

L. Bir küpün hacmi  $10 \text{ cm}^3/\text{dk}$

hızla artmaktadır. Küpün bir kenarı  $30 \text{ cm}$  olduğunda yüzey alanı hangi hızla artar?

### Veriler

$x$ : küpün bir kenarı

$V$ : " hacmi

$S$ : " yüzey alanı

$$V = x^3, \frac{dV}{dt} = 10 \text{ cm}^3/\text{dk}$$

$$S = 6x^2, \frac{dS}{dt} = ? \quad (\text{hangi orda? } x=30 \text{ old.})$$

$$V = x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3x^2} \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{10}{3x^2}$$

$$S = 6x^2 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 6 \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt} = 12x \cdot \frac{10}{3x^2} = \frac{40}{x} \Big|_{x=30} = \frac{4}{3}$$

**2.** Bir dairenin yarıçapı **2 cm/sn** hızla artmaktadır. Dairenin çevresi **200π cm** olduğunda, abni hangi hızla artar?

Verilerler

$x$ : dairenin yarıçapı ,  $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/sn}$

$C$ : dairenin çevresi  $C = 2\pi x$

$A$ : " alanı  $A = \pi x^2$

Dairenin çevresi  $200\pi$  ise  $2\pi x = 200\pi$   
 $\Rightarrow x = 100 \text{ cm}$  olur.

$$A = \pi x^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt}$$
$$= \pi \cdot 2 \cdot 100 \cdot 2 = 400\pi \text{ cm}^2/\text{sn.}$$

3. Bir parçacık  $y = \sqrt{1+x^3}$  eğrisi üzerinde hareket etmektedir. Parçacık (2,3) noktasında hızı  $4 \text{ cm/sndr}$  ise orda  $x$  koordinatının hızı kaçır?

### Verilenler

$$y = \sqrt{1+x^3}$$

$$x=2, y=3 \text{ iken } \frac{dy}{dt} = 4 \text{ cm/sn.}$$

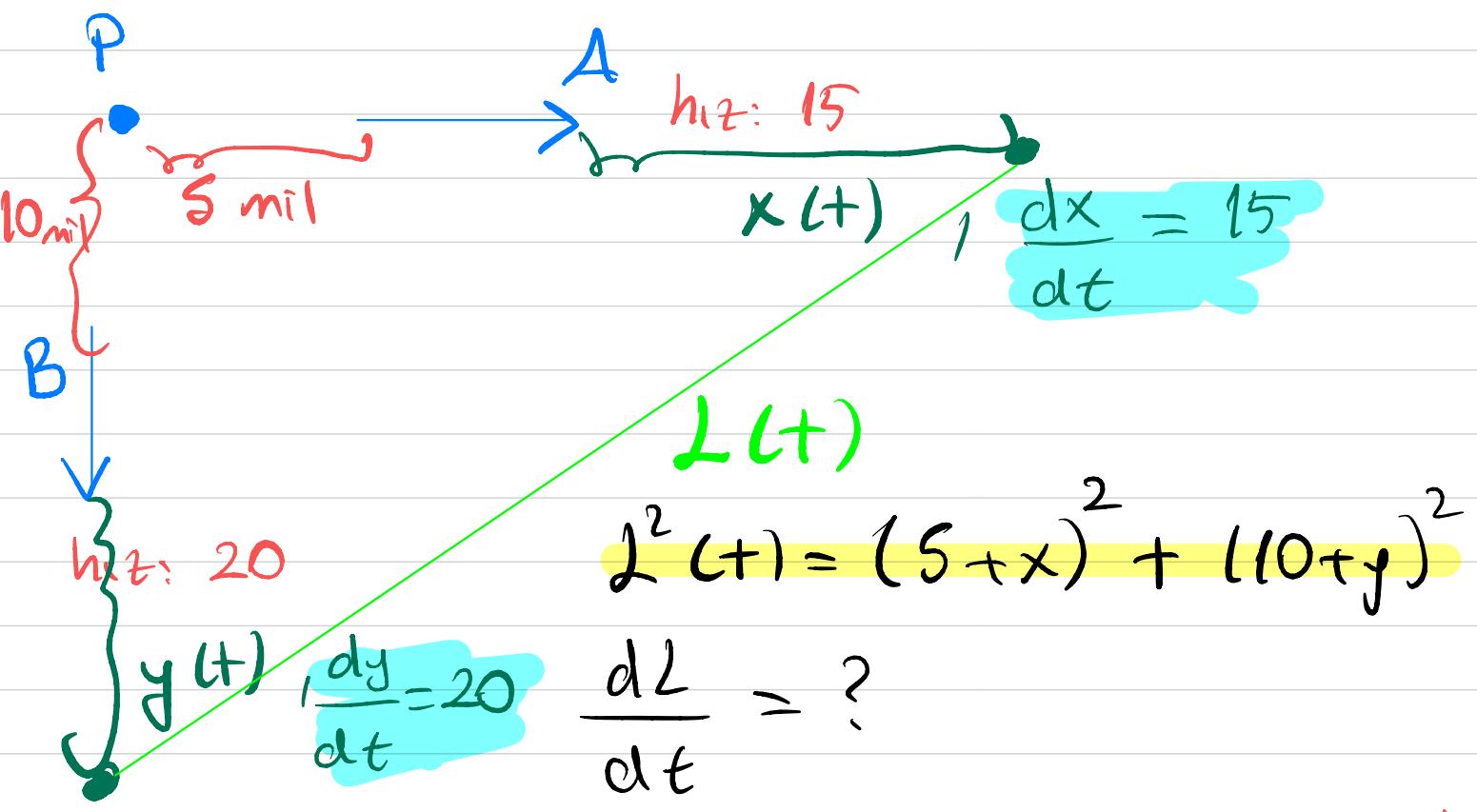
$$x=2, y=3 \text{ iken } \frac{dx}{dt} = ?$$

$$y = \sqrt{1+x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{1}{2} (1+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{6}{3} \frac{dx}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/sn}$$

4. A ve B gemileri P noktasından başka-  
yordak birbirlerine dik rotalarda hareket  
etmektedirler. A gemisinin hızı 15 knot  
(deniz mili / saat), B gemisinin hızı 20 knottır.  
Başlangıcta A gemisi P noktasından 5  
deniz mili uzaklıktadır, B gemisi 10 deniz mili  
uzaklıktadır. Olduğuuna göre, 1 saat sonra,  
birbirlerinden kaç mil uzaklaşmış hızları ne olur?



$$2 \cdot L \cdot \frac{dL}{dt} = 2 \cdot (5+x) \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \cdot (10+y) \cdot \frac{dy}{dt}$$

1 saat sonra

$$x = 15, \quad y = 20$$

$$10+20=30$$

$$\sqrt{400+900} = 10\sqrt{13} = 1$$

$$2 \cdot 2 \cdot \frac{dL}{dt} = 2 \cdot (5+x) \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \cdot (10+y) \cdot \frac{dy}{dt}$$

Tüketideki değiştende verileri yine getirelim.

Veriler:  $x = 15$ ,  $y = 20$ ,  $L = 10\sqrt{13}$

$$\frac{dy}{dt} = 20, \quad \frac{dx}{dt} = 15$$

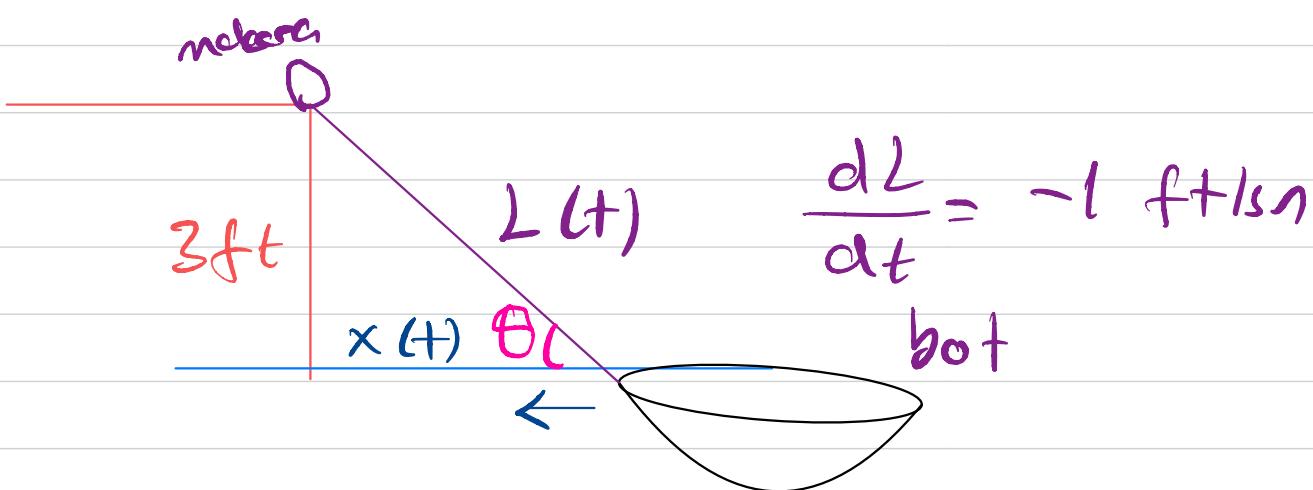
$$2 \cdot 10\sqrt{13} \cdot \frac{dL}{dt} = 2 \cdot (5+15) \cdot 15 + 2 \cdot (10+20) \cdot 20$$

~~$$2 \cdot 10\sqrt{13} \cdot \frac{dL}{dt} = 2 \cdot 20 \cdot 15 + 2 \cdot 30 \cdot 20$$~~

$$10\sqrt{13} \frac{dL}{dt} = 20 + 60 = 90$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{90}{10\sqrt{13}} \quad \text{d. mily./sət}$$

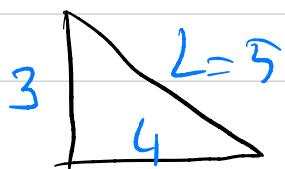
5. Bir nöktən ucu işkedeley 3 ft  
 esəqidəki bərən ucuqən həqbiyi.  
 Diger ucu de işkedeley məskəys  
 həqbiyi uə 1 ft/sə hitla bot  
 işkedeley qəliliyə. Bot işkedeley 4 ft  
 utaklutaq oldugunda işkedeley yekasın  
 hiti nədir uə suyuñ yüzeysi ilə  
 nöktən yaptığı aqı bu anda həqbi  
 hitla degisir?

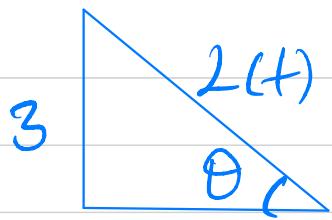


$$x=4 \quad \text{oldugundaq} \quad \frac{dx}{dt} = ? , \quad \frac{d\theta}{dt} = ?$$

$$L^2 = 3^2 + x^2 = 9 + x^2 \Rightarrow 2 \cdot L \cdot \frac{dL}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$5 \cdot (-1) = 4 \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{5}{4} //$$

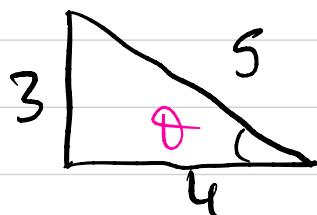




$$\sin \theta = \frac{3}{L(t)}$$

$$\cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{-3}{L^2(t)} \cdot \frac{dL}{dt}$$

$x = 4$  obwegen



$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{-3}{25} \cdot (-1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{20} //$$

Örnek! Lineerizasyon (teget doğrusu  
yaklaşımı) kullanarak  $(2.001)^5$   
değeriini yaklaşık olarak hesaplayınız.

**Göz:**  $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$   
 $f(x) \approx L(x)$

$$f(x) = x^5, \quad a=2$$

$$f'(x) = 5x^4$$

$$L(x) = a^5 + 5a^4(x-a), \quad a=2$$

$$L(x) = 32 + 80(x-2)$$

$$\begin{aligned}f(2.001) &\approx L(2.001) = 32 + 80(2.001-2) \\&= 32 + 80 \cdot 0.001 \\&= 32,08.\end{aligned}$$

Ömeli: Lineer Taylor kalkülüs

$\sqrt[3]{7,8}$  degerini yasaklı olrole hesaplayınız.

**Göz:**  $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a=8$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$L(x) = \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3} (8)^{-\frac{2}{3}} (x-8)$$

$$= 2 + \frac{1}{12} (x-8)$$

$$\sqrt[3]{7,8} = f(7,8) \approx L(7,8)$$

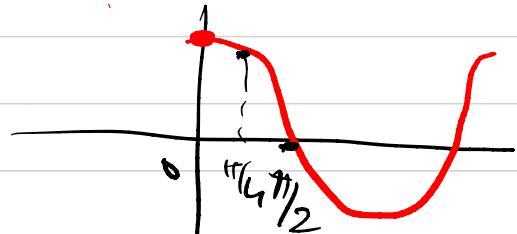
$$= 2 + \frac{1}{12} (7,8 - 8)$$

$$= 2 + \frac{1}{12} (-0,2)$$

$$= 2 - \frac{1}{60} = \frac{119}{60}$$

$$f'(x) = 3\sec^2 x + 3x^2, \quad x \in [0, \pi/4]$$

$$= \frac{3}{\cos^2 x} + 3x^2 > 0 \quad x \in [0, \pi/4]$$



olduguunda,  $f'(c) = 0$

ifadesi ile celişir.

$$0 \leq x \leq \pi/4$$

Denek ki  $c$  den farklı bir  $c_2$  hâlinde yoldur.

" $c$ " denkenin tek hâlinidir.

## 2. Ortakma Değer Teoremi Kullanarak

$$|\cos x - \cos y| \leq |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

olduguunu gösteriniz.

**GÖT:**  $f(t) = \cos t, \quad t \in [x, y]$  funk.

$\mathbb{R}$  de sürekli, türevlenebilir bir funk. old.

O.D.T. kullanabiliriz.

→ Ortakma Değer Teo. Sonucu

$$\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = f'(c)$$

O.S.  $c \in (x, y)$  verdir.

$$|\sin c| \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x - \cos y}{x-y} = -\sin c \Rightarrow \left| \frac{\cos x - \cos y}{x-y} \right| = |\sin c| \leq 1$$

$$\left| \frac{\cos x - \cos y}{x-y} \right| = \left| \frac{\cos x - \cos y}{x-y} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow |\cos x - \cos y| \leq |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3.  $2x - 1 - \sin x = 0$  denkleminin  
sadece 1 kökü olduğunu gösteriniz.

Göz:  $f(x) = 2x - 1 - \sin x$

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 - \sin 0 = -1 < 0$$

$$f(\pi) = 2\pi - 1 - \sin \pi = 2\pi - 1 > 0$$

$f$  fak. tüm  $\mathbb{R}$ 'de sürekli old. işin,

A-D. T.  $\exists c \in (0, \pi)$  vardır ki

$$f(c) = 0.$$

Vereyelim ki  $c$ 'den farklı başka bir  $c_2$  kökü olsun. Yani  $c \neq c_2$  ve  $f(c_2) = 0$

$f(c) = f(c_2)$  old. Rolle teoreminde

$\exists r \in (c, c_2)$  vardır ki  $f'(r) = 0$  olur.

$$f'(x) = 2 - \cos x \geq 1 \quad (-1 \leq \cos x \leq 1)$$

oldugundan  $f'(r) = 0$  ile anlaşır.

Dolayısıyla  $c$ 'den farklı  $c_2$  kökü yoktur. Denklemin sadece 1 kökü vardır.

şüreleli tarihlenebilir.

4. Bir  $f$  fonksiyonu için, her  $x \in [0, 3]$  için  $f'(x) \leq 2$  ve  $f(0)=1$  ise  $f(3) < 8$  olduğunu gösteriniz.

**Lözt:** Ortakuma Deger Terciminden;

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'(x) \text{ olacak şekilde}$$

$x \in (0, 3]$  verir.

$$\frac{f(3) - 1}{3} = f'(x) \leq 2$$

$$\frac{f(3) - 1}{3} \leq 2 \Rightarrow f(3) - 1 \leq 6$$

$$\Rightarrow f(3) \leq 7 < 8$$

$$\Rightarrow f(3) < 8$$