1. GİRİŞ

İstatistiğin temelinde olasılık bulunmaktadır. İnsanlar doğada ki olayların meydana gelişindeki belirsizlikle karşı karşıya kaldığında olasılık kavramı ortaya çıkmıştır.

İnsan, doğumundan itibaren bu belirsizlik ile karşı karşıya kalmakta ve farkında olmadan sürekli olarak yaptığı tüm eylemlerde bu belirsizliği değerlendirmektedir. Bu değerlendirme işleminin çözümlenerek bir sistematiğe oturtulması için olasılık kavramsal olarak ele alınmaya başlanmıştır.

Olasılık kavramının temeli, şans oyunları ile ilgili problemlerin çözümünde olasılığa dayalı yaklaşımların kullanılmasıyla atılmıştır.

Fransız matematikçiler Blaise Pascal (1623-1662) ve Pierre de Fermat (1607-1665), 1654 yılında zar oyunları üzerine bir problemi ele almışlardır. Şans oyunlarına ilgi duyan Chevalier de Méré (1607-1684), Pascal' a altı yüzlü dengeli bir çift zarın 24 atılışında en az bir 6-6 sonucuna para yatırıldığında kazanç elde etme olasılığı üzerinde sorular sormuştur. Bu tip problemler üzerinde Méré, Pascal ve Fermat arasında yapılan yazışmalar olasılığın sistematik bir biçimde tanımlanmasında ilk çabalardır.

Daha sonra Hollandalı matematikçi Christiaan Hugens (1629-1695) bu yazışmalara dahil olmuş ve 1657' de şans oyunlarında karşılaşılan olasılık problemleri ile ilgili ilk çalışmasını "De Ratiociniis in Ludo Aleae" başlığı ile yayınlamıştır.

Şans oyunlarında ki kazancın da etkisiyle olasılık üzerindeki çalışmalar hız kazanmıştır. 18 yy.' da İsveçli matematikçi Jakob Bernoulli (1655-1705) ve Fransız matematikçi Abraham de Moivre' nin (1667-1754) çok önemli çalışmaları bulunmaktadır. De Moivre, 1681' de " The Doctrine of Chances: a method of calculating the probabilities of events in play" (1738' de 2. Baskı, 1756' da 3. Baskı) başlıklı çalışmasında Hugens' in bulgularını geliştirmiştir.

Olasılığın matematiksel olarak ilk tanımı, Fransız matematikçi ve gökbilimci Pierre-Simon Laplace' ın (1749-1827), 1812 yılında çıkarttığı "Théorie analytique des probabilités" başlıklı kitap ile olmuştur. Laplace bu çalışmasında, olasılık ile ilgili yeni fikirleri ve matematiksel çözümlemeleri ele almış; şans oyunları üzerine yapılan çözümlemelerden çok olasılığa matematiksel bir sistematik getirmeye çalışmıştır.

Klasik olasılık kavramı Laplace tarafından yapılmış ve olasılıkta gelinen yolda ortaya çıkarılan birçok fikri farklı alanlara uygulamıştır.

Günümüzde geçerliliğini koruyan olasılık kavramı ise Rus Matematikçi Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) tarafından 1933 yılında belitsel olarak açıklanmıştır.

Olasılığın sistematik bir yapıda uygulanabilir olması sonucu, olasılık gerçek dünyadan toplanmış verilerden anlamlı sonuçlar çıkarmak için kullanılmıştır. Bu durum, istatistik kavramının ortaya çıkmasına neden olmuştur. 18 yy.’ da istatistik sözcüğü “devletlerin demografik ve ekonomik verilerinin sistematik olarak toplanması” anlamında kullanılmaya başlanmıştır. İstatistik sözcüğünün kökeni Latincede ki “statisticum collegium” (devletin kurultayı) deyiminden gelmektedir. 18 yy.’ da İtalyanca da “statista” (siyasetçi); Almanca da “statistik” sözcükleri devlet ile ilgili verilerin çözümlenmesi anlamında kullanılmıştır. İstatistik sözcüğünün bugünkü anlamıyla kullanımı 19 yy.’ da başlamıştır.

Olasılık rasgele olaylarla ilgilenir ve rasgele olayların matematiksel olarak açıklanmasında kullanılır. Olasılık günümüzde, Genetik, Biyoloji, Fizik, Kimya, Ekonomi, Tıp, Yazılım, Kalite Kontrol ve Mühendislik alanları gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Kısacası, rasgele olayların yer aldığı tüm alanlarda olasılık ve olasılığa dayalı yöntemler kullanılır.

2. TEMEL OLASILIK KAVRAMLARI

Bu bölümde, olasılık hesaplamalarında karşılaşılan temel kavramlar açıklanmaktadır.

Olasılık

Olasılık, ilgilenilen rasgele bir olayın (veya rasgele olayların) meydana gelme olabilirliğinin numerik (sayısal) bir ölçüsüdür.

Rasgele olaylar, rasgele deneyler sonucunda ortaya çıkar. Bu nedenle, ilk olarak deney kavramı üzerinde duralım.

Deney

Gözlem veya ölçümlerin elde edildiği sürece deney denir.

Rasgele Deney

Dış koşulların değişmezliği altında sonsuz kez tekrarlanabilen ve sonucu önceden bilinmeyen deneylerdir.

Rasgele Olay

Bir rasgele deneyin sonucunda ortaya çıkan ancak gerçekleşmesi raslantıya bağlı olan olayladır. Gerçekleşmesi raslantıya bağlı olması nedeniyle, ortaya çıkma zorunluluğu yoktur. Rasgele olaylar genellikle $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots$ gibi büyük harflerle gösterilir. Aşağıda rasgele olaylara örnekler verilmiştir:

A: Bir zarın çift sayı gelmesi
B: Bir para iki kez atıldığında en az bir yazı gelmesi
C: Süpermarkete 30 dakika içerisinde 40’ tan fazla müşteri gelmesi
D: Bir ampulün ömrünün 5 aydan kısa olması
E: Havanın yağışlı olması
F: Seçimlerde X partisinin kazanması
G: Belli bir bölgedeki nüfusun 360000’ i geçmesi
H: Bir hisse senedinin değerinin yükselmesi

Örneklem Uzayı

Bir rasgele deneyin olası tüm sonuçlarından oluşan kümeye örneklem uzayı denir. Örneklem uzayı, “S” ile gösterilir.

- Bir zarın atılması rasgele deneyinde örneklem uzayı, $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$’ dır.
- İki paranın atılması rasgele deneyinde örneklem uzayı, $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{YY}, \boldsymbol{YT}, \boldsymbol{TY}, \boldsymbol{TT}\}$’ dır. Burada Y, yazıyı ve T, turayı ifade etmektedir.
- Bir zar ve bir paranın atılması rasgele deneyinde örneklem uzayı, $\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{1}, \boldsymbol{Y}), (\mathbf{1}, \boldsymbol{T}), (\mathbf{2}, \boldsymbol{Y}), (\mathbf{2}, \boldsymbol{T}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{Y}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{T}), (\mathbf{4}, \boldsymbol{Y}), (\mathbf{4}, \boldsymbol{T}), (\mathbf{5}, \boldsymbol{Y}), (\mathbf{5}, \boldsymbol{T}), (\mathbf{6}, \boldsymbol{Y}), (\mathbf{6}, \boldsymbol{T})\}$’ dir.
- Bir makinenin ömrünün saptanması rasgele deneyinde örneklem uzayı, $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} > \mathbf{0}\}$’ dır.
- Havalimanına bir saatte gelen uçak sayısının gözlemlenmesi rasgele deneyinde, $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \cdots\}$’ dır.

Örneklem Uzayı Noktası (Örnek Nokta)

Örneklem uzayının her bir elemanına örnek nokta denir.

Sonlu Örneklem Uzayı

Örneklem uzayının elemanları sayılabiliyorsa bu örneklem uzayına sonlu büyüklükte ki örneklem uzayı denir. Örneklem uzayı elemanları sonlu sayıda ya da sayılabilir sonsuzluktadır. Sonlu örneklem uzayına sahip rasgele deneylere örnekler aşağıda verilmiştir:

- Bir zarın atılması,
- Bir paranın tura gelinceye dek atılması,
- Bir basketbolcunun bir maçta attığı toplam basket sayısının belirlenmesi,
- Bir balıkçının günlük tuttuğu balık sayısının belirlenmesi,
- Bir dolmuşun belli bir seferinde taşıdığı toplam yolcu sayısının saptanması,
- Bir kavşakta bir yıl içerisinde meydana gelen trafik kazalarının sayısının belirlenmesi vb.

Sonsuz Örneklem Uzayı

Örneklem uzayında sayılamayacak sonsuzlukta eleman mevcut ise, bu örneklem uzayına sonsuz büyüklükteki örneklem uzayı denir. Sonsuz örneklem uzayına sahip rasgele deneylere örnekler aşağıda verilmiştir:

- Bir koşucunun vücut ısısının saptanması,
- Bir sınıfta ki öğrencilerin boy uzunluklarının saptanması,
- Bir sporcunun kas kütlesinin saptanması,
- Bir makinenin ömrünün saptanması,
- Obez hastalarının vücut yağ oranlarının saptanması,
- Günlük hava sıcaklığının saptanması,
- Bir öğrencinin günlük kahve tüketiminin saptanması,
- Bir bölgedeki rüzgarın hızının saptanması,
- Havadaki nem miktarının saptanması,
- Bir ineğin günlük verdiği süt miktarının saptanması vb.

Rasgele olaylar ve bu rasgele olaylarla ilgili işlemler sonucu ortaya çıkan olaylar ile küme kavramı arasında birebir ilişki vardır. Bu nedenle, olay kavramı ile ilgili tanımlamaları küme kavramındaki tanımlamalar kapsamında düşünebiliriz.

Olanaksız Olay (İmkansız)

Bir rasgele deneyin sonucunda ortaya çıkması mümkün olmayan olaya, olanaksız olay denir. Bir başka değişle, gerçekleşme olasılığı sıfır olan olaylara olanaksız olay denir. Olanaksız olay bir boş kümedir ve ∅ ile gösterilir. Örneğin,

- Bir zar atma rasgele deneyinde zarın üst yüzeyine 8 gelmesi olayı,
- İçi elma dolu bir sepetten çilek çekilmesi olayı,
- Bir zar atılması rasgele deneyinde zarın üst yüzeyine negatif sayı gelmesi olayı,
- Bir para atılması rasgele deneyinde paranın dik gelmesi olayı vb. olabilir.

Kesin Olay

Bir rasgele deneyin sonucunda gerçekleşmesi kesin olan olaya kesin olay denir. Diğer bir değişle, gerçekleşmesi olasılığı 1 olan olaylara kesin olay denir. $\boldsymbol{S}$ örneklem uzayı kesin olaydır. Örneğin,

- Bir zar atma rasgele deneyinde zarın üst yüzeyine pozitif bir sayı gelmesi
- Siyah ve beyaz toplar bulunan bir torbadan top çekme rasgele deneyinde çekilen topun siyah ya da beyaz olması olayı vb. olabilir.

Ayrık Olaylar

Aynı anda meydana gelemeyen (aynı anda gerçekleşmesi mümkün olmayan) olaylara ayrık olaylar denir. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$ ise, A ve B ayrık olaylardır.

Örnek:

Bir öğrencinin okula araba, metro, otobüs, motorsiklet ya da bisikletle gitmesi olayları ayrık olaylar mıdır?

Çözüm:

Öğrenci bunlardan sadece birini seçerek okula gidebilir. Bu nedenle, ayrık olaylardır.

Örnek:

Bir zar atılması rasgele deneyinde aşağıdaki olaylar tanımlansın:

$$\boldsymbol{A} \quad : \quad \boldsymbol{Tek\ sayı\ gelmesi}$$
$$\boldsymbol{B} \quad : \quad \boldsymbol{Çift\ sayı\ gelmesi}$$
$$\boldsymbol{C} \quad : \quad \boldsymbol{Asal\ sayı\ gelmesi}$$

a) A ve B olayları, ayrık olaylar mıdır?

b) A ve C olayları ayrık olaylar mıdır?

Çözüm:

a) A ve B ayrık olaylardır. Çünkü, $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}\}$ ve $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}\}$ kümelerinin ortak noktası yoktur. Bu iki olayın aynı anda gerçekleşmesi imkansızdır. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$ olduğundan dolayı, A ve B ayrık olaylardır.

b) A ve C ayrık olaylar değildir. Çünkü, $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}\}$ ve $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}\}$ kümelerinin ortak noktası vardır. Bu iki olay aynı anda meydana gelebilir. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \neq \emptyset$ olduğundan dolayı, A ve B ayrık olaylar değildir.

Bağımlı Olaylar

İki veya daha fazla olayın gerçekleşmesi birbirine bağlı ise böyle olaylara bağımlı olaylar denir. Bağımlı olaylarda, herhangi bir olayın gerçekleşmesi diğer olayların olasılığını etkileyerek değiştirmektedir.

Örneğin, bir torbada 3 turuncu, 5 mavi ve 4 kırmızı top olsun. Çekilen topun <u>geri atılmaması</u> koşuluyla, art arda çekilen 3 topun farklı renkte olması olayında, ilk çekilen topun rengi, ikinci çekilen topun rengi ve üçüncü çekilen topun rengi bağımlı olaylardır. Çünkü çekilen top yerine konulmadığında her çekim sonucunda torbada ki renklerin sayısı değişmektedir ve dolayısıyla renkli topların çekilme olasılıkları önceki çekimlere bağlı olarak farklılaşacaktır.

Bağımsız Olaylar

İki veya daha fazla olayın gerçekleşmesi birbirine bağlı değilse böyle olaylara bağımsız olaylar denir. Bağımsız olaylarda bir olayın gerçekleşmesi diğer olayları etkilememektedir.

Örneğin, iki zarın aynı anda atılması rasgele deneyinde zarların üst yüzeyine gelen sayının 3' ten küçük olması olayları birbirinden bağımsızdır.

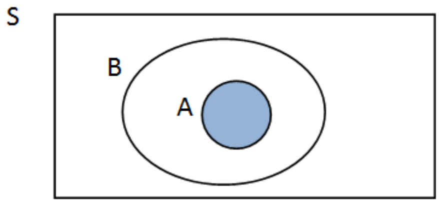
Örneğin, bir torbada 3 turuncu, 5 mavi ve 4 kırmızı top olsun. Çekilen topun <u>geri atılması</u> koşuluyla, art arda çekilen 3 topun farklı renkte olması olayında, ilk çekilen topun rengi, ikinci çekilen topun rengi ve üçüncü çekilen topun rengi birbirinden bağımsız olaylardır. Çünkü her çekimde çekilen top yerine konulduğundan renklerin dağılımı değişmemektedir.

Bir Olayın Alt Kümesi

Bir rasgele deneyin her tekrarında A olayının ortaya çıkmasıyla B olayı da ortaya çıkıyorsa, A olayı B olayının alt kümesidir (alt olayıdır). $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ olarak gösterilir. Matematiksel olarak,

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \text{ } \boldsymbol{için} \text{ } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$$

biçiminde ifade edilir.



A alt kümesinin şematik gösterimi

Eşit Olay

Bir rasgele deneyin her tekrarında A ve B olayları aynı anda ortaya çıkıyor ya da çıkmıyorsa A ve B olayları eşit olaylardır. Matematiksel olarak,

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \text{ } \boldsymbol{ve} \text{ } \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

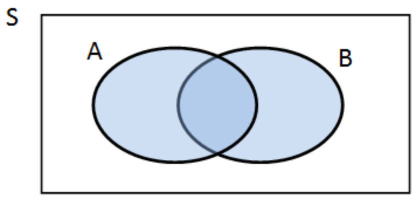
biçiminde ifade edilir.

Olayların Birleşimi

A ve B rasgele olaylarından en az birinin ortaya çıkması, olayların birleşimi olarak adlandırılır. $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ olarak gösterilir. Matematiksel olarak,

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}: \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \text{ } \boldsymbol{veya} \text{ } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$$

biçiminde ifade edilir.



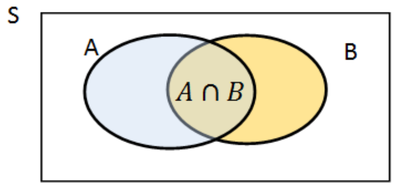
$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}'$ nin şematik gösterimi

Olayların Kesişimi

A ve B rasgele olayların her ikisinin de aynı anda ortaya çıkması olayların kesişimi olarak adlandırılır. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ olarak gösterilir. Matematiksel olarak,

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}: \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \text{ } \boldsymbol{ve} \text{ } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$$

biçiminde ifade edilir.



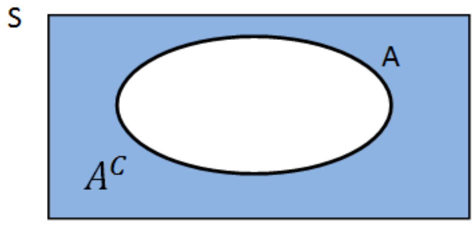
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$' nin şematik gösterimi

Tümleyen Olay

S örneklem uzayında bir A olayının gerçekleşmediği kümeye A' nın tümleyen olayı denir. $\overline{\boldsymbol{A}}$ veya $\boldsymbol{A^C}$ ile gösterilir. Matematiksel olarak,

$$\boldsymbol{A^C} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}: \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}\}$$

biçiminde ifade edilir.



$\boldsymbol{A^C}$' nin şematik gösterimi

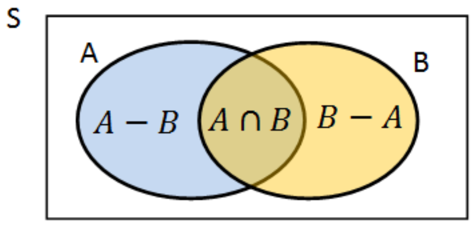
$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ ise, $\boldsymbol{B^C} \subset \boldsymbol{A^C}$' dir.

Olayların Farkı

A ve B rasgele olayları için A rasgele olayının ortaya çıktığı ancak B rasgele olayının ortaya çıkmadığı olay, A olayının B olayından farkı olarak adlandırılır. $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ veya $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ ile gösterilir. Matematiksel olarak,

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}: \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{ve}\ \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}\}$$

biçiminde ifade edilir.



$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$' nin şematik gösterimi

Aşağıda fark işlemine ilişkin bazı özellikler verilmiştir:

- $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} = \emptyset$
- $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A} - \emptyset = \boldsymbol{A}$
- $\emptyset - \boldsymbol{A} = \emptyset$
- $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$ ve $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$

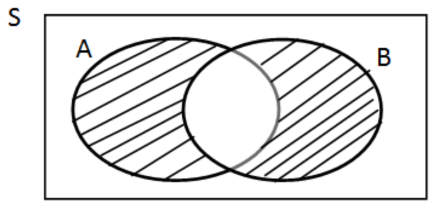
- $\boldsymbol{A \cup B = A \cup (B - A) = B \cup (A - B)}$
- $\boldsymbol{A - B = A \cap B^C}$ ve $\boldsymbol{B - A = B \cap A^C}$' dir.
- $\boldsymbol{(A - B) \cap (B - A) = \emptyset}$
- $\boldsymbol{A \subset B \Longrightarrow A - B = \emptyset}$

Olayların Simetrik Farkı

$\boldsymbol{A - B}$ rasgele olayı ile $\boldsymbol{B - A}$ rasgele olayının birleşimi, A ve B rasgele olaylarının simetrik farkıdır. $\boldsymbol{A \triangle B}$ ile gösterilir. Matematiksel olarak,

$$\boldsymbol{A \triangle B = \{x \in S : x \in (A - B)\ veya\ x \in (B - A)\}}$$

biçiminde ifade edilir.



$\boldsymbol{A \triangle B}$' nin şematik gösterimi

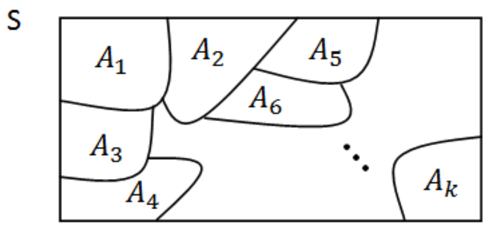
$\boldsymbol{A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)}$ ' dır.

Tam Sistem (Tam Dizge)

Rasgele bir deneyin olası tüm sonuçları $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k}$ rasgele olayları olsun. Aşağıda verilen koşulların sağlanması durumunda $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k}$ rasgele olayları bir tam sistem (dizge) oluşturmaktadır:

i. $\boldsymbol{i \neq j}$ olmak üzere, $\forall \boldsymbol{A_i \cap A_j = \emptyset}$ ve
ii. $\bigcup_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{A_i = S}$' dir.

Tam sistemi oluşturan $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k}$ olayları, S örneklem uzayını k alt uzaya bölmektedir:



Tam sistemin şematik gösterimi

Olaylarla ilgili bazı küme işlemlerine ilişkin özellikler aşağıda verilmiştir:

	Birleşim	Kesişim
Özdeşlik	$\boldsymbol{A \cup \emptyset = A}$ $\boldsymbol{A \cup S = S}$	$\boldsymbol{A \cap \emptyset = \emptyset}$ $\boldsymbol{A \cap S = A}$
Tümleme	$\boldsymbol{A \cup A^C = S}$ $\boldsymbol{(A^C)^C = A}$	$\boldsymbol{A \cap A^C = \emptyset}$
Değişim	$\boldsymbol{A \cup B = B \cup A}$	$\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$
İdempotent	$\boldsymbol{A \cup A = A}$	$\boldsymbol{A \cap A = A}$
Birleşme	$\boldsymbol{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$	$\boldsymbol{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$
Dağılma	***Birleşimin kesişim üzerine dağılma özellliği*** : $\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$ ***Kesişimin birleşim üzerine dağılma özellliği*** : $\boldsymbol{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$ ***Farkın kesişim üzerine dağılma özelliği*** : $\boldsymbol{A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)}$ ***Farkın birleşim üzerine dağılma özelliği*** : $\boldsymbol{A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)}$	
De-Morgan Kuralı	$\boldsymbol{(A \cup B)^C = A^C \cap B^C}$ $\boldsymbol{(A \cap B)^C = A^C \cup B^C}$	

3. SAYMA TEKNİKLERİ

Bu bölümde, klasik olasılığın geçerli olduğu durumlarda (yani, örneklem uzayının tüm elemanları eşit olasılıkla meydana geldiği durumlar) örneklem uzayının eleman sayısını ve ilgilenilen bir olayın içerdiği eleman sayısını belirleyen sayma yöntemleri incelenecektir.

Toplama Yöntemi

Bir A olayı $\boldsymbol{n_1}$ farklı şekilde, başka bir B olayı $\boldsymbol{n_2}$ farklı şekilde oluşabilen iki ayrık olaylar olsun. A ve B olayı $(\boldsymbol{n_1 + n_2})$ farklı şekilde oluşabilir. k tane ayrık olay ise $(\boldsymbol{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k})$ farklı şekilde oluşabilir.

Örnek:

Ankara’ dan İzmir’ e 3 farklı tren 5 farklı havayolu firması ve 20 farklı otobüs firması ile gidilebilmektedir. Buna göre, Ankara’ dan İzmir’ e kaç farklı şekilde gidilebilir?

Çözüm:

Ankara’ dan İzmir’ e 3+5+20=28 farklı şekilde gidilebilir.

Çarpma Yöntemi (Geliştirilmiş MN Kuralı)

Bir olay dizisinde 1. olay $\boldsymbol{n_1}$ farklı biçimde, 2. olay $\boldsymbol{n_2}$ farklı biçimde, 3. olay $\boldsymbol{n_3}$ farklı biçimde ve bu şekilde olaylar devam ettiğinde k. olay $\boldsymbol{n_k}$ farklı biçimde gerçekleşiyorsa olayların tamamı $(\boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} \times \boldsymbol{n_3} \times \cdots \times \boldsymbol{n_k})$ çarpımı kadar farklı biçimde gerçekleşir. Çarpma yöntemi sadece bağımsız olaylar için kullanılır.

k farklı sonuç veren bir deney r kez tekrarlanırsa ortaya çıkan tüm sonuçların sayısı çarpma yöntemi gereği $\boldsymbol{k^r}$' dir.

Örnek:

Bir iskambil destesinden yerine konularak çekilen üç karttan birinin kupa, birinin maça ve birinin de sinek olması kaç farklı biçimde gerçekleşebilir?

Çözüm:

$\mathbf{13 \times 13 \times 13 = 2197}$ farklı biçimde gerçekleşebilir.

Örnek:

Bir zarı 3 kez attığımızda ortaya çıkabilecek tüm sonuçların sayısı kaçtır?

Çözüm:

$\mathbf{6^3 = 216}$' dır.

Örneklem uzayının tüm sonuçlarının sayısı ya da ilgilenilen olayın içerdiği sonuçların sayısının büyük olduğu durumlarda aşağıda verilen sayma yöntemleri kullanılmaktadır.

Permütasyon (Sıralama)

Nesnelerin kümesinin bir kısmının ya da tümünün belirli bir sıralamasına (veya düzenlenmesine) permütasyon denir. Permütasyonda yerine koymadan seçim yapılır ve sıra önemlidir.

n tane elemanlı bir kümenin birbirinden farklı k tane elemanından oluşan sıralı k' lıların her birine, n elemanın k' lı permütasyonu denir ve $\boldsymbol{P(n,k)}$ ile gösterilir. Bu durumda, n farklı nesnenin k tanesi

$$\boldsymbol{P(n,k) = {}_nP_k = P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \quad , \quad k \leq n}$$

farklı biçimde sıralanır.

Permütasyonun bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

- n farklı nesnenin n tanesi, $P(n,n) = n!$ farklı biçimde sıralanır.
- $P(n,0) = 1$
- $P(n,1) = n$
- Permütasyonun hesaplanmasında aşağıda verilen kısa yol kullanılabilir.

$$\begin{array}{lcl} P(n,2) & = & n \times (n-1) \quad \longrightarrow \quad 2\ tane\ çarpan \\ P(n,3) & = & n \times (n-1) \times (n-2) \quad \longrightarrow \quad 3\ tane\ çarpan \\ P(n,4) & = & n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \quad \longrightarrow \quad 4\ tane\ çarpan \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P(n,k) & = & n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \big(n-(k-1)\big) \longrightarrow \quad k\ tane\ çarpan \end{array}$$

Faktöriyel:

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots 3 \times 2 \times 1$

$0! = 1$

$1! = 1$

Kombinasyon (Seçme-Gruplama)

n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerinin sayısına, n elemanın k' lı kombinasyonları denir ve $\boldsymbol{C(n,k)}$ ile gösterilir. Kombinasyonda yerine koymadan <u>örnekleme</u> yapılır ve <u>sıranın önemi yoktur.</u> Bu durumda, n elemanın k' lı kombinasyonları,

$$\boldsymbol{C(n,k) = {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad , \quad 0 \leq k \leq n \ , \quad n,k \in \{0,1,2,3,\cdots\} = \mathbb{N}}$$

tanedir.

Kombinasyonun bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \binom{0}{0} = 1$

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{r}$ ise $k = r$ veya $n = r + k$' dır.
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $k < 0$ veya $k > n$ için $\binom{n}{k} = 0$' dır.
- Pascal Kuralı:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad , \quad 1 \leq k \leq (n+1)$$

- $P(n,k) = \binom{n}{k} \times k!$
- Bir kümenin alt küme sayısı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

- $\boldsymbol{k} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \cdots\}$ ve n, pozitif/negatif rasyonel sayı olsun. Bu durumda, n elemanın k' lı kombinasyonları,

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \big(n-(k-1)\big)}^{k\ tane\ çarpan}}{k \times (k-1) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

olarak hesaplanır.

Dairesel Permütasyon

Birbirinden farklı n tane elemanın dairesel sıralanışına, bu n elemanın dairesel permütasyonu denir. Bu tür sıralamalarda elemanlardan biri sabit tutularak diğerlerinin bu elemana göre dizilişleri hesaplanır. Bir çember üzerinde düzenlenecek n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı $(n-1)!$ ' dir.

Tekrarlı Permütasyon

n tane nesne verilmiş olsun. Bu nesnelerden r_1 tanesi birinci tür, r_2 tanesi ikinci tür, r_3 tanesi üçüncü tür, . . . , r_k tanesi k. tür olsun. Yani, $n = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_k$ ' dır. Verilen n nesnenin permütasyonlarının sayısı,

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times r_3! \times \cdots \times r_k!}$$

olmaktadır.

Aşağıda nesnelerin dizilişlerine ilişkin bazı kurallar verilmiştir:

1) r farklı nesneyi n farklı kutuya n^r farklı şekilde yerleştirebiliriz. Çünkü her nesneyi yerleştirmek için n farklı kutu mevcuttur. Bir nesneyi bir kutuya yerleştirdiğimizde, diğer bir nesneyi o kutuya yerleştiremeyiz gibi bir sınırlama yoktur.

Örnek:

4 farklı asansörün bulunduğu bir apartmana giren 5 kişi kaç değişik şekilde çıkmak istedikleri kata çıkabilirler?

Çözüm:

Bir kişi aynı anda iki ya da üç asansöre binemeyeceğinden, her kişi 4 asansörden birini seçecektir. Buna göre, $4^5 = 1024$ farklı biçimde çıkmak istedikleri kata çıkacaklardır.

Örnek:

4 oyuncak, tüm oyuncakları dağıtma mecburiyetiyle, 6 çocuğa kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

Çözüm:

Birinci oyuncağı 6 farklı çocuğa verebiliriz. İkinci, üçüncü ve dördüncü oyuncağı da aynı şekilde verebiliriz. Bu yüzden cevabımız, $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 \ = \ 1296$ olmalıdır.

2) r farklı nesneyi, n kutuya, her kutuda herhangi bir sayıda ama dizilişi önemli olmak kaydıyla,

$$P(n+r-1\,,r)$$

kadar farklı şekilde yerleştirebiliriz. Çünkü birinci nesneyi n kutudan birine yerleştirebiliriz. İkinci nesneyi, yerleştirilen birinci nesnenin sağına ya da soluna koyabileceğimizi hesaba katarsak $(n+1)$ kutuya yerleştirebiliriz. Aynı şekilde devam edersek, üçüncü nesneye $(n+2)$ farklı yer vardır. Sonuç olarak nesnelerin dizilişi $n \times (n+1) \times (n+2) \times \cdots \times (n+r-1)$ farklı şekilde olabilir. Bu değer,

$$n \times (n+1) \times (n+2) \times \cdots \times (n+r-1) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} = P(n+r-1\,,r)$$

olmaktadır.

Örnek:

Bir komodinin yeterince büyük altı çekmecesi vardır. 4 farklı gömleği, bu 6 çekmeceye, içindeki sıra da önemli olmak kaydıyla kaç farklı şekilde koyabiliriz?

Çözüm:

Birinci gömleği 6 farklı çekmeceye koyabiliriz. İkinci gömleği ise hala 6 çekmeceye koyabiliriz ama ilk gömleği koyduğumuz çekmecede artık iki farklı durum vardır. İkinci gömleği, ilk gömleğin üstüne ya da altına koyabiliriz. Yani aslında ikinci gömlek için 7 farklı seçenek vardır. Üçüncü gömlek için de aynı sebepten dolayı 8 farklı seçenek oluşur. Dördüncü gömlek için de, 9 farklı seçenek oluşur. O halde cevabımız,

$$6 \times 7 \times 8 \times 9 = \frac{9!}{5!} = P(9{,}4) = 3024$$

olmaktadır.

Örnek:

5 erkek ve 4 kadından oluşan bir grup, kadınlar boy sırasında olmak üzere kaç farklı şekilde sıraya dizilebilirler?

Çözüm:

Önce kadınları sıraya dizelim. Kadınlar, kısadan uzuna ya da uzundan kısaya sıralanabilirler. Böylece, kadınların sıralanışı 2 farklı şekilde olur. 5 erkeği ise, kadınların dizilişinde başa sona veya aralara yerleştirebiliriz. Bu durumda, ilk erkeğe 5 farklı yer var. İkinci erkeğe 6, üçüncüsüne 7, dördüncüsüne 8 ve beşincisine de 9 farklı yer bulunabilir. Buna göre cevabımız aşağıdaki gibidir:

$$5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 2 = 2 \times \frac{9!}{4!} = 2 \times P(9{,}5) = 30240$$

3) r farklı nesneyi, n kutuya, her kutuda en fazla 1 nesne olmak kaydıyla $P(n,r)$ farklı şekilde yerleştirebiliriz. Çünkü, birinci nesne n kutudan birine, ikinci nesne kalan $(n - 1)$ kutudan birine, üçüncü nesne kalan $(n - 2)$ kutudan birine, . . ., r. nesne de kalan (n − r + 1) kutudan birine yerleştirilebilir. Bu durumda, farklı yerleştirme sayısı

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n\,,r)$$

olmaktadır.

Örnek:

3 farklı oyuncak, 5 çocuğa, her çocuğa en çok 1 tane oyuncak gelme koşuluyla kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

Çözüm:

Birinci oyuncağı 5 farklı çocuğa verebiliriz, ikinci oyuncağı ancak 4 farklı çocuğa verebiliriz, üçüncü oyuncak için de ancak 3 farklı çocuk bulunabilir. Dolayısıyla cevabımız $P(5\,,3) = 5 \times 4 \times 3 \ = \ 60$ olmalıdır.

Örnek:

40 kişilik bir grup, film izlemek için sinemaya giderler. Kendilerine, salonda 50 kişilik boş yerin olduğu ve istedikleri gibi oturabilecekleri söylenir. Bu durumda kaç değişik şekilde oturmak mümkün olur?

Çözüm:

Birinci kişi boş olan 50 koltuktan herhangi birine oturur. İkinci kişiye ise, 49 seçenek kalmıştır. Aynı sebepten üçüncü kişi 48 farklı seçeneğe sahiptir. Böyle böyle devam edilirse kırkıncı kişiye, diğer 39 kişi 39 koltuğu doldurduğundan 11 seçenek kalır. Bu durumda cevabımız,

$$50 \times 49 \times 48 \times \cdots \times 11 = \frac{50!}{10!} = P(50\,,40)$$

olur.

4) r özdeş nesneyi n farklı kutuya dağıtmak isteyelim. Özdeş nesneler, dış görünüş olarak aynı olduklarından diziliş hesapları yapılmaz, sadece adet hesapları yapılır. Burada, $r \leq n$ ve $r \geq n$ durumuna göre çözümler değişiklik göstermektedir. Bu durumları ayrı inceleyeceğiz.

$r \leq n$ durumunu ele alalım:

a) $r \leq n$ olmak üzere, r tane özdeş nesneyi n tane kutuya, kutuların her birinde en çok 1 nesne olacak şekilde,

$$\binom{n}{r}$$

sayıda dağıtabiliriz. Yani, n kutudan r tanesini kaç farklı şekilde seçebileceğimizi bulmamız yeterli olacaktır.

Örnek:

4 özdeş oyuncağı, 7 çocuğa, hiçbirine 1'den fazla oyuncak vermemek üzere kaç farklı şekilde dağıtabiliriz? Bu örneği 4 aynı renk gömleği 7 çekmecesi olan bir komodine her bir çekmecede 1'den fazla gömlek koymamak üzere kaç farklı şekilde dağıtılır şeklinde de düşünelim.

Çözüm:

Sadece birer oyuncak alacak olan şanslı 4 çocuğu seçmemiz yeterlidir. Toplam 7 çocuk olduğundan, bu seçimi $\binom{7}{4} = 35$ farklı biçimde yapabiliriz.

b) $r \leq n$ olmak üzere, r tane özdeş nesneyi n tane kutuya, her bir kutuya herhangi bir sayıda nesne koymak üzere ,

$$\binom{n+r-1}{r}$$

sayıda dağıtabiliriz. Nesneler farklıyken, her kutudaki nesnelerin dizilişi de önemli olması koşuluyla, $P(n+r-1\,, r)$ farklı biçimde dağıtım yapılabilir. Nesnelerin özdeş olması nedeniyle, diziliş önemli değildir. Bu yüzden, permütasyon yerine kombinasyon yaparız.

Örnek:

4 özdeş oyuncağı, 7 çocuğa herhangi bir şart olmaksızın kaç farklı şekilde dağıtabiliriz?

Çözüm:

Oyuncakları özdeş değil de farklı kabul edersek, diziliş önemli olduğundan P(10, 4) farklı biçimde 4 farklı oyuncak 7 çocuğa dağıtılabilir. Bu soruda oyuncaklar özdeş olduğundan dizilişin önemi yoktur. O halde permutasyon değil, kombinasyon yapmalıyız. Bu durumda cevap $\binom{10}{4} = 210$ olmalıdır.

$r \geq n$ durumunu ele alalım:

a) $r \geq n$ olmak üzere, r tane özdeş nesneyi n tane kutuya, her kutuda en az 1 tane nesne olacak şekilde yani hiçbir kutu boşta kalmamak üzere,

$$\binom{r-1}{n-1}$$

kadar farklı şekilde yerleştirebiliriz. Önce koşulu sağlamak için her bir kutuya 1 tane nesne koyalım. n tane nesneyi istenen şartları oluşturmak için kullandığımızdan, elimizde $(r - n)$ tane nesne kalır. $(r - n)$ tane özdeş nesneyi koşulsuz n kutuya daha önce anlattığımız şekilde

$$\binom{n+(r-n)-1}{(r-n)} = \binom{r-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}$$

farklı sayıda dağıtabiliriz.

Örnek:

7 özdeş oyuncak, 4 çocuğa, her birine en az 1 oyuncak vermek kaydıyla kaç farklı şekilde dağıtılabilir? Bu örneği 7 aynı renk gömleği 4 çekmecesi olan bir komodine her bir çekmecede en az 1 gömlek koymak kaydıyla kaç farklı şekilde dağıtılır şeklinde de düşünelim.

Çözüm:

Problemde her çocuğa en az 1 oyuncak verilmesi isteniyor. O zaman ilk başta herhangi 4 oyuncağı alıp, dört çocuğa birer tane verelim. Oyuncaklar özdeş olduğundan hangi 4 oyuncağı aldığımızın önemi yoktur. Artık elimizde 3 özdeş oyuncak vardır. Bu 3 özdeş oyuncak 4 çocuğa dağıtılacaktır. 3 özdeş oyuncak 4 farklı çocuğa, $\binom{n+r-1}{r} = \binom{6}{3}$ farklı biçimde dağıtılabilir. İkinci bir yol olarak kuraldan gidildiğinde, yine $\binom{r-1}{n-1} = \binom{6}{3}$ elde edilir.

b) $r \geq n$ olmak üzere, r tane özdeş nesneyi, n tane kutuya herhangi bir şart olmaksızın

$$\binom{n+r-1}{n-1}$$

farklı şekilde dağıtabiliriz. r tane nesneyi n kutuya herhangi bir sayıda dağıtmak yerine, kutu sayısı kadar daha fazla yani $(r + n)$ tane nesne olduğunu ve her kutuya en az 1 tane nesne koyma şartının olduğunu düşünelim. Hemen n kutuya birer tane nesne koyalım. Diğer r tane nesne herhangi bir koşul olmaksızın n kutuya dağıtılabilir. Bu durumda, a) maddesinden yararlanarak, $(r + n)$ tane nesne n kutuya, her birine en az 1 tane konulma şartıyla $\binom{n+r-1}{n-1}$ farklı şekilde dağıtılabilir.

Örnek:

7 özdeş oyuncak, 4 çocuğa, herhangi bir şart olmaksızın kaç farklı şekilde dağıtılabilir? Bu örneği 7 aynı renk gömleği 4 çekmecesi olan bir komodine bir şart olmaksızın kaç farklı şekilde dağıtılır şeklinde de düşünelim.

Çözüm:

7 özdeş oyuncak 4 çocuğa $\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3}$ farklı biçimde dağıtabiliriz.

n Nesneyi k Alt Gruba Ayırma

Birbirinden farklı n tane nesne k alt gruba ayrılacaktır. Birinci grupta n_1 tane nesne, ikinci grupta n_2 tane nesne, . . . , k. grupta n_k tane nesne olması durumunda n nesne,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

farklı şekilde k alt gruba ayrılır

Anahtarlık Problemleri

Bu tür problemlerde anahtarlık havada döndürülebildiği için pozitif ya da negatif yön önemli değildir. Bu nedenle, dairesel permütasyon sayısının yarısını almak gerekir. Ancak, daire şeklindeki bir anahtara maskot eklenirse normal permütasyon uygulanır ve yarısı alınır. Sonuç olarak, $\mathrm{n} > 2$ olmak üzere, n tane anahtar

- maskotsuz bir anahtarlığa $\frac{(\mathrm{n}-1)!}{2}$,
- maskotlu bir anahtarlığa $\frac{\mathrm{n}!}{2}$

farklı biçimde dizilebilir.

4. BAZI AÇILIMLAR

Binom Açılımı

n, negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, $(x+y)^n$ ifadesinin açılımına binom açılımı denir.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad , \qquad n \in \mathbb{N} \ , ve \ \ x, y \in \mathbb{R}$$

Açılımda $(n+1)$ tane terim vardır ve katsayılar toplamı $x = y = 1$ alınarak bulunur.

Pascal Üçgeni

Tüm $0 \leq k \leq n$ tamsayıları için hesaplanan $\binom{n}{k}$ binom açılımı katsayılarının aşağıdaki gibi üçgensel dizilişine Pascal üçgeni denir.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Çok Terimli Açılım

n, negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ ifadesinin açılımına çok terimli açılım denir.

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

Burada, $n_1, n_2, \cdots, n_k$ negatif olmayan tamsayılardır.