5. OLAY UZAYI VE OLASILIK UZAYI

Olay Uzayı

Bir rasgele deneyin olası tüm sonuçlarını (yani, S orneklem uzayını) ve bu sonuçlarla yapılan işlemler sonucunda ortaya çıkan rasgele olayları kapsayan kümeye, olay uzayı denir ve $\mathcal{F}$ ile gösterilir. $\mathcal{F}$ olay uzayı, S örneklem uzayı ile kısıtlı kalmayıp, olanaksız olayı, S' nin tüm alt kümelerini, olayların kesişimini, birleşimini, tümleyenini, farkını vb. işlemler sonucunda elde edilen yeni olayları da içeren bir kümedir.

Olayların Sigma (σ) Cebri

S, boş olmayan bir küme, $\mathcal{F}$ de S' nin bazı alt kümelerinden oluşan bir olay uzayı olsun.

i. Kesin olay, $\mathcal{F}$' nin elemanıdır: $S \in \mathcal{F}$
ii. A rasgele olayı $\mathcal{F}$' nin elemanı ise A^C tümleyen olayı da $\mathcal{F}$' nin elemanıdır: $\forall A \in \mathcal{F}$ için $A^C \in \mathcal{F}$' dir.
iii. A ve B rasgele olaylar olsun. A ve B rasgele olaylarının her ikisi de $\mathcal{F}$' nin elemanı ise, bu olayların birleşimi de $\mathcal{F}$' nin elemanıdır: $\forall A, B \in \mathcal{F}$ için $(A \cup B) \in \mathcal{F}$' dir.

Yukarıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{F}$ olay uzayına bir cebir denir.

iv. $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots$ rasgele olayları $\mathcal{F}$' nin elemanı ise bu olayların birleşimi de $\mathcal{F}$' nin elemanıdır: $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots \in \mathcal{F}$ için $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$' dir.

Yukarıdaki tüm özellikleri (i-iv) sağlayan $\mathcal{F}$ olay uzayına bir sigma cebir (σ-cebir) denir. Her σ-cebir bir cebirdir, ancak tersi doğru değildir. $\mathcal{F}$' nin her elemanına bir olay denir. Bu olaylar ölçülebilir kümelerdir. $\mathcal{F}$, S üzerinde bir σ-cebir ise, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1) Olanaksız olay, $\mathcal{F}$' nin elamanıdır: $\emptyset \in \mathcal{F}$' dir.
2) A ve B rasgele olaylarının her ikisi de $\mathcal{F}$' nin elemanı ise, bu olayların kesişimi de $\mathcal{F}$' nin elemanıdır: $\forall A, B \in \mathcal{F}$ için $(A \cap B) \in \mathcal{F}$' dir.
3) $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots$ rasgele olayları $\mathcal{F}$' nin elemanı ise bu olayların kesişimi de $\mathcal{F}$' nin elemanıdır: $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots \in \mathcal{F}$ için $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$' dir.

S, örneklem uzayı ve $\mathcal{F}$, σ-cebir ise, $(S, \mathcal{F})$ ikilisine ölçülebilir bir uzay denir.

Olasılık Ölçüsü ve Olasılık Uzayı

S boş olmayan bir küme (örneklem uzayı), $\mathcal{F}$ de S üzerinde bir σ-cebir olsun. $\mathcal{F}$ üzerinde tanımlı,

$$\begin{aligned} P \quad : \quad & \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] \\ & A \rightarrow P(A) \end{aligned}$$

P küme fonksiyonu,

a) $P(S) = 1$

b) $\forall A \in \mathcal{F}$ için $P(A) \geq 0$

c) $A_1, A_2, A_3, \cdots$' ler $\mathcal{F}$ deki ayrık $\left(A_i \cap A_j = \emptyset \,, i \neq j\right)$ olayların bir dizisi olmak üzere,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

özelliklerini sağlıyorsa, P' ye bir olasılık ölçüsü, $P(A)$ sayısına A olayının olasılığı, $(S, \mathcal{F}, P)$ üçlüsüne de bir olasılık uzayı denir.

6. OLASILIĞIN TANIMLARI

Olasılığın 4 farklı tanımı vardır:

1) Klasik Olasılık
2) Deneysel Olasılık
3) Öznel Olasılık
4) Aksiyomatik Olasılık (Belitsel Olasılık)

6.1. Klasik Olasılık

Bir rasgele deneyin sonlu sayıda olan n tane mümkün sonucu olduğunu varsayalım. Bu sonuçların hepsinin eşit olasılıklarla ortaya çıktığı kabul edilsin. İlgilenilen bir A olayı, n tane durumdan m tanesinde gerçekleşiyorsa A' nın olasılığı,

$$P(A) = \frac{\text{İ}lgilenilen\ A\ rasgele\ olayına\ ilişkin\ sonuçların\ sayısı}{Rasgele\ deneyin\ olası\ \text{tüm}\ sonuçlarının\ sayısı} = \frac{m}{n}$$

olarak elde edilir.

Klasik olasılık kuralı, tüm sonuçları eşit olasılıkla gerçekleşen rasgele deneylerin sonuçlarına ilişkin olasılıkların hesaplanmasında kullanılır. Deneyin tüm sonuçlarının olasılıkları toplamı birdir.

Örnek:

Üç tane paranın atılması rasgele deneyinde A olayı en çok bir yazı gelmesi olarak tanımlansın. A' nın olasılığını bulunuz.

Çözüm:

Üç tane paranın atılması rasgele deneyinde örneklem uzayı $2^3 = 8$ elemandan oluşacaktır. Örneklem uzayını oluşturalım:

$$S = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}$$

A olayını oluşturalım:

$$A = \{YTT, TYT, TTY, TTT\}$$

A olayının olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

olarak elde edilir.

Klasik olasılık, olasılık hesabında neden yetersiz kalmaktadır?

- Bir rasgele deneyin sonuçlarının sayısı belli olmadığı ya da sonlu sayıda olmadığında (sonsuz) ve sayılamaz sonsuzlukta olması durumunda,
- Rasgele deneyin sonuçları eşit olasılıkla gerçekleşmediğinde,

klasik olasılık yetersiz kalmaktadır. Klasik olasılığın kullanılamadığı rasgele deneylere örnek olarak, bir paranın tura gelinceye dek atılması ve bir makinenin ömrünün saptanması verilebilir.

Ne yapılabilinir?

Tekrarlı deneyler gerçekleştirilerek elde edilen sonuçlar üzerinden olasılıklar hesaplanabilir. Bu bizi deneysel olasılık kavramına götürmektedir.

6.2. Deneysel (Frekans, Sıklık, Göreli) Olasılık

N adet rasgele deney gerçekleştirilsin. Yapılan deneylerde ilgilenilen A olayı m defa gözlenmiş ise A olayının göreli frekansı (yaklaşık olasılığı),

$$P(A) = \frac{m}{N}$$

olarak bulunur.

Örnek:

Bir fabrikanın üretmiş olduğu tost makinelerinin bozuk olması olasılığını (p) hesaplarken deneysel olasılıktan yararlanılır. Deneyin tüm olası sonuçlarını içeren S örneklem uzayı, $S = \{Bozuk, Sağlam\}$' dır. Klasik olasılığa göre, tüm sonuçların eşit olasılıklı olması varsayımından, $p = 0.5$ olmalıdır. Fakat, bu durumun gerçeği yansıttığı şüphelidir. Yapılması gereken, üretilen tost makinelerinden örneklem alınarak p olasılığının hesaplanmasıdır. Üretilen tost makinelerinden N tanesi rasgele seçilsin. Seçilen tost makinelerinin çalışıp çalışmadığı kontrol edilsin. Kontrol sonucunda, m tanesinin bozuk olduğu görülsün. Bu durumda, $p = \frac{m}{N}$ ‘ dir.

Deneysel olasılığın kararlılık özelliği

Göreli olasılıklar gerçek olasılıklar değildir, sadece yaklaşık olasılıklardır. Gerçekleştirilen deney sayısı arttıkça $P(A)$ değerindeki değişkenlik azalır ve giderek sabit bir değere yaklaşır. Bu duruma kararlılık özelliği denir.

Göreli sıklıklardan elde edilen olasılıkların gerçek olması için deneyin çok (sonsuz) kez tekrarlanması gerekir. Böylece, büyük sayılar yasası gereği kuramsal olasılık elde edilir. Bu nedenle, bir olayın deneysel olasılığı deneyin tekrarlanma sayısı sonsuza yaklaşırken olayın göreli frekansının alacağı limit değeri olarak tanımlanır:

$$P(A) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \left(\frac{m}{N}\right)$$

Deneysel olasılık, olasılık hesabında neden yetersiz kalmaktadır?

- Olasılığın kararlılık değerine ulaştığı deneme sayısının kaç olduğu belli değildir. Deneme sayısının kaç olacağına karar verilmelidir.
- Aynı deney iki aynı tekrar sayısı ile gerçekleştirildiğinde, elde edilen olasılıklardan hangisi olayın olasılığı olarak kabul edilecektir.
- Sonsuz adet deneme yapmak mümkün değildir.
- $N \longrightarrow \infty$ durumunda, $\frac{m}{N}$ değeri sıfıra gider.
- Gerçekleştirilen deneyler rasgele deneylerdir. Rasgele deneyler dış koşulların değişmezliğini gerektirir. Tüm deneylerin aynı fiziksel koşullar altında gerçekleşmesi mümkün olmayabilir. Hem klasik hem de deneysel olasılıkta deneyler aynı koşullarda gerçekleşmektedir. Fakat gerçek dünyada bu mümkün olmayabilir.

6.3. Öznel Olasılık

Bazı durumlarda sonuçları eşit olasılıklı deneyler veya tekrarlanabilen deneyler olmayabilir. Bu durumda klasik olasılık ve deneysel olasılık kavramları kullanılarak ilgilenilen olaya ilişkin olasılıklar elde edilemez. Öznel olasılık kullanılarak bu olaya ilişkin olasılık belirlenebilir. Öznel olasılık, bireyin değer yargısına, deneyimine ve düşüncesine göre değişmektedir.

Örneğin, “İktisat dersi alan İrem’ in bu dersi A notu ile geçmesi olasılığı nedir?” Sorusu öznel olasılıkla yanıtlanmak istensin. İrem’ in A notu alması vize ve final notlarına göre belirlenecektir. Final notu belli olmadığından, bu olasılığın belirlenmesinde öznel olasılık kullanılabilir. İrem’ in vize notları yüksek ise, A notu alması olasılığı yüksek olacaktır ve kişi buna göre bir tahminde bulunabilir.

6.4. Aksiyomatik Olasılık (Belitsel Olasılık)

Olasılığın gerek “oran” gerekse “limit” olarak tanımlanmasındaki zorluklar nedeniyle modern matematikçiler onu bir fonksiyon olarak tanımlamışlardır. Rus matematikçi Andrey Nikolayevich Kolmogorov (1903-1987), 1933 yılında olasılık fonksiyonunu tanımlamıştır. Böyece, olasılığın aksiyomatik (belitsel) tanımı oluşmuştur.

Önerme

Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadelere önerme denir. Önermeler, aksiyomlar (belitler/postulatlar) ve teoremler olmak üzere ikiye ayrılırlar.

Belit

Tanıtlanmasına gerek duyulmaksızın doğru olduğu kabul edilen ve böyle olduğu için diğer önermelerin temeli ve ön dayanağı olan temel önermelerdir.

Teorem

Doğruluğu ispat edilmiş önermelere teorem denir.

Olasılık belitleri, olasılık kavramının tanımlanmasında kullanılan temel önermelerdir. Kolmogorov belitleri, olasılık belitleridir.

Kolmogorov Belitleri

Belit 1. S orneklem uzayında tanımlanmış herhangi bir A olayının olasılığı olarak tanımlanan ve $P(A)$ ile gösterilen olasılığa 0 ile 1 arasında bir gerçel sayı karşılık gelir:

$$\forall A \subset S \text{ için } 0 \leq P(A) \leq 1\text{' dir.}$$

Belit 2. Örneklem uzayının olasılığı bire eşittir:

$$P(S) = 1\text{' dir.}$$

Belit 3. Örneklem uzayındaki A ve B gibi iki ayrık olaydan birinin ya da diğerinin ortaya çıkması olasılığı olayların olasılıkları toplamına eşittir:

$A \cap B = \emptyset$ ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$' dir.

Belit 4. Örneklem uzayındaki $A_1, A_2, A_3, \cdots$ gibi karşılıklı ayrık rasgele olaylardan herhangi birinin ortaya çıkması olasılığı bu olayların ortaya çıkma olasılıklarının toplamına eşittir:

$$\forall\, i \neq j \text{ için } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ ise } P\left(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\text{' dir.}$$

Bu belitleri sağlayan P küme fonksiyonu bir olasılık ölçüsüdür.

Olasılığın Belitsel Yapısı ile İlgili Teoremler

Teorem 1: Herhangi bir A olayı için $P(A) = 1 - P(A^C)$ olur.

Tanıt: A ve A^C ayrık olaylardır. $A \cap A^C = \emptyset$ ve $A \cup A^C = S$' dir. Buna göre, $P(S) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) = 1$ ' den $P(A) = 1 - P(A^C)$ elde edilir. ■

Teorem 2: Olanaksız olayın olasılığı sıfırdır: $P(\emptyset) = 0$

Tanıt: $S^C = \emptyset$ olup, $P(\emptyset) = P(S^C) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$ elde edilir. ■

Teorem 3: Ayrık olmayan herhangi A ve B olayları için bu olaylardan en az birinin ortaya çıkması olasılığı, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$' dir.

Tanıt: Ayrık olmayan herhangi A ve B olayları için

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

ve

$$B = (A \cap B) \cup (B - A)$$

yazılabilir. A ile $(B - A)$ ve $(A \cap B)$ ile $(B - A)$ olayları ayrık olaylar olduğundan,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P\big(A \cup (B - A)\big) = P(A) + P(B - A) && (1) \\ P(B) &= P\big((A \cap B) \cup (B - A)\big) = P(A \cap B) + P(B - A) && (2) \end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitlik (2)' den $P(B - A)$ olasılığı çekilsin:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$P(B - A)$ olasılığı, Eşitlik (1)' de yerine konulduğunda,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

elde edilir. ■

Yukarıdaki teorem k tane rasgele olay için genelleştirilebilir:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j}^{k} P\left(A_i \cap A_j\right) + \cdots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$$

Örneğin, A, B ve C olayları için bu olaylardan en az birinin ortaya çıkması olasılığı aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) \quad &= \quad P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) \\ &\quad\;\; -P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Teorem 4: Herhangi iki A ve B olayları için $(A - B)$' nin olasılığı,

$$P(A - B) = P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$$

olmaktadır.

Tanıt: $A = A \cap S = A \cap (B \cup B^C) = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$ olarak yazılır. B ile B^C ve $(A \cap B)$ ile $(A \cap B^C)$ olayları ayrıktır.

$$\begin{aligned} P(A) \quad &= \quad P\big((A \cap B) \cup (A \cap B^C)\big) \\ &= \quad P(A \cap B) + P(A \cap B^C) \quad \Longrightarrow \quad A \cap B^C = A - B \; yerine \; konulur. \\ &= \quad P(A \cap B) + P(A - B) \quad\;\; \Longrightarrow \quad (A - B)'nin \; olasılığı \; çekilir. \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan, $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ elde edilir.■

Teorem 5: A ve B olayları verilsin. $A \subseteq B$ ise aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

Tanıt: $A \subseteq B$ ise $A \cap B = A$' dır. Teorem 4' ten

$$P(B - A) = P(B \cap A^C) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)$$

elde edilir. ■

Teorem 6: Herhangi iki A ve B olayları için, $A \subseteq B$ ise B olayının olasılığı en az A olayının olasılığı kadardır: $A \subseteq B$ ise $P(A) \leq P(B)$' dir.

Tanıt: $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$ olarak yazılabilir. $A \subset B$ olduğundan,$B \cap A = A$' dır. $(B \cap A)$ ve $(B \cap A^C)$ ayrık olaylardır. Buna göre,

$$P(B) = P\big((B \cap A) \cup (B \cap A^C)\big) = P\big(A \cup (B \cap A^C)\big) = P(A) + P(B \cap A^C)$$

elde edilir. Olasılığın tanımından, $P(B \cap A^C) \geq 0$ olduğundan $P(B) \geq P(A)$ sonucuna ulaşılır. ■