Örnek 1. Aşağıdaki fonksiyonlar için $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevlerini hesaplayınız.

a) $y^2 = e^{x^2} + 2x$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = e^{x^2} \cdot 2x + 2$$

Türev al

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xe^{x^2} + 1}{y}$$

$$2 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + 2y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2$$

$$= 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2}$$

$$2y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x^2 e^{x^2} + e^{x^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}$$

Notasyon olarak:

$$y'' = \frac{2x^2 e^{x^2} + e^{x^2} - (y')^2}{y}$$ kullanılabilir.

2. $x^2 - y\sin(x+y) = 1$ eğrisine $(1,-1)$ noktasında çizilen teğetin denklemini bulunuz.

Çöz: Doğrunun eğimi:

Denklemin türevini alalım:

$$2x - y'\sin(x+y) - y\cos(x+y)(1+y') = 0$$

$(\sin 0 = 0,\ \cos 0 = 1)$

$x=1,\ y=-1 \Rightarrow 2 - y'\sin 0 + \cos(0)(1+y') = 0$

$\Rightarrow 2 + 1 + y' = 0 \Rightarrow y' = -3 \Rightarrow m = -3$

Teğet Denk: $y = -1 - 3(x-1) \Rightarrow y = -3x+2$

3. $e^{xy} + y^2 \sin(\pi x) - e = 0$ eğrisine $(1,1)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çöz: eğimi?

$$e^{xy} \cdot (1 \cdot y + x \cdot y') + 2yy' \sin(\pi x) + y^2 \cos(\pi x) \cdot \pi = 0$$

$x=1$, $y=1$ noktasında:

$$e \cdot (1 + y') + 2y' \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} + \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} \cdot \pi = 0$$

$$e(1+y') - \pi = 0 \Rightarrow ey' = \pi - e$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\pi - e}{e} \Rightarrow \text{eğim} = m = \frac{\pi - e}{e}$$

$(1,1)$ 'den geçtiği için:

$$y = 1 + \frac{\pi - e}{e}(x-1) \quad \text{(Teğet denklemi)}$$

Question 4 (12 pts) Find an equation of the tangent line to the curve $119\left(\frac{x}{y}\right)+1891\left(\frac{y}{x}\right)^3=2010$ at the point $(-1,-1)$.

Take derivative of both sides:

$$119\left(\frac{y-xy'}{y^2}\right)+1891\cdot 3\left(\frac{y}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{y'x-y}{x^2}\right)=0$$

when $(x,y)=(-1,-1)$ we have; (note that this point is on the given curve, since it satisfies the given equation)

$$119\left(-1+y'\right)+1891\cdot 3\cdot(-y'+1)=0$$

$$(1-y')\left(1891\cdot 3-119\right)=0 \Rightarrow (1-y')=0 \Rightarrow y'(-1,-1)=1$$

Tangent line $y-y_0=m(x-x_0)$ ($m=y'(-1,-1)=1$, $y_0=-1$, $x_0=-1$)

$$\Rightarrow y+1=x+1 \Rightarrow y=x$$

Muhiddin UG

Question 8 (12 pts) Prove that the tangent lines drawn to the ellipse $x^2+2y^2=2$ and to the hyperbola $2x^2-2y^2=1$ (at the points of intersections) intersect at right angles.

First, lets find the intersection points of given two curves:

$x^2+2y^2=2 \Rightarrow 2y^2=2-x^2$. substituting this in the second equation;

$2x^2+x^2-2=1 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x=\mp 1 \Rightarrow y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ They intersect at 4 points.

$x^2+2y^2=2 \Rightarrow 2x+4yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{-x}{2y}$

$2x^2-2y^2=1 \Rightarrow 4x-4yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{x}{y}$

we need to show $\frac{-x}{2y}\cdot\frac{x}{y}=-1$ at the intersection points.

At the intersection points, that is when $(x,y)=\left(\mp 1,\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, we have

$$\frac{-x}{2y}\cdot\frac{x}{y}=\frac{-1}{2}\frac{x^2}{y^2}=\frac{-1}{2}\left(\frac{\mp 1}{\mp\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{-1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{2}}=-1$$

1. $x = 3 + 2\cos\theta, \quad y = -3 + 2\sin\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi$ parametrik

denklemi için $\frac{dy}{dx} = \frac{3-x}{3+y}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{0 + 2\cos\theta}{0 - 2\sin\theta} = \frac{2\cos\theta}{-2\sin\theta}$$

$2\cos\theta = x - 3$ ve $-2\sin\theta = -3 - y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-3}{-3-y} = \frac{x-3}{-(3+y)} = \frac{-(3-x)}{-(3+y)} = \frac{3-x}{3+y}$$

2. a 0'dan farklı sabit olmak üzere

$x = 4at^2, \quad y = a(2t+1), \quad t \in \mathbb{R},$ olsun. Bu eğri $(4,0)$

noktasından geçiyorsa a kaçtır?

Çöz:

$$\begin{cases} x = 4at^2 \\ y = a(2t+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4at^2 = 4 \\ a(2t+1) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} at^2 = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \quad (a \neq 0) \end{matrix}$$

$\therefore a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

$\frac{1}{4}a = 1$

$a = 4$

3. a pozitif sabit olmak üzere

$x = \frac{1}{2}a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi,$ ise $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a\cos\theta}{-\frac{1}{2}a\sin\theta} = -\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$$

Now $\cos\theta = \frac{2x}{a}$, $\sin\theta = \frac{y}{a}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2\left(\frac{2x}{a}\right)}{\frac{y}{a}} = -\frac{\frac{4x}{a}}{\frac{y}{a}} = -\frac{4x}{y} = -\frac{4x}{y}$$

as required

4. Bir C parametrik eğrisi $x = t+1, \quad y = t^2 - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$ ile verilsin. $x + y = 6$ doğrusuyla C eğrisinin kesişim noktalarını bulunuz.

Çözüm:

$x = t+1 \quad y = t^2 - 1$ $\qquad$ $x + y = 6$

SOLVING SIMULTANEOUSLY

$$(t+1) + (t^2 - 1) = 6$$
$$t^2 + t - 6 = 0$$
$$(t+3)(t-2) = 0$$
$$t = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 3 \\ 8 \end{cases}$$

$(3,3)$ ve $(-2,8)$

5. Bir eğri $x = 1 - \cos 2\theta, \quad y = \sin 2\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi.$ parametrik denklemiyle verilsin. Bir P noktası $\theta = \frac{\pi}{6}$ için eğri üzerindeyse bu noktadaki normal denklemi bulunuz.

Çöz:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - \cos 2\theta \\ y &= \sin 2\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= 2\sin 2\theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= 2\cos 2\theta \end{aligned}$$

- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta} = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ $\quad \therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos \pi/3}{\sin \pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- olmm $\theta = \frac{\pi}{6}$ $\quad x = 1 - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $y = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- NORMAL $m = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ & $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y + \sqrt{3}x = \sqrt{3}$$

6. a pozitif sabit olmak üzere $x = a\cos\theta, \quad y = a\sin^2\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi,$ eğrisi veriliyor. $\theta = \frac{\pi}{3}$ noktasında eğrinin teğet doğrusunu bulunuz.

- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{2a\sin\theta\cos\theta}{-a\sin\theta} = -2\cos\theta$

(*) $y = \sin^2\theta = (\sin\theta)^2$, $\frac{dy}{d\theta} = 2(\sin\theta)' \times \cos\theta$

- $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = -2\cos\frac{\pi}{3} = -1$
- $\theta = \frac{\pi}{3}$ için $x = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a$, $y = a\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}a$ $\quad$ ie $\left(\frac{1}{2}a, \frac{3}{4}a\right)$

Hence $y - \frac{3}{4}a = -1\left(x - \frac{1}{2}a\right)$

$$\Rightarrow y - \frac{3}{4}a = -x + \frac{1}{2}a$$
$$\Rightarrow y + x = \frac{5}{4}a$$
$$\Rightarrow 4x + 4y = 5a$$

7. C parametrik eğrisi $x = \sin\theta,\ y = 3 - 2\cos 2\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

ile verilsin.

a) $\frac{dy}{dx}$ 'i θ cinsinden bulunuz.

b) C eğrisinin $y = 1 + 4x^2$ karteziyen denklemini sağladığını gösteriniz.

c) C eğrisinin grafiği ile $y = 1 + 4x^2$ eğrisinin grafiği arasındaki ilişkiyi giderek gösteriniz.

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{4\sin 2\theta}{\cos\theta}$ //

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{4(2\sin\theta\cos\theta)}{\cos\theta} = 8\sin\theta$

(c) START WITH $y = 3 - 2\cos 2\theta$

$y = 3 - 2(1 - 2\sin^2\theta)$

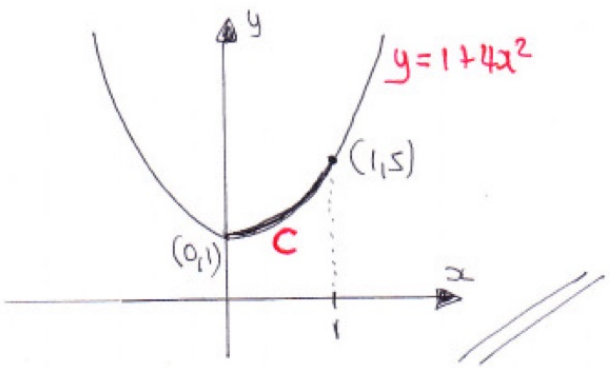
$y = 3 - 2 + 4\sin^2\theta$

$y = 1 + 4\sin^2\theta$

BUT $x = \sin\theta$

$\therefore y = 1 + 4x^2$ //

(d)



8. Bir C parametrik eğrisi

$x = \cos t + \sin t - 2$, $y = \sin 2t$, $0 \le t < 2\pi$. ile verilsin.

a) C eğrisinin $y = x^2 + 4x + 3$. kartezyen denklemini

eğriladığını gösteriniz.

b) C eğrisinin grafiğini çiziniz.

(a) $\left.\begin{aligned} x &= \cos t + \sin t - 2 \\ y &= \sin 2t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$x + 2 = \cos t + \sin t$

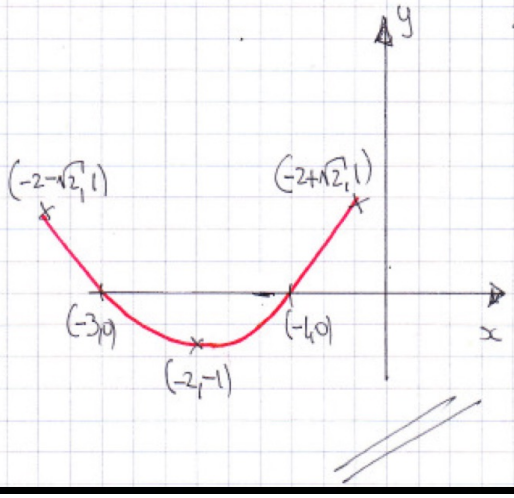
$(x+2)^2 = (\cos t + \sin t)^2$

$x^2 + 4x + 4 = \cos^2 t + 2\sin t \cos t + \sin^2 t$

$x^2 + 4x + 4 = 1 + \sin 2t$

$x^2 + 4x + 3 = \sin 2t$

$\therefore y = x^2 + 4x + 3$ // AS RIQUIRED



- $y = (x+1)(x+3)$
- BÖT $-1 \le y \le 1$ $(y = \sin 2t)$

$x^2 + 4x + 3 = -1$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x+2)^2$

$x = -2$

$x^2 + 4x + 3 = 1$

$x^2 + 4x + 2 = 0$

$(x+2)^2 = 2$

$x = -2 \pm \sqrt{2}$