Fonksiyonlar Uygulama – 1

1) Aşağıdaki bağıntıların hangisi (hangileri) birer fonksiyondur, fonksiyon ise 1-1, artan, azalan, örtenliğini inceleyiniz.

a) $\alpha = \{(x,y) \mid |x|+y=0\}$, b) $\beta = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ 0 \le y,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1\}$

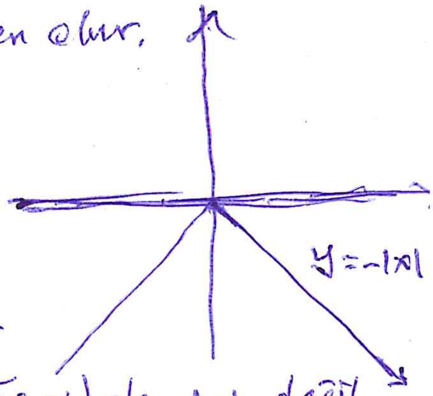
<u>Çözüm</u>: (a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 = x_2$ olsun ve $y = f(x) = -|x|$ den $-|x_1| = -|x_2|$ olup $f(x_1) = f(x_2)$ olur. $\Rightarrow f$ bir fonksiyondur.

<u>1-1 mi?</u> $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -|x_1| = -|x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ olmak zorunda değil. Örneğin $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ için $-|x_1| =$ dir ancak $x_1 \neq x_2$ dir, dolayısıyla 1-1 değil.

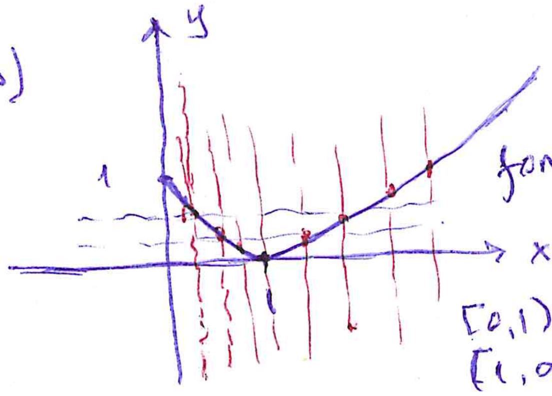
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $y = f(x) = -|x|$ <u>örten değil</u>, $y \in \mathbb{R}$ ($y = -2$ için $f(x) = |x| = -2$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ yoktur.

ancak, $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 0]$ $f(x) = -|x|$ örten olur.

$(-\infty, 0]$ da artan, $(0, \infty)$ da azalandır.



b)



fonksiyondur.

$[0,1)$ de azalan
$[1,\infty)$ da artan.

Örten.v
Ancak $[0,\infty)$ da 1-1 değil.
Fakat $[1,\infty)$ da 1-1 olur.

2) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz

a) $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2|x-2| - |x| + |x+1|$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] & , x \le -1 \\ -x^2 & , -1 < x \le 2 \\ x-6 & , 2 < x \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$; $f(x) = [\![|x|]\!] - |[\![x]\!]|$!

a)

	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
	I	II	III	IV	

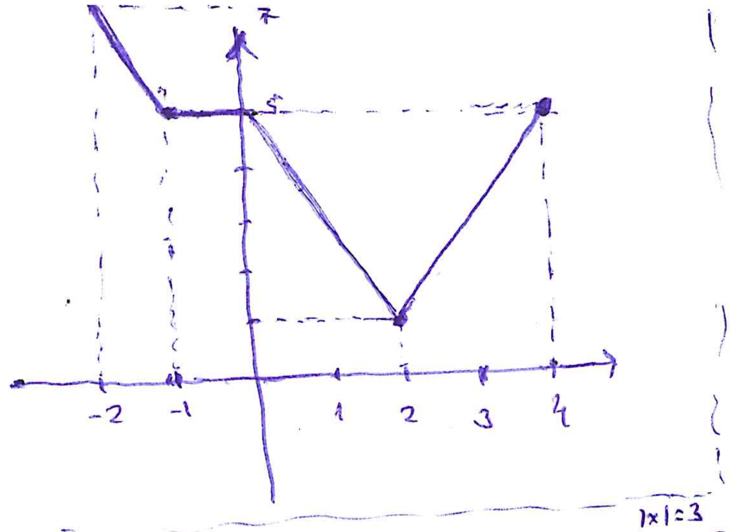
$\Rightarrow$ I için $x \in [-2,-1)$ ise $f(x) = -2(x-2) + x - x - 1$
$= -2x + 3$

II için $x \in [-1, 0)$ ise $f(x) = -2(x-2) + x + x + 1$
$= 5$

III. için $x \in [0, 2)$ ise $f(x) = -2(x-2) - x + x + 1$
$= -2x + 5$

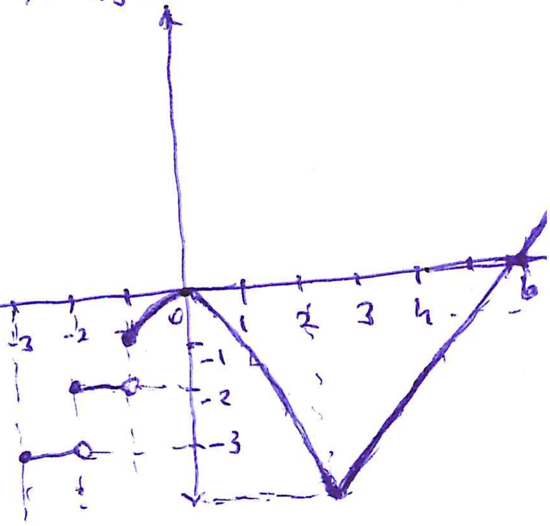
IV için $x \in [2, 4]$ ise $f(x) = 2(x-2) - x + x + 1$
$= 2x - 3$ dür

Böylece



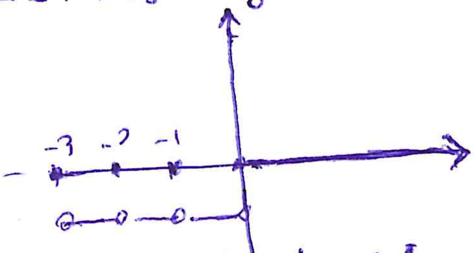
b) $-3 \le x < -2 \Rightarrow y = -3$
$-2 \le x < -1 \Rightarrow y = -2$
$x = -1 \Rightarrow y = -1$

$-1 < x \le 2$ için $y_2 = -x^2$
$2 < x$ için $y_3 = x - 6$ dır. Böylece



$|x| = 3$ ve $y = 3 - 3 = 0$

c) $-3 \le x < -2 \dashrightarrow 2 < |x| \le 3 \to y = 2 - |-3| = -1$
$-2 \le x < -1 \;\ldots\; 1 < |x| \le 2 \to y = 1 - |-2| = -1$ ($y=0$ 2 de)
$-1 \le x < 0 \;\ldots\; 0 < |x| \le 1 \to y = 0 - |-1| = -1$ (0)
$0 \le x < 1 \;\ldots\; 0 \le |x| < 1 - y = 0 - 1 = -1$ ($y=-1$)
$1 \le x < 2 \;\ldots\; 1 \le |x| < 2 \to y = 1 - 1 = 0$ (0)
$2 \le x < 3 \;\ldots\; 2 \le |x| < 3 - y = 2 - 2 = 0$



3) Aşağıdaki fonksiyonlardan tersinir olanların ters fonksiyonlarını, bunların tanım kümelerini ve değer kümelerini bulunuz

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, b) $g(x) = \sqrt[3]{x-2} + 3$ c) $h(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

Çözüm: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dir.
Ayrıca her bir $x_1, x_2 \in D_f$ için $f(x_1) = f(x_2)$ olsun $\Rightarrow \dfrac{x_1 - 1}{x_1 + 2} = \dfrac{x_2 - 1}{x_2 + 2}$
$x_1, x_2 \neq -2$ $\Leftrightarrow \cancel{x_1 x_2} - x_2 + 2x_1 - \cancel{2} = \cancel{x_1 x_2} - x_1 + 2x_2 - \cancel{2} \Rightarrow 3x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$ olup
f, $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ de 1-1 dir. $\Rightarrow f$ tersinirdir ve ters fonksiyonu da;
$f^{-1} = \{(y, x) \mid y \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\},\ y = \dfrac{x-1}{x+2}\}$
$= \{(y, x) \mid y \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\};\ x = \dfrac{2y+1}{1-y}\}$ olup;
$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$ dır.

b) $D_g = \mathbb{R}$ ve $R_g = \mathbb{R}$ dir. $\forall x_1, x_2 \in D_g$ için $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow$
$\sqrt[3]{x_1 - 2} + \cancel{3} = \sqrt[3]{x_2 - 2} + \cancel{3} \Rightarrow x_1 = x_2$ olup g de 1-1 dir $\Rightarrow$ tersinirdir
$g^{-1}(x) = (x-3)^3 + 2$ olur (çünkü; $y = \sqrt[3]{x-2} + 3 \Rightarrow (y-3)^3 = (\sqrt[3]{x-2})^3$
$\Rightarrow (y-3)^3 = x - 2 \Rightarrow x = 2 + (y-3)^3$ dür)

c) $h(x) = \begin{cases} -x+1, & x<1 \\ x^2, & x\geq 1 \end{cases}$ idi; $f_1(x) = -x+1$, $D_{f_1} = (-\infty, +1)$, $R_f = (-\infty,$

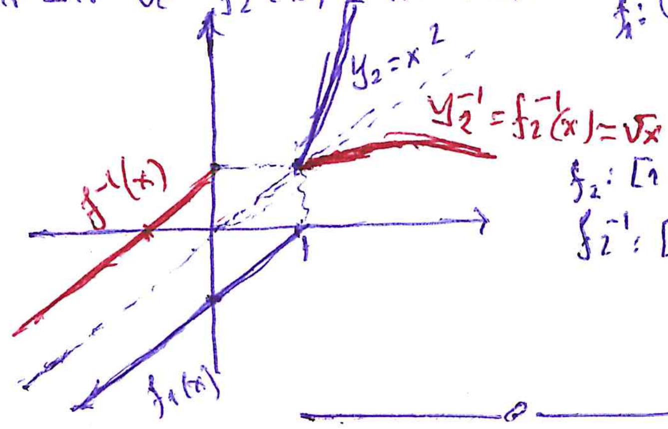
ve f_1 fonks. $(-\infty, 1)$ de 1-1 $\Rightarrow$ $f_1(x)$ in tersi var ve $f_1^{-1}(x) = -x+1$ dir

$f_2(x) = x^2$ ve $D_{f_2} = [1,\infty)$ ve $R_{f_2} = [1,\infty)$ dir. f_2 fonksiyonu da $[1,\infty)$ da

1-1 olup tersinir dir ve $f_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$ olur.

$f_1 : (-\infty, 1) \to (-\infty, 0)$

$f_1^{-1} : (-\infty, 0) \to (-\infty,$



$f_2 : [1,\infty) \to [1,\infty)$, $y_2 = x^2$

$f_2^{-1} : [1,\infty) \to [1,\infty)$, $f_2^{-1}(x)$

Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz

4) (a) $f(x) = \dfrac{\mathrm{Sgn}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}\right)}{[\![x/2]\!]+3}$ (b) $g(x) = \sqrt{\sqrt{x-2}-3}$

Çözümler: $f_1(x) = \mathrm{Sgn}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}\right)$, $D_{f_1} = \{x\in\mathbb{R} \mid 1-x^2 \geq 0 \text{ ve } x\neq 1\} = [-1,1)$

$f_2(x) = [\![x/2]\!]+3 \longrightarrow D_{f_2} = \mathbb{R}$ ve için $[\![x/2]\!]+3 = 0 \Leftrightarrow [\![x/2]\!] = -3$

$\Rightarrow -3 \leq x/2 < -2 \Rightarrow -6 \leq x < -4$ dür.

Böylece $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \setminus \{x\in\mathbb{R} \mid [\![x/2]\!]+3 = 0\}$

$= [-1,1) \setminus [-6,-4) = [-1,1)$ dir.

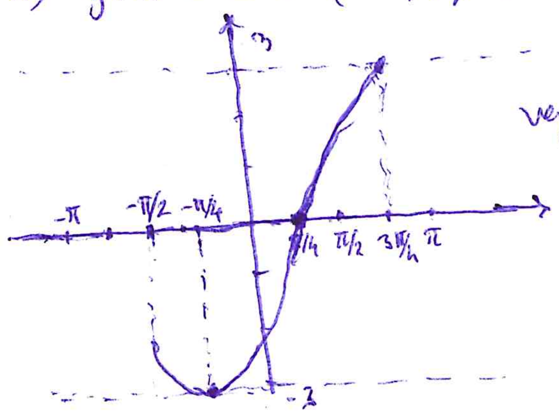
b) $D_g = \{x\in\mathbb{R} \mid \sqrt{x-2}-3 \geq 0\} = \{x\in\mathbb{R} \mid \sqrt{x-2} \geq 3\} = \{x\in\mathbb{R} \mid x-2 \geq 9$

$= \{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 11\} = [11,\infty)$ olur.

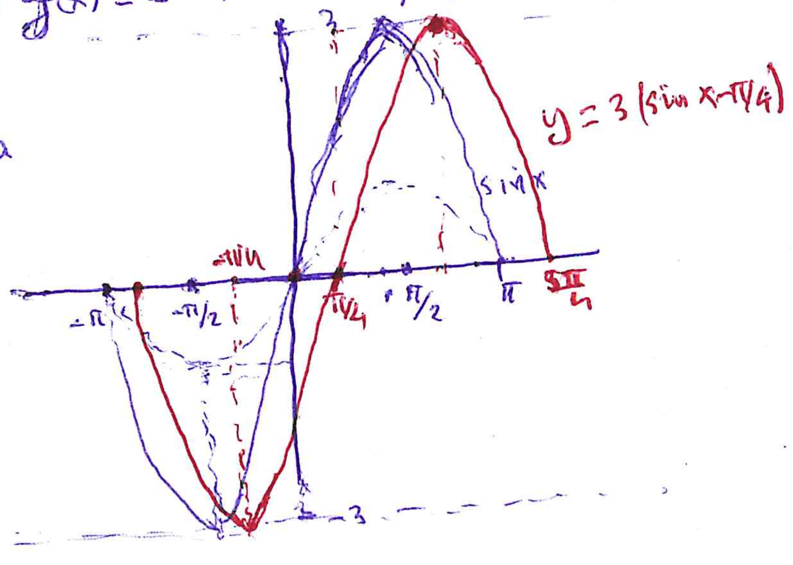
5) Aşağıdakilerin grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = 3.\sin(x-\pi/4)$, b) $g(x) = 3\cos x - 4\sin x$, (c) $h(x) = |\tan x|$

a)

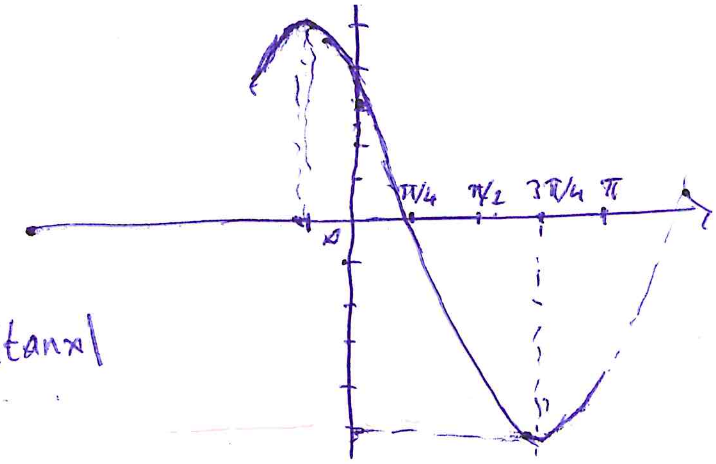


veya

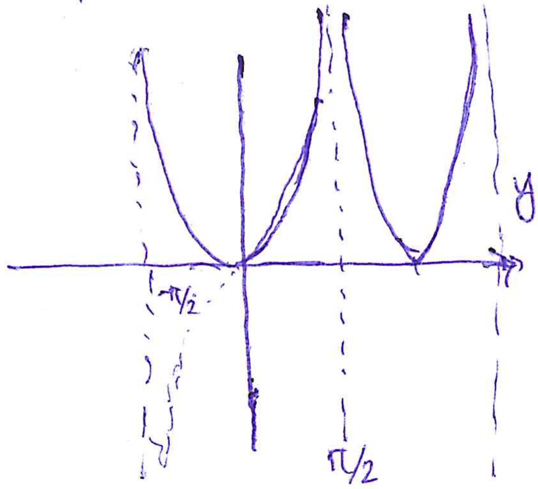


b)

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$g(x)$	3	$-\sqrt{2}/2$	-4	$-\frac{7\sqrt{2}}{2}$	3



c)



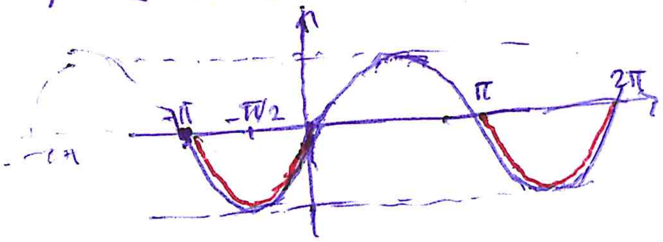
6) Aşağıdaki eşitliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

(a) $f(x) = \cos(\cos x) = 0$ (b) $[\![\sin x]\!] = -1$

Çözüm: (a) $\cos(\cos x) = 0 \iff \cos x = (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ için $|(2k+1)\pi/2| > 1$ olacağından Ç.K. $= \emptyset$ d

b) $[\![\sin x]\!] = -1 \Rightarrow -1 \leq \sin x < 0$



$= (-3\pi, -2\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \cup \cdots$

Ç.K. $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$ dı

7) Aşağıdaki eşitlikler doğru mudur?

(a) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \csc x - \cot x$, b) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \tan x$ (?)

a) $$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{\cancel{\sin x}(1-\cos x)}{\underbrace{(1+\cos x)(1-\cos x)}_{1-\cos^2 x = \sin^{\cancel{2}} x}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x \text{ dı}$$

b) $$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin x.\cos x}{\underbrace{1+\cos^2 x - \sin^2 x}_{(1-\sin^2 x = \cos^2 x)}} = \frac{\cancel{2}\sin x.\cancel{\cos x}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}} x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \text{ olur.}$$