}}{\pi} + \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos y}{\pi} = \frac{\pi - 2\arccos y}{\pi}$. Итого:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{\pi - 2\arccos y}{\pi} & y \in (0; 2] \\ 1 & y > 2 \end{cases}$$

Задача 4 (4 балла)

Допустим, что вероятность столкновения молекулы с другими молекулами в промежутке времени $[t, t+\Delta t)$ равна $p = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ и не зависит от времени, прошедшего после предыдущего столкновения ($\lambda = const$). Найти распределение времени свободного пробега молекулы (показательное распределение) и вероятность того, что это время превысит заданную величину $t^\star$

Решение

Разобьем полуинтревал [0;t) на n равных отрезков длины $\frac{t}{n}$. Тогда рассмотрим событие A_i, которое заключается в том, что на i-ом из отрезков произошло столкновение молекул. Тогда:

$P(A_i) = \frac{\lambda \cdot t}{n} + o(\frac{1}{n})$, рассмотрим вторую часть задачи то, что время свободного пробега превысит заданную величину $t^\star$ означает, что $\forall t < t^\star$ столкновения не было. Обозначим это событие за B. Тогда $P(B) = P(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i})$ $= (1 - (\frac{\lambda \cdot t}{n} - o(\frac{1}{n})))^n \to_{n\to\infty} e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow$.

Распределение $F_\xi(t) = e^{-\lambda t}$, вероятность того, что это время превысит заданную величину $t^\star$: $e^{-\lambda t^\star}$

Задача 5 (2 балла)

Диаметр круга измерен приближенно. Считая, что его величина равномерно распределена в отрезке $[a, b]$, найти распределение площади круга, её среднее значение и дисперсию.

Решение

Площадь круга выражается через диаметр по известной формуле:

$S = \frac{\pi d^2}{4}$, где d-св-равномерно распределенная на отрезке [a;b]. Функция плотности распределения

$$f_d(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a; b] \\ 0 & \notin [a; b] \end{cases}$$

Тогда рассмотрим $F_S(y) : F_S(y) = \int\limits_{-\sqrt{\frac{4y}{\pi}}}^{\sqrt{\frac{4y}{\pi}}} \frac{dx}{b-a} = \frac{4\sqrt{y}}{(b-a)\cdot\sqrt{\pi}}$

Среднее значение, очевидно, равно: $d = \frac{a+b}{2}$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой: $Dd = Ed^2 - (Ed)^2$, $f_d(x) = \frac{1}{(b-a)\cdot\sqrt{y}} \Rightarrow Ed^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{(b-a)\cdot\sqrt{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$

Задача 6 (2 балла)

Пусть случайные величины ξ и η независимы и $\mathbb{E}\xi = 1$, $\mathbb{E}\eta = 2$, $\mathbb{D}\xi = 1$, $\mathbb{D}\eta = 4$. Найти математические ожидания случайных величин:

а) $\xi^2 + 2\eta^2 - \xi\eta - 4\xi + \eta + 4$; б) $(\xi + \eta + 1)^2$

Решение

а)$\mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{D}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2 = 2$ $\mathbb{E}\eta^2 = \mathbb{D}\eta + (\mathbb{E}\eta)^2 = 6$ $\mathbb{E}(\xi^2 + 2\eta^2 - \xi\eta - 4\xi + \eta + 4) = \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}\eta^2 - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta - 4\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta + 4 = 14$

б) $\mathbb{E}((\xi + \eta + 1)^2) = \mathbb{E}\xi^2 + \mathbb{E}\eta^2 + 1 + 2\mathbb{E}\xi + 2\mathbb{E}\eta + 2\mathbb{E}\eta\mathbb{E}\xi = 19$

Задача 7 (3 балла)

а) Пусть ξ – положительная невырожденная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\frac{1}{\mathbb{E}\xi} \le \mathbb{E}\frac{1}{\xi}$$

б) Пусть ξ и η – независимые положительные случайная величины, с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\mathbb{E}\Big(\frac{\xi}{\eta}\Big)^r \ge \frac{\mathbb{E}\xi^r}{\mathbb{E}\eta^r}$$

Решение

а) тк $g(x) = \frac{1}{x}$- выпуклая на $(0; +\infty)$, то $g(x) \geq g(\mathbb{E}x) + g'(x)(x - \mathbb{E}x)$ тогда возьмем МО от обеих частей. Получим: $\mathbb{E}(g(x)) \geq g(\mathbb{E}x) + \mathbb{E}(g'(x)) \cdot (\mathbb{E}(x) - \mathbb{E}(x)) \Rightarrow \mathbb{E}(g(x)) \geq g(\mathbb{E}x)$, подставляя $g(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{E}\frac{1}{x} \geq \frac{1}{\mathbb{E}x}$

б) **Задача 8** (5 баллов)

На небольшом кластере GPU прямо сейчас очередь на обучение из 30 нейросетей. Единовременно на кластере может обучаться только одна сеть. За каждую нейросеть отвечают разные ML-инженеры. Нейросети имеют разные свойства: 10 из них больших (время их обучения 15 часов) и 20 маленьких (время их обучения 1 час). Пока не наступил момент начала обучения, разработчик переживает и внимательно следит за очередью, бесполезно растрачивая время. Посчитайте математическое ожидание, сколько человеко-часов будет потрачено на переживания разработчиков ровно с текущего момента (кластер освободился и начинает обрабатывать очередь, описанную выше), если задачи в очереди расположены в случайном порядке

Решение

Пусть времена обучения нейросетей записаны в массив A, где A_i– время обучения i-ой нейросети, $i \in [1; n]$. Тогда время ожидания i-ого инженера есть: $\sigma_i = \sum\limits_{k=1}^{i-1} A_i$, тогда нам нужно найти М.О. следующей величины: $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{i-1} A_i \right)$.

$$\mathbb{E}S = \sum$$

Понятно, что все исходы равновероятны, но посчитать значения этих исходов - NPh задача. Поэтому, я не знаю, как это сделать, кроме как перебрать руками.