**Sürekli Raslantı Değişkeni**

Bir raslantı değişkeni, reel eksende bir aralık ya da aralıklar kümesinde değer alıyorsa, X' e **sürekli raslantı değişkeni** denir. Bu durumda, X sürekli raslantı değişkeninin değer kümesi, bir aralıktan ya da aralıklar kümesinden oluşmaktadır:

$$
\begin{array}{lll}
R_X = \{a \leq X \leq b\} & , & R_X = \{ X \geq a\} \\
R_X = \{ X > a\} & , & R_X = \{ X \leq a\} \\
R_X = \{ X < a\} & , & R_X = \{a < X \leq b \, , c \leq X \leq d\} \\
R_X = \{X \leq a \, , X > b\} & , & R_X = \{a < X \leq b \, , X > c\}
\end{array}
$$

Herhangi bir aralıkta bulunan değerlerin sayısı sayılamayacak sonsuzlukta olduğundan, sürekli bir raslantı değişkeni sayılamayacak sonsuzlukta değerler alır.

Örneğin, bir pilin ömrünü düşünelim. Pilin ömrünü istediğimiz kadar hassas ölçebiliriz. Yani, pilin ömrü 40 saat veya 40.25 saat veya 40.247 saat olarak ölçülebilir. Belli bir marka pilin maksimum ömrünün 200 saat olduğunu varsayalım. X raslantı değişkeni, bu marka pillerden rasgele seçilen bir pilin ömrünü göstersin. Bu durumda, X raslantı değişkeni 0 ile 200 arasındaki herhangi bir değeri alabilir. Bu aralıkta sayılamayacak sonsuzlukta değer vardır. Sonuç olarak, X sürekli bir raslantı değişkenidir.

Aşağıda sürekli raslantı değişkenlerine örnekler verilmiştir:

- Bir fabrikada üretilen hazır kahve kavanozlarındaki kahve miktarı
- Bir çiftlikte üretilen deve kuşu yumurtalarının ağırlığı
- Bir yarış arabasının 1 km' de tükettiği benzin miktarı
- Belirli bir hastalıktan ölüm oranı
- Bir soğuk hava deposundaki bağıl nem miktarı
- Bir koşucunun 1 km' yi koşma süresi
- Bir otomobil aküsünün voltajı
- Belirli bir günde deniz sıcaklığı
- Elektronik bir devredeki akım miktarı
- Bir transistörün ömrü
- Bir trenin belirli bir durağa varma zamanı
- Rastgele seçilen bir toprak numunesinin pH' ı
- Bir evin fiyatı
- Postalanan bir paketin ağırlığı

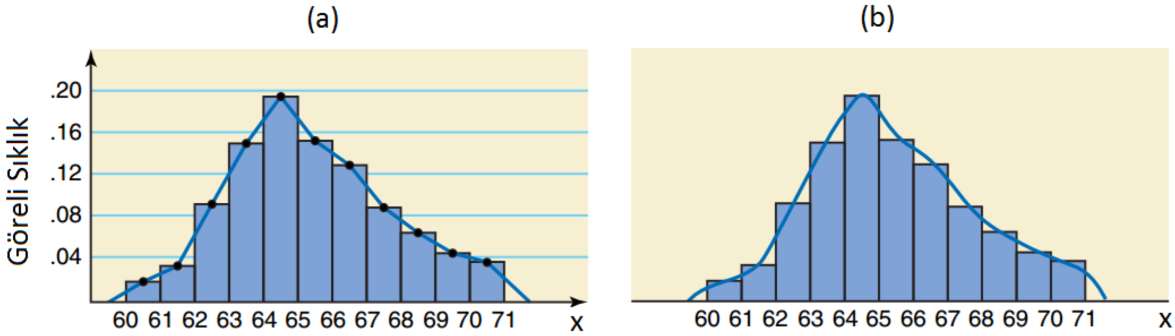
- Belirli bir cins ineğin bir günde ürettiği süt miktarı
- Rastgele seçilen bir çıngıraklı yılanın uzunluğu
- Bir gaz tankının dolması sırasında buharlaşarak kaybolan benzin hacmi
- Belirli bir günde bir gram altının kapanış fiyatı
- Evden işe gitmek için geçen süre
- Bir doktorun hastasını muayene etme süresi
- Belirli bir ay boyunca bir şehirdeki yağış miktarı

**Örnek:** Bir üniversiteye 5000 kız öğrencinin kayıtlı olduğunu ve X' in rasgele seçilen bir kız öğrencinin boyunu temsil eden sürekli bir raslantı değişkeni olduğunu varsayalım. Üniversiteye kayıtlı kız öğrencilerin hepsinin boy uzunlukları ölçülerek elde edilen ölçümler üzerinden frekans tablosu oluşturulsun. Aşağıdaki tabloda X' in frekans ve göreli frekans dağılımları verilmiştir.

| Sınıf | Kız öğrencinin boyu (inç) | Frekans | Göreli Frekans |
|---|---|---|---|
| 1 | $60 \leq x < 61$ | 90 | 0.018 |
| 2 | $61 \leq x < 62$ | 170 | 0.034 |
| 3 | $62 \leq x < 63$ | 460 | 0.092 |
| 4 | $63 \leq x < 64$ | 750 | 0.150 |
| 5 | $64 \leq x < 65$ | 970 | 0.194 |
| 6 | $65 \leq x < 66$ | 760 | 0.152 |
| 7 | $66 \leq x < 67$ | 640 | 0.128 |
| 8 | $67 \leq x < 68$ | 440 | 0.088 |
| 9 | $68 \leq x < 69$ | 320 | 0.064 |
| 10 | $69 \leq x < 70$ | 220 | 0.044 |
| 11 | $70 \leq x < 71$ | 180 | 0.036 |
| | | $\boldsymbol{N = 5000}$ | **1** |

Tabloda verilen göreli frekanslar, ilgili sınıfların olasılıkları olarak kullanılabilir. Hatta sıklık tablosu üniversiteye kayıtlı tüm kız öğrencilerin boy uzunlukları üzerinden oluşturulduğundan dolayı, bunların kesin olasılıklar olduğunu söyleyebiliriz.

Kız öğrencilerin boy uzunluklarının göreli frekans dağılımı için (a) histogram ve dağılış poligonu ve (b) dağılım eğrisi grafikleri aşağıda verilmiştir:




Şekil: (a) Kız öğrencilerin boy uzunluklarının histogram and dağılış poligonu
(b) Kız öğrencilerin boy uzunluklarının dağılım eğrisi

Yukarıdaki dağılım eğrisi, X sürekli raslantı değişkeninin olasılık dağılımı eğrisinin bir tahminidir. Tabloda tüm sınıf aralıklarının 1 inç değerine eşit olmasından dolayı, göreli frekanslar aynı zamanda göreli frekans yoğunluklarıdır. Histogramda herhangi bir sınıfın üstündeki dikdörtgenin alanı, boyunun uzunluğu ilgili sınıfın alt ve üst aralığına giren kızların oranını vermektedir. Sonuç olarak, tüm dikdörtgenlerin toplam alanı 1' dir. Sınıf aralıkları 1 birimden fazla (veya az) olsaydı, ilk olarak göreli frekans yoğunluklarını elde etmemiz gerekirdi. Ardından bu göreli frekans yoğunluklarının grafiğini çizerek dağılım eğrisini elde edebilirdik. Bir sınıfın göreli frekans yoğunluğu, o sınıfın göreli frekansının sınıf aralığına bölünmesiyle elde edilir. Böylece, göreli frekans yoğunlukları, histogramda yer alan tüm dikdörtgenlerin alanlarının toplamının 1' e eşit olacak şekilde hesap edilmiş olur.

Kız öğrencilerin boy uzunluklarını çok daha doğru bir şekilde ölçmek için sınıf sayısı artırılırsa, elde edilen göreli frekans yoğunlukları histogramın da ki her dikdörtgen çok daha dar hale gelir. Böylece, histogramda çizilen dağılış poligonu çok daha düzgün (pürüzsüz) bir görünüme sahip olur ve olasılık dağılım eğrisine yaklaşır. Tüm dikdörtgenlerin toplam alanı 1'e eşit olduğundan, düzgün eğrinin altında kalan toplam alan da 1' dir. Sonuç olarak, sürekli bir raslantı değişkenin olasılık dağılım eğrisi, aynı zamanda olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak da adlandırılır.

**Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu**
X sürekli raslantı değişkeni için $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, X' in **olasılık yoğunluk fonksiyonu** adını alır.

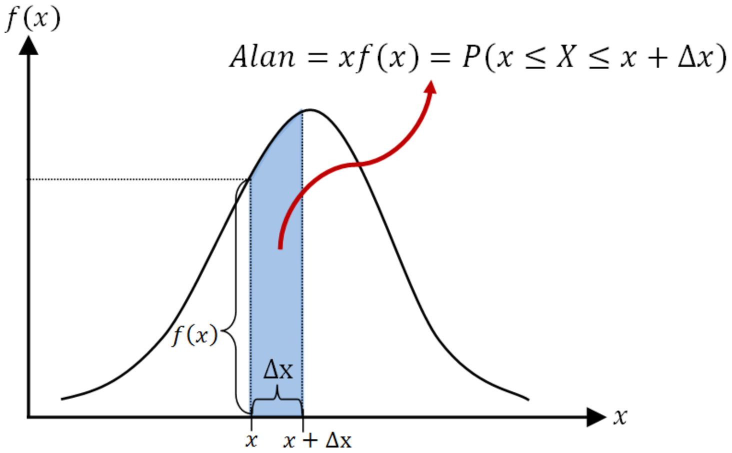
i. $\forall x \notin R_X$ için $f(x) = 0$' dır.
ii. $\forall x \in R_X$ için $f(x) \geq 0$' dır.
iii. $\int_{R_X} f(x)\, dx = 1$' dir.

**Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Bazı Özellikleri**

**1)** Bir olasılık yoğunluk fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu,

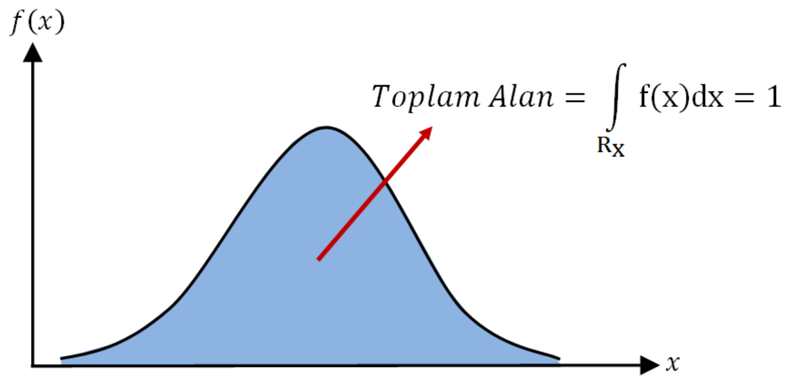
$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

biçimindedir.



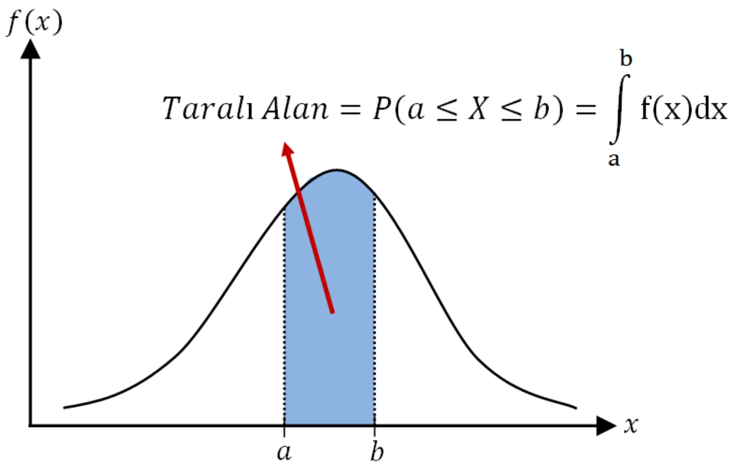

Bu tanıma göre, $f(x) \neq P(X = x)$' tir. Yani, $f(x)$ fonksiyonu hiçbir değerin olasılığını göstermez. $f(x)$ fonksiyonu, $x$ değerinin yoğunluk değerini verir. $f(x)$'in iki değer arasında integrali alınırsa bir olasılık elde edilir.

**2)** $f(x)$ olasılık yoğunluk eğrisi ve x ekseni arasında kalan alan bire eşittir:



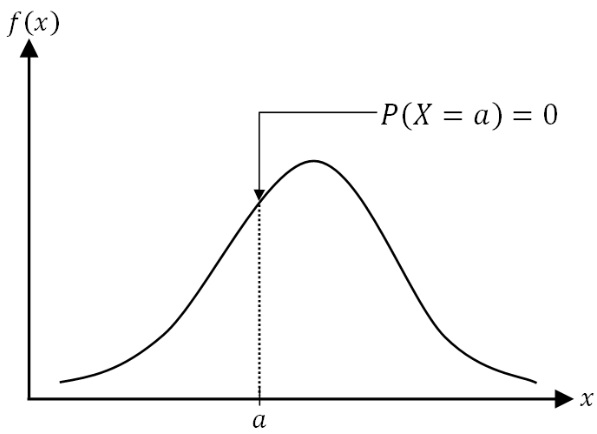

**3)** $f(x)$ olasılık yoğunluk eğrisinin altında $x = a$ ve $x = b$ noktaları arasında kalan alan $P(a \leq X \leq b)$ olasılığıdır:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad , \quad a, b \in R_X \ \ ve \ a < b$$




**4)** X sürekli raslantı değişkeninin belli bir nokta değeri alması olasılığı sıfırdır.

$$\forall a \in IR \ \ için \quad P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0'dır.$$




**5)** X sürekli raslantı değişkeninin herhangi bir noktadaki olasılığının sıfır olmasının bir sonucu olarak, aşağıdaki eşitlik oluşur.

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

**Örnek:** X raslantı değişkeninin değer kümesi $R_X = [0,4]$' tür. X raslantı değişkeni için aşağıdaki $f(x)$ fonksiyonu tanımlanmıştır.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3\sqrt{x}} \quad , \quad 0 < x < 1 \\
&= \frac{1}{6\sqrt{x}} \quad , \quad 1 < x < 4 \\
&= 0 \qquad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

a) $f(x)$ fonksiyonu, X raslantı değişkeni için geçerli bir olasılık yoğunluk fonksiyonu mudur?

b) Verilen olasılıkları hesaplayınız:

i. $P(X < -1) =?$

ii. $P(X \geq 4) =?$

iii. $P(X > 0) =?$

iv. $P(X > 3) =?$

v. $P\left(X \leq \frac{1}{9}\right) =?$

vi. $P\left(\frac{1}{4} < X \leq 2\right) =?$

**Çözüm:** a) $f(x)$ fonksiyonunun X' in olasılık yoğunluk fonksiyonu olması için aşağıda verilen 3 koşulu sağlamalıdır:

i. $\forall x \notin R_X$ için $f(x) = 0$' dır.

ii. $\forall x \in R_X$ için $f(x) \geq 0$' dır.

iii. $f(x)$ eğrisi altında kalan alan 1' e eşittir:

$$\int_{R_X} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3\sqrt{x}}dx + \int_1^4 \frac{1}{6\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}\,\Big|_0^1 + \frac{\sqrt{x}}{3}\,\Big|_1^4 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = 1$$

Tüm koşulların sağlanması nedeniyle, $f(x)$ bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

b) Olasılıkları hesaplayalım:

$P(X < -1) = 0$ $\qquad$ $P(X \geq 4) = 0$ $\qquad$ $P(X > 0) = 1$

$$P(X > 3) = \int_3^4 \frac{1}{6\sqrt{x}}dx = \frac{\sqrt{x}}{3}\Big|_3^4 = \frac{2 - \sqrt{3}}{3}$$

$$P\left(X \leq \frac{1}{9}\right) = \int_0^{1/9} \frac{1}{3\sqrt{x}}dx = \frac{2\sqrt{x}}{3}\Big|_0^{1/9} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{2}{9}$$

$$P\left(\frac{1}{4} < X \leq 2\right) = \int_{1/4}^{1} \frac{1}{3\sqrt{x}} dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{6\sqrt{x}} dx = \left.\frac{2\sqrt{x}}{3}\right|_{1/4}^{1} + \left.\frac{\sqrt{x}}{3}\right|_{1}^{2}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

**Örnek:** Yeni alınan A marka bir bilgisayarın ilk kez arızalanana kadar ki kullanım süresi (saat) X raslantı değişkeni ile gösterilsin. X' in $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} \quad , \quad x \geq 0 \\ &= 0 \qquad\qquad\quad , \quad x < 0 \end{aligned}$$

a) A marka herhangi bir bilgisayarın bozulmadan

i. 50 ile 150 saat arasında çalışması olasılığını bulunuz.

ii. 100 saatten daha az süre çalışması olasılığını bulunuz.

b) A marka bilgisayarların ilk kez arızalana kadar ki kullanım süresinin ortanca değerini bulunuz.

d) A marka üretilen bilgisayarların %10' u için kullanım süresi en az kaç saattir?

**Çözüm:** a)

$$P(50 < X < 150) = \int_{50}^{150} f(x)dx = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} \, dx$$

$$= \frac{1}{100}\left.\left(\frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}}\right)\right|_{50}^{150} = \left.\left(-e^{-\frac{x}{100}}\right)\right|_{50}^{150}$$

$$= -e^{-\frac{150}{100}} + e^{-\frac{50}{100}} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} \cong 0.384$$

$$P(X < 100) = \int_{0}^{100} f(x)dx = \int_{1}^{2} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx$$

$$= \frac{1}{100}\left.\left(\frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}}\right)\right|_{0}^{100} = \left.\left(-e^{-\frac{x}{100}}\right)\right|_{0}^{100}$$

$$= -e^{-\frac{100}{100}} + e^{-\frac{0}{100}} = 1 - e^{-1} \cong 0.633$$

b) A marka bilgisayarların ilk kez arızalana kadar ki kullanım süresinin ortanca değerini $\tilde{x}$ olarak gösterilsin. Buna göre, A marka bilgisayarların yarısı $\tilde{x}$ ortanca değerinden daha az kullanım süresine sahipken; diğer yarısı $\tilde{x}$' den daha fazla kullanım süresine sahiptir. Bu durumda, ortanca değeri, $P(X \leq \tilde{x}) = 0.50$' yi sağlamaktadır.

$$P(X \leq \tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} f(x)\, dx = \int_0^{\tilde{x}} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}\, dx = \frac{1}{100}\left( \frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}} \Bigg|_0^{\tilde{x}} \right) = -e^{-\frac{\tilde{x}}{100}} + 1 = 0.50$$

$$-e^{-\frac{\tilde{x}}{100}} + 1 = 0.50 \implies e^{-\frac{\tilde{x}}{100}} = 0.50 \implies \tilde{x} = -100 \times \ln(0.50) = 69.31\, saat$$

c) A marka üretilen bilgisayarların %10' u için kullanım süresi en az k saat olsun. Buna göre, $P(X \geq k) = 0.10$' dur.

$$P(X \geq k) = \int_k^{+\infty} f(x)\, dx = \int_k^{+\infty} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}\, dx = \frac{1}{100}\left( \frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}} \Bigg|_k^{+\infty} \right)$$

$$= -e^{-\infty} + e^{-\frac{k}{100}} = 0.10$$

$$-e^{-\infty} + e^{-\frac{k}{100}} = 0.10 \implies e^{-\frac{k}{100}} = 0.10 \implies k = -100 \times \ln(0.10) = 230.26\, saat$$

**Dağılım Fonksiyonu (Birikimli Olasılık Fonksiyonu)**

X raslantı değişkeninin x gibi bir değere eşit ya da daha küçük değerler alması olasılığına X' in dağılım fonksiyonu denir ve $F_X(x)$ ile gösterilir:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

X kesikli raslantı değişkeni ise, dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t=-\infty}^{x} p(X = t)$$

X sürekli raslantı değişkeni ise, dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{t=-\infty}^{x} f(t)dt$$

**Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri**

**1)** $\forall x \in R_X$ için $0 \leq F_X(x) \leq 1$' dir.

**2)** $F(x)$, x' in azalmayan bir fonksiyonudur (monoton artan). Yani, $x_1 \leq x_2$ için $F(x_1) \leq F(x_2)$' dir.

**3)** $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ve $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$' dir. Burada, $R_X = \{-\infty < x < +\infty\}$ olarak alınmıştır.

**4)** $F(x)$, sağdan süreklidir. Yani, herhangi bir x değeri ve x' e azalarak yakınsayan $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ dizisi için, $\lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x)$' dir.

**5)** X sürekli raslantı değişkeninin $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $F(x)$ dağılım fonksiyonundan yararlanılarak aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{dF(x)}{dx} & , \quad F(x)' \, in \; türevlenebildiği \; yerlerde \\ 0 & , \quad diğer \; yerlerde \end{cases}$$

**6)** $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$' dir.

**7)** <u>X kesikli raslantı</u> değişkeni $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ değerlerini alsın. Buna göre, aşağıdaki olasılıklar $F(x)$ dağılım fonksiyonu yardımıyla bulunabilir:

$$\begin{aligned} P(X \leq x_i) &= F(x_i) \\ P(X < x_i) &= F(x_{i-1}) \\ P(X \geq x_i) &= 1 - P(X < x_i) = 1 - P(X \leq x_{i-1}) = 1 - F(x_{i-1}) \\ P(X > x_i) &= 1 - P(X \leq x_i) = 1 - F(x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(x_i \leq X \leq x_j\right) &= F\left(x_j\right) - F(x_{i-1}) \\ P\left(x_i \leq X < x_j\right) &= F\left(x_{j-1}\right) - F(x_{i-1}) \\ P\left(x_i < X \leq x_j\right) &= F\left(x_j\right) - F(x_i) \\ P\left(x_i < X < x_j\right) &= F\left(x_{j-1}\right) - F(x_i) \end{aligned}$$

**8)** X sürekli raslantı değişkeni için aşağıda verilen olasılıklar $F(x)$ dağılım fonksiyonu yardımıyla bulunabilir:

$P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$

$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

$P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

**Örnek:** Aşağıda X kesikli raslantı değişkeninin $p(x)$ olasılık fonksiyonu verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{x+2}{25} \quad , \quad x = 1,2,3,4,5 \; için \\ &= 0 \quad , \quad diğer\; x\; değerleri\; için \end{aligned}$$

a) $F(x)$ dağılım fonksiyonunu bulunuz ve grafiğini çiziniz.
b) $P(2 < X \leq 4),\ P(X > 2),\ P(3 \leq X < 7),\ P(X \leq 1),\ P(X \leq 0),\ P(X \leq 12)$ ve $P(X < 3)$ olasılıklarını $F(x)$ dağılım fonksiyonu yardımıyla bulunuz.

**Çözüm:**

a) $F(x)$ dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

1. Yol:

$$\begin{aligned}
F(1) &= P(X \leq 1) = p(1) &&= \frac{3}{25} \\
F(2) &= P(X \leq 2) = p(1) + p(2) &&= \frac{3}{25} + \frac{4}{25} = \frac{7}{25} \\
F(3) &= P(X \leq 3) = p(1) + p(2) + p(3) &&= \frac{3}{25} + \frac{4}{25} + \frac{5}{25} = \frac{12}{25} \\
F(4) &= P(X \leq 4) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) &&= \frac{3}{25} + \frac{4}{25} + \frac{5}{25} + \frac{6}{25} = \frac{18}{25} \\
F(5) &= P(X \leq 5) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) &&= \frac{3}{25} + \frac{4}{25} + \frac{5}{25} + \frac{6}{25} + \frac{7}{25} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= 0 \quad , \quad x < 1 \\
&= \frac{3}{25} \quad , \quad 1 \leq x < 2 \\
&= \frac{7}{25} \quad , \quad 2 \leq x < 3 \\
&= \frac{12}{25} \quad , \quad 3 \leq x < 4 \\
&= \frac{18}{25} \quad , \quad 4 \leq x < 5 \\
&= 1 \quad , \quad 5 \leq x
\end{aligned}$$

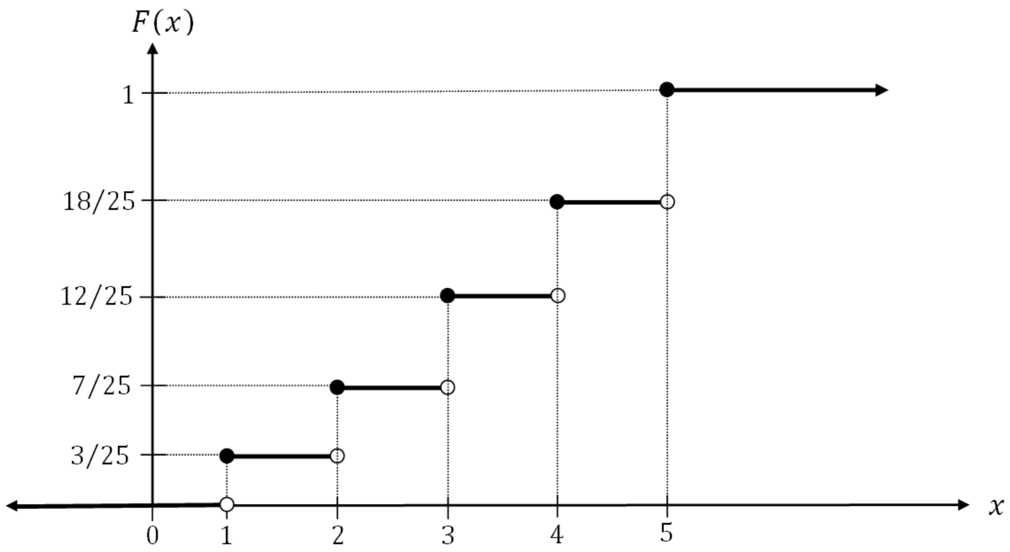
2. Yol:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t=1}^{x} p(t) = \sum_{t=1}^{x} \frac{t+2}{25} = \frac{1}{25}\left[\frac{x(x+1)}{2} + 2x\right] = \frac{x^2+5x}{50}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2+5x}{50} &&, \quad x = 1,2,3,4,5 \\ &= 0 &&, \quad x < 1 \\ &= 1 &&, \quad x \geq 5 \end{aligned}$$

Sağlama: $F(5) = 1$ olmalıdır.

$F(x)$ dağılım fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir:




Grafikte görüldüğü gibi, X kesikli raslantı değişkeninin $F(x)$ dağılım fonksiyonu sağdan süreklidir.

b) İstenen olasılıklar $F(x)$ dağılım fonksiyonu yardımıyla aşağıda bulunmuştur:

$$\begin{aligned} P(2 < X \leq 4) &= F(4) - F(2) = \frac{11}{25} \\ P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = \frac{18}{25} \\ P(3 \leq X < 7) &= F(6) - F(2) = 1 - \frac{7}{25} = \frac{18}{25} \\ P(X \leq 1) &= F(1) = \frac{3}{25} \\ P(X \leq 0) &= F(0) = 0 \\ P(X \leq 12) &= F(12) = 1 \\ P(X < 3) &= F(2) = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

**Örnek:** Aşağıda X kesikli raslantı değişkeninin $p(x)$ olasılık fonksiyonu verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^x &&, \quad x = 0,1,2,3,4,\cdots \quad için \\ &= 0 &&, \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $F(x)$ dağılım fonksiyonunu bulunuz.
b) $P(X > 3)$, $P(4 < X \leq 6)$, $P(X \leq 1)$, $P(X < 5)$ ve $P(X \leq -3)$ olasılıklarını $F(x)$ dağılım fonksiyonu yardımıyla bulunuz.

**Çözüm:**
a) $F(x)$ dağılım fonksiyonunu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) &&= \sum_{t=0}^{x} p(t) \\ &= \sum_{t=0}^{x} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^t &&= \frac{3}{4}\underbrace{\left[\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^x\right]}_{r^0+r^1+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}}{1-\frac{1}{4}} &&= 1-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 1-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} &&, \quad x = 0,1,2,3,4,\cdots \\ &= 0 &&, \quad x < 0 \\ &= 1 &&, \quad x \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

Sağlama: $F(+\infty) = 1$ olmalıdır.

b) $F(x)$ dağılım fonksiyonunu yardımıyla istenen olasılıklar aşağıda hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+1}\right) = \frac{1}{256} \\ P(4 < X \leq 6) &= F(6) - F(4) = \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{6+1}\right) - \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{4+1}\right) = \frac{1}{1024} - \frac{1}{16384} = \frac{15}{16384} \\ P(X \leq 1) &= F(1) = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^{1+1} = \frac{15}{16} \\ P(X < 5) &= F(4) = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^{4+1} = \frac{1023}{1024} \\ P(X \leq -3) &= F(-3) = 0 \end{aligned}$$

**Örnek:** Elektronik ürünler satan bir şirket telefon üzerinden satış yaparak siparişlerini posta yoluyla müşterilerine ulaştırmaktadır. Şirkete bağlı altı tane telefon hattı mevcuttur. Belirli bir zamanda meşgul olan telefon hattı sayısı X kesikli raslantı değişkeni ile gösterilsin. X' in olasılık fonksiyonu tablo formunda aşağıda verilmiştir:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Toplam |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.20 | 0.06 | 0.04 | 1 |

a) $F(x)$ dağılım fonksiyonunu bulunuz ve grafiğini çiziniz.
b) Aşağıda belirtilen olayların olasılıklarını $F(x)$ dağılım fonksiyonu yardımıyla hesaplayınız:

i. En fazla beş hattın kullanımda olması
ii. Üçten az hattın kullanımda olması
iii. En az dört hattın kullanımda olması
iv. İki ile beş hat arasında kullanım olması
v. En az beş hattın kullanımda <u>olmaması</u>

**Çözüm:**
a) $F(x)$ dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F(0) = P(X \leq 0) = p(0) = 0.10$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = p(0) + p(1) = 0.10 + 0.15 = 0.25$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 0.10 + 0.15 + 0.20 = 0.45$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 0.10 + 0.15 + 0.20 + 0.25 = 0.70$$

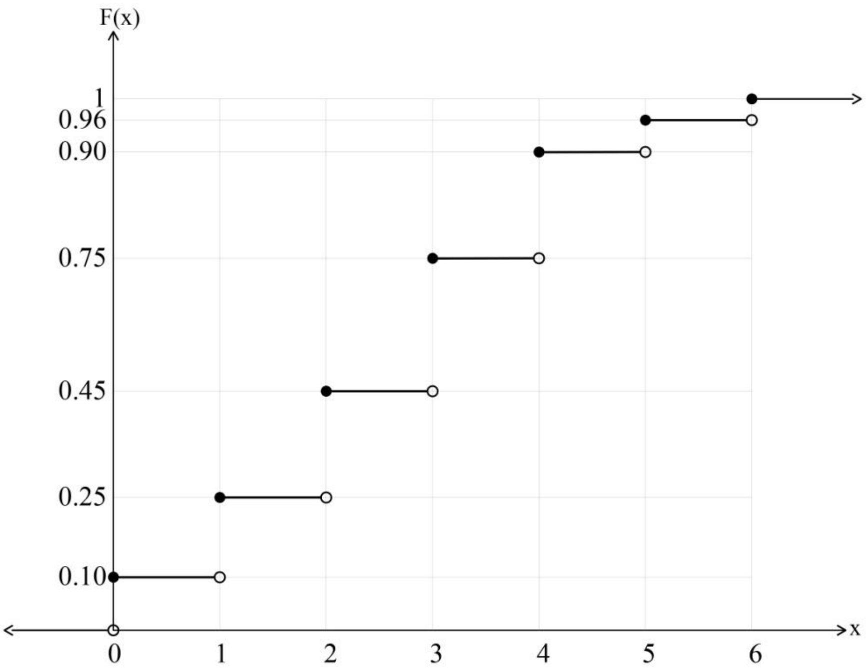
$$\begin{aligned} F(4) &= P(X \leq 4) \\ &= p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) \\ &= 0.10 + 0.15 + 0.20 + 0.25 + 0.20 \\ &= 0.90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(5) &= P(X \leq 5) \\ &= p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) \\ &= 0.10 + 0.15 + 0.20 + 0.25 + 0.20 + 0.06 \\ &= 0.96 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(6) &= P(X \leq 6) \\
&= p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) \\
&= 0.10 + 0.15 + 0.20 + 0.25 + 0.20 + 0.06 + 0.04 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 \quad &, \quad & x < 0 \\
&= 0.10 \quad &, \quad & 0 \leq x < 1 \\
&= 0.25 \quad &, \quad & 1 \leq x < 2 \\
&= 0.45 \quad &, \quad & 2 \leq x < 3 \\
&= 0.70 \quad &, \quad & 3 \leq x < 4 \\
&= 0.90 \quad &, \quad & 4 \leq x < 5 \\
&= 0.96 \quad &, \quad & 5 \leq x < 6 \\
&= 1 \quad &, \quad & 6 \leq x
\end{aligned}
$$

$F(x)$ dağılım fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir:




c) İstenen olasılıklar $F(x)$ dağılım fonksiyonu yardımıyla aşağıda hesaplanmıştır:

i. En fazla beş hattın kullanımda olması
ii. Üçten az hattın kullanımda olması
iii. En az dört hattın kullanımda olması
iv. İki ile beş hat arasında kullanım olması

v. En az beş hattın kullanımda olmaması: en çok 1 hattın kullanımda olması P(X≤1) demektir.

i. $P(X \leq 5) = F(5) = 0.96$
ii. $P(X < 3) = F(2) = 0.45$
iii. $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 0.70 = 0.30$
iv. $P(2 < X < 5) = F(4) - F(2) = 0.90 - 0.45 = 0.45$
v. $P(X \leq 1) = F(1) = 0.25$

**Örnek:** Aşağıda X sürekli raslantı değişkeninin $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad için \\ &= 0 \quad\quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $F(x)$ dağılım fonksiyonunu bulunuz ve grafiğini çiziniz.

b) $P(X > 0.7), P(X < -2), P(X \leq 4), P(X > 4), P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right), P\left(X < \frac{1}{2}\right), P\left(\frac{1}{5} < X \leq \frac{1}{2}\right)$ olasılıklarını $F(x)$ dağılım fonksiyonu yardımıyla bulunuz.

**Çözüm:**

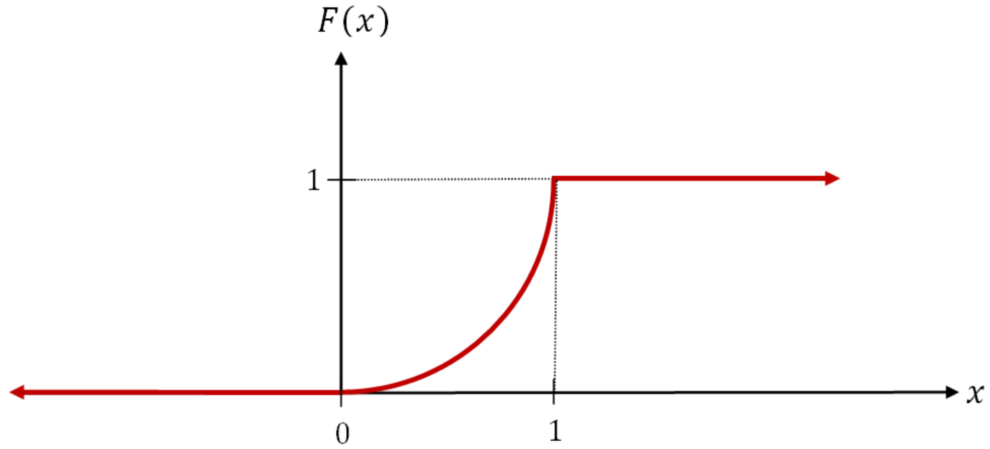
a) $F(x)$ dağılım fonksiyonunu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 3t^2 = \frac{3t^3}{3} \Big|_0^x = x^3$$

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 \quad , \quad 0 < x < 1 \\ &= 0 \quad , \quad x \leq 0 \\ &= 1 \quad , \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

Sağlama: $F(1) = 1$ olmalıdır.

$F(x)$ dağılım fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir:




b) $F(x)$ dağılım fonksiyonunu yardımıyla istenen olasılıkları hesaplayalım.

$$P(X > 0.7) = 1 - F(0.7) = 1 - (0.7)^3 = 0.657$$

$$P(X < -2) = F(-2) = 0$$

$$P(X \leq 4) = F(4) = 1$$
$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 1 = 0$$

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$$

**Örnek:** X sürekli raslantı değişkeninin $F(x)$ dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

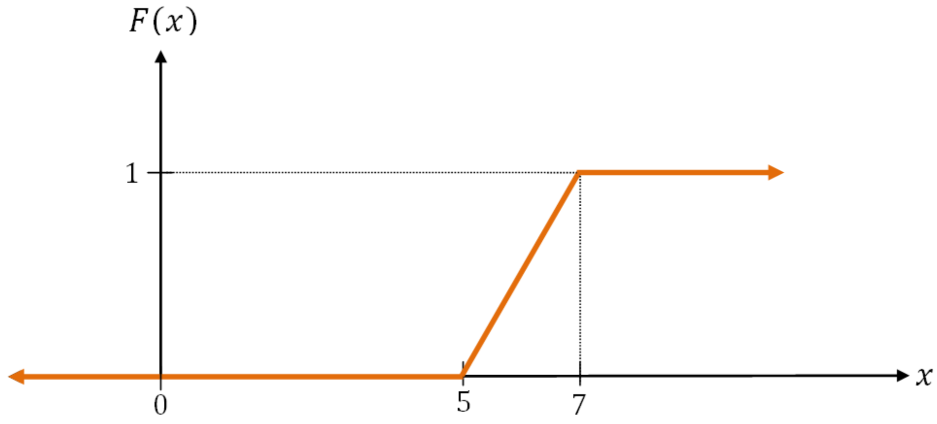
$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x-5}{2} \quad , \quad 5 \leq x \leq 7 \\ &= 0 \quad , \quad x < 5 \\ &= 1 \quad , \quad x \geq 7 \end{aligned}$$

a) $F(x)$ dağılım fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) X sürekli raslantı değişkeninin $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

**Çözüm:**

a) $F(x)$ dağılım fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir:




b) $F(x)$ dağılım fonksiyonunun x' e göre türevi alındığında $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde edilir:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-5}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \quad , \quad 5 \le x \le 7 \quad için \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

**Beklenen Değer**

X raslantı değişkeninin beklenen değeri, o raslantı değişkenine ilişkin ortalama değer veren bir büyüklüktür. $E(X)$ ile gösterilir. Beklenen değer, raslantı değişkeninin değer kümesi içindedir. Raslantı değişkeninin aldığı değerlerle aynı olmak zorunda değildir, farklı değerler alabilir: $E(X) = \mu \in R_X$' tir.

Beklenen değer, ağırlıklı ortalama gibi düşünülebilir. Ağırlık katsayıları olasılık yoğunluk ya da olasılık fonksiyonlarıdır.

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{R_X} xp(x) & , \quad X: Kesikli\ raslantı\ değişkeni \\ \int_{R_X} xf(x)\,dx & , \quad X: Sürekli\ raslantı\ değişkeni \end{cases}$$

X' in beklenen değerinin var olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(|X|) < +\infty$ (yakınsak) olmasıdır. $E(|X|)$ beklenen değeri ıraksak ise, X' in beklenen değeri yoktur. Yani;

- X kesikli raslantı değişkeni ise $E(|X|) = \sum_{R_X} |x| p(x) < +\infty$ olmalıdır.
- X sürekli raslantı değişkeni ise $E(|X|) = \int_{R_X} |x| f(x) dx < +\infty$ olmalıdır.

X raslantı değişkeninin bir fonksiyonu $g(X)$ olsun. $g(X)$' de bir raslantı değişkenidir. $g(X)$' in beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{R_X} g(x)p(x) & , \quad X: Kesikli\ raslantı\ değişkeni \\ \int_{R_X} g(x)f(x)dx & , \quad X: Sürekli\ raslantı\ değişkeni \end{cases}$$

$g(X)$' in beklenen değerinin var olabilmesi için gerek ve yeter koşul $E(|g(X)|) < +\infty$ olmasıdır.

**Beklenen Değerin Özellikleri**

a, b ve c sabit sayılar olsun.

**1)** $E(a) = a$ (Sabit bir sayının beklenen değeri kendisine eşittir)
**2)** $E(aX) = aE(X)$
**3)** $E(aX + b) = aE(X) + b$
**4)** $E(ag(X)) = aE(g(X))$
**5)** $E(g(X) + h(X)) = E\big(g(X)\big) + E(h(X))$
**6)** $E(ag(X) + bh(X) + c) = aE\big(g(X)\big) + bE(h(X)) + c$
**7)** Tüm x değerleri için $g(X) \leq h(X)$ ise $E(g(X)) \leq E(h(X))$'tir.
**8)** $E(X - \mu) = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0.$

- X ve Y raslantı değişkenleri için, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ yazılır.
- X ve Y raslantı değişkenleri bağımız raslantı değişkenleri ise,
  $E(XY) = E(X) \times E(Y)$ olur.

**Varyans**

X'in $E(X)$ beklenen değeri, denemenin her yinelenmesinde ortalama sonucu vermesi bakımından yararlıdır. Fakat ortalama $E(X)$, denemelerin yinelenmesinden öteki yinelenmesine sonuçların nasıl değiştiğini göstermez. Değişkenliğin en çok kullanılan iki ölçüsü, standart sapma ve varyanstır. Bunlardan birini tanımlamak yeterlidir. Çünkü aralarında ilişki vardır.

Bir raslantı değişkeninin varyansı, ortalamadan (beklenen değer) sapmanın karesinin beklenen değeridir. Dolayısıyla, varyans da bir beklenen değerdir. Varyansın birimi verilerin biriminin karesidir. Örneğin; verinin birimi metrekare ($m^2$) ise, varyansın birimi metrekarenin karesi ($m^4$) olur.

Beklenen değeri $\mu = E(X)$ olan X raslantı değişkeninin varyansı $V(X)$ ya da $\sigma_X^2$ ile gösterilir. $V(X) = E[(X-\mu)^2]$ biçiminde tanımlanır. Varyansın pozitif işaretli kareköküne ise X'in standart sapması denir ve $\sigma_X$ ya da $\sigma$ ile gösterilir. $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ 'tir.

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \begin{cases} \sum_{R_X} (X-\mu)^2 p(x), X: Kesikli \\ \int_{R_X} (X-\mu)^2 f(x) dx, X: Sürekli \end{cases}$$

Varyansın aşağıdaki kolay hesaplanabilir formülü kullanılabilir.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$'dir.

**Tanıt:**

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \text{ olur. } \blacksquare \end{aligned}$$

Genellikle standart sapma ortalama ile birlikte kullanılır. Ortalama verilerin merkezinin bir ölçümü, standart sapma ise verilerin bu merkez etrafında dağılımının bir ölçüsüdür.

**Varyansın Özellikleri**

a ve b sabit sayılar olsun.

**1)** $V(a) = 0$ (Bir sabitin varyansı sıfırdır)

**2)** $V(X+a) = V(X-a) = V(X)$

**3)** $V(aX) = a^2 V(X)$

**4)** $V(aX+b) = a^2 V(X)$

**Önemli**

Standart sapma büyük ise veri heterojendir ve değerler arasındaki fark yüksektir.

Standart sapma küçük ise veri homojendir ve değerler arasındaki fark düşüktür.

**Standart Raslantı Değişkeni**

X raslantı değişkenini ortalamasından çıkartıp standart sapmasına böldüğümüzde standartlaştırmış oluruz.

$X^* = \frac{X-E(X)}{\sigma}$ standart raslantı değişkeninin beklenen değeri sıfır varyansı ise birdir:

$E(X^*) = E\left[\frac{X-E(X)}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}[E(X) - E(X)] = 0$

ve

$V(X^*) = E[\left(X^* - E(X^*)\right)^2 = E\left(X^{*2}\right) = E[\left(\frac{X-E(X)}{\sigma}\right)^2]$

$= \frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$

**Örnek:**

12 televizyon alıcısından oluşan bir partideki iki alıcının kablosu beyazdır. Bunlardan üç tanesi bir otele gönderilmek üzere rasgele seçilsin. O tele beyaz kablolu kaç televizyon gitmesi beklenir? Varyans değerini de bulunuz.

**Çözüm:**

X kesikli raslantı değişkeninin çözüm kümesi $R_X = \{0,1,2\}$'dir.

X'in olasılık fonksiyonu: $p(x) = \frac{\binom{2}{x}\binom{10}{3-x}}{\binom{12}{3}}, x = 0,1,2$

$= 0, diğer\ x\ değerleri\ için$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | Toplam |
|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 6/11 | 9/22 | 1/22 | 1 |

$E(X) = \sum_{x=0}^{2} xp(x) = 0p(0) + 1p(1) + 2p(2) = 0\frac{6}{11} + 1\frac{9}{22} + 2\frac{1}{22} = \frac{1}{2}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{13}{22} - \frac{1}{4} = \frac{15}{44}$

$E(X^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2p(x) = 0^2\frac{6}{11} + 1^2\frac{9}{22} + 2^2\frac{1}{22} = \frac{13}{22}$

**Örnek:**

Bir piyango kurumu 1 liralık altı adet bilet satmaktadır. Her biletin üzerinde 1,2,3,4,5,6 rakamlarından biri yazılıdır. Çekiliş, bir zar atılarak yapılmakta, gelen sayı hangi biletin üzerinde ise o biletin sahibine 3 lira ödenmektedir. Bunun dışında herhangi bir ikramiye yoktur. Toplanan paranın geri kalan kısmı milli piyango kurumuna aktarılmaktadır. Bu oyunun bilet alan bir kişi için getirisi nedir? Bu oyunu oynamak mantıklı mıdır?

**Çözüm:**

Oyunu kazanma olasılığı 1/6'dır. X, oyunun getirisi olsun.

Kazanma durumunda $3 - 1 = 2$ lira kar elde edilir.

Aksi durumda 1 lira zarar edilir.

Buna göre, $R_X = \{-1,2\}$'dir. Beklenen getirisi ise;

$E(X) = -1\frac{5}{6} + 2\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$ → Bu oyuna katılan bir kimsenin parasının yarısını kaybetmesi beklenir. Her seferinde 1 lira koyarak toplam 500 kez oynadığında toplam kazanç 250 lira zarar olacaktır. Oyunu oynamak mantıklı değildir.

**Örnek:**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{3}x, \quad 0 \leq x < 1 \\
&= \frac{2}{3}, \quad 1 \leq x < 2 \\
&= 0, \quad diğer\ x\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

Buna göre, $E(X) =?, V(X) =?, E(4X+2) =?, V(5X+9) =?$

**Çözüm:**

$E(X) = \int_{R_X} xf(x)\,dx = \int_0^1 x\frac{2}{3}x\,dx + \int_1^2 x\frac{2}{3}dx = \frac{2}{9}x^3\Big|_0^1 + \frac{x^2}{3}\Big|_1^2 = \frac{2}{9}(1-0) + \frac{1}{3}(2^2 - 1^2) = \frac{2}{9} + 1 = \frac{11}{9}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{35}{18} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 = \frac{35}{18} - \frac{121}{81} = 0.4506$

$E(X^2) = \int_{R_X} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\frac{2}{3}x\,dx + \int_1^2 x^2\frac{2}{3}dx = \frac{2}{12}x^4\Big|_0^1 + \frac{2}{9}x^3\Big|_1^2 = \frac{2}{12}(1 - 0) + \frac{2}{9}(2^3 - 1) = \frac{2}{12} + \frac{16}{9} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$

$E(4X+2) = 4E(X) + 2 = 4\frac{11}{9} + 2 = \frac{44+18}{9} = \frac{62}{9}$

$V(5X+9) = 25V(X) = 25(0.4506) = 11.265$

**Örnek:**

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{x}{15}, \quad x = 1,2,3,4,5 \\
&= 0, diğer\ x\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

$E(X) =?, V(X) =?, E(7X+0.4) =?, V(3X+1) =?$

**Çözüm:**

$E(X) = \sum_{\mathbb{R}_x} xp(x) = \sum_{x=1}^5 xp(x) = \sum_{x=1}^5 \frac{x^2}{15} = \frac{1}{15}(1^2 + 2^2 + \cdots + 5^2) = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 15 - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{135-121}{9} = \frac{14}{9}$

$E(X^2) = \sum_{\mathbb{R}_x} x^2 p(x) = \sum_{x=1}^5 x^2 p(x) = \sum_{x=1}^5 \frac{x^3}{15} = \frac{1}{15}(1^3 + 2^3 + \cdots + 5^3) = \frac{225}{15} = \frac{45}{3} = 15$

$E(7X+0.4)=7E(X)+0.4=7\frac{11}{3}+\frac{4}{10}=\frac{770+12}{30}=\frac{782}{30}$

$V(3X+1)=9V(X)=9\frac{14}{9}=14$

**Örnek:** X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{x+1}{50} \quad , \quad x=1,2,3 \\ &= \frac{x^2}{50} \quad , \quad x=4,5 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $E(X)=?$

b) $V(X)=?$

c) $E(-5X+4)=?$

d) $V\left(\frac{7}{3}X-9\right)=?$

**Çözüm:**

a) X' in beklenen değeri aşağıda hesap edilmiştir:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{R_X} xp(x) = \sum_{x=1}^{3} x\left(\frac{x+1}{50}\right)+\sum_{x=4}^{5} x\left(\frac{x^2}{50}\right) \\ &= \frac{2+6+12}{50}+\frac{64+125}{50} = \frac{209}{50} \end{aligned}$$

b) X' in varyansı aşağıda hesap edilmiştir:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{R_X} x^2p(x) = \sum_{x=1}^{3} x^2\left(\frac{x+1}{50}\right)+\sum_{x=4}^{5} x^2\left(\frac{x^2}{50}\right) \\ &= \frac{2+12+36}{50}+\frac{256+625}{50} = \frac{931}{50} \end{aligned}$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{931}{50}-\left(\frac{209}{50}\right)^2=1.1476$$

c) $E(-5X+4)=-5E(X)+4=-5\times\left(\frac{209}{50}\right)+4=-20.9+4=-16.9$

d) $V\left(\frac{7}{3}X - 9\right) = \frac{49}{9}V(X) = \frac{49}{9}1.1476 = 6.248$