



HACETTEPE
ÜNİVERSİTESİ
İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

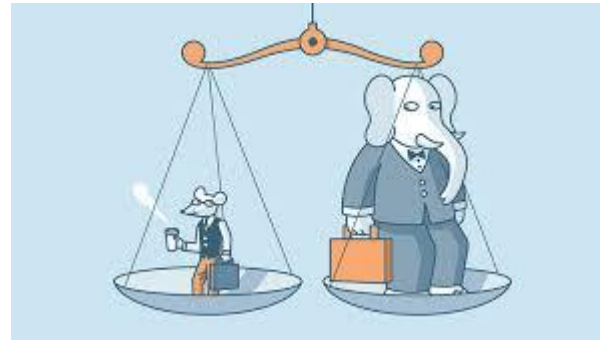
İST155 İSTATİSTİĞE GİRİŞ I

DERS 7

Ağırlıklı Ortalama, Geometrik Ortalama, Harmonik Ortalama

**Ders sorumluları: Prof.Dr.Serpil AKTAŞ ALTUNAY (01 Şubesi)
Doç.Dr. Ayten YİĞİTER (02 Şubesi)**

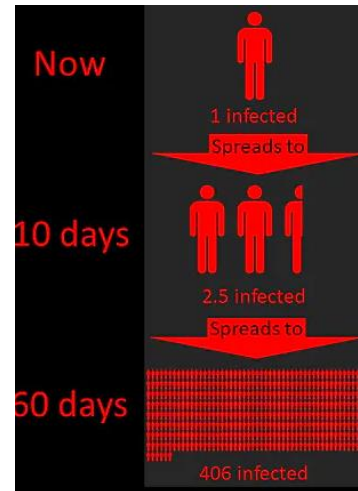
❖ AĞIRLIKLI ORTALAMA



❖ HARMONİK ORTALAMA



❖ GEOMETRİK ORTALAMA



1. AĞIRLIKLI ORTALAMA

Ağırlıklı Ortalamada (AO) gözlemler birbirinden farklı ağırlık değerlerine sahiptir.

$$AO = \bar{X}_A = \frac{\sum_{i=1}^n w_i X_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

n: denek sayısı

w_i : i. deneğin ağırlığı

X_i : i. gözlem

$$AO = \bar{X}_A = \sum_{i=1}^n w_i X_i$$

Ölçeklendirilmiş ağırlık

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$$

Örnek : Bir öğrencinin bir dönem boyunca aldığı derslere ilişkin ders kredisi ve not değerleri aşağıda verilmektedir. Bu öğrencinin dönem sonu ağırlıklı ortalamasını bulunuz.

Ders Adı	Kredisi	Notu	W_i
Matematik I	4	B1	4/16
İngilizce I	2	A2	2/16
Kimya I	4	B2	4/16
Fizik I	4	C2	4/16
Türk Dili I	2	B1	2/16
Toplam kredi	16		

Ölçeklendirilmiş
ağırlık

A1:4 A2:3.75 A3:3.5 B1:3.25 B2=3 B3:2.75 C1=2.5 C2=2.25 C3=2 D=1.75 F3=0

Öğrencinin notu krediye göre ağırlıklandırıldığı için,

$$AO = \bar{X}_A = \frac{\sum_{i=1}^n w_i X_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{4 \times 3.25 + 2 \times 3.75 + 4 \times 3 + 4 \times 2.25 + 2 \times 3.25}{4 + 2 + 4 + 4 + 2} = \frac{48}{16} = 3$$

$$AO = \bar{X}_A = \frac{4}{16} \times 3.25 + \frac{2}{16} \times 3.75 + \frac{4}{16} \times 3 + \frac{4}{16} \times 2.25 + \frac{2}{16} \times 3.25 = 3$$

Bu öğrencinin dönem akademik ortalaması 3'tür.

Sıklık çizelgesi düzenlenmiş veriler için hesaplanan ortalama formülü de bir ağırlıklı ortalamadır. f_i/n oranı sınıfta yer alan verilerin ağırlığını gösterir.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i S_i}{n} = \sum_{i=1}^k \underbrace{\frac{f_i}{n}}_{p_i} S_i = \sum_{i=1}^k p_i S_i$$

w_i : ölçeklendirilmiş
ağırlık

Örnek 1: Çevrimiçi sertifika programına katılan bir öğrenci, 7 hafta boyunca günde 6 saat , 4 hafta boyunca günde 5 saat ve 5 hafta boyunca günde 2 saat eğitime katıldıysa öğrenci günde ortalama kaç saat eğitime katılmış olur?

Ders saati	Hafta Sayısı
6	7
5	4
2	5

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i}{n} = \frac{7 \times 6 + 4 \times 5 + 5 \times 2}{16} = \frac{72}{16} = 4.5 \text{ saat}$$

Örnek 2: Cep telefonu almak isteyen bir kişi, pil ömrüne %25; hafızasına %30 ve kamera özelliklerine %45 önem veriyor. İnternette baktığı bir telefona 10 üzerinden aşağıdaki puanları verilmiştir. Bu telefon bu tüketici için ortalama kaç puan almıştır?

Özellikler	Ağırlık	Puan
Pil ömrü	0.25	8
Hafıza	0.30	5
Kamera	0.45	6

$$AO = \frac{0.25 \times 8 + 0.30 \times 5 + 0.45 \times 6}{0.25 + 0.30 + 0.45} = 6.2 \text{ puan.}$$

Örnek 3: Bir iş mülakatında işverenler, adaya verecekleri 30 puanı şu şekilde kullanacaklardır: adayın meslek bilgisine 12 puan, takım çalışmasına yatkınlığına 5 puan, yabancı dil düzeyine 7 puan ve özgüvene 6 puan vereceklerdir. 20 puanın altında kalan adaylar işe alınmayacaktır.

Adayın puanlarına bakıldığında mülakattan kaç puan almıştır?

Özellikler	Ağırlık	Puan
Meslek Bilgisi	12	20
Takım çalışmasına yatkınlık	5	10
Yabancı dil	7	15
Özgüven	6	3

$$AO = \bar{X}_A = \frac{12 \times 20 + 5 \times 10 + 7 \times 15 + 6 \times 3}{30} = \frac{413}{30} = 13.77$$

Örnek 4: Bir üniversitedeki harf notları ve ağırlıkları verilmiştir. Bu üniversitede okuyan Ayşen'nin aldığı dersler ve geçme notları ve o derslerin kredileri verildiğine göre Ayşen'in o dönemki not ortalaması kaçtır?

Notlar	Değeri
A	4
B	3
C	2
D	1
F	0

Dersler	Not	AKTS
SEC 202	A	4
BIO 296	C	7
ING 299	B	3
MAT 238	D	5
MAT 145	F	6

$$AO = \frac{4 \times 4 + 7 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times 1 + 6 \times 0}{25} = 1.76$$

2. Harmonik Ortalama

Harmonik Ortalama (HO), hız ve zaman problemlerinde kullanılan bir ortalama türüdür.

Sınıflandırılmamış verilerde harmonik ortalama,

$$HO = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$$

Sınıflandırılmış verilerde harmonik ortalama,

$$HO = \frac{n}{\sum_{i=1}^k \frac{f_i}{S_i}} .$$

f_i : i. sınıfa karşılık gelen sıklık

S_i : i. sınıfın sınıf orta nokta değeri

Örnek 5: Ankara'dan İstanbul'a yolculuk yaparken Bolu dağına kadar saate 90 km/saat hızla, İzmit'e kadar 100km/saat hızla ve Çamlıca gişelerine kadar 70 km/saat ile giden birisi ortalama ne kadar sürat yapmış olur?

$$HO = \frac{3}{\frac{1}{90} + \frac{1}{100} + \frac{1}{70}} = 84.75 \text{ km/saat}$$



Örnek 6: Sıklık çizelgesi düzenlenmiş 25 verinin Harmonik Ortalaması kaçtır?

Sınıf	Si	fi
2-5	3.5	5
6-9	7.5	12
10-13	11.5	6
14-17	15.5	2

$$HO = \frac{25}{\frac{5}{3.5} + \frac{12}{7.5} + \frac{6}{11.5} + \frac{2}{15.5}} = \frac{25}{3.679} = 6.795$$

3) Geometrik Ortalama

Geometrik Ortalama (GO), büyüme modellerinde, faiz hesaplamalarında, finans problemlerinde vb. kullanılan bir ortalama.

Sınıflandırılmamış verilerde geometrik ortalama,

$$GO = \sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i}$$

Sınıflandırılmış verilerde geometrik ortalama,

$$GO = \sqrt[n]{S_1^{f_1} S_2^{f_2} \dots S_k^{f_k}} = \left(S_1^{f_1} S_2^{f_2} \dots S_k^{f_k} \right)^{\frac{1}{n}}$$

f_i : i.sınıftaki sıklık

S_i : i.sınıfın sınıf orta nokta değeri

Örnek 7: 2,3,3,5,10 ve 8 sayılarının geometrik ortalaması kaçtır?

$$\sqrt[6]{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 10 \times 8} = \sqrt[6]{7200} = 4.39$$

Örnek 8: Aşağıda verilen sıklık çizelgesi için GO?

Si	fi
2	2
4	3
8	3
16	2

$$GO = \left(S_1^{f_1} S_2^{f_2} \dots S_k^{f_k} \right)^{\frac{1}{n}} = (2^2 \cdot 4^3 \cdot 8^3 \cdot 16^2)^{1/10} = 5.66$$

Üstel Büyüme Denklemi:

Geometrik şekilde artış gösteren bir seri, üstel fonksiyon ile ifade edilir. Bu durumda GO'dan üstel büyüme fonksiyonuna geçiş yapılır.

$$P_t = P_0 e^{rt}$$

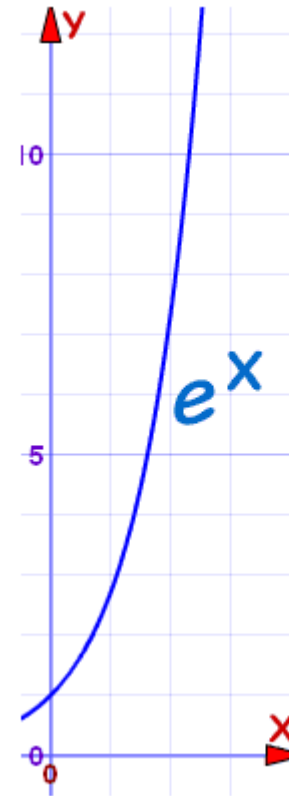
$$P_t = P_0 (1+r)^t$$

P_0 : başlangıç anındaki değer,

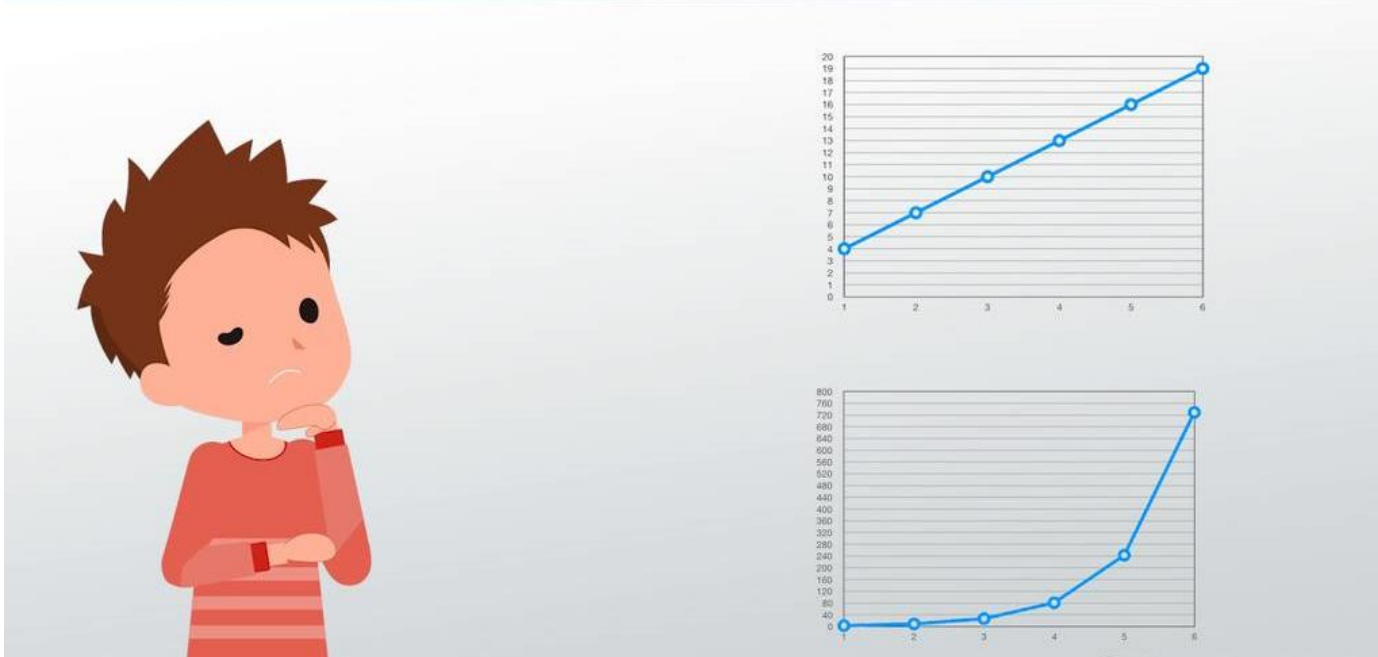
P_t : t. anındaki değer

r: artış hızı

t: zaman



Hangisi üstel?



Örnek 9 : Bir şehrin nüfusu 1 milyon ve nüfus artış hızı %12 ise bu şehirdeki nüfusun sabit nüfus artış hızıyla 20 yıl sonra kaç milyon olması beklenir?

$$P_0=1000000$$

$$r=\%12=0.12$$

$$t=20$$

$$P_{20}=?$$

$$P_{20}=1000000 e^{0.12 \times 20}$$

=11 023 176.38 olması beklenir.

Örnek 10: Bir ülkenin nüfusu 2020 yılında 19,6 milyon ve nüfus artış hızı %3.14'dür.

a) Bu ülkede 2030 yılı nüfus kaç olacaktır?

b) Nüfus kaç yıl sonra iki katına çıkacaktır?

$$a) P_0 = P_{2020} = 19.6$$

$$r = \%3.14 = 0.0314$$

$$t = 10$$

$$P_t = P_{2030} = ?$$

$$\begin{aligned} P_{2030} &= P_{2020} e^{0.0314 \times 10} \\ &= 19.6 e^{0.0314 \times 10} \\ &= 26.8 \text{ milyon.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) 2 \times 19.6 &= 19.6 e^{0.0314 \times t} \\ &= 22.07 \text{ yıl.} \end{aligned}$$

22 yıl sonra nüfusun iki katına çıkması beklenir.

Örnek 11: Bir bakteri kültüründeki 200 bakteri 3 saat sonra 900'e çıkmışsa,

- a) Bakterilerin büyüme hızı kaçtır?
- b) 6 saat sonra kaç bakteriye ulaşılacaktır?
- c) 5000 bakteriye kaç saatte ulaşılacaktır?

a) $900 = 200 e^{r \times 3}$

$r = 0.50136$

Bakterilerin büyüme hızı %50'dir.

b) $P_6 = 200e^{0.5 \times 6}$
 $= 4017$

6 saat sonra 4017 bakteri olacaktır.

c) $5000 = 200e^{0.5 \times t}$

$= 6.44 \text{ saat}$

6.44 saat sonra 5000 bakteriye ulaşılacaktır.

Örnek 12: Bir ilçede COVID-19 bulaştırma hızı %1.3'tür. Bu ilçede şu an 5200 COVID pozitif vaka varsa, vaka sayısının 10 gün sonra kaç çıkması beklenir?

$$P_{10} = 5200e^{0.013 \times 10}$$

=5921.91 kişiye ulaşacaktır.

Örnek 13: Türkiye nüfusu 2020 yılında 83 milyon ve nüfus artış hızı %1.5 ise 2030 yılı nüfusunun kaç olması beklenir?

$$P_{2030} = 83e^{0.015 \times 10}$$

=96.43 kişiye ulaşacaktır.

Aritmetik Ortalama > Geometrik Ortalama > Harmonik Ortalama

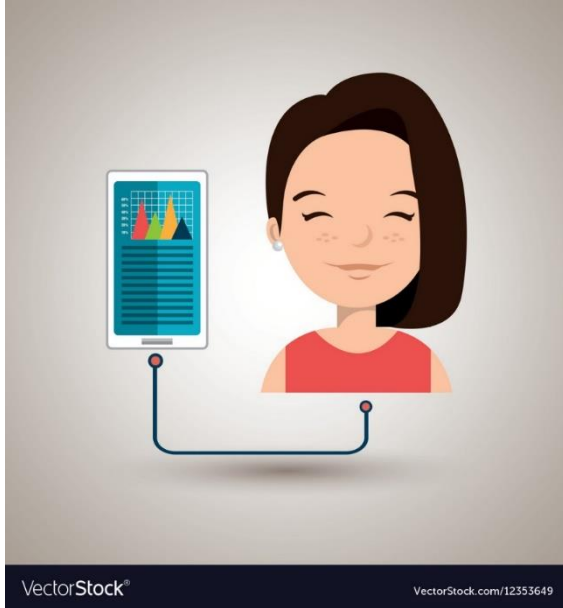
biçiminde bir bağıntı vardır.

Örnek: 4, 3, 9, 5, 7, 11, 15, 1 verilerinin ortalamaları :

Aritmetik Ortalama: 6.875

Geometrik Ortalama: 5.3012

Harmonik Ortalama: 3.6449



Bir sonraki derste «Değişim Ölçüleri» incelenecek.



KAYNAKLAR

- 1-) H.Demirhan, C.Hamurkaroğlu ,“İstatistiksel Yöntemlere Giriş”, H.Ü.Yayınları, 2011.
- 2-) Serpil Cula, Zehra Muluk, “Temel İstatistik Yöntemler”, Başkent Üniversitesi yayınları,2006.
- 3-) Levent Özbek, Esin Köksal Babacan, “İstatistiğe Giriş”, TÜBİTAK e-kitap.
- 4-) Birdal Şenoğlu, Mehmet Yılmaz, Sibel Açık Kemaloğlu, İstatistiğe Giriş, TÜBİTAK e-kitap.