1. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{\left|3+\frac{2}{x}\right| - 5}$

Göz: $\left|3+\frac{2}{x}\right| - 5 \geq 0 \Rightarrow \left|3+\frac{2}{x}\right| \geq 5$

$\Rightarrow \quad 3+\frac{2}{x} \geq 5$ veya $3+\frac{2}{x} \leq -5$

$\Rightarrow \quad \frac{2}{x} \geq 2$ veya $\frac{2}{x} \leq -8$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$ veya $\frac{x}{2} \geq \frac{-1}{8}$

$\Rightarrow \quad x \leq 1$ veya $x \geq -\frac{1}{4}$

$T.K = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq 1$ veya $x \geq -\frac{1}{4} \} - \{0\}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-|3-2x|}}$

Göz: $4 - |3-2x| > 0$

$\Rightarrow |3-2x| < 4$

$\Rightarrow -4 < 3-2x < 4$

$\Rightarrow -7 < -2x < 1$

$\Rightarrow \dfrac{7}{2} > x > \dfrac{-1}{2}$

$T.K = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

c) $y = \dfrac{1}{x+|x|}$

Göz:

$x+|x| = 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x \leq 0$

$T.K = (0, \infty)$

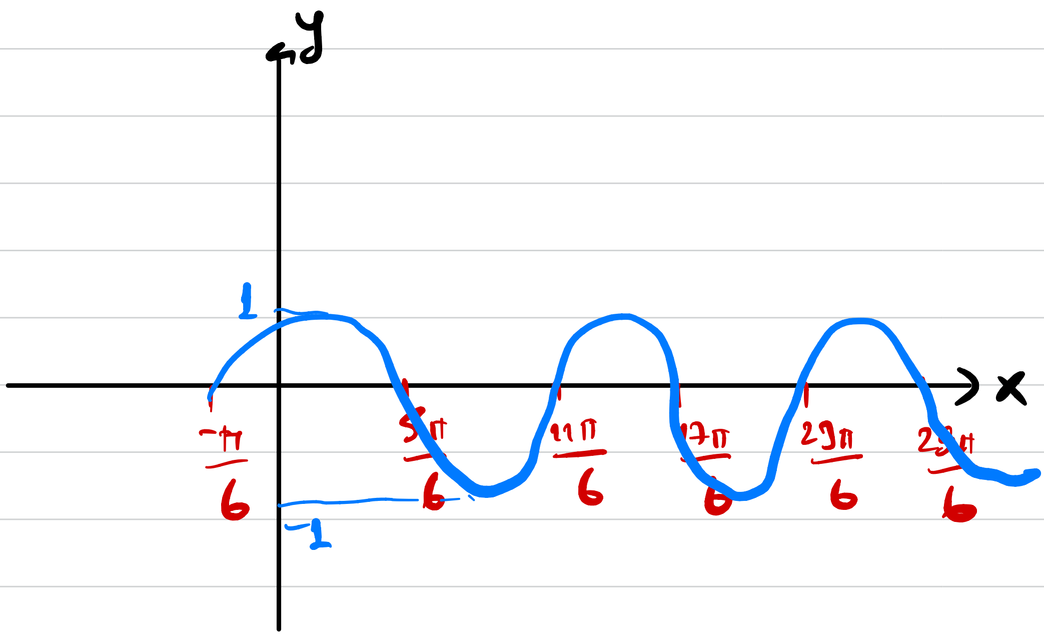
2. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = \cos(x - \pi/3)$

Göz: $\cos(x - \pi/3) = 0$ $\qquad x - \frac{\pi}{3} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

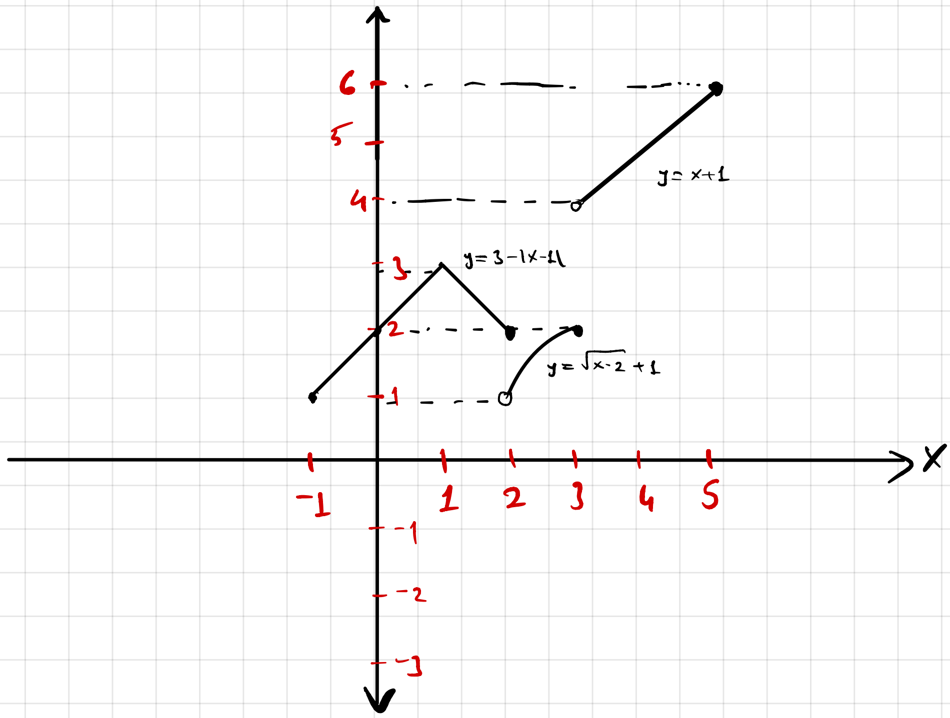
$\Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, \ldots$



b) $f(x) = \begin{cases} 3 - |x-1| & ; \quad -1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x-2} + 1 & ; \quad 2 < x \le 3 \\ x+1 & ; \quad 3 < x \le 5 \end{cases}$

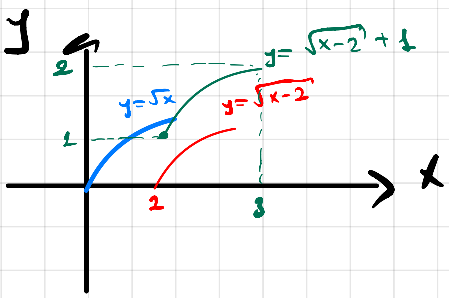
Çöz:



$f(x) = 3 - |x-1| , \quad -1 \le x \le 2$

$f(x) = \begin{cases} 3 + (x-1) & -1 \le x \le 1 \\ 3 - (x-1) & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

$= \begin{cases} 2 + x & -1 \le x \le 1 \\ 4 - x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$



3. $f(x) = \begin{cases} cx+d & x \geq 3 \\ dx^2 - 4 & x > 3 \end{cases}$

fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}$'de sürekli ve türevlenebilir olması için c ve d ne olmalıdır?

Göz: Fonksiyon polinomlardan oluştuğundan $x \neq 3$ hariç sürekli ve türevlenebilirdir.

$x=3$ için. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$; $f(3) = 3c+d$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \boxed{9d-4 = 3c+d} = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3).$$

$x=3$ için, $f'(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(cx+d)-(3c+d)}{x-3} = c$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(dx^2-4)-(3c+d)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{dx^2-4-(9d-4)}{x-3} = 6d$$

$$\boxed{c = 6d} \ \& \ \boxed{9d-4 = 3c+d} \Rightarrow \boxed{c = -2,4 \quad d = -0,4}$$

4.

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2+a) & \text{if } x<0, \\ 1 & \text{if } x=0, \\ bx^2+1 & \text{if } x>0. \end{cases}$$

$f'(0)$ olacak şekilde a ve b değerlerini bulunuz.

Çöz: Öncelikle f sürekli olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} bx^2+1 = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} e^x(x^2+a) = a \end{aligned}\right\} a=1 \quad \left(\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1 \checkmark \right)$$

f'in 0'da türevlenebilirliğini inceleyelim.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{bh^2+1-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} bh = 0 \quad \forall b$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^h(h^2+1)-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = g'(0)$$

$$= 1 \quad \forall b$$

where $g(x) = e^x(x^2+1)$

$(\Rightarrow g'(x) = e^x(x^2+1) + e^x \cdot 2x$

$\Rightarrow g'(0) = 1)$

$a=1$'dir. b nasıl seçilirse seçilsin $f'(0)$ yoktur.

5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2-\sqrt{f(x)}}{x+1}$; $f(-1)=4$, $f(x)>0$ $\forall x$ ve $f'(-1)=\pi$ limiti hesaplayınız.

$$\lim_{x\to -1} \frac{4-f(x)}{(2+\sqrt{f(x)})(x+1)} = -\lim_{x\to -1}\left(\frac{f(x)-4}{x+1}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{f(x)}}\right)$$

$$= -\underbrace{\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}}_{f'(-1)=\pi} \cdot \underbrace{\lim_{x\to -1}\frac{1}{2+\sqrt{f(x)}}}_{\frac{1}{2+\sqrt{f(-1)}}=\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-5}{\sin x}$, $f(0)=5$ ve $f'(0)=2$ ise limiti hesaplayınız.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\,\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$$

$$= f'(0)\cdot 1 = 2$$

7. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}-\sqrt[3]{t}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}\,(t^{1/6}-1)}$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t}}}_{=1}\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{1/6}-1} = 1\cdot(-1) = -1$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\tan x}-\sqrt{1+\tan x}}{\sin x}\cdot\frac{(\sqrt{1-\tan x}+\sqrt{1+\tan x})}{(\sqrt{1-\tan x}+\sqrt{1+\tan x})} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\tan x)-(1+\tan x)}{\sin x(\sqrt{1-\tan x}+\sqrt{1+\tan x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cancel{\tan x}}{\cancel{\sin x}\cdot(\sqrt{1-\tan x}+\sqrt{1+\tan x})} = \lim_{x\to 0}\frac{-2}{\cos x\cdot(\sqrt{1-\tan x}+\sqrt{1+\tan x})}$$

$$= -1$$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\tan x-1-\sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3} \cdot \frac{(1-\cos x)}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}} \cdot \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\cos x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}_{\to 2} \underbrace{(1+\cos x)}_{\to 2}} = \frac{1}{4}$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+\sqrt{x^6+2x^5+1}}{x^3+2x^2+x+1}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1+\sqrt{1+\underbrace{2\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^6}}_{\to 0}}\right)}{\cancel{x^3}\left(1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}\right)} = 2$$

8. **Bir kübiğin kökleri** $x^3 - 15x + 1 = 0$ denkleminin $[-4,\ 4]$ aralığında üç çözümünün olduğunu gösterin.

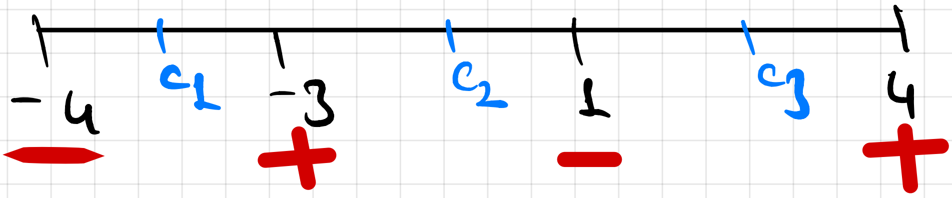
$$f(x) = x^3 - 15x + 1$$

$$f(-4) = (-4)^3 - 15.(-4) + 1 = -64 + 60 + 1 = -3$$

$$f(-3) = (-3)^3 - 15(-3) + 1 = -27 + 45 + 1 = 19$$

$$f(1) = 1^3 - 15 + 1 = -13$$

$$f(4) = 4^3 - 15.4 + 1 = 64 - 60 + 1 = 5$$



Ara değer teoreminden

$c_1 \in (-4, -3)$, $c_2 \in (-3, 1)$ ve

$c_3 \in (1, 4)$ şeklinde 3 kök vardır.