7. KOŞULLU OLASILIK

Şimdiye kadar ki olasılıklar bulunurken örneklem uzayının tümü düşünüldü. Örneklem uzayının bir alt kümesindeki olasılıklar örneklem uzayındakinden farklıdır. Örneklem uzayının bir alt kümesindeki olaylara ilişkin olasılıklara koşullu olasılık ve örneklem uzayının belirlenen alt kümesine ise **indirgenmiş örneklem uzayı** denir.

Koşullu olasılıkta bir rasgele deneyin sonucunda ortaya çıkan bir A olayının olasılığının, ortaya çıktığı bilinen bir B olayından nasıl etkilendiği ile ilgilenilir. B olayına ilişkin ek bilgi olasılık hesabına dahil edilir. Böylece A olayının B olayına göre koşullu olasılığı bulunur. Kısaca, koşullu olasılık bir olayın ortaya çıktığı bilindiğinde bir başka olayın ortaya çıkması olasılığıdır.

Örnek:

Üç para atma rasgele denemesinde üst yüzeye en az iki yazı geldiği biliniyorsa, üç yazının gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm:

Örneklem uzayını oluşturalım:

$$S = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}$$

Ek Bilgi: En az iki yazı geldi.

İndirgenmiş örneklem uzayını oluşturalım:

$$S_{İ} = \{YYY, YYT, YTY, TYY\}$$

A: Üç yazının gelmesi

B: En az iki yazının gelmesi

$$P(A|B) = \frac{\text{İndirgenmiş örneklem uzayında A olayının sonuçlarının sayısı}}{\text{İndirgenmiş örneklem uzayındaki sonuç sayısı}} = \frac{1}{4}$$

Örnek: Bir üniversitenin rektörü, tüm öğrencilerin etik dersini bir mezuniyet koşulu olarak alması gerektiğini önermektedir. Bu üniversitede 300 öğretim üyesi ve öğrenciye bu konudaki görüşleri sorulmuştur. Görüşü alınan öğretim üyeleri ve öğrencilerin rektörün önerisine olumlu, olumsuz ya da nötr olduklarını belirten cevapları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Olumlu	Olumsuz	Nötr	Toplam
Öğretim Üyesi	45	15	10	70
Öğrenci	90	110	30	230
Toplam	135	125	40	300

Buna göre,

a) Seçilen bir kişinin rektörün önerisine olumlu olduğu bilindiğinde, bu kişinin öğretim üyesi olması olasılığı nedir?

b) Seçilen kişinin öğrenci olduğu bilindiğinde, bu kişinin rektörün önerisine olumsuz olması olasılığı nedir?

c) Öneriye nötr olduğu bilinen bir kişinin, öğrenci olması olasılığı nedir?

d) Öğretim üyesi olduğu bilinen bir kişinin, olumsuz olması olasılığı nedir?

Çözüm:

A : $Olumlu\ olma$
B : $Olumsuz\ olma$
C : $Nötr\ olma$
D : $Öğretim\ üyesi\ olma$
E : $Öğrenci\ olma$

$$P(A) = \frac{135}{300} = 0.45 \quad , \quad P(B) = \frac{125}{300} = 0.42 \quad , \quad P(C) = \frac{40}{300} = 0.13$$
$$P(D) = \frac{70}{300} = 0.23 \quad , \quad P(E) = \frac{230}{300} = 0.77$$

Araştırmaya katılanların, 23%’ ü öğretim üyesi, 77%’ si öğrencidir. Görüşlerin 45%’ i olumlu, 42%’ si olumsuz ve 13%’ ü nötrdür.

$$P(A \cap D) = \frac{45}{300} = 0.15 \quad , \quad P(A \cap E) = \frac{90}{300} = 0.30$$
$$P(B \cap D) = \frac{15}{300} = 0.05 \quad , \quad P(B \cap E) = \frac{110}{300} = 0.37$$
$$P(C \cap D) = \frac{10}{300} = 0.03 \quad , \quad P(C \cap E) = \frac{30}{300} = 0.10$$

Görüş bildirenlerin, 15%’ i öğretim üyesi ve olumlu; 30%’ u öğrenci ve olumlu; 5%’ i öğretim üyesi ve olumsuz; 37%’ si öğrenci ve olumsuz; 3%’ ü öğretim üyesi ve nötr; 10%’ u öğrenci ve nötrdür.

a) $P(D|A) = \frac{45}{135} = 0.33$
b) $P(B|E) = \frac{110}{230} = 0.48$
c) $P(E|C) = \frac{30}{40} = 0.75$
d) $P(B|D) = \frac{15}{70} = 0.21$

Yukarıda verilen örneklerde, koşullu olasılık indirgenmiş örneklem uzayı üzerinden bulunmuştur. Koşullu olasılık, S örneklem uzayı üzerinden de hesaplanabilir.

Tanım: B olayının ortaya çıktığı bilindiğinde A olayının ortaya çıkması olasılığına, A'nın B'ye göre koşullu olasılığı denir ve $P(A|B)$ ile gösterilir. $P(B) \neq 0$ olmak üzere,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

biçiminde bulunur.

Tanım: A olayının ortaya çıktığı bilindiğinde B olayının ortaya çıkması olasılığına, B'nin A'ya göre koşullu olasılığı denir ve $P(B|A)$ ile gösterilir. $P(A) \neq 0$ olmak üzere,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

biçiminde bulunur.

Örnek:
Bir çift zar atılması rasgele deneyinde üst yüzeye gelen sayıların birbirinden farklı olduğu görülüyor. Buna göre;

A : $Aralarındaki\ farkın\ mutlak\ değerinin\ dört\ olması$
B : $Toplamının\ dört\ olması$

olaylarının olasılıklarını bulunuz.

Çözüm:
C, üst yüzeye gelen sayıların birbirinden farklı olması olayı tanımlansın.

$A = \{(1,5),(5,1),(2,6),(6,2)\} \implies A \subset C'\ dir.\ A \cap C = A\ olur.$
$B = \{(1,3),(3,1),(2,2)\} \implies B \cap C = \{(1,3),(3,1)\}$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{2}{15}$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{15}$$

Örnek: Tüketici araştırmaları yapan bir şirket, büyük bir şehirde 200 lastik satıcısı tarafından sağlanan garanti kapsamındaki hizmeti incelemiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir:

	Garanti Servisi		
	İyi	**Kötü**	**Toplam**
Markalı Lastik Bayi	64	16	80
Markasız Lastik Bayi	42	78	120
Toplam	106	94	200

Buna göre,

a) Markalı bir lastik bayisinin garanti kapsamında iyi hizmet vermesi olasılığını bulunuz.

b) Garanti kapsamında iyi hizmet veren bir lastikçinin, markasız bir bayi olma olasılığını bulunuz.

Çözüm:

İ	:	$\text{İ}yi\ garanti\ sevisi$	M	:	$Markalı\ lastik\ bayi$
K	:	$Kötü\ garanti\ servisi$	N	:	$Markasız\ lastik\ bayi$

a) Markalı bir lastik bayisinin garanti kapsamında iyi hizmet vermesi olasılığını örneklem uzayı üzerinden hesaplayalım:

$$P(\text{İ}|M) = \frac{P(\text{İ} \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{64}{200}}{\frac{80}{200}} = 0.80$$

b) Garanti kapsamında iyi hizmet veren bir lastikçinin, markasız bir bayi olma olasılığını örneklem uzayı üzerinden hesaplayalım:

$$P(N|\text{İ}) = \frac{P(N \cap \text{İ})}{P(\text{İ})} = \frac{\frac{42}{200}}{\frac{106}{200}} = 0.40$$

Olasılıkta Çarpım Kuralı

Olasılıkları sıfırdan farklı A ve B rasgele olayları için, $(A \cap B)$ olayının olasılığı, A'nın B'ye göre koşullu olasılığı $P(A|B)$' den ya da B'nin A'ya göre koşullu olasılığı $P(B|A)$' dan bulunabilir.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

eşitliğine olasılıkta çarpım kuralı denir.

S örneklem uzayında olasılıkları sıfırdan farklı ve ayrık olmayan $A_1, A_2, \ldots, A_k$ olayları tanımlansın. Olasılıkta çarpım kuralı bu k olay için yazılmak istensin.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$
$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdots P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

Örnek: Bir kutuda 5' i bozuk 40 DVD bulunmaktadır.

a) Bu kutudan rastgele **yerine koymadan** üç DVD seçilirse, hepsinin bozuk olması olasılığı nedir?

b) Bu kutudan **yerine koymadan** seçilen beş DVD' nin sırayla, bozuk, sağlam, sağlam, bozuk, bozuk olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Kutudan çekilen DVD' ler tekrardan **yerine konulmadığı** için yapılan her çekim birbirine bağlıdır. Bu nedenle, ilgilenilen olayların olasılığı çarpım kuralından yararlanılarak bulunur.

S_i : $Seçilen\ i-inci\ DVD'nin\ sağlam\ olması$

B_i : $Seçilen\ i-inci\ DVD'nin\ bozuk\ olması$

a)
$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1 \cap B_2) \\ &= \frac{5}{40} \times \frac{4}{39} \times \frac{3}{38} \\ &= 0.001012 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(B_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap B_4 \cap B_5) &= P(B_1) \times P(S_2|B_1) \times P(S_3|B_1 \cap S_2) \\ &\quad \times P(B_4|B_1 \cap S_2 \cap S_3) \times P(B_5|B_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap B_4) \\ &= \frac{5}{40} \times \frac{35}{39} \times \frac{34}{38} \times \frac{4}{37} \times \frac{3}{36} \\ &= 0.0009042 \end{aligned}$$

Koşullu Olasılıkla ilgili Bazı Teoremler

Teorem 1: $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$'dir.

Tanıt: $P(A \cap B) \geq 0$' dır ve $P(A \mid B)$ koşullu olasılığın tanımında $P(B) \neq 0$ olduğundan, $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ olur.

$(A \cap B) \subseteq B$ olduğundan $P(A \cap B) \leq P(B)$' dir. Dolayısıyla, $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1$ olur. ■

Teorem 2: $P(A) \neq 0$ ise $P(S \mid A) = 1$'dir.

Tanıt: $P(S \mid A) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ elde edilir. ■

Teorem 3: $P(A \mid S) = P(A)$'dır.

Tanıt: $P(A \mid S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A)}{1} = P(A)$ olur. ■

Teorem 4: $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ ve $A \cap B = \emptyset$ (ayrık olaylar) ise; $P(A \mid B) = 0$ ve $P(B \mid A) = 0$'dır.

Tanıt: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$ ' dır.

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$' dır. ■

Teorem 5: $A \subseteq B$ ve $P(B) \neq 0$ ise, $P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$' dir.

Tanıt: $A \subseteq B$ olduğundan $A \cap B = A$' dır. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$ olur. ■

Teorem 6: $B \subseteq A$ ve $P(B) \neq 0$ ise, $P(A \mid B) = 1$' dir.

Tanıt: $B \subseteq A$ olduğundan $A \cap B = B$'dir. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ olur. ■

Teorem 7: $A \cap B = \emptyset$ (ayrık olaylar) ve $P(C) \neq 0$ ise

$$P[(A \cup B) \mid C] = P(A \mid C) + P(B \mid C)$$

olmaktadır.

Tanıt: A ve B ayrık olaylar olması nedeniyle $(A \cap C)$ ile $(B \cap C)$ olayları da ayrıktır.

$$\begin{aligned} P[(A \cup B) \mid C] &= \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= P(A \mid C) + P(B \mid C) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. ■

Teorem 8: $P(A \mid B) + P(A^C \mid B) = 1$' dir.

Tanıt: $A^C \cap B = B - (A \cap B)$ olduğundan $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$' dir.
$P(A^C \mid B) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A \mid B)$ elde edilir. ■

Teorem 9: Ayrık olmayan A, B ve C rasgele olayları için,

$$P[(A \cup B) \mid C] = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P[(A \cap B) \mid C]$$

olmaktadır.

Tanıt:

$$\begin{aligned} P[(A \cup B) \mid C] &= \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} \\ &= \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]}{P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} + \frac{P[(A \cap B) \cap C]}{P(C)} \\ &= P(A \mid C) + P(B \mid C) - P[(A \cap B) \mid C] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. ■

Teorem 10: $P(B) \neq 0$ olmak üzere $P(\emptyset \mid B) = 0$' dır.

Tanıt: $P(\emptyset \mid B) = \frac{P(\emptyset \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$ olur. ■

Teorem 11: $A \cap B = \emptyset$ (ayrık olaylar) ve $P(A) \neq 0$ ya da $P(B) \neq 0$ ise,

$$P[A \mid (A \cup B)] = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

olmaktadır.

Tanıt:

$$\begin{aligned} P[A \mid (A \cup B)] &= \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P[(A \cap A) \cup (A \cap B)]}{P(A) + P(B)} \\ &= \frac{P(A \cup \emptyset)}{P(A) + P(B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

8. RASGELE OLAYLARIN BAĞIMSIZLIĞI

Ortaya çıkma durumları birbirine bağlı olmayan olaylara bağımsız olaylar denir. A ve B rasgele olaylarının birlikte gerçekleşme olasılığı, ayrı ayrı gerçekleşmeleri olasılıklarının çarpımına eşit ise A ve B olaylarına bağımsız olaylar denir.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow A\ ve\ B\ olayları\ bağımsızdır.$$

Bu eşitlik, bağımsızlık için gerek ve yeter koşuldur. A ve B olayları ancak ve ancak bu eşitlik geçerliyse bağımsızdır.

Sonuç: A ve B olayları bağımsız ise $P(A \mid B) = P(A)$ ve $P(B \mid A) = P(B)$' dir.

Örnek: Bir kutuda 5' i bozuk 40 DVD bulunmaktadır.

a) Bu kutudan rastgele **yerine koyarak** üç DVD seçilirse, hepsinin bozuk olması olasılığı nedir?
b) Bu kutudan **yerine koyarak** seçilen beş DVD' nin sırayla, bozuk, sağlam, sağlam, bozuk, bozuk olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Kutudan çekilen DVD' ler tekrardan yerine konulduğu için yapılan her çekim birbirinden bağımsız gerçekleşmektedir. Bu nedenle, ilgilenilen olaylar birbirinden bağımsızdır. Bağımsız olaylar için, olasılık hesabı yapılır.

S_i : $Seçilen\ i - inci\ DVD'nin\ sağlam\ olması$
B_i : $Seçilen\ i - inci\ DVD'nin\ bozuk\ olması$

a) $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \times P(B_2) \times P(B_3) = \frac{5}{40} \times \frac{5}{40} \times \frac{5}{40} = 0.001953$

b)
$$\begin{aligned} P(B_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap B_4 \cap B_5) &= P(B_1) \times P(S_2) \times P(S_3) \times P(B_4) \times P(B_5) \\ &= \frac{5}{40} \times \frac{35}{40} \times \frac{35}{40} \times \frac{5}{40} \times \frac{5}{40} \\ &= 0.001465 \end{aligned}$$

Teorem 1: A ve B olayları bağımsız ise A^C ile B, A^C ile B^C ve A ile B^C olayları da bağımsızdır.

Tanıt:

A^C ile B için ,
$$\begin{aligned} P(A^C \cap B) &= P(B - A) \\ &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)[1 - P(A)] \\ &= P(B)\mathrm{P}(A^C) \end{aligned}$$

A^C ile B^C için ,
$$\begin{aligned} P(A^C \cap B^C) &= P(A^C - B) \\ &= P(A^C) - P(A^C \cap B) \\ &= P(A^C) - P(A^C)P(B) \\ &= P(A^C)[1 - P(B)] \\ &= P(A^C)\mathrm{P}(B^C) \end{aligned}$$

A ile B^C için ,
$$\begin{aligned} P(A \cap B^C) &= P(A - B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] \\ &= P(A)\mathrm{P}(B^C) \end{aligned}$$

olarak elde edilirler. ■

n'li Bağımsızlık

$A_1, A_2, \dots, A_n$ rasgele olaylarının bağımsızlığı için gerek ve yeter koşul,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \dots \times P(A_n)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Rasgele Olayların Tam Bağımsızlığı

k tane rasgele olayın tam bağımsız olması için olayların tüm olası kombinasyonlarının da bağımsız olması gerekir.

Örneğin, A, B ve C gibi üç rasgele olayın tam bağımsız olması için,

$$\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \\
P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\
P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\
P(B \cap C) &= P(B)P(C)
\end{aligned}$$

koşullarının hepsinin sağlanması gerekir. Yani, olayların tümü için 3’ lü ve 2’ li bağımsızlıklar sağlanmalıdır.

Örneğin, A, B, C ve D gibi dört rasgele olayın tam bağımsız olması için,

$$\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C \cap D) &= P(A)P(B)P(C)P(D) \\
P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \\
P(A \cap B \cap D) &= P(A)P(B)P(D) \\
P(A \cap C \cap D) &= P(A)P(C)P(D) \\
P(B \cap C \cap D) &= P(B)P(C)P(D) \\
P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\
P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\
P(A \cap D) &= P(A)P(D) \\
P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\
P(B \cap D) &= P(B)P(D) \\
P(C \cap D) &= P(C)P(D)
\end{aligned}$$

koşullarının hepsinin sağlanması gerekir. Yani, olayların tümü için 4’lü, 3’ lü ve 2’ li bağımsızlıklar sağlanmalıdır.

Olaylar tam bağımsız ise herhangi bir olayın tümleyeni düşünüldüğünde de tam bağımsızlık sağlanır.

Örneğin, A, B ve C tam bağımsız rasgele olaylar ise,

$$\begin{array}{ccccccccc}
A, B, C & ; & A, B & ; & A, C & ; & B, C & ; & A^C, \mathrm{B}, \mathrm{C} \\
A, B^C, \mathrm{C} & ; & \mathrm{A}, \mathrm{B}, C^C & ; & A^C, B^C, \mathrm{C} & ; & A^C, B, C^C & ; & A, B^C, C^C \\
A^C, B^C, C^C & ; & A^C, \mathrm{B} & ; & A, B^C & ; & A^C, C & ; & A, C^C \\
B^C, \mathrm{C} & ; & B, C^C & & & & & &
\end{array}$$

olayları bağımsızdır.

Örnek: Bir hastanın penisiline alerjisi olması olasılığı 0.20' dir. Bu ilacın üç hastaya uygulandığını varsayalım.

a) Üçünün de alerjik olma olasılığını bulunuz.
b) Hastalardan birinin alerjisi olmaması olasılığını bulunuz.
c) Hastalardan birinin alerjisi olması olasılığını bulunuz.
d) En az bir hastanın alerjik olmaması olasılığını bulunuz.

Çözüm:

A : $Birinci\ hastanın\ penisiline\ alerjisi\ olması$
B : $İkinci\ hastanın\ penisiline\ alerjisi\ olması$
C : $Üçüncü\ hastanın\ penisiline\ alerjisi\ olması$

Bir hastanın alerjik olup olmaması, diğer hastalardan herhangi birinin alerjik olup olmamasına bağlı değildir. Bu nedenle, her üç olay da birbirinden bağımsızdır.

a) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = 0.2 \times 0.2 \times 0.2 = 0.008$

b) D, hastalardan birinin alerjisi olmaması olayı olsun.

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(A^C \cap B \cap C) + P(A \cap B^C \cap C) + P(A \cap B \cap C^C) \\
&= P(A^C) \times P(B) \times P(C) + P(A) \times P(B^C) \times P(C) + P(A) \times P(B) \times P(C^C) \\
&= 0.80 \times 0.20 \times 0.20 + 0.20 \times 0.80 \times 0.20 + 0.20 \times 0.20 \times 0.80 \\
&= 0.096
\end{aligned}$$

c) E, hastalardan birinin alerjisi olması olayı olsun.

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C) \\
&= P(A) \times P(B^C) \times P(C^C) + P(A^C) \times P(B) \times P(C^C) + P(A^C) \times P(B^C) \times P(C) \\
&= 0.20 \times 0.80 \times 0.80 + 0.80 \times 0.20 \times 0.80 + 0.80 \times 0.80 \times 0.20 \\
&= 0.384
\end{aligned}$$

d) H, en az bir hastanın alerjik olması olayı olsun.

$$H = \{A^C BC,\ \ AB^C C, ABC^C, A^C B^C C, A^C BC^C, AB^C C^C, A^C B^C C^C\}$$

H olayının tümleyeni, $H^C = \{ABC\}$' dir. Buna göre,

$$P(H) = 1 - P(H^C) = 1 - 0.008 = 0.992$$

elde edilir.

Ayrık olaylarla bağımsız olayları birbirine karıştırmamak gerekir. Ayrık olayların ortak noktası olmadığından aynı anda gerçekleşemezler. Bağımsız olayların ortaya çıkma durumları birbirlerine bağlı değildir. Bağımsız olayların olasılıkları sıfır değil ise ortak noktaları vardır. Aykırı olaylar, bağımsız olaylar ve bağımlı olaylarla ilgili aşağıdaki maddeler geçerlidir:

(i) Ayrık olaylar, her zaman bağımlı olaylardır.
(ii) Bağımsız olaylar, asla ayrık olaylar değillerdir.
(iii) Bağımlı olaylar, aykırı olaylar olabilir ya da olmayabilir.

Teorem 2: Olasılıkları sıfırdan farklı A ve B rasgele olayları ayrık olaylar ise bu olaylar doğası gereği bağımsız değildir.

Tanıt: $A \cap B = \emptyset$ (ayrık olaylar) olması nedeniyle, $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$' dır. $P(A) > 0$ ve $P(B) > 0$ olduğundan, A ve B ayrık olayları için $P(A)P(B) > 0$' dır. $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ olması nedenle, A ve B olayları bağımsız değildir. A ve B ayrık olayları arasında bağımlılık söz konusudur.

Örnek: Bir kahve üreticisi firma, kahve dükkanına kahve içmeye gelen kişilerden rastgele 500 kişiyi seçerek kahvelerini şekerli ya da şekersiz içip içmediklerini sormuşlardır. Ankete katılan 500 kişinin 260' ı kadın ve 175' i kahvesini şekersiz içmektedir. Ankete katılan 260 kadından 91' i ise kahvesini şekersiz tercih etmektedir. Buna göre, kahveyi şekersiz içmek ile bir kişinin kadın olması birbirinden bağımsız olaylar mıdır?

Çözüm: Yukarıda özetlenen durumları aşağıdaki çapraz tabloya taşıyalım:

	Kahve		
	Şekerli	**Şekersiz**	**Toplam**
Kadın	169	91	260
Erkek	156	84	240
Toplam	325	175	500

Aşağıdaki olaylar tanımlansın:

A : $Bir\ kişinin\ kadın\ olması$

B : $Bir\ kişinin\ kahvesini\ şekersiz\ içmesi$

Birinci yol:

A ve B olaylarının birbirinden bağımsız olması için, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{91}{500} = 0.182 \\ P(A) &= \frac{260}{500} = 0.52 \quad \Longrightarrow \quad P(A) \times P(B) = 0.52 \times 0.35 = 0.182 \\ P(B) &= \frac{175}{500} = 0.35 \end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen sonuca göre, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ eşitliği sağlanmıştır. Bu nedenle, A ve B olayları birbirinden bağımsızdır. Yani, kahveyi şekersiz içmek ile bir kişinin kadın olması birbirinden bağımsız olaylardır.

İkinci yol:

A ve B olayları birbirinden bağımsız ise, $P(B|A) = P(B)$ ya da $P(A|B) = P(A)$ eşitliklerinin sağlanması yeterlidir.

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{91}{500}}{\frac{260}{500}} = 0.35 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow \quad P(B|A) = P(B) \\ P(B) &= \frac{175}{500} = 0.35 \end{aligned}$$

Eşitlik sağlandığı için, A ve B olayları birbirinden bağımsızdır.

A ve B olaylarının birbirinden bağımsız olması nedeniyle, bu olayların tümleyeni düşünüldüğünde de bağımsızlık sağlanır. Yani,

$$A^C \text{ ile } \mathrm{B} \quad ; \quad A \text{ ile } B^C \quad ; \quad A^C \text{ ile } B^C$$

olayları da birbirinden bağımsızdır. Örneğin, bir kişinin erkek olması (A^C) ile kahvesini şekerli içmesi (B^C) olayları birbirinden bağımsızdır.

Örnek:

Yerel bir 5K yol koşusuna 165 kişi katılmıştır. Koşuculardan 80’ i kadın, 85’ i erkektir. Yarışmaya katılan koşuculara 5K yol koşusuna kaçıncı kez katıldıkları sorulmuştur. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki çapraz tabloda özetlenmiştir.

	5K koşusuna katılma sayısı			
	İlk kez (A)	**2-3 defa (B)**	**3' ten fazla (C)**	**Toplam**
Kadın (K)	19	46	15	80
Erkek (E)	28	49	8	85
Toplam	47	95	23	165

a) Bir koşucunun kadın olması ile ilk kez 5K koşusuna katılması bağımsız olaylar mıdır?
b) Bir koşucunun erkek olması ile 3' ten fazla 5K koşusuna katılması olayları ayrık olaylar mıdır?
c) Bir koşucunun erkek olması ile 3' ten fazla 5K koşusuna katılması bağımsız olaylar mıdır?
d) Bir koşucunun ilk kez 5K koşusuna katılması ile 2-3 kez 5K koşusuna katılması ayrık olaylar mıdır?
e) İlk kez 5K koşusuna katılan birinin kadın olması olasılığını bulunuz.
f) Yarışmaya katılan bir erkek koşucunun 5K yarışına 3' ten fazla katılmış olması olasılığını bulunuz.

Çözüm:

Aşağıdaki olaylar tanımlansın:

K : $Koşucunun\ kadın\ olması$
E : $Koşucunun\ erkek\ olması$
A : $İlk\ kez\ 5K\ koşusuna\ katılma$
B : $2-3\ kez\ 5K\ koşusuna\ katılma$
C : $3'ten\ fazla\ 5K\ koşusuna\ katılma$

a) Bir koşucunun kadın olması ile ilk kez 5K koşusuna katılması olaylarının bağımsız olması için, $P(A \cap K) = P(A) \times P(K)$ eşitliği sağlanmalıdır.

$$P(A \cap K) = \frac{19}{165} = 0.115$$
$$P(A) = \frac{47}{165} = 0.285 \quad \Longrightarrow \quad P(A) \times P(K) = 0.285 \times 0.485 = 0.138$$
$$P(K) = \frac{80}{165} = 0.485$$

Yukarıda elde edilen sonuca göre, $P(A \cap K) \neq P(A) \times P(K)$ eşitlik sağlanmamıştır. Bu nedenle, A ve K olayları birbirinden bağımsız değildir. Yani, bir koşucunun kadın olması ile ilk kez 5K koşusuna katılması bağımlı olaylardır.

b) Bir kişinin erkek olması ile 3' ten fazla 5K koşusuna katılması olayları ayrık olaylar değildir. Çünkü, $C \cap E \neq \emptyset$ olması nedeniyle, $P(C \cap E) \neq 0$ ' dır.

$$P(C \cap E) = \frac{8}{165} = 0.048$$

c) Bir koşucunun erkek olması ile 3' ten fazla 5K koşusuna katılması olaylarının bağımsız olması için, $P(C \cap E) = P(C) \times P(E)$ eşitliği sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned} P(C \cap E) &= \frac{8}{165} = 0.048 \\ P(C) &= \frac{23}{165} = 0.139 \quad \Longrightarrow \quad P(C) \times P(E) = 0.139 \times 0.515 = 0.0716 \\ P(E) &= \frac{85}{165} = 0.515 \end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen sonuca göre, $P(C \cap E) \neq P(C) \times P(E)$ eşitlik sağlanmamıştır. Bu nedenle, C ve E olayları birbirinden bağımsız değildir. Yani, bir koşucunun erkek olması ile 3' ten fazla 5K koşusuna katılması bağımlı olaylardır.

d) Bir koşucunun ilk kez 5K koşusuna katılması ile 2-3 kez 5K koşusuna katılması olayları ayrık olaylardır. Çünkü, $A \cap B = \emptyset$ olması nedeniyle, $P(A \cap B) = 0$ ' dır.

e) İlk kez 5K koşusuna katılan birinin kadın olması olasılığı, koşullu olasılık kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P(K|A) = \frac{P(K \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{19}{165}}{\frac{47}{165}} = 0.404$$

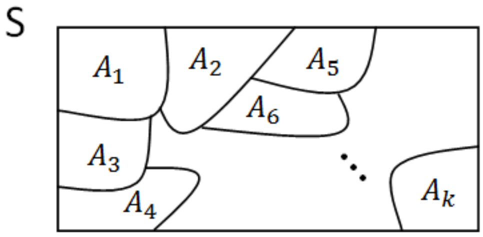
f) Yarışmaya katılan bir erkek koşucunun 5K yarışına 3' ten fazla katılmış olması olasılığı, koşullu olasılık kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P(C|E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{8}{165}}{\frac{85}{165}} = 0.094$$

Toplam Olasılık Formülü

S örneklem uzayında, $A_1, A_2, \dots, A_k$ rasgele olayları bir tam sistem oluştursun. Bu durumda,

1) $\forall\, i \neq j$ için, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ve
2) $\cup_{i=1}^{k} A_i = S$'dir.



Tam sistemin şematik gösterimi

$i = 1,2,\dots,k$ için $P(A_i) \neq 0$ olmak üzere, S örneklem uzayında herhangi bir B olayı tanımlansın. B olayı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k)$$

$A_1, A_2, \dots, A_k$ ayrık olaylar olması nedeniyle, $(B \cap A_1)$, $(B \cap A_2)$, … , $(B \cap A_k)$ olayları da ayrık olaylardır. Buna göre, B olayının olasılığı

$$\begin{aligned} P(B) &= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k)] \\ &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_k) \\ &= P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \dots + P(A_k)P(B \mid A_k) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, B olayının olasılığı toplam olasılık formülü ile elde edilir:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

Bayes Formülü

S örneklem uzayında bir tam sistem oluşturan $A_1, A_2, \dots, A_k$ olayları ve bu olayların bir kesiminden oluşan bir B olayı olsun. B olayı bilindiğinde herhangi bir A_i $(i = 1,2,\dots,k)$ olayının koşullu olasılığı Bayes Formülü olarak adlandırılır.

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B \mid A_i)} \quad , \quad i = 1,2,3,\cdots,k \ \ için$$

Örnek: Bir konserve fabrikasında, 3 üretim hattında üretim yapılmaktadır. Toplam üretimin 50%' sini I. hat, 30%' unu II. hat ve 20%' sini III. hat yapmaktadır. Üretim hatlarında konservelerin kapatılması esnasında hatalar oluşabilmektedir. I. hatta üretilen konservelerin 0.4%' ü; II. hatta üretilenlerin 0.6%' sı; III. hatta üretilenlerin 1.2%' si yanlış kapatılmaktadır. Buna göre,

a)Bu konserve fabrikasında üretilen bir konservenin yanlış kapatılmış olması olasılığını bulunuz.
b) Fabrikadan satışa gidecek olan ürünlerin son incelemesinde karşılaşılan yanlış kapatılmış bir konservenin I. hatta üretilmiş olması olasılığı nedir?
c) Fabrikadan satışa gidecek olan ürünlerin son incelemesinde karşılaşılan yanlış kapatılmış bir konservenin II. hatta üretilmiş olması olasılığı nedir?

Çözüm:

A : $Konservenin\ yanlış\ kapatılmış\ olması$
B_I : $Konservenin\ I.\ hatta\ üretilmesi$
B_{II} : $Konservenin\ II.\ hatta\ üretilmesi$
B_{III} : $Konservenin\ III.\ hatta\ üretilmesi$

$$\begin{aligned} P(B_I) &= 0.50 \quad , \quad & P(A \mid B_I) &= 0.004 \\ P(B_{II}) &= 0.30 \quad , \quad & P(A \mid B_{II}) &= 0.006 \\ P(B_{III}) &= 0.20 \quad , \quad & P(A \mid B_{III}) &= 0.012 \end{aligned}$$

a) Konserve fabrikasında üretilen bir konservenin yanlış kapatılmış olması olayı, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$A = (A \cap B_I) \cup (A \cap B_{II}) \cup (A \cap B_{III})$$

B_I, B_{II} ve B_{III} ayrık olaylardır. Bu nedenle, $(A \cap B_I), (A \cap B_{II})$ ve $(A \cap B_{III})$' da ayrık olaylar olurlar. Bu durumda, toplam olasılık formülünden A olayının olasılığı bulunur:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_I) + P(A \cap B_{II}) + P(A \cap B_{III}) \\ &= P(B_I)P(A \mid B_I) + P(B_{II})P(A \mid B_{II}) + P(B_{III})P(A \mid B_{III}) \\ &= 0.50 \times 0.004 + 0.30 \times 0.006 + 0.20 \times 0.012 \\ &= 0.0020 + 0.0018 + 0.0024 \\ &= 0.0062 \end{aligned}$$

b) Fabrikadan satışa gidecek olan ürünlerin son incelemesinde karşılaşılan yanlış kapatılmış bir konservenin I. hatta üretilmiş olması olasılığı Bayes formülü kullanılarak bulunur.

$$\begin{aligned} P(B_I|A) &= \frac{P(A \cap B_I)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_I)P(\,A \mid B_I\,)}{P(B_I)P(\,A \mid B_I\,) + P(B_{II})P(\,A \mid B_{II}\,) + P(B_{III})P(\,A \mid B_{III}\,)} \\ &= \frac{0.50 \times 0.004}{0.0062} \\ &= 0.32 \end{aligned}$$

c) Yanlış kapatılmış bir konservenin II. hatta üretilmiş olması olasılığı

$$\begin{aligned} P(B_{II}|A) &= \frac{P(A \cap B_{II})}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_{II})P(\,A \mid B_{II}\,)}{P(B_I)P(\,A \mid B_I\,) + P(B_{II})P(\,A \mid B_{II}\,) + P(B_{III})P(\,A \mid B_{III}\,)} \\ &= \frac{0.30 \times 0.006}{0.0062} \\ &= 0.29 \end{aligned}$$

Burada, $P(B_I|A) + P(B_{II}|A) + P(B_{III}|A) = 1$ ‘ dir. Bu durumda, yanlış kapatılmış bir konservenin III. hatta üretilmiş olması olasılığı,

$$P(B_{III}|A) = 1 - [P(B_I|A) + P(B_{II}|A)] = 1 - (0.32 + 0.29) = 0.39$$

olarak elde edilir.