9. BİR BOYUTLU RASLANTI DEĞİŞKENLERİ

Raslantı Değişkeni Nedir?

Bir rasgele deney gerçekleştirildiğinde birçok olası sonuçtan hangisinin ortaya çıkacağını kesin olarak tahmin etmek imkansızdır. Bu yüzden, insanlar bu belirsizlik altında karar verebilmek için rasgeleliği matematiksel olarak modelleyerek ölçmeye çalışırlar.

Bir rasgele deneyin tüm sonuçlarının oluşturduğu kümeye örneklem uzayı denildiği ve sonuçların belli bir alt kümesinin bir olayı tanımladığını biliyoruz. Herhangi bir rasgele deney deneyde çok sayıda özellik gözlemlenebilir veya ölçülebilir. Bu nedenle, incelenen özelliğin yapısına bağlı olarak rastgele deneye ilişkin örneklem uzayı nitel veya nicel sonuçlar içerebilir. Örneğin,

- Bir madeni parayı üç kez attığımızda, bu rastgele deneyin sonuçları niteliksel değerler olacaktır: $S = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}$.
- Bir zar attığımızda, bu rasgele deneyin sonuçları nicel değerler olacaktır: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- Bir zar ve madeni parayı aynı anda attığımızda, bu deneyin her sonucu nitel ve nicel değerlerden oluşur:

$$S = \begin{Bmatrix} (1,Y),(2,Y),(3,Y),(4,Y),(5,Y),(6,Y) \\ (1,T),(2,T)\ ,(3,T),(4,T),(5,T),(6,T) \end{Bmatrix}$$

Bu sonuçlar üzerinde doğrudan matematiksel işlemler yapamayız. Fakat rastgele deneyin olası her sonucuna sayısal bir değer atanırsa, rasgeleliği ölçebiliriz.

Ayrıca, çoğu durumda, insanlar rastgele deneylerin sonuçlarının belirli bir ya da birkaç yönüyle ilgilenebilirler. Örneğin,

- Bir kumarbaz, bir madeni paranın n kez atılması rasgele deneyinde ortaya çıkan yazı-tura dizisi yerine toplam tura ya da yazı sayısıyla ilgilenebilir. Başka bir kumarbaz, bir zarın iki kez atılması rasgele deneyinde zarların gösterdiği toplam sayı ile ilgilenebilir.
- Bir jeolog, araştırdığı bir kaya örneğinin sertliğiyle değil, yalnızca yaşıyla ilgilenebilir.
- Bir sosyolog, bir anket çalışmasında görüştüğü kişinin yaşı veya kilosu ile değil, yalnızca sosyo-ekonomik durumuyla ilgilenebilir.

- Bir ziraat mühendisi, yeni bir mısır çeşidinin sadece dönüm başına verimini değil, aynı zamanda filizlendiği sıcaklığı da belirlemeye çalışabilir.
- Bir otomotiv mühendisi, yeni bir model araba için önerilen farların parlaklığı ve dayanıklılığı ve ayrıca bunların öngörülen maliyeti ile ilgilenebilir.
- Bir yarış pilotu, yarış esnasında arabasının bozulup bozulmayacağı veya kaza yapıp yapmayacağı ile ilgilenebilir.
- Bir doktor, Covid-19 bulaşmış hastaları tedavi ederken hastalanıp hastalanmayacağı, bu kişilere ne zaman Covid-19' un bulaştığı, hastaların hangi semptomlara sahip olduğu ve temaslı kişilerin sayısı ile ilgilenebilir.
- Bir hisse senedi yatırımcısı, borsada ne kadar para kazanacağı veya bir hisse senedinin ne kadar riskli olduğu ile ilgilenebilir.
- İş kazası geçiren bir kişi, işini kaybedip kaybetmeyeceği ve kaza için ne kadar tazminat alacağı ile ilgilenebilir.
- Bir şehir bölge planlamacısı, bir büyükşehirde çalışan insanların gelirleri, aile büyüklüğü, IQ seviyesi, medeni durumu yerine, bu kişilerin işe gidip gelme mesafesi, süresi veya aynı araçla gidip gelen kişi sayısı ile ilgilenebilir.

Tüm bu örneklerde kumarbaz, jeolog, sosyolog, ziraat mühendisi, otomotiv mühendisi, yarış pilotu, doktor, yatırımcı, işçi ve şehir bölge plancısı ilgilendikleri rasgelelik içeren durumları sayılarla ilişkilendirerek değerlendirmektedir. Bu durumda, bir rasgele deney sonucunda ortaya çıkan tüm sonuçlar reel sayılara aktarılabilirse, bu sonuçlar için reel eksen üzerinde matematiksel işlemler yapılabilir ve böylece rasgelelik ölçülebilir. Bu nedenle örneklem uzayının her bir elemanına reel (gerçel) bir sayı karşılık getirilmek istenir. İşte, raslantı değişkeni, ilgilenilen durumların tanımlandığı S örneklem uzayının sonuçlarına sayılar atayarak bu işlemi yapmamızı sağlamaktadır.

Raslantı değişkeni, S örneklem uzayının her elemanını reel sayılar kümesine taşıyan (aktaran) bir fonksiyondur:

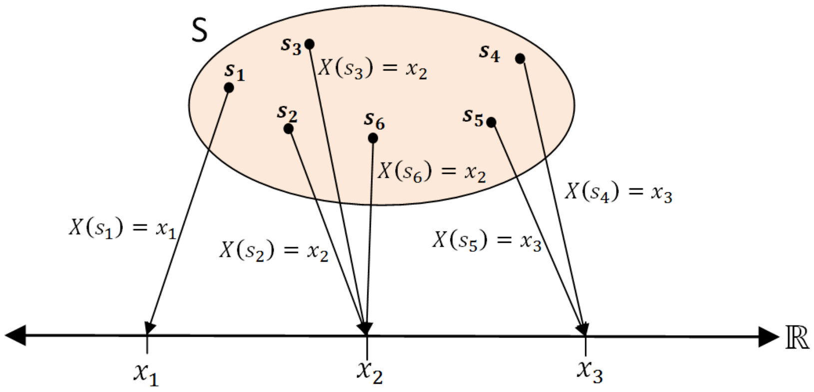
$$X: S \longrightarrow \mathbb{R}$$

Raslantı değişkeninin **tanım kümesi**, S örneklem uzayıdır. Raslantı değişkeninin alabileceği olası tüm değerlerin kümesine ise, **değer kümesi** denir. Değer kümesi, reel sayılar kümesinin uygun bir alt kümesidir. Herhangi bir X raslantı değişkeninin değer kümesini R_X ile göstereceğiz. Dolayısıyla, R_X, X rasgele değişkeninin tüm olası değerlerinin kümesidir.

Raslantı değişkeni, genellikle, X, Y, Z gibi büyük harflerle gösterilir. Rasgele deney gerçekleştirildikten sonra ilgilenilen raslantı değişkeninin ölçülen değerleri ise x, y, z gibi küçük harflerle gösterilir.

S örneklem uzayının elemanlarını s ile gösterelim. Herhangi bir $s \in S$ için X raslantı değişkeninin alacağı değer $X(s) = x$ biçiminde gösterilir. Ölçülebilir her s için $X(s)$ de ölçülebilirdir.

Bir raslantı değişkeninin tanım kümesinin $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ ve değer kümesinin $R_X = \{x_1, x_2, x_3\}$ olduğunu varsayalım. Aşağıdaki şekil, X rasgele değişkeninin örneklem uzayındaki her bir elemanı gerçel sayılara nasıl atadığını göstermektedir.



Raslantı değişkenlerinin bir fonksiyonu da raslantı değişkenidir. Örneğin, X ve Y raslantı değişkenleri olsun. a ve b sabit değerler olmak üzere, X ve Y' nin bir fonksiyonu olan

$$\begin{array}{ccccccc} aX & , & (aX + bY) & , & min(X, Y) & , & max(X, Y) \\ XY & , & X^a & , & |X| & , & \sqrt{X + Y} \\ ln(X + Y) & , & \cos(X) & , & \left(\dfrac{X}{Y}\right) & , & e^X \end{array}$$

değişkenleri de bir raslantı değişkenidir.

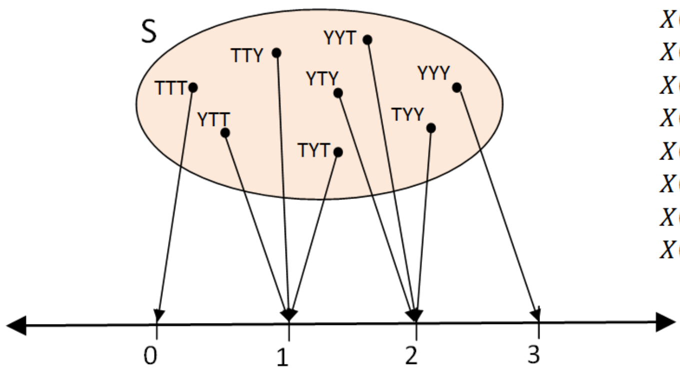
Raslantı değişkeninin matematikteki değişkenlerden farkı, belli değerleri belli olasılıklarla almasıdır. Matematikteki değişkenler ise, her değeri eşit olasılıkla almaktadır. Bir raslantı değişkenini belirlemek için, alabileceği tüm olası değerleri ve bu değerleri hangi olasılıklarla aldığını bilmek gerekir. Raslantı değişkeninin herhangi bir değeri alması olasılığı uygun bir olasılık fonksiyonu ile verilir.

Örnek: Bir madeni paranın 3 kez atıldığı rasgele deneyde, bir kumarbaz herhangi bir denemedeki toplam yazı sayısı ile ilgilensin. Bu durumda, X raslantı değişkeni bir denemedeki toplam yazı sayısı olacaktır. X' in tanım kümesini, değer kümesini ve ilgili olasılıkları bulunuz.

Çözüm: X' in tanım kümesi, madenin paranın 3 kez atılması rasgele deneyinin olası tüm sonuçlarını içeren S örneklem uzayı olacaktır:

$$S = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}$$

Bu durumda, örneklem uzayının içerdiği sonuçlara karşılık gelen X raslantı değişkeninin alacağı tüm olası değerler, $R_X = \{0,1,2,3\}$ değer kümesini verecektir. Aşağıdaki şekil, X raslantı değişkeninin örneklem uzayının tüm elemanlarına nasıl sayı atadığını göstermektedir.



$X(TTT) = 0$
$X(YTT) = 1$
$X(TYT) = 1$
$X(TTY) = 1$
$X(YYT) = 2$
$X(YTY) = 2$
$X(TYY) = 2$
$X(YYY) = 3$

X raslantı değişkeninin aldığı değerlere ilişkin olasılıklar aşağıda hesaplanmıştır:

$$P(X=0) = P(TTT) = \frac{1}{8}$$
$$P(X=1) = P(YTT) + P(TYT) + P(TTY) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$
$$P(X=2) = P(YYT) + P(YTY) + P(TYY) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$
$$P(X=3) = P(YYY) = \frac{1}{8}$$

Örnek:

İçinde beş kahverengi ve üç yeşil çorap bulunan bir çekmeceden peş peşe iki çorap rasgele seçilsin. Örneklem uzayının elemanlarını ve bunlara ilişkin olasılıkları bulunuz. Seçilen kahverengi çorapların sayısı W ise, W raslantı değişkeninin alabileceği tüm olası değerleri ve bu değerlerin olasılıklarını belirleyiniz.

Çözüm: Beş kahverengi (K) ve üç yeşil (Y) çorap bulunan çekmeceden peş peşe iki çorap çekilmesi rasgele deneyinde, örneklem uzayı $S = \{KK, KY, YK, YY\}$ olmaktadır. W raslantı değişkenin S örneklem uzayının tüm elemanlarına karşılık gelen değerleri düşünüldüğünde, W' nun değer kümesi $R_W = \{0,1,2\}$ olmaktadır. W raslantı değişkeninin aldığı değerlere ilişkin olasılıklar aşağıda hesaplanmıştır:

$$P(W = 0) = P(YY) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$
$$P(W = 1) = P(KY) + P(YK) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$
$$P(W = 2) = P(KK) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{10}{28}$$

Örnek: Büyük bir otomobil şirketinde üretilen tüm arabaların %5' i kusurludur. Bu şirketin üretim hattından rasgele dört otomobil seçildiğini varsayalım. X raslantı değişkeni, seçilen örneklemdeki kusurlu olan otomobil sayısı olsun. Buna göre, X' in değer kümesini belirleyiniz ve X' in alacağı değerlerin olasılıklarını hesaplayınız.

Çözüm: Şirkette üretilen bir otomobilin kusurlu olması K; kusursuz olması M ile gösterilsin. Buna göre, üretim hattından rasgele dört otomobil seçilmesi rasgele deneyinde, örneklem uzayı aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$S = \begin{Bmatrix} KKKK & , & KKKM & , & KKMK & , & KMKK \\ MKKK & , & KKMM & , & KMKM & , & KMMK \\ MKKM & , & MKMK & , & MMKK & , & KMMM \\ MKMM & , & MMKM & , & MMMK & , & MMMM \end{Bmatrix}$$

X raslantı değişkenin S örneklem uzayının tüm elemanlarına karşılık gelen değerleri düşünüldüğünde, X' in değer kümesi $R_X = \{0,1,2,3,4\}$ olmaktadır. X raslantı değişkeninin aldığı değerlere ilişkin olasılıklar aşağıda hesaplanmıştır:

$$P(X = 0) = P(MMMM) = 0.95^4 = 0.81450625$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(MMMK) + P(MMKM) + P(MKMM) + P(KMMM) \\ &= 4 \times 0.05 \times 0.95^3 \\ &= 0.171475 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(MMKK) + P(MKMK) + P(MKKM) + P(KMMK) + P(KMKM) + P(KKMM) \\ &= 6 \times 0.05^2 \times 0.95^2 \\ &= 0.0135375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=3) &= P(MKKK)+P(KMKK)+P(KKMK)+P(KKKM) \\ &= 4\times 0.05^3 \times 0.95 \\ &= 0.000475 \end{aligned}$$

$$P(X=4)=P(KKKK)=0.05^4=0.00000625$$

Bir raslantı değişkeninin değer kümesinin reel sayıların sayılabilir ya da sayılamayan bir alt kümesi olması durumuna göre, raslantı değişkenleri ikiye ayrılır. Bunlar, (i) Kesikli raslantı değişkenleri ve (ii) Sürekli raslantı değişkenleridir.

Kesikli Raslantı Değişkeni

X raslantı değişkeni, sadece sonlu sayıda ya da sayılabilir sonsuzlukta değerler alıyorsa X' e **kesikli raslantı değişkeni** denir.

Aşağıda kesikli raslantı değişkenleri için örnekler verilmiştir.

- Bir tavuk çiftliğinde üretilen günlük yumurtaların sayısı
- Bir çocuk havuzundaki 1 cm^3' lük havuz suyu içinde bulunan bakterilerin sayısı
- THY iç hat uçuşlarında beş yıl içerisinde meydana gelen uçak kazalarının sayısı
- 4 kişilik bir ailenin bir günde tükettiği ekmek sayısı
- Rize' de ilkbahar aylarındaki yağışlı gün sayısı
- Belirli bir günde bir köprüden geçen taşıt sayısı
- Belirli bir ayda bir galeride satılan araba sayısı
- Bir gaz örneğinde ki molekül sayısı
- Bir balıkçının bir gün içerisinde yakaladığı balık sayısı
- Belirli bir saatte bir bankayı ziyaret eden müşteri sayısı
- Bir ailenin sahip olduğu araç sayısı
- Bir madeni paranın üç kez atışında elde edilen tura sayısı
- Rastgele seçilen bir posta kodunda ki sıfırdan farklı rakamların sayısı
- Bir yüzeydeki çiziklerin sayısı
- Bir öğrencinin çantasındaki kitap sayısı
- Bir doktorun muayenehanesindeki hasta sayısı
- Belirli bir zamanda bir park alanında bulunan araba sayısı
- Bir sinemada Cuma gecesi seansına gelen seyirci sayısı
- Doğum gününde alınan hediye sayısı
- Rastgele seçilen bir 12' li yumurta kartonundaki kırılmış yumurta sayısı
- Belirli bir yıl içinde bir ailenin yaptığı tatil gezilerinin sayısı

- Onluk bir kutudaki arızalı ampullerin sayısı
- Belirli bir günde müşteri hizmetlerine gelen şikayetlerin sayısı

Olasılık Fonksiyonu

Aşağıdaki koşulları sağlayan $P(X = x) = p(x)$ fonksiyonuna, X kesikli raslantı değişkeninin **olasılık fonksiyonu** denir.

i. $x \notin R_X$ için $p(x) = 0$' dır.
ii. $\forall x \in R_X$ için $0 \leq p(x) \leq 1$'dir.
iii. $\sum_{R_X} p(x) = 1$' dir.

$(x, p(x))$ çiftlerinin hepsine X'in **olasılık dağılımı** adı verilir. Olasılık dağılımları, her bir x_i değerine karşılık gelen $p(x_i)$ olasılıklarını veren tablo, grafik ya da matematiksel fonksiyon ile ifade edilebilir.

Örnek: Aşağıda X raslantı değişkeni için tanımlanan $p(x)$ fonksiyonu, X' in olasılık fonksiyonu mudur?

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{x^2}{385} \quad , \quad x = 1,2,3,4,\cdots,10 \\ &= 0 \quad\quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

Çözüm: X raslantı değişkeninin aldığı tüm değerlere göre, X' in değer kümesi $R_X = \{1,2,3,4,\cdots,10\}$ olmaktadır. $p(x)$ fonksiyonu, X' in olasılık fonksiyonu ise aşağıda verilen koşulları sağlamalıdır:

i. $\forall x_i \notin R_X$ için $p(x_i) = 0$' dır.
ii. $\forall x_i \in R_X$için $0 \leq p(x_i) \leq 1$' dır.
iii. X' in tüm olası değerlerinin olasılıkları toplamı 1' dir:

$$\sum_{x=1}^{10} p(x_i) = \sum_{x=1}^{10} \frac{x^2}{385} = \frac{1}{385} \underbrace{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2)}_{\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{1}{385}\left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6}\right) = 1$$

Yukarıda incelenen üç koşulun sağlanması nedeniyle, $p(x)$ fonksiyonu X raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonudur.

Örnek: Aşağıdaki tabloların her biri belirli x değerlerini ve bunların $p(x)$ fonksiyonundaki değerlerini listelemektedir. Her tablonun geçerli bir olasılık dağılımını temsil edip etmediğini belirleyiniz.

a)

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.08	0.11	0.39	0.27

b)

x	2	3	4	5
$p(x)$	0.25	0.34	0.28	0.13

c)

x	7	8	9
$p(x)$	0.70	0.50	- 0.20

Çözüm:

(a) Her bir x değeri için $p(x)$ fonksiyon değeri 0 ile 1 arasındadır. Fakat, fonksiyon değerlerinin toplamı bire eşit değildir: 0.08 + 0.11 + 0.39 + 0.27 = 0.85. Sonuç olarak, bu tablo X için geçerli bir olasılık dağılımını temsil etmemektedir.

(b) Her bir x değeri için $p(x)$ fonksiyon değeri 0 ile 1 arasındadır. Ayrıca, fonksiyon değerlerinin toplamı bire eşittir: 0.25 + 0.34 + 0.28 +0.13 = 1. Sonuç olarak, bu tablo X için geçerli bir olasılık dağılımını temsil etmektedir.

(c) Fonksiyon değerlerinin toplamı 1' e eşit olmasına rağmen, x=9 için fonksiyon değeri negatiftir: $p(9) < 0$. Bu durumda, $\forall x \in R_X$ için $0 \leq p(x) \leq 1$ koşulu sağlanmamıştır. Bu nedenle, bu tablo X için geçerli bir olasılık dağılımını temsil etmemektedir.

Örnek: 3 beyaz, 3 kırmızı ve 5 siyah top içeren bir torbadan rastgele üç top çekilsin. Seçilen her beyaz top için 1 TL kazanıldığı ve seçilen her kırmızı top için 1 TL kaybedildiği varsayılsın. Bu deneyden elde edilen toplam kazanç X raslantı değişkeni ile gösterilsin.

a) X' in olasılık fonksiyonunu bulunuz.
b) Bir kişinin bu oyunda para kazanması olasılığı nedir?
c) X' in olasılık dağılımını grafiksel olarak gösteriniz.

Çözüm: Seçilen siyah toplardan para kazanılmamaktadır. Ayrıca, X raslantı değişkeni toplam kazancı gösterdiği için torbadan seçilen topların sırası önemli değildir. Seçilen toplarda beyaz ve kırmızı topların sayısı, X’ in değerini belirleyecektir.

Toplam Kazanç (X)						
-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
3K	2K , 1S	1K , 2S	3S	1B , 2S	2B , 1S	3B
		2K , 1B	1B , 1K , 1S	2B , 1K		

Sonuç olarak, X' in değer kümesi $R_X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ olmaktadır. X' in aldığı tüm olası değerlerin olasılıkları aşağıda hesaplanmıştır:

$$P(X=-3) = \frac{\overbrace{\binom{3}{3}}^{3K}}{\binom{11}{3}} = \frac{1}{165} \qquad P(X=3) = \frac{\overbrace{\binom{3}{3}}^{3B}}{\binom{11}{3}} = \frac{1}{165}$$

$$P(X=-2) = \frac{\overbrace{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}^{2K\ 1S}}{\binom{11}{3}} = \frac{15}{165} \qquad P(X=2) = \frac{\overbrace{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}^{2B\ 1S}}{\binom{11}{3}} = \frac{15}{165}$$

$$P(X=-1) = \frac{\overbrace{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}^{1K\ 2S} + \overbrace{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}^{2K\ 1B}}{\binom{11}{3}} = \frac{39}{165} \qquad P(X=1) = \frac{\overbrace{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}^{1B\ 2S} + \overbrace{\binom{3}{1}\binom{3}{2}}^{1K\ 2B}}{\binom{11}{3}} = \frac{39}{165}$$

$$P(X=0) = \frac{\overbrace{\binom{5}{3}}^{3S} + \overbrace{\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}^{1K\ 1B\ 1S}}{\binom{11}{3}} = \frac{55}{165}$$

$\forall x \in R_X$ için $0 \leq p(x) \leq 1$' dir.

$$\sum_{i=-3}^{3} P(X=i) = \frac{1+15+39+55+39+15+1}{165} = 1$$

X' in olasılık dağılımı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{55}{165} \quad , \quad x = 0 \\ &= \frac{39}{165} \quad , \quad x = -1\,,1 \\ &= \frac{15}{165} \quad , \quad x = -2\,,2 \\ &= \frac{1}{165} \quad , \quad x = -3\,,3 \\ &= 0 \quad , \quad \textit{diğer x değerleri için} \end{aligned}$$

X' in olasılık dağılımı aşağıda tablo formunda verilmiştir:

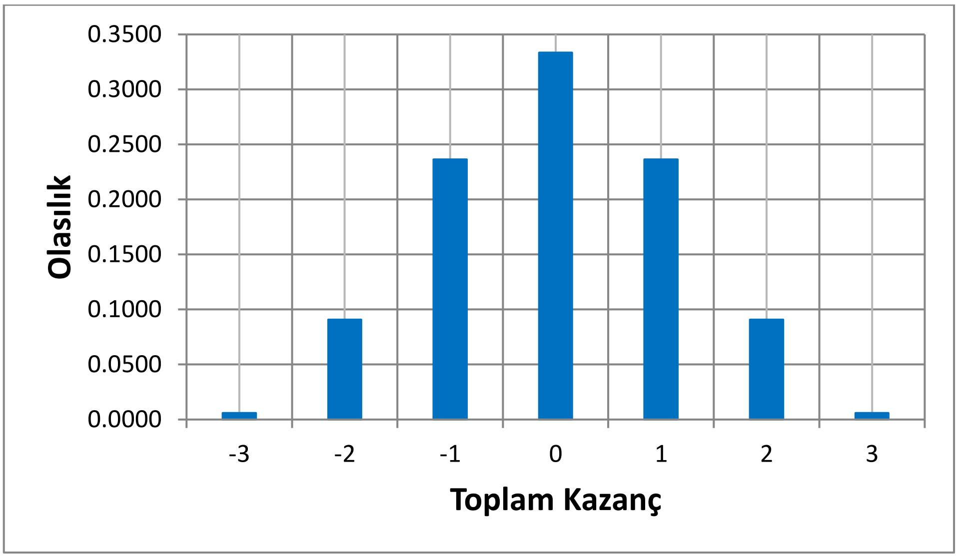
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	Toplam
$p(x)$	$\frac{1}{165}$	$\frac{15}{165}$	$\frac{39}{165}$	$\frac{55}{165}$	$\frac{39}{165}$	$\frac{15}{165}$	$\frac{1}{165}$	1

b) Bir kişinin bu oyunda para kazanması olasılığı

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{39+15+1}{165}=\frac{1}{3}$$

olmaktadır.

c) X' in olasılık dağılımı çubuk grafiğinde gösterilmiştir:



Örnek: Bir otomobilin bir denemede çalışmasının olasılığı 4/5'tir ve bu olasılık denemeden denemeye değişmemektedir. X raslantı değişkeni otomobil çalışana kadar yapılan deneme sayısı olsun. X'in olasılık dağılımını bulunuz.

Çözüm: X'in değer kümesi $R_X=\{1,2,3,4,5,\cdots\}$'dir. X' in olası değerlerinin olasılıklar aşağıda hesaplanmıştır:

$$P(X=1)=p(1)=\frac{4}{5}$$
$$P(X=2)=p(2)=\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5^2}$$
$$P(X=3)=p(3)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5^3}$$
$$P(X=4)=p(4)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5^4}$$
$$\vdots$$

$\forall x_i \in R_X$ için $0 \leq p(x_i) \leq 1$'dir. $\forall x_i \notin R_X$ için $p(x_i) = 0$' dır.

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = \frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \cdots = \frac{4}{5}\overbrace{\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)}^{r^0+r^1+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 1$$

$p(x)$, olasılık fonksiyonu koşullarını sağlamaktadır. X'in olasılık dağılımı,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{5^x} & , \quad x = 1,2,3,4,5,\cdots \\ & , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{cases}$$

matematiksel fonksiyonu ile ifade edilebilir.

Örnek: Bir kutuda 2 kırmızı, 2 beyaz top vardır. Her seferinde bir top çekilmekte ve çekilen top yerine konulmamaktadır. İlk beyaz top çekilene kadar süreç devam etmektedir. X raslantı değişkeni, yapılan toplam çekim sayısı olsun. X' in olasılık dağılımını bulunuz.

Çözüm: 2 kırmızı, 2 beyaz top bulunan kutudan ilk beyaz top çekilene kadar kutudan top çekme işlemine devam edilmesi nedeniyle, örneklem uzayı $S = \{B, KB, KKB\}$ olmaktadır. Buna göre; X' in değer kümesi $R_X = \{1,2,3\}$ olmaktadır.

$P(X = 1) = p(1) = P(B) = \frac{2}{4}$

$P(X = 2) = p(2) = P(KB) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(X = 3) = p(3) = P(KKB) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{6}$

$\forall x \in R_X$ için $0 \leq p(x) \leq 1$' dir.

$$\sum_{x=1}^{3} p(x) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+4+2}{12} = 1$$

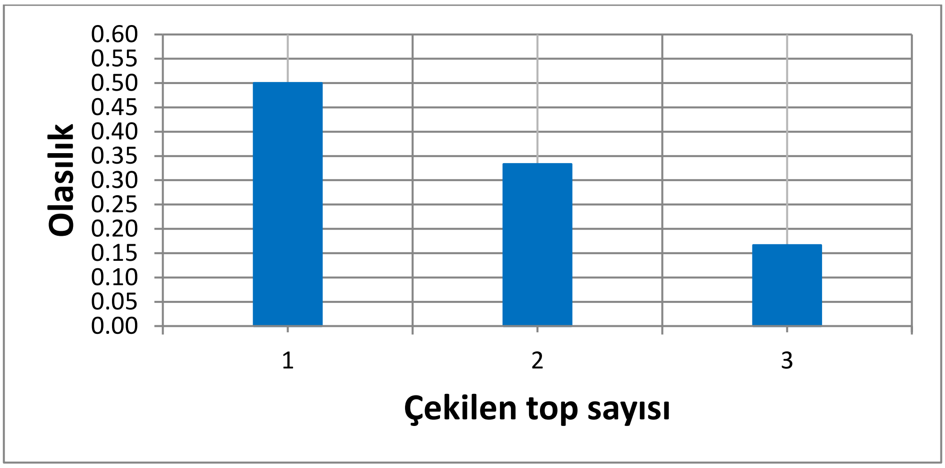
$p(x)$, X'in olasılık fonksiyonudur. X' in olasılık dağılımı aşağıdaki tablo ile ifade edilebilir:

x	1	2	3	Toplam
$p(x)$	1/2	1/3	1/6	1

X'in olasılık dağılımı aşağıdaki gibi fonksiyonel biçimde verilebilir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2} \quad , \quad x = 1 \\ &= \frac{1}{3} \quad , \quad x = 2 \\ &= \frac{1}{6} \quad , \quad x = 3 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

X' in olasılık dağılımı aşağıdaki gibi çubuk grafiği ile verilebilir:



Örnek: Üç top, 1'den 20'ye kadar numaralandırılmış 20 top içeren bir torbadan rastgele seçilecektir. X raslantı değişkeni, seçilen üç top içerisinde en büyük numaralı topu göstermektedir.

a) X raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.
b) Çekilen toplardan en az biri 17 ya da 17' den daha büyük bir sayıya sahip olacağına bahse girersek, bahsi kazanma olasılığımız nedir?

Çözüm: a) X raslantı değişkeni seçilen üç toptan en büyük numaralı topu göstermektedir. Bu nedenle, X' in alabileceği olası tüm değerler $R_X = \{3,4,5,6,\cdots,20\}$' dir. Torbadan 3 top $\binom{20}{3}$ farklı biçimde çekilebilir. Olası tüm çekimlerin her birinin eşit olasılıklı olduğunu varsayarsak, X' in alacağı değerlerin olasılıkları aşağıda verilen olasılık fonksiyonu ile elde edilir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\binom{x-1}{2}}{\binom{20}{3}} \quad , \quad x = 3,4,5,6,\cdots,20 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

Burada, seçilen en büyük numaralı sayı x' e eşit olduğundan, diğer iki top kalan (x-1) numaralı toplardan seçilir. Böylece en büyük numaralı top x-inci top olur.

b) $(X \geq 17)$ olması durumunda, bahsi kazanırız.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 17) &= P(X=17)+P(X=18)+P(X=19)+P(X=20) \\
&= \frac{\binom{17-1}{2}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{18-1}{2}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{19-1}{2}}{\binom{20}{3}}+\frac{\binom{20-1}{2}}{\binom{20}{3}} \\
&= \frac{2}{19}+\frac{34}{285}+\frac{51}{380}+\frac{3}{20} \\
&= 0.5088
\end{aligned}$$

a ve b sabit değerler olmak üzere, X raslantı değişkenine ilişkin bazı olasılıklar aşağıda tanımlanmıştır:

$$P(X=a) = p(a) \qquad P(X \geq a) = \sum_{x=a}^{+\infty} p(x)$$

$$P(X \leq a) = \sum_{x=-\infty}^{a} p(x) \qquad P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} p(x)$$

Örnek: Dört çocuklu bir ailede sabah kahvaltısında süt içmeyi tercih eden çocukların sayısı X kesikli raslantı değişkeni olsun. X'in olasılık dağılımı aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{x+1}{15} \quad , \quad x=0,1,2,3,4 \\
&= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için
\end{aligned}$$

a) Tam 3 çocuğun süt içmesi olasılığını bulunuz.
b) 3' ten az çocuğun süt içmesi olasılığını bulunuz.
c) 2 ve 2'den fazla çocuğun süt içmesi olasılığını bulunuz.
d) $P(1 \leq X < 3) = ?$
e) $P(X > 4) = ?$ ve $P(X < 0) = ?$
f) $P(X \leq 4) = ?$ ve $P(X \leq 0) = ?$
g) $P(2 < X \leq 4) = ?$

Çözüm:

a) $P(X=3) = \frac{4}{15}$
b) $P(X<3) = p(0)+p(1)+p(2) = \frac{6}{15}$
c) $P(X \geq 2) = p(2)+p(3)+p(4) = \frac{12}{15}$
d) $P(1 \leq X < 3) = p(1)+p(2) = \frac{5}{15}$

e) $P(X > 4) = 0,\ P(X < 0) = 0$

f) $P(X \leq 4) = 1,\ P(X \leq 0) = p(0) = \frac{1}{15}$

g) $P(2 < X \leq 4) = p(3) + p(4) = \frac{9}{15}$