

1. $X = 2t^2 + 3$, $y = t^4$ ile verilen parametrik eğrinin $t = -1$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm :

$$t = -1 \Rightarrow x = 5, y = 1, \quad \frac{dx}{dt} = 4t, \quad \frac{dy}{dt} = 4t^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}; \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3}{4t} = t^2 \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-1} = (-1)^2 = 1$$

Dolayısıyla teğet doğrusu:

$$L: y - 1 = 1(x - 5) \Rightarrow y = x - 4$$

2. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz

a. $y = a^x \cdot x^a$; $a > 0$

b. $f(x) = \frac{x e^x}{\sqrt[4]{(x^3 - 3x - 2)^3}}$

c. $r(\theta) = (\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)^{-1}$

d. $y(t) = e^{\cos^2(\pi t - 1)}$

e. $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$

f. $y = \ln(\sqrt{\arctan x})$

Cözüm:

$$a. \frac{dy}{dx} = a^x \ln a \cdot x^a + a x^{a-1} \cdot a^x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

$$b. f(x) = \frac{x e^x}{\sqrt[4]{(x^3 - 3x - 2)^3}}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + x e^x) (x^3 - 3x - 2)^{3/4} \left[\frac{3}{4} (x^3 - 3x - 2)^{-1/4} \cdot (3x^2 - 2) \right] \cdot x e^x}{(x^3 - 3x - 2)^{3/2}}$$

$$c. r(\theta) = (\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)^{-1}$$

$$r'(\theta) = -(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)^{-2} \cdot \frac{d}{d\theta} (\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)$$

$$= -(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)^{-2} \cdot (-\operatorname{cosec} \theta \cdot \cot \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta)$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta}$$

$$d. y = e^{\cos^2(\pi t - 1)}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{\cos^2(\pi t - 1)} \cdot 2 \cos(\pi t - 1) \cdot (-\sin(\pi t - 1)) \cdot \pi$$

$$e. y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$$

$$y' = \frac{1}{2} (1 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= 1 - \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

f. $y = \ln \sqrt{\tan^{-1} x}$

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\tan^{-1} x}} \cdot \frac{d}{dx} (\sqrt{\tan^{-1} x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tan^{-1} x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\tan^{-1} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

3. Kapalı türev kullanarak $\frac{dy}{dx}$ 'i bulunuz.

$$y \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - xy$$

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \cdot \cos\frac{1}{y} \cdot -\frac{1}{y^2} y' = -y - xy'$$

$$\frac{dy}{dx} \left(\sin\frac{1}{y} - \frac{1}{y} \cos\frac{1}{y} + x \right) = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\left(\sin\frac{1}{y} - \frac{1}{y} \cos\frac{1}{y} + x \right)}$$

4. $xy + 2x - y = 0$ eğrisinin $2x + y = 0$ doğrusuna paralel olan normal doğrularını bulunuz.

Çözüm:

Normal doğruları $y = -2x$ doğrusuna paralel olacağından eğimi $m_N = -2$ olmalıdır.

Dolayısıyla teğet doğrularının eğimi $m_T = \frac{1}{2}$ olur.

$$xy + 2x - y = 0 \Rightarrow y + x y' + 2 - y' = 0$$

$$y' = \frac{y+2}{1-x}$$

$$\frac{y+2}{1-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2y+4 = 1-x$$
$$x = -2y-3$$

Bu nokta eğri üzerinde olduğundan

$$(-3-2y)y + 2(-3-2y) - y = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3, y = -1$$

\Downarrow \Downarrow
 $x = 3$ $x = -1$

Dolayısıyla normal doğruları:

$$y+3 = -2 \cdot (x-3) \quad \text{ve} \quad y+1 = -2 \cdot (x+1)$$

\Downarrow \Downarrow
 $y = -2x+3$ $y = -2x-3$

5. Türevlenebilir f fonksiyonu için $f(1)=1$ ve $y = (f(x,y))^2$ biçiminde verilen eğrinin $(1,1)$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimi 3 olsun. $f'(1)$ değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = 2(f(x,y)) f'(x,y) \cdot (1 \cdot y + x \frac{dy}{dx})$$

$$f(1)=1 \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)} = 3 \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)} = 2 f(1) f'(1) \cdot (1 + 1 \cdot \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)})$$

$$\Rightarrow 3 = 2 \cdot 1 \cdot f'(1) \cdot 4 \Rightarrow f'(1) = 3/8$$

6. $f(x) = 2x + \cos x$ ise $(f^{-1})'(1)$ 'i bulunuz.

NOT : f tersinir bir fonksiyon olsun. O zaman

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\Rightarrow f'(f^{-1}(x)) (f^{-1}(x))' = 1 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\text{Çözüm: } (f^{-1}(1))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

Dolayısıyla $f^{-1}(1)$ değerini bulmalıyız:

$$f(x) = 2x + \cos x$$

$$f^{-1}(1) = a \Leftrightarrow f(a) = 1$$

$$f(a) = 2a + \cos a = 1 \Leftrightarrow a = 0$$

$$f^{-1}(1) = 0$$

$$0 \text{ zaman } (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

$$(f'(x) = 2 - \sin x, \quad f'(0) = 2)$$

7. Verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

$$a. \quad y = \ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta \cdot \cos \theta}}{1 + 2 \ln \theta} \right)$$

$$b. \quad y = \log_5(x e^x)$$

Çözüm:

$$a. \quad y = \frac{1}{2} \ln(\sin \theta \cdot \cos \theta) - \ln(1 + 2 \ln \theta)$$

$$y = \frac{1}{2} (\ln \sin \theta + \ln \cos \theta) - \ln(1 + 2 \ln \theta)$$

$$y'(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \cdot \cos \theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot \sin \theta - \frac{1}{1 + 2 \ln \theta} \cdot \frac{2}{\theta}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cot \theta - \tan \theta - \frac{4}{\theta(1 + 2 \ln \theta)} \right)$$

$$6. \quad f(x) = \log_5 x e^x = \frac{\ln x e^x}{\ln 5}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\ln 5} \left(\frac{1}{x e^x} \cdot (e^x + x e^x) \right) \\ &= \frac{1}{\ln 5} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) ; & x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

f' in tüm \mathbb{R} 'de türetilenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 2 - \left(2x \cos \frac{1}{x^3} - x^2 \sin \frac{1}{x^3} \cdot \frac{-3}{x^4} \right)$$

$$x = 0 \Rightarrow f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(2h - h^2 \cos \frac{1}{h^3} \right) \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(2 - \underbrace{h \cos \frac{1}{h^3}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \quad \text{sinirli}}} \right) = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{3}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x^3} ; & x \neq 0 \\ 2 ; & x = 0 \end{cases}$$

9. $f'(5) = 3$ ise $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} = ?$

NOT: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Çözüm: $f'(5) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{(\sqrt{x} + \sqrt{5})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \cdot \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x} + \sqrt{5})$$

$$= f'(5) \cdot 2\sqrt{5} = 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

10. $\tan(xy^2) = \frac{2xy}{\pi}$ eğrisinin $(-\pi, \frac{1}{2})$

noktasındaki teğet doğrusu denklemini bulunuz.

(ÖDEV)

11. $f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x^2+x^3}} - x$

a. Tanım kümesini bulunuz.

b. $f(\frac{5}{4})$ 'ü hesaplayınız.

c. $f(x) = -1$ olacak şekilde pozitif bir x reel sayısının var olduğunu gösteriniz.

d. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ?$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = ?$

Çözüm:

a. ① $\sqrt{x^2+x^3} - x \neq 0$
② $x^2+x^3 \geq 0$

① $\sqrt{x^2+x^3} = x \Leftrightarrow x^2+x^3 = x^2, x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $\Rightarrow x \neq 0$ olmalı!

② $x^2+x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow (1+x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq -1$

$T_f = [-1, 0) \cup (0, \infty)$

b. $f(\frac{5}{4}) = \frac{\sin(\frac{5\pi}{4})}{\sqrt{(\frac{5}{4})^2+(\frac{5}{4})^3}-\frac{5}{4}} = \frac{-1/\sqrt{2}}{\frac{5}{4}(\frac{3}{2}-1)} = -\frac{4\sqrt{2}}{5}$

$$c. \quad f\left(\frac{5}{4}\right) = -\sqrt{\frac{32}{25}} < -1 < 0 = f(1)$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) < -1 < f(1)$$

f fonksiyonu $\left[1, \frac{5}{4}\right]$ aralığında sürekli olduğundan Ara Değer Teoremine göre

$$\exists c \in \left(1, \frac{5}{4}\right), \quad f(c) = -1.$$

$$d. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x^2 + x^3} - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \pi x}{|x| \sqrt{1+x} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \pi x}{-x \sqrt{1+x} - x}$$

$$= -\pi \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}$$

$$= -\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$e. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin \pi x}{\sqrt{x^2 + x^3} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin \pi x}{x(\sqrt{1+x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)}{1+x-1}$$

$$= \pi \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{1+x} + 1)$$

$$= \pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi$$

12. f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere
 $g(x) = f(x f(x^2) + f(x))$ ve ayrıca

(i) $f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 1, f'(2) = -2$
 $f'(3) = -4, f'(4) = -3$ ve

(ii) $g(x)$ fonksiyonunun $x=2$ 'deki teğet doğrusu
 $y = 20x + 19$ ise

$f(5)$ ve $f'(5)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm:

(ii) $\Rightarrow g'(2) = 20$ ve $g(2) = 20 \cdot 2 + 19 = 59$

$$g(2) = f(2 f(4) + f(2)) = f(2 \cdot 1 + 3) = f(5)$$

$$f(5) = 59$$

$$g'(x) = f'(x f(x^2) + f(x)) \cdot (1 \cdot f(x^2) + x f'(x^2) 2x + f'(x))$$

(i) \Rightarrow

$$g'(2) = f'(2 f(4) + f(2)) (1 \cdot f(4) + 2 f'(4) 2 \cdot 2 + f'(2))$$

$$= f'(2 + 3) \cdot (1 + 8 \cdot (-3) - 2)$$

$$\Rightarrow 59 = f'(5) \cdot (-25)$$

$$f'(5) = -\frac{59}{25}$$

13. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini alınız.

a. $y = (\sin x)^{x^3}$

b. $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}} e^{x^2}$

c. $y = x^{\ln x} (\sec x)^{3x}$

d. $y = x^{(x^{(x^4)})}$

Çözüm:

a. $y = (\sin x)^{x^3}$, $\ln y = \ln (\sin x)^{x^3}$
 $\Rightarrow \ln y = x^3 \ln(\sin x)$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

$$y' = (3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \cot x) y$$

$$y' = (\sin x)^{x^3} (3x^2 \ln(\sin x) + x^3 \cot x)$$

b. $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}} e^{x^2} \Rightarrow \ln y = \ln(\sqrt{x}^{\sqrt{x}} e^{x^2})$

$$\ln y = \ln(\sqrt{x}^{\sqrt{x}}) + \ln(e^{x^2})$$

$$\ln y = \sqrt{x} \ln \sqrt{x} + x^2 \ln e$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$$

$$y' = \sqrt{x}^{\sqrt{x}} e^{x^2} \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \right)$$

c. $y = x^{\ln x} (\sec x)^{3x}$

$$\ln y = \ln (x^{\ln x} (\sec x)^{3x})$$

$$\ln y = \ln x^{\ln x} + \ln (\sec x)^{3x}$$

$$\ln y = \ln x \ln x + 3x \ln (\sec x)$$

$$\ln y = (\ln x)^2 + 3x \ln (\sec x)$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \ln x \frac{1}{x} + 3 \ln (\sec x) + 3x \frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x$$

$$y' = x^{\ln x} (\sec x)^{3x} \left(\frac{2 \ln x}{x} + 3 \ln (\sec x) + 3x \tan x \right)$$

d. ÖDEV!

14. $f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x} & ; \quad x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & ; \quad x < 1 \end{cases}$

fonksiyonunun $x=1$ 'de türevi var mıdır?

Çözüm:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2 + \sqrt{1+h} - 3}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \cdot \frac{(\sqrt{1+h} + 1)}{(\sqrt{1+h} + 1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1+h-1}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1+h}{2} + \frac{5}{2} - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{2 \cdot h} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

15. Aşağıdaki fonksiyonu her x için türemlenebilir yapacak a ve b değerleri nelerdir?

$$f(x) = \begin{cases} ax & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & x \geq 2 \end{cases}$$

Çözüm :

f fonksiyonu $x=2$ 'de türemlenebilirse sürekli, 0 zaman $x=2$ 'de sürekliliği kontrol edelim:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} ax^2 - bx + 3 = 4a - 2b + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax = 2a$$

$$f(2) = 4a - 2b + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow 2a = 4a - 2b + 3 \Rightarrow \boxed{2a - 2b = -3} *$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a(2+h)^2 - b(2+h) + 3 - 4a + 2b - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ah^2 + 4ha - bh}{h} = 4a - b$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a(2+h) - 4a + 2b - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2a + ah + 2b - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah}{h} = a\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 4a - b \Rightarrow b = 3a$$

$$2a - 2b = -3 \text{ olduğundan} \quad a = \frac{3}{4}, \quad b = \frac{9}{4} \text{ bulunur.}$$

16. t zamanında s - eksenı boyunca hareket eden bir cismin konum fonksiyonu $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ m'dir.

a. Hızın sıfır olduğu her bir an için cismin ırmasını hesaplayınız.

b. İrmenin sıfır olduğu her bir an için cismin süratını hesaplayınız.

Çözüm :

$$a. \quad S = t^3 - 6t^2 + 9t = t(t^2 - 6t + 9) = t \cdot (t-3)^2$$

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

$$v=0 \Rightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$
$$(t-3)(t-1) = 0$$
$$t=3, t=1$$

$$a(t) = v'(t) = 6t - 12$$

$$a(1) = -6$$

$$a(3) = 6$$

$$b. \quad a=0 \Rightarrow 6t - 12 = 0 \Rightarrow t=2, |v(2)| = 3$$