MAT121 Uygulama 3. Hafta

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x \to -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$

$= (-2)^3 - 2(-2)^2 + 4(-2) + 8$

$= -8 - 8 - 8 + 8 = -16$

b) $\lim_{s \to \frac{2}{3}} 3s(2s-1) = 3 \cdot \frac{2}{3}\left(2 \cdot \frac{2}{3} - 1\right)$

$= 2 \cdot \left(\frac{4}{3} - 1\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

c) $\lim_{h \to 0} \frac{3}{\sqrt{3h+1} + 1} = \frac{3}{\sqrt{3 \cdot 0 + 1} + 1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$

d) $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5h+4} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5h+4} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{5h+4} + 2}{\sqrt{5h+4} + 2}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{5h + 4 - 2^2}{h(\sqrt{5h+4} + 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h(\sqrt{5h+4} + 2)}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4} + 2} = \frac{5}{4}$

e) $\lim\limits_{y \to 2} \dfrac{y+2}{y^2+5y+6} = \dfrac{2+2}{2^2+5.2+6} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

f) $\lim\limits_{t \to -1} \dfrac{t^2+3t+2}{t^2-t-2} = \lim\limits_{t \to -1} \dfrac{(t+1)(t+2)}{(t-2)(t+1)}$

$= \lim\limits_{t \to -1} \dfrac{t+2}{t-2} = \dfrac{-1+2}{-1-2} = \dfrac{-1}{3}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{1-x}}{x} \cdot \dfrac{-1}{\cancel{1-x}}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-1}{x} = \dfrac{-1}{1} = -1$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3+4x+12}{x^4-3x+14} = \dfrac{(-4)^3+4.(-4)+12}{(-4)^4-3.(-4)+14}$

$= \dfrac{-68}{272} = \dfrac{-1}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{((x^3-4x^2+4x)+4x^2-16x+16)^{10}} =$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{20}\,(x+1)^{20}}{\left(x\,(x^2-4x+4)+4\,(x^2-4x+4)\right)^{10}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{20}\,(x+1)^{10}}{(x-2)^{20}\,(x+4)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}$$

$$= \frac{3^{20}}{6^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

c) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} (x+2)(\sqrt{x}+1) =$$

$$3.2 = 6$$

d) $$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+8}+3}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2+8-9}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}+3)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+8}-3)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}-3} = \frac{-2}{3+3} = \frac{-1}{3}$$

e) $\lim \dfrac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x(4-x)}{2-\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})}{2-\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x \to 4} x(2+\sqrt{x}) = 4 \cdot 4 = 16$

3. $f(x) = \dfrac{3x^2+8x-3}{x+3}$ fonksiyonunun $a=-3$ noktasındaki L limitini hesaplayınız. Buradan verilen $\varepsilon = 0.15$ sayısı için $0 < |x+3| < \delta$ için $|f(x) - 2| < 0.15$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısını bulunuz.

Çöz: $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3x^2+8x-3}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)(3x-1)}{x+3}$

$= \lim\limits_{x \to -3} (3x-1) = -10.$

Verilen $\varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta > 0$ bulmalıyız ki

$|x - (-3)| < \delta$ iken $|f(x) - (-10)| < \varepsilon$ olsun.

$|f(x) - (-10)| = |(3x-1) - (-10)| = |3x+9| =$

$3|x+3| < 3\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \dfrac{\varepsilon}{3} = \dfrac{0.15}{3} = \boxed{0.05}$

4. $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-4}{x-4}$ fonksiyonunun $a=4$ noktasındaki L limitini hesaplayınız. Buradan, verilen $\varepsilon=0,25$ sayısı için $0<|x-4|<\delta$ için $|f(x)-L|<0.25$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısını bulunuz.

Çöz: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(2x+1)}{x-4}$

$=\lim\limits_{x\to 4} 2x+1=9$

Verilen $\forall\ \varepsilon>0$ için $\exists\ \delta>0$ bulmalıyız ki

$|x-4|<\delta$ iken $|f(x)-9|<\varepsilon$ olsun.

$\left|\dfrac{2x^2-7x-4}{x-4}-9\right|=|2x+1-9|=|2x-8|$

$=2|x-4|<2\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=\dfrac{\varepsilon}{2}=\dfrac{0.25}{2}=0.125$

5. $f(x)=x^2\sin x$ fonksiyonunun $a=0$ noktasındaki L limitini hesaplayınız. Buradan verilen $\varepsilon=0.5$ sayısı için $0<|x|<\delta$ için $|f(x)-L|<0.5$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısını bulunuz.

Göt: $\lim_{x \to 0} x^2 \sin x = 0.$

verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\ \delta > 0$ bulmalıyız ki

$|x| < \delta$ iken $|f(x)| < \varepsilon$ olsun.

$$|x^2 \sin x| = x^2 |\sin x| < x^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

$$\delta = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{0.5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$