Hacettepe Üniversitesi

MAT121 MATEMATİK I
Arasınav

Akad.Yıl	: *2024-2025*	Ad	:
Dönem	: *Güz*	Soyad	:
Tarih	: *13.11.2024*	Numara	:
Zaman	: *10:30-11:45*	Şube	:
Süre	: *75 dk*		

Toplam 100 puan

1. (25)	2. (25)	3. (25)	4. (25)				

1. a) $y = f(x) = e^{\arctan\left(\sqrt{\ln(x)-2}\right)}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

b) $e^x = 4 + x^3$ denkleminin $[-2,-1]$ aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz. (İpucu: Ara-Değer teoremini kullanınız.)

2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin.

a) f fonksiyonunu $x = 0$ noktasında sürekli midir?

b) Eğer $f'(0)$ var ise türev tanımını kullanarak bulunuz.

3. Aşağıdaki limit değerleri varsa bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-5x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 - 6\cos x + \cos^2 x}{x \sin x}$

4. a) $f(x) = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

b) $x^2 y + y^4 = 4 + 2x$ eğrisinin $(-1, 1)$ noktasındaki teğet doğrusu denklemini bulunuz.

Başarılar!

Prof. Dr. Rıza Ertürk (02)

Dr. Öğrt. Üyesi Meltem Altun Özarslan (03)

MAT121 MATEMATİK I

ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1) a) $f(x)$ tanımlıdır $\Leftrightarrow$ $\ln(x)$ tanımlıdır

ve

$\ln(x) - 2 \geq 0$ 'dır.

$\Leftrightarrow$ $x > 0$ ve $\ln(x) \geq 2$ $\downarrow$ artan e^x fonk. uygula.

$\Leftrightarrow$ $x > 0$ ve $e^{\ln(x)} \geq e^2$

$\Leftrightarrow$ $x > 0$ ve $x \geq e^2$

$\Leftrightarrow$ $x \in [e^2, \infty)$

b) $f(x) = x^3 + 4 - e^x$ olarak tanımlayalım.

$f(x)$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}$'de, özel olarak da $[-2,-1]$ aralığında süreklidir. $\{ e^x, -4, x^3$ tüm $\mathbb{R}$'de sürekli fonk.lar $\}$

$$\left.\begin{aligned} f(-2) &= 4 - 8 - e^{-2} < 0 \\ f(-1) &= 4 - 1 - e^{-1} > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists c \in (-2,-1) \ni$$

A.D.T $f(c) = c^3 + 4 - e^c = 0$

$\therefore$ $4 + c^3 = e^c$, $c \in (-2,-1)$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

fonk. verilsin.

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} \quad (0/0) \quad \left(\dfrac{\cos x + 1}{\cos x + 1}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x \cdot (\cos x + 1)} = - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x \cdot (\cos x + 1)}$

$= - \underbrace{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}}_{= 1} \cdot \underbrace{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}}_{0}$

$= 0 = f(0)$

old. f $x = 0$'da süreklidir.

b) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{\cos h - 1}{h} - 0}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h^2} \quad (0/0) \quad \dfrac{(\cos h + 1)}{(\cos h + 1)}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos^2 h - 1}{h^2} = - \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin^2 h}{h^2 . (\cos h + 1)}$

$= - \underbrace{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h}}_{= 1} \cdot \underbrace{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h}}_{= 1} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\cos h + 1}$

$= -1/2$

3. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-5x}$ $\quad (\infty - \infty) \quad \dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-5x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-5x}\right)}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2+3x) - (x^2-5x)}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-5x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{5}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{8x}{\underset{-x}{|x|}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1-\frac{5}{x}}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8\cancel{x}}{\underset{(-1)}{(-\cancel{x})}\cdot\left(\sqrt{1+\cancel{\tfrac{3}{x}}^{\,0}} + \sqrt{1-\cancel{\tfrac{5}{x}}^{\,0}}\right)}$$

$$= \frac{8}{(-1)\cdot 2} = -4$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 - 6.\cos x + \cos^2 x}{x.\sin x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 5)\ (\cos x - 1)}{x.\sin x} \quad \left(\tfrac{0}{0}\right) \quad \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 5)\,(\cos x - 1)\,(\cos x + 1)}{x.\sin x.(\cos x + 1)} \qquad \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\sin x.\ \cancel{\sin x}.\ (\cos x - 5)}{x.\ \cancel{\sin x}.\ (\cos x + 1)}$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 5}{\cos x + 1} = (-1).1.\left(-\frac{4}{2}\right)$$

$$= 2$$

4. a) $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) \cdot \left(\frac{\cos x \cdot (1+\cos x) - (-\sin x)\sin x}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot \sin x}{(1+\cos x)^2}$$

b) $x^2 y + y^4 = 4 + 2x$ eğrisi veriliyor.

Kapalı Türev Al. $\Rightarrow$ $2x \cdot y + x^2 \cdot y' + 4y^3 \cdot y' = 2$

$$\Rightarrow y'(x^2 + 4y^3) = 2 - 2xy$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2 - 2xy}{x^2 + 4y^3}$$

$$\Rightarrow y'\Big|_{(-1,1)} = \frac{2 - 2\cdot(-1)}{1 + 4 \cdot 1} = \frac{4}{5}$$

O zaman $(-1,1)$ noktasındaki teğet doğrusu denklemi;

$$y - 1 = (4/5) \cdot (x+1)$$

$$\Rightarrow 5y - 5 = 4x + 4 \Rightarrow 5y - 4x - 9 = 0$$