4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 4$ old. gösteriniz.

<u>Çözüm</u>: $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$; $|f(x)-4| = |x^2-4| < \varepsilon \overset{x \neq 2}{\Longleftrightarrow} -\varepsilon < x^2-4 < \varepsilon$

$\Leftrightarrow 4-\varepsilon < x^2 < 4+\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{4-\varepsilon} < |x| < \sqrt{4+\varepsilon} \overset{\varepsilon<4}{\Longrightarrow} \sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$

olup $x_0 = 2 \in (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ dır. Ayrıca $|x-2| < \delta \Leftrightarrow 2-\delta < x < 2+\delta$

dan $\delta = \min\{2-\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}-2\}$ isteneni verecektir.

δ $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-4| < \varepsilon$ olur.

5) Eğer $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ ve $\lim_{x \to x_0} g(x) = B \Rightarrow$

$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$ old gösteriniz.

<u>Çözüm</u> (i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ old.dan verilen her $\varepsilon > 0$ için

$\exists\, \delta_1 \in \mathbb{R}^+$; $|x-x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon/2$ dir.

(ii) $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ old. dan verilen her $\varepsilon > 0$ için

$\exists\, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$; $|x-x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-B| < \varepsilon/2$ dir.

Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ için $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ seçilir

ve $0 < |x-x_0| < \delta$ alınırsa ($|x-x_0| < \delta_1, \delta_2$ da olur)

$|f(x)+g(x) - (A+B)| = |f(x) - A + g(x) - B|$

$\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ elde edilir

ki bu isteneni verir. $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x)+g(x)) = A+B$ dir.

6) $\lim_{x \to a} f(x) = A$ ve $\lim_{x \to a} g(x) = B$ ve her $x \in \underbrace{(a-\delta, a+\delta)}_{|x-a| < \delta'}$ için

$f(x) \leq g(x) \Rightarrow A \leq B$ olduğunu gösteriniz.

<u>Çözüm</u>: $A > B$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $\lim_{x \to a} (g(x) - f(x))$

$= \lim_{x \to a} g(x) - \lim_{x \to a} f(x) = B - A$ dir $\Leftrightarrow$ Verilen her $\varepsilon > 0$ için

$\exists\, \delta > 0$; $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - f(x) - (B-A)| < \varepsilon$ dir.

Burada $A-B>0$ old. dan $\varepsilon = A-B \in \mathbb{R}^+$ alınabilir $\Rightarrow$
$\exists \delta \in \mathbb{R}^+$; $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-f(x)-B+A| < A-B$
ve de bir $b \in \mathbb{R}$ için $b \leq |b|$ old. dan

$$g(x)-f(x)-B+A < A-B \Rightarrow g(x)-f(x)<0 \Rightarrow g(x)<f(x)$$

çelişkisi bulunur, demek ki $A \leq B$ dir.

7) Aşağıdaki sorularda, verilen her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$ gerektirmesini

sağlayan bir $\delta \in \mathbb{R}^+$ bulunuz.

1) (a) $f(x) = 2x-2$, $A=-6$, $x_0=-2$, $\varepsilon = 0.02$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $A = 1/2$, $x_0 = 1/4$, $\varepsilon = 0.1$.

c) $f(x) = x^2$, $A = 3$, $x_0 = \sqrt{3}$, $\varepsilon = 0.1$.

d) $f(x) = x^2-5$, $A = 11$, $x_0 = 4$, $\varepsilon = 1$

2) Aşağıdaki limitleri doğrulayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 4}(9-x)=5$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4-x}=2$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x \neq 1 \\ 2 , & x=1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x , & x<0 \\ x/2 , & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ dır

e) (i) $\lim\limits_{x\to 0} x.\sin 1/x = 0$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$ dır.

<u>Çözümler:</u> 1) $\rightarrow$ (a) $\varepsilon = 0.02 = \frac{2}{100}$ için $|x+2|<\delta$ olsun.

$$|f(x)-A| = |2x-2-(-6)| = |2x+4| = 2|x+2| < 2.\delta \leq \frac{2}{100}$$

Demekki $\delta \leq \frac{1}{100}$ olarak seçilebilir.

d) $\varepsilon = 1$ için $|x-4|<\delta$ olsun. $|f(x)-11| = |x^2-5-11| = |x^2-16|$

$= |(x-4)(x+4)| = |x-4|.|x+4| < \delta|x+4| < \delta(|x|+4)$

$||x|-4| \leq |x-4| < \delta \Rightarrow |x| < 4+\delta$ $\quad < \delta(4+\delta+4) = \delta^2+8\delta \leq \varepsilon$

$\delta^2+8\delta-\varepsilon \leq 0$ istenenı verir.

2) → (d) : $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ verilsin ve $0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x| < \delta$

$\Leftrightarrow -\delta < x < \delta$ alınır, $x \in (-\delta, 0)$

$|f(x) - 0| = |f(x)| = |2x| = 2|x| < 2\delta \le \varepsilon \Rightarrow \delta \le \varepsilon/2$

$x \in (0, \delta)$: $= |x/2| = \frac{x}{2} < \frac{\delta}{2} \le \varepsilon \Rightarrow \delta \le 2\varepsilon$

$\delta = \min\{\varepsilon/2, 2\varepsilon\} = \varepsilon/2$ istenendir.

(e) (i) $0 \le |\sin \frac{1}{x}| \le 1 \Rightarrow 0 \le |x . \sin 1/x| = |x| . |\sin 1/x| \le |x|$

olup, $\lim\limits_{x \to 0} 0 = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ dır $\overset{\text{Sand.T.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to 0} |x . \sin 1/x| = 0$ olur.

Diğer yandan $\boxed{\text{"} \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \text{ dır!"}}$

Gerçekten de $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ için

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ olup

$\lim\limits_{x \to a} (-|f(x)|) = \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = 0$ verildiğinden

$\overset{\text{S.Teor.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ bulunur. O halde $\lim\limits_{x \to 0} x . \sin 1/x = 0$ dır.

3) <u>Uyarı</u> $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \ne A$ olduğunu söyleyebilmek için

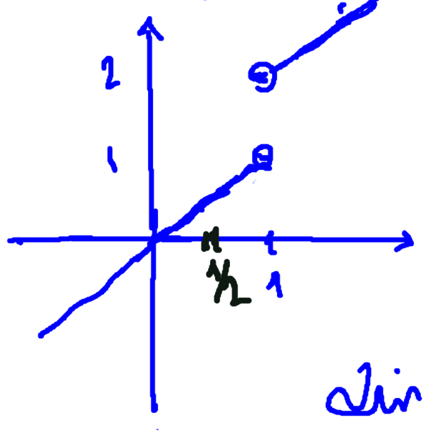
Verilen bir $\varepsilon > 0$ için "$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$" gerekir

mesini sağlayacak hiçbir $\delta \in \mathbb{R}^+$ yoktur.

<u>Örnek:</u> $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ var mı?

$\varepsilon = 1/2$ verilsin. "$\exists \delta > 0;\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$" $\equiv$

"$\forall \delta > 0$ için, $0 < |x - x_0| < \delta$ ve $|f(x) - A| \ge 1/2$ o.ş. bir x var.



$x_0 = 1$ ve $x = 1/2$ alınırsa

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \ne 2$ dır, şöyle ki

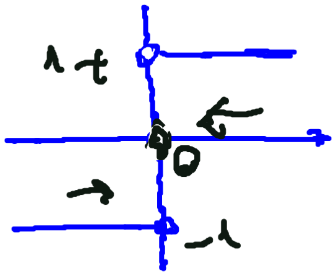
$\varepsilon = 1/2$ alınsın ($\delta = 1/2$ her $\delta \in \mathbb{R}^+$ old. dan)

$x = 2/3$ alalım. $|x - 1| = |\frac{2}{3} - 1| = 1/3 < 1/2$

dır ancak $|f(x) - 2| = |x - 2| = |\frac{2}{3} - 2| = \frac{4}{3} \not< 1/2$

yani $|f(x) - 2| \ge 1/2$ dır.

2.4) Tek yönlü Limitler ve ∞ daki Limit.

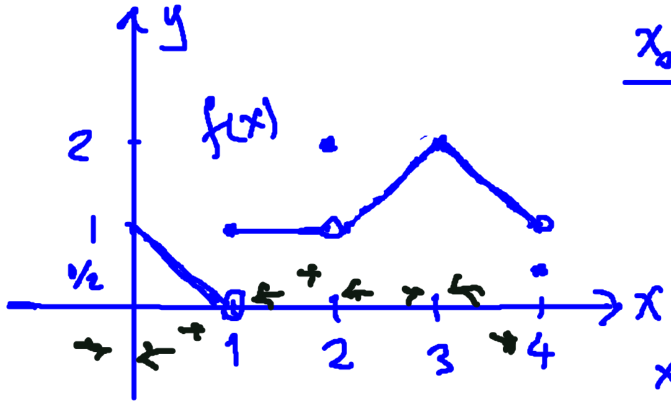


$$y=f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}\qquad \lim_{x\to 0} f(x) \text{ yoktur.}$$

Ancak, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+1\end{array}\right\}$ varlar.

Teorem: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ var ve $=A$ dır $\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ var ve $=A$ olmalıdır.



$x_0=0$ da $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \text{ yok.}\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ yoktur.

$x_0=1$ de $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1\end{cases}$ $f(1)=1$

ve böylece $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ yoktur.

$x_0=2$ de $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1\end{cases}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=1 \overset{=2}{\neq} f(2)$ dir.

$x=3$ de $\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2\end{cases}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=2=f(3)$

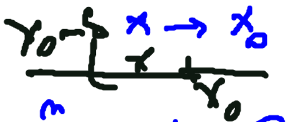
$x=4$ da $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \text{ ve } \lim\limits_{x\to 4} f(x) \text{ yoktur}\end{cases}$, $f(4)=1/2$ dir.

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ yok

Tanımlar 1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$ için $\exists\,\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$;

$\forall x\in(x_0, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$ dir.

2) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = B$ dir $\iff \forall \varepsilon>0$ için $\exists \delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$;



$\forall x\in(x_0-\delta, x_0) \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon$ dir.

Örnek 1: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ dır, göst.

$\varepsilon>0$ verilsin ve $0<x<\delta$ olsun. Bu durumda,

$|\sqrt{x}-0|=|\sqrt{x}|=\sqrt{x}<\varepsilon \equiv x<\sqrt{\delta}\le\varepsilon$, yani $\sqrt{\delta}\le\varepsilon$ istenen(i) verecektir.

$\delta\le\varepsilon^2$ isteneni verir.

2) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ i kullanarak, (a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$ ve

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=2/5$ old. göst.

(a) $\cos x=\cos(2.x/2)=1-2\sin^2 x/2$ den;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-2\sin^2 x/2-\cancel{1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{2}\sin^2 x/2}{\cancel{2}\cdot x/2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x/2}{x/2}\cdot\sin x/2=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x/2}{x/2}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x/2=-1.0=0.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{5x}=2/5\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x$$

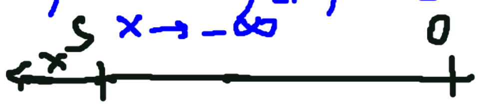
$$=2/5\cdot 1\cdot 1=2/5 \text{ olur.}$$

$x\to\mp\infty$ olurken ki limitler:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ dır $\iff$ Verilen her $\varepsilon>0$ için $\exists M\in\mathbb{R}^+$;

$\forall x>M \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$ dır

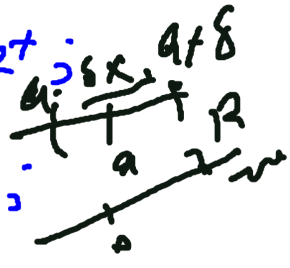
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$ dir $\iff \forall\varepsilon>0$ için $\exists\, S<0$ sayısı;



$\forall x<S$ için $|f(x)-B|<\varepsilon$ dır.

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ dır $\iff \forall R\in\mathbb{R}^+$ için $\exists\delta\in\mathbb{R}^+$;

$|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>R$ dir.



4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ dır $\iff \forall R\in\mathbb{R}^+$ için $\exists M\in\mathbb{R}^+$;

$\forall x>M \Rightarrow f(x)>R$ dir, ...

Örnek ① $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ve $\lim_{x\to-\infty} 1/x = 0$ old. göst.
Ödev

1) $\varepsilon > 0$ verilsin ve $x > M^{\in\mathbb{R}^+}$ alsın $\Rightarrow |f(x) - 0| = |\frac{1}{x} - 0|$
$= |\frac{1}{x}| = \frac{1}{x} < \frac{1}{M} \leq \varepsilon \Rightarrow M \geq 1/\varepsilon$ istenen pozitif sayıdır.

Teorem: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = A$ ve $\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = B$ ise

1) $\lim_{x\to\mp} (f(x) \mp g(x)) = A \mp B$, 2) $\lim_{x\to\mp\infty} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$

3) $\lim_{x\to\mp\infty} (k\cdot f(x)) = k\cdot A$, 4) $B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to\mp\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = A/B$ dır; ..

Örnekler, 1) $\lim_{x\to\infty} \left(5 + \frac{3}{x}\right) = 5 + \lim_{x\to\infty} 3/x = 5 + 0 = 5.$

Not: Belirsizlikler
$(0/0,\ 0.\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty)$
ve $\frac{\text{sayı}}{\infty} = 0$, $\frac{0}{\text{sayı}} = 0$,
$\frac{\text{sayı}}{0} = \begin{cases} -\infty, & \text{sayı} < 0 \\ +\infty, & \text{sayı} > 0 \end{cases}$

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3}\,\pi}{x^2} = 0$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-2}{3x^2+2} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(5 + 8/x - 2/x^2)}{\cancel{x^2}(3 + 2/x^2)}$
$= \lim_{x\to\infty} \frac{5 + 8/x - 2/x^2}{3 + 2/x^2} = \frac{5+0-0}{3+0} = 5/3$

4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{11/x^2 + 2/x^3}{2 - 1/x^3}$
$= \frac{0+0}{2-0} = \frac{0}{2} = 0$ dır.

Not $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ $(\deg p = n)$
$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$, $b_m \neq 0$ $(\deg q = m)$

1) $$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)\cdot\infty, & n > m \end{cases}}$$

2) $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ (-1)^{n-m}\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)\cdot\infty, & n > m \end{cases}}$$ dır.

Asimtotlar:

Yatay Asimtot: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = A \Rightarrow y = A$ f nin grafiğinin bir yatay asimtodur.

Eğer $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$ ise yatay asimtot yoktur, ve

$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \mp\infty$ olmak üzere (yatay asimtotu yok) ise

$p(x) \,|\, q(x)$; $b(x)$; $\vdots$; $k(x)$, $der(k(x)) < der(q(x))$ den $\frac{p(x)}{q(x)} = b(x) + \frac{k(x)}{q(x)}$ ve

$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{k(x)}{q(x)} = 0$ ise

$y = b(x)$, f nin grafiğinin bir eğik ya da eğri asimtotudur.

Düşey asimtot: Eğer $\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$ ya da $\lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$ oluyor ise $x = a$ f nin grafiğinin bir düşey asimtodur.

Örnekler: 1) $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = 5/3 \Rightarrow \boxed{y = 5/3}$, f nin grafiğinin bir yatay asimtotudur.

2) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \Rightarrow y = 0$, e^x in bir yatay asimtotudur.

3) $\lim_{x\to\infty} \sin 1/x \overset{t=1/x \text{ ve } x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0}{=\!=} \lim_{t\to 0} \sin t = 0$ (y=0, y=sin1/x in bir yatay asimtotu)

4) $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} \xlongequal[x\to 0^- \Leftrightarrow t\to-\infty]{t=1/x} \lim_{t\to-\infty} e^t = 0 \Rightarrow x \neq 0$ ~~d. asimtot~~

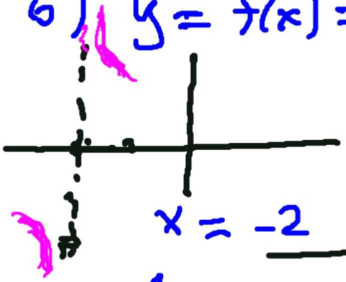
5) $f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$ ün yatay asimtotu yok,

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3 & 7x+4 \\ \hline -2x^2+\frac{8}{7}x & \frac{2}{7}x-\frac{8}{49} \\ -\frac{8}{7}x-3 & \\ -\frac{8}{7}x-\frac{32}{49} & \\ \hline \text{sabit} & \end{array}$$

$= \left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right) + \frac{-115}{49(7x+4)}$; $= q(x)$ ve $\lim_{x\to\mp\infty} q(x) = 0$

old. dan $\boxed{y = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}}$; f nin grafiğinin bir eğik asimtotu.

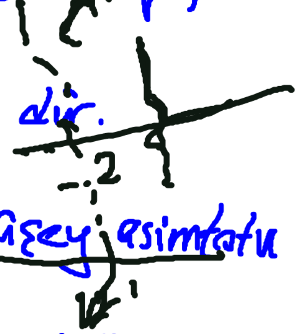
6) $y=f(x)=\frac{x+3}{x+2}$ $\rightarrow$ $y=1$ bir yatay asimtot ve



$\lim_{x\to -2^+}\frac{x+3}{x+2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-2+h+3}{-2+h+2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+h}{h}=\infty$ olup,

$x=-2$ bir düşey asimtot dur,

$\lim_{x\to -2^-}\frac{x+3}{x+2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-2-h+3}{-2-h+2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-h}{-h}=-\infty$ dir.



7) $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \Rightarrow x=0$, $y=\ln x$ in bir düşey asimtotu

8) $y=f(x)=\frac{x^2-3}{2x-4}$ fonksiyonunun grafiğinin asimtotlarını bul

Yatay asimt. yok, (çünkü $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=\mp\infty$ dir)

Ancak $\frac{x^2-3}{2x-4}=\frac{x}{2}+1+\frac{1}{2x-4}$ ve $\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{1}{2x-4}\right)=0$ old. dan

$y=\frac{x}{2}+1=\frac{x+1}{2}$ grafiğin bir eğik asimtotudur.

$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3}{2x-4}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)^2-3}{2(2+h)-4}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+2h+h^2}{2h}=+\infty$

ve $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3}{2x-4}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2-h)^2-3}{2(2-h)-4}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-2h+h^2}{-2h}=-\infty$

$x=2$ düşey asimptot.

$\boxed{\text{Uyarı: Bir rasyonel fonksiyonun paydasını sıfır yapan her nokta bir düşey asimtot olmak zorunda değildir.}}$

Örneğin $y=f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2-x-6}$ için $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$ ve

$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to -2}\frac{x}{x-3}=2/5 \in\mathbb{R}$ dir.

ve dolayısıyla $\boxed{x=-2 \text{ bir düşey asimtot değildir}}$

Alıştırma Örnekleri: ① $g(x)=\sqrt{x}\cdot\sin 1/x \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}g(x)$, $\lim_{x\to 0^-}g(x)$ ve $\lim_{x\to 0}g(x)$ varsa bulunuz. $x>0$

$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\sin 1/x = 0$ dır. SANDVİÇ $\left(0\le|\sqrt{x}\cdot\sin 1/x|\le\sqrt{x}\cdot 1 \text{ ve } \lim_{x\to 0^+}(0)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0\right)$

Ya da $y = 1/x \overset{x>0}{\Rightarrow} \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ ve $x \to 0^+ \Leftrightarrow y \to \infty$ dır.

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \cdot \sin 1/x = \lim_{y\to\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \overset{?}{=} 0$ dır (?) → sandwich Teo. den!

$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} \sin\frac{1}{x}$ yoktur. $\Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x)$ de yoktur.

2) $\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} = [0/0] = \lim_{h\to 0^+} \frac{(\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5})(\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5})}{h\cdot(\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5})}$

$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2+4h+\cancel{5}-\cancel{5}}{h\cdot(\sqrt{h^2+4h+5})} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h+4}{\sqrt{h^2+4h+5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

3) $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t} = \lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$ olur.

$1-\cos t = a$ ve $t\to 0 \Leftrightarrow a \to 0$

4) $\lim_{\theta\to\infty} \frac{\theta+\sin\theta}{2\theta+7-5\sin\theta} = [\infty/\infty] = \lim_{\theta\to\infty} \frac{\theta(1+\frac{\sin\theta}{\theta})}{\theta(2+\frac{7}{\theta}-\frac{5\sin\theta}{\theta})}$

Buradaki
$\lim_{\theta\to\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} = 0$ dır
Çünkü $0 \le \left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right| \le \frac{1}{\theta}$
ve $\lim_{\theta\to\infty}(0) = \lim_{\theta\to\infty} 1/\theta = 0$
Old.dan S.Teo. $\lim_{\theta\to\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} = 0$

$= \frac{1+\lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}}{2+\lim_{\theta\to\infty} 7/\theta - 5\lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}}$

$= \frac{1+0}{2+0-5\cdot 0} = 1/2$ bulunur.

5) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{\sqrt[3]{x}}\left(1-\frac{1}{\sqrt[15]{x^2}}\right)}{\cancel{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt[15]{x^2}}\right)} = 1.$

6) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$\doteq \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1-1/x}\right)} = \frac{2}{1+1} = 1$ dır. $|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$

7) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin 1/x, & x<0 \\ \sqrt{x}, & x>0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)$ ve $\lim_{x\to 0^-} f(x) = ?$ varsa
ödev.