10. TEK DEĞİŞKENLİ RASLANTI DEĞİŞKENLERİNDE KOŞULLU DAĞILIMLAR

$P(A) \neq 0$ olmak üzere, A olayının ortaya çıktığı bilindiğinde, B olayının ortaya çıkması olasılığı B' nin A'ya göre koşullu olasılığı olarak tanımlanmış ve $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ biçiminde verilmişti.

Bu bölümde, raslantı değişkenleri üzerinden koşullu olasılıklar incelenecektir. Kesikli ve sürekli raslantı değişkenlerini sırasıyla ele alalım.

10.1. Kesikli Raslantı Değişkenleri için Koşullu Dağılımlar

X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu $P(X = x) = p(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F_X(x) = P(X \leq x)$ olsun.

Herhangi bir A olayını göz önüne alalım. Bu A olasıı, $A = \{X = a\}$, $A = \{X \leq a\}$, $A = \{X < a\}$, $A = \{X \geq a\}$, $A = \{X > a\}$, $A = \{a \leq X \leq b\}$ vb. farklı şekillerde tanımlanabilir.

Koşullu Olasılık Fonksiyonu

$P(A) \neq 0$ olmak üzere, A olayı verildiğinde X raslantı değişkeninin koşullu olasılık fonksiyonu,

$$p(x \mid A) = P(X = x \mid A) = \frac{P(X = x \cap A)}{P(A)} \begin{cases} = \dfrac{p(x)}{P(A)} , & x \in A \\ = 0 , & x \notin A \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Koşullu Dağılım Fonksiyonu

$P(A) \neq 0$ olmak üzere, A olayı verildiğinde X raslantı değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonu,

$$F_X(x \mid A) = P(X \leq x \mid A) = \frac{P(X \leq x \cap A)}{P(A)}$$

$$ya\ da$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{x} p(t \mid A)$$

olarak elde edilir. ($t = -\infty$: A koşulu altında X' in değer kümesinin alt sınırıdır.)

Koşullu olasılık fonksiyonu, olasılık fonksiyonunun; koşullu dağılım fonksiyonu ise dağılım fonksiyonunun özelliklerini taşır.

- $\forall x \in A$ için $0 \leq p(x \mid A) \leq 1$' dir.
- $\sum_A p(x \mid A) = 1$' dir.
- $\lim_{x \to +\infty} F(x \mid A) = 1$ ($+\infty$: A' nın tanım bölgesinin üst sınırı)
- $\lim_{x \to -\infty} F(x \mid A) = 0$ ($-\infty$: A' nın tanım bölgesinin alt sınırı)

Koşullu Beklenen Değer

A olayı verildiğinde X kesikli raslantı değişkeninin koşullu beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(X \mid A) = \sum_A xp(x \mid A)$$

Koşullu beklenen değer, beklenen değerin özelliklerini taşır ve A' nın tanım kümesi içinde herhangi bir değere eşittir.

Koşullu Varyans

A olayı verildiğinde X kesikli raslantı değişkeninin koşullu varyansı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$V(X \mid A) = E[(X-\mu)^2 \mid A] = \sum_A (X-\mu)^2 p(x \mid A)$$

ya da

$$V(X \mid A) = E(X^2 \mid A) - [E(X \mid A)]^2 = \sum_A x^2 p(x \mid A) - \left[\sum_A xp(x \mid A)\right]^2$$

Koşullu varyans, varyansın özelliklerini taşır ve $V(X \mid A) \geq 0$' dır.

Örnek: X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{x}{15} \quad , \quad x = 1,2,3,4,5 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $p(x \mid X \leq 3)$ koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.

$$p(x \mid X \leq 3) = \frac{P(X = x \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{p(x)}{P(X \leq 3)} = \frac{\frac{x}{15}}{\sum_{x=1}^{3} \frac{x}{15}} = \frac{\frac{x}{15}}{\frac{1+2+3}{15}} = \frac{x}{6}$$

$$\begin{aligned} p(x \mid X \leq 3) &= \frac{x}{6} \quad , \quad x = 1,2,3 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

Sağlama: $\sum_{x=1}^{3} p(x \mid X \leq 3) = \sum_{x=1}^{3} \frac{x}{6} = 1$ olmalıdır.

b) $F(x \mid X \leq 3)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

2.yol:

Öncelikle X raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned} F_X(x) = \sum_{t=-\infty}^{x} p(t) = \sum_{t=1}^{x} \frac{t}{15} = \frac{1}{15}(1+2+\cdots+x) &= \frac{x(x+1)}{30} \quad , \quad x = 1,2,3,4,5 \\ &= 0 \quad , \quad x < 1 \\ &= 1 \quad , \quad x \geq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x \mid X \leq 3) = P(X \leq x \mid X \leq 3) = \frac{P(X \leq x \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} &= \frac{\overbrace{P(X \leq x)}^{x \leq 3}}{P(X \leq 3)} = \frac{F(x)}{F(3)} = \frac{\frac{x(x+1)}{30}}{\frac{3 \times 4}{30}} = \frac{x(x+1)}{12} \quad , \quad x = 1,2,3 \\ &= \frac{\overbrace{0}^{x<1}}{P(X \leq 3)} = 0 \quad , \quad x < 1 \\ &= \frac{\overbrace{P(X \leq 3)}^{x \geq 3}}{P(X \leq 3)} = 1 \quad , \quad x \geq 3 \end{aligned}$$

Sağlama: $F(3 \mid X \leq 3) = 1$ olmalıdır.

1. yol: $F(x \mid X \leq 3)$ koşullu dağılım fonksiyonu, $p(x \mid X \leq 3)$ koşullu olasılık fonksiyonu yardımıyla bulunabilir:

$$F(x \mid X \leq 3) = \sum_{t=1}^{x} p(t \mid X \leq 3) = \sum_{t=1}^{x} \frac{t}{6} = \frac{1}{6}(1+2+\cdots+x) = \frac{x(x+1)}{12}$$

$$\begin{aligned} F(x \mid X \leq 3) &= \frac{x(x+1)}{12} \quad , \quad x = 1,2,3 \\ &= 0 \quad , \quad x < 1 \\ &= 1 \quad , \quad x \geq 3 \end{aligned}$$

Sağlama: $F(3 \mid X \leq 3) = 1$ olmalıdır.

c) Aşağıda bazı olasılıklar hesaplanmıştır:

$$P(X < 2 \mid X \leq 3) = F(1 \mid X \leq 3) = \frac{1 \times 2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$ya\ da$$

$$= p(1 \mid X \leq 3) = \frac{1}{6}$$

$$P(1 < X < 3 \mid X \leq 3) = F(2 \mid X \leq 3) - F(1 \mid X \leq 3) = \frac{2 \times 3}{12} - \frac{1 \times 2}{12} = \frac{1}{3}$$

$$ya\ da$$

$$= p(2 \mid X \leq 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(X > 2 \mid X \leq 3) = 1 - P(X \leq 2 \mid X \leq 3) = 1 - F(2 \mid X \leq 3) = 1 - \frac{2 \times 3}{12} = \frac{6}{12}$$

$$ya\ da$$

$$= p(3 \mid X \leq 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(3 < X \leq 5 \mid X \leq 3) = F(5 \mid X \leq 3) - F(3 \mid X \leq 3) = 1 - 1 = 0$$

$$P(X < 4 \mid X \leq 3) = 1$$

$$P(X > 4 \mid X \leq 3) = 0$$

d) $E(X \mid X \leq 3)$ koşullu beklenen değeri hesaplayınız.

$$E(X \mid X \leq 3) = \sum_{x=1}^{3} xp(x \mid X \leq 3) = \sum_{x=1}^{3} x\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{7}{3}$$

e) $E(6X + 4 \mid X \leq 3) = ?$

1.yol:

$$E(\,6X+4 \mid X \le 3\,) = \sum_{x=1}^{3}(6x+4)p(\,x \mid X \le 3\,) = \sum_{x=1}^{3}(6x+4)\left(\frac{x}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{3}(6x^2+4x) = \frac{1}{6}(6+4+24+8+54+12) = \frac{108}{6} = 18$$

2.yol:

$$E(\,6X+4 \mid X \le 3\,) = 6E(\,X \mid X \le 3\,) + 4 = 6 \times \frac{7}{3} + 4 = 18$$

f) $V(X \mid X \le 3)$ koşullu varyansı hesaplayınız.

$$E(X^2 \mid X \le 3) = \sum_{x=1}^{3} x^2 p(\,x \mid X \le 3\,) = \sum_{x=1}^{3} x^2\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{1}{6}(1^3+2^3+3^3) = \frac{36}{6} = 6$$

$$V(X \mid X \le 3) = E(X^2 \mid X \le 3) - [E(X \mid X \le 3)]^2 = 6 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} = 0.55$$

g) $V(3X+7 \mid X \le 3) =?$

$$V(3X+7 \mid X \le 3) = 9V(X \mid X \le 3) = 9\left(\frac{5}{9}\right) = 5$$

g) $p(x \mid X > 2)$ koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.

$$p(x \mid X > 2) = P(X = x \mid X > 2) = \frac{P(X = x \cap X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{p(x)}{1 - F(2)}$$

$$= \frac{\frac{x}{15}}{1 - \left(\frac{2 \times 3}{30}\right)} = \frac{x}{12}$$

$$\begin{aligned} p(x \mid X > 2) &= \frac{x}{12} \quad , \quad x = 3,4,5 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

Sağlama: $\sum_{x=3}^{5} p(x \mid X > 2) = \sum_{x=3}^{5} \frac{x}{12} = 1$ olmalıdır.

g) $F(x \mid X > 2)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

1.yol:

$$F(x \mid X>2) = P(X \le x \mid X>2) = \frac{P(X \le x \cap X>2)}{P(X>2)} = \frac{\overbrace{P(2<X\le x)}^{x>2}}{1-F(2)} = \frac{F(x)-F(2)}{1-F(2)} = \frac{\frac{x(x+1)}{30}-\frac{2\times 3}{30}}{1-\left(\frac{2\times 3}{30}\right)} = \frac{x(x+1)-6}{24} \quad , \quad x=3,4,5$$

$$= \frac{\overbrace{P(\emptyset)}^{x\le 2}}{P(X>2)} = \frac{0}{P(X>2)} = 0 \quad , \quad x \le 2$$

$$= \frac{\overbrace{P(X>2)}^{x\ge 5}}{P(X>2)} = 1 \quad , \quad x \ge 5$$

$$\begin{aligned} F(x \mid X>2) &= \frac{x(x+1)-6}{24} \quad , \quad x=3,4,5 \\ &= 0 \quad , \quad x \le 2 \\ &= 1 \quad , \quad x \ge 5 \end{aligned}$$

Sağlama: $F(5 \mid X>2) = 1$ olmalıdır.

2. yol: $F(x \mid X>2)$ koşullu dağılım fonksiyonu, $p(x \mid X>2)$ koşullu olasılık fonksiyonu yardımıyla bulunabilir:

$$\begin{aligned} F(x \mid X>2) &= \sum_{t=3}^{x} p(t \mid X>2) &&= \sum_{t=3}^{x} \frac{t}{12} \\ &= \sum_{t=3-2}^{x-2} \frac{t+2}{12} &&= \sum_{t=1}^{x-2} \frac{t+2}{12} \\ &= \sum_{t=1}^{x-2} \frac{t}{12} + \sum_{t=1}^{x-2} \frac{2}{12} &&= \frac{1}{12}\left[\frac{(x-2)(x-1)}{2} + 2(x-2)\right] \\ &= \frac{(x-2)(x-1)+4(x-2)}{24} &&= \frac{(x-2)(x+3)}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x \mid X>2) &= \frac{(x-2)(x+3)}{24} \quad , \quad x=3,4,5 \\ &= 0 \quad , \quad x \le 2 \\ &= 1 \quad , \quad x \ge 5 \end{aligned}$$

Sağlama: $F(5 \mid X>2) = 1$ olmalıdır.

h) Aşağıda bazı olasılıklar hesaplanmıştır:

$$P(2<X\le 4 \mid X>2) = F(4 \mid X>2) - F(2 \mid X>2) = \frac{4\times 5-6}{24} = \frac{7}{12}$$

ya da

$$= p(3 \mid X>2) + p(4 \mid X>2) = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

$$
\begin{aligned}
P(4 \leq X < 9 \mid X > 2) &= F(8 \mid X > 2) - F(3 \mid X > 2) = 1 - \frac{3 \times 4 - 6}{24} = \frac{3}{4} \\
&\quad ya\ da \\
&= p(4 \mid X > 2) + p(5 \mid X > 2) = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X > 3 \mid X > 2) &= 1 - F(3 \mid X > 2) = 1 - \frac{3 \times 4 - 6}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \\
&\quad ya\ da \\
&= p(4 \mid X > 2) + p(5 \mid X > 2) = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$P(X \leq 2 \mid X > 2) = 0$

$P(X > 7 \mid X > 2) = 0$

$P(X < 6 \mid X > 2) = F(5 \mid X > 2) = 1$

$P(-4 < X < 3 \mid X > 2) = 0$

$P(-4 < X \leq 3 \mid X > 2) = p(3 \mid X > 2) = \frac{3}{12}$

Örnek: X kesikli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} &&, \quad x = 1,2,3,4,5,\cdots \\
&= 0 &&, \quad diğer\ x\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

Buna göre, $E(2X^2 - 1 \mid X \leq 3)$ koşullu beklenen değerini bulunuz.

$$
\begin{aligned}
E(2X^2 - 1 \mid X \leq 3) &= \sum_{R_{X \mid X \leq 3}} (2x^2 - 1) p(x \mid X \leq 3) \\
&\quad ya\ da \\
&= 2E(X^2 \mid X \leq 3) - 1
\end{aligned}
$$

Öncelikle, $p(\, x \mid X \leq 3\,)$ koşullu olasılık fonksiyonunu bulmalıyız.

$$
\begin{aligned}
p(\,x \mid X \leq 3\,) &= \frac{P(X = x \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} && = \frac{p(x)}{P(X \leq 3)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}} && = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}}{1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}} \\
&= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}}{\frac{19}{9}} && = \frac{9}{19}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(\,x \mid X \leq 3\,) &= \frac{9}{19}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \quad , \quad x = 1,2,3 \\
&= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

Sağlama: $\sum_{x=1}^{3} p(\,x \mid X \leq 3\,) = \sum_{x=1}^{3} \frac{9}{19}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = 1$ olmalıdır.

$$
\begin{aligned}
E(2X^2 - 1 \mid X \leq 3) &= \sum_{x=1}^{3} (2x^2 - 1) p(x \mid X \leq 3) \\
&= \sum_{x=1}^{3} (2x^2 - 1)\left(\frac{9}{19}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}\right) \\
&= \frac{9}{19}\left[1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{0} + 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{1} + 17 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right] \\
&= \frac{119}{19}
\end{aligned}
$$

10.2. Sürekli Raslantı Değişkenleri için Koşullu Dağılımlar

X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F_X(x) = P(X \leq x)$ olsun.

Herhangi bir A olayını göz önüne alalım. Bu A olayı, $A = \{X \leq a\}$, $A = \{X \geq a\}$, $A = \{a \leq X \leq b\}$ vb. farklı şekillerde tanımlanabilir.

Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$P(A) \neq 0$ olmak üzere, A olayı verildiğinde X raslantı değişkeninin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x \mid A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x \mid A)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{\frac{P(x \le X \le x + \Delta x \cap A)}{P(A)}}^{x \in A \ olarak\ düşünülsün.}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{P(A)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x}}{P(A)}$$

$$= \frac{\overbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x}}^{f(x)\ olasılık\ yoğunluk\ fonksiyonu\ tanımıdır.}}{P(A)} = \frac{f(x)}{P(A)} \quad , \quad x \in A$$

$$f(x \mid A) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{P(A)} & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Koşullu Dağılım Fonksiyonu

$P(A) \neq 0$ olmak üzere, A olayı verildiğinde X raslantı değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonu,

$$F_X(x \mid A) = P(X \le x \mid A) = \frac{P(X \le x \cap A)}{P(A)}$$

$$ya\ da$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t \mid A)\, dt$$

olarak verilir. ($-\infty$: A koşulu altında X’in değer kümesinin alt sınırıdır.)

Koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu, olasılık yoğunluk fonksiyonunun; koşullu dağılım fonksiyonu, dağılım fonksiyonunun özelliklerini taşımaktadır.

- $\forall x \notin A$ için $f(\, x \mid A\,) = 0$’ dır.
- $\forall x \in A$ için $f(\, x \mid A\,) \ge 0$’ dır.
- $\int_A f(\, x \mid A\,) dx = 1$’ dir.
- $f(\, x \mid A\,) = \frac{d}{dx} F(\, x \mid A\,)$
- $\lim_{x \to -\infty} F\,(\, x \mid A\,) = 0$ ($-\infty$: A olayının tanım bölgesinin alt sınırı)

- $\lim_{x \to +\infty} F(x \mid A) = 1$ (+∞: A olayının tanım bölgesinin üst sınırı)

$$P(x_1 \leq X \leq x_2 \mid A) = P(x_1 < X \leq x_2 \mid A) = P(x_1 \leq X < x_2 \mid A)$$
$$= P(x_1 < X < x_2 \mid A) = F(x_2 \mid A) - F(x_1 \mid A)$$

Koşullu Beklenen Değer

A olayı verildiğinde X sürekli raslantı değişkeninin koşullu beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(X \mid A) = \int_A xf(x \mid A)dx$$

Koşullu beklenen değer, beklenen değerin özelliklerini taşır ve A' nın tanım kümesi içinde herhangi bir değere eşittir.

Koşullu Varyans

A olayı verildiğinde X sürekli raslantı değişkeninin koşullu varyansı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$V(X \mid A) = E[(X-\mu)^2 \mid A] = \int_A (x-\mu)^2 f(x \mid A)\,dx$$

ya da

$$V(X \mid A) = E(X^2 \mid A) - [E(X \mid A)]^2 = \int_A x^2 f(x \mid A)dx - \left[\int_A xf(x \mid A)dx\right]^2$$

Koşullu varyans, varyansın özelliklerini taşır ve $V(X \mid A) \geq 0$' dır.

Örnek: X sürekli raslantı değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{56} & , \quad 0 \leq x \leq 8 \; ise \\ 0 & , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{cases}$$

a) $f(x \mid X \geq 3)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz:

$$f(x \mid X \geq 3) = \frac{f(x)}{P(X \geq 3)} = \frac{\frac{x+3}{56}}{\int_3^8 \left(\frac{x+3}{56}\right)dx} = \frac{\frac{x+3}{56}}{\frac{1}{56}\left(\frac{x^2}{2} + 3x\Big|_3^8\right)}$$
$$= \frac{x+3}{\frac{8^2}{2} + 24 - \frac{9}{2} - 9} = \frac{2(x+3)}{85}$$

$$
\begin{aligned}
f(x \mid X \geq 3) &= \frac{2(x+3)}{85} \quad , \quad 3 \leq x \leq 8 \; ise \\
&= 0 \quad , \quad diğer\; x\; değerleri\; için
\end{aligned}
$$

Sağlama: $\int_3^8 f(x \mid X \geq 3)dx = \int_3^8 \frac{2(x+3)}{85} dx = 1$ olmalıdır.

b) $F(x \mid X \geq 3)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Öncelikle, X' in dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\frac{t+3}{56}\right)dt = \frac{1}{56}\left(\frac{t^2}{2} + 3t\Big|_0^x\right) = \frac{x^2+6x}{112}$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x^2+6x}{112} \quad , \quad 0 \leq x \leq 8 \; ise \\
&= 0 \quad , \quad x < 0 \\
&= 1 \quad , \quad x \geq 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x \mid X \geq 3) = P(X \leq x \mid X \geq 3) = \frac{P(X \leq x \cap X \geq 3)}{P(X \geq 3)} &= \frac{\overbrace{P(3 \leq X \leq x)}^{3 \leq x \leq 8}}{1 - F(3)} = \frac{F(x) - F(3)}{1 - F(3)} \\
\Rightarrow &= \frac{\frac{x^2+6x}{112} - \frac{3^2 + 6 \times 3}{112}}{1 - \frac{3^2 + 6 \times 3}{112}} = \frac{x^2 + 6x - 27}{85} \\
&= \frac{\overbrace{0}^{x<3}}{P(X \geq 3)} = \frac{0}{P(X \geq 3)} = 0 \\
&= \frac{\overbrace{P(X \geq 3)}^{x \geq 8}}{P(X \geq 3)} = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x \mid X \geq 3) &= \frac{x^2 + 6x - 27}{85} \quad , \quad 3 \leq x \leq 8 \; ise \\
&= 0 \quad , \quad x < 3 \\
&= 1 \quad , \quad x \geq 8
\end{aligned}
$$

Sağlama: $F(8 \mid X \geq 3) = 1$ olmalıdır.

2. yol: $F(x \mid X \geq 3)$ koşullu dağılım fonksiyonu, $f(x \mid X \geq 3)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla bulunabilir:

$$F(x \mid X \geq 3) = \int_3^x f(t \mid X \geq 3)\, dt = \int_3^x \frac{2}{85}(t+3)dt = \frac{2}{85}\left(\frac{t^2}{2} + 3t\Big|_3^x\right)$$
$$= \frac{2}{85}\left(\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{9}{2} - 9\right) = \frac{x^2 + 6x - 27}{85}$$

$$F(x \mid X \geq 3) = \begin{cases} \dfrac{x^2+6x-27}{85} & , \quad 3 \leq x \leq 8 \; ise \\ 0 & , \quad x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 8 \end{cases}$$

Sağlama: $F(8 \mid X \geq 3) = 1$ olmalıdır.

c) Aşağıda bazı olasılıklar hesaplanmıştır:

1.yol:

$$P(2.5 < X < 4.5 \mid X \geq 3) = F(4.5 \mid X \geq 3) - F(2.5 \mid X \geq 3)$$
$$= \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 6 \times \frac{9}{2} - 27}{85} - 0 = \frac{81}{340} = 0.2382$$

2.yol:

$$P(2.5 < X < 4.5 \mid X \geq 3) = \int_3^{4.5} \frac{2}{85}(x+3)dx = \frac{2}{85}\left(\frac{x^2}{2} + 3x\Big|_3^{4.5}\right)$$
$$= \frac{2}{85}\left(\frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{2} + 3 \times \frac{9}{2} - \frac{9}{2} - 9\right) = \frac{81}{340}$$

1.yol:

$$P(X > 5 \mid X \geq 3) = 1 - P(X \leq 5 \mid X \geq 3) = 1 - F(5 \mid X \geq 3)$$
$$= 1 - \left(\frac{5^2 + 30 - 27}{85}\right) = \frac{57}{85}$$

2. yol:

$$P(X > 5 \mid X \geq 3) = \int_5^8 f(x \mid X \geq 3)dx = \int_5^8 \frac{2(x+3)}{85}dx$$
$$= \frac{2}{85}\left(\frac{x^2}{2} + 3x\Big|_5^8\right) = \frac{2}{85}\left(\frac{64}{2} + 24 - \frac{25}{2} - 15\right)$$
$$= \frac{2}{85}\left(\frac{64+48-25-30}{2}\right) = \frac{57}{85}$$

1.yol:

$$P(4<X<7 \mid X\geq 3) = F(7 \mid X\geq 3) - F(4 \mid X\geq 3) = \frac{7^2+42-27}{85} - \frac{4^2+24-27}{85} = \frac{51}{85}$$

2.yol:

$$\begin{aligned} P(4<X<7 \mid X\geq 3) &= \int_4^7 f(x \mid X\geq 3)dx &&= \int_4^7 \frac{2(x+3)}{85}dx \\ &= \frac{2}{85}\left(\frac{x^2}{2}+3x\Big|_4^7\right) &&= \frac{2}{85}\left(\frac{49}{2}+21-\frac{16}{2}-12\right) \\ &= \frac{2}{85}\left(\frac{49+42-16-24}{2}\right) &&= \frac{51}{85} \end{aligned}$$

$$P(X<12 \mid X\geq 3) = 1$$

$$P(X<2 \mid X\geq 3) = 0$$

$$P(X\geq 9 \mid X\geq 3) = 0$$

d) $E(X \mid X\geq 3)$ koşullu beklenen değeri hesaplayınız.

$$\begin{aligned} E(X \mid X\geq 3) &= \int_3^8 xf(x \mid X\geq 3)\,dx &&= \int_3^8 x\frac{2}{85}(x+3)dx \\ &= \frac{2}{85}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\Big|_3^8\right) &&= \frac{2}{85}\left(\frac{8^3}{3}+\frac{3}{2}\times 8^2-\frac{3^3}{3}-\frac{3}{2}\times 3^2\right) \\ &= \frac{512\times 2+576-54-81}{85\times 3} &&= \frac{1465}{255} = 5.745 \end{aligned}$$

e) $E(5X-7 \mid X\geq 3) = ?$

$$E(5X-7 \mid X\geq 3) = 5E(X \mid X\geq 3) - 7 = 5\times\frac{1465}{255} - 7 = 21.725$$

f) $V(X \mid X\geq 3)$ koşullu varyansı hesaplayınız.

$$\begin{aligned} E(X^2 \mid X \geq 3) &= \int_3^8 x^2 f(x \mid X \geq 3)dx &&= \int_3^8 x^2\left(\frac{2(x+3)}{85}\right)dx \\ &= \frac{2}{85}\left(\frac{x^4}{4}+x^3\Big|_3^8\right) &&= \frac{2}{85}\left(\frac{8^4}{4}+8^3-\frac{3^4}{4}-3^3\right) \\ &= \frac{4096+2048-81-108}{170} &&= \frac{5955}{170} = 35.029 \end{aligned}$$

$$V(X \mid X \geq 3) = E(X^2 \mid X \geq 3) - [E(X \mid X \geq 3)]^2 = \frac{5955}{170} - \left(\frac{1081}{255}\right)^2 = 17.05846$$

g) $V\left(\frac{7}{2}X + 4 \mid X \geq 3\right) = ?$

$$V\left(\frac{7}{2}X + 4 \mid X \geq 3\right) = \frac{49}{4}V(X \mid X \geq 3) = \frac{49}{4} \times 17.05846 = 208.966$$

h) $f(x \mid X \leq 5)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

$$f(x \mid X \leq 5) = \frac{f(x)}{P(X \leq 5)} = \frac{\frac{x+3}{56}}{F(5)} = \frac{\frac{x+3}{56}}{\frac{5^2+6\times 5}{112}} = \frac{2(x+3)}{55}$$

$$\begin{aligned} f(x \mid X \leq 5) &= \frac{2(x+3)}{55} &&, \quad 0 \leq x \leq 5 \; ise \\ &= 0 &&, \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

Sağlama: $\int_0^5 f(x \mid X \leq 5)dx = \int_0^5 \frac{2(x+3)}{55}dx = 1$ olmalıdır.

ı) $F(x \mid X \leq 5)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

1.yol:

$$\begin{aligned} F(x \mid X \leq 5) = P(X \leq x \mid X \leq 5) = \frac{P(X \leq x \cap X \leq 5)}{P(X \leq 5)} &= \frac{\overbrace{P(X \leq x)}^{0 \leq x \leq 5}}{F(5)} = \frac{F(x)}{F(5)} = \frac{\frac{x^2+6x}{112}}{\frac{5^2+6\times 5}{112}} = \frac{x^2+6x}{55} \\ &= \frac{\overbrace{0}^{x<0}}{P(X \leq 5)} = \frac{0}{P(X \leq 5)} = 0 \\ &= \frac{\overbrace{P(X \leq 5)}^{x \geq 5}}{P(X \leq 5)} = 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(x \mid X \leq 5) &= \frac{x^2 + 6x}{55} \quad , \quad 0 \leq x \leq 5 \\
&= 0 \qquad\qquad , \quad x < 0 \\
&= 1 \qquad\qquad , \quad x \geq 5
\end{aligned}
$$

Sağlama: $F(5 \mid X \leq 5) = 1$ olmalıdır.

2. yol: $F(x \mid X \leq 5)$ koşullu dağılım fonksiyonu, $f(x \mid X \leq 5)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla bulunabilir:

$$
\begin{aligned}
F(x \mid X \leq 5) &= \int_0^x f(t \mid X \leq 5) dt = \int_0^x \frac{2}{55}(t+3) dt = \frac{2}{55}\left(\frac{t^2}{2} + 3t \Big|_0^x\right) \\
&= \frac{2}{55}\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right) = \frac{x^2 + 6x}{55}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x \mid X \leq 5) &= \frac{x^2 + 6x}{55} \quad , \quad 0 \leq x \leq 5 \\
&= 0 \qquad\qquad , \quad x < 0 \\
&= 1 \qquad\qquad , \quad x \geq 5
\end{aligned}
$$

Sağlama: $F(5 \mid X \leq 5) = 1$ olmalıdır.

h) Aşağıda bazı olasılıklar hesaplanmıştır:

$$
P(X < 3 \mid X \leq 5) = F(3 \mid X \leq 5) = \frac{3^2 + 3 \times 6}{55} = \frac{27}{55}
$$

1.yol:

$$
\begin{aligned}
P(0.5 < X < 4.5 \mid X \leq 5) &= F(4.5 \mid X \leq 5) - F(0.5 \mid X \leq 5) \\
&= \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 6 \times \frac{9}{2}}{55} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)}{55} \\
&= \frac{176}{55 \times 4} = \frac{44}{55} = \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

2.yol:

$$
\begin{aligned}
P(0.5 < X < 4.5 \mid X \leq 5) &= \int_{0.5}^{4.5} f(x \mid X \leq 5)dx &&= \int_{0.5}^{4.5} \frac{2(x+3)}{55}dx \\
&= \frac{2}{55}\left(\frac{x^2}{2} + 3x\bigg|_{0.5}^{4.5}\right) &&= \frac{2}{55}\left(\frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{2} + 3 \times \frac{9}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - 3 \times \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2}{55}\left(\frac{81}{8} + \frac{27}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{2}\right) &&= \frac{44}{55} = \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

$$
P(-1 < X < 1 \mid X \leq 5) = F(1 \mid X \leq 5) - F(-1 \mid X \leq 5) = \frac{1^2 + 6 \times 1}{55} - 0 = \frac{7}{55}
$$

$$
P(3 < X < 7 \mid X \leq 5) = F(7 \mid X \leq 5) - F(3 \mid X \leq 5) = 1 - \frac{3^2 + 6 \times 3}{55} = \frac{28}{55}
$$

1.yol:

$$
P(X > 3 \mid X \leq 5) = 1 - F(3 \mid X \leq 5) = 1 - \frac{3^2 + 6 \times 3}{55} = \frac{28}{55}
$$

2.yol:

$$
\begin{aligned}
P(X > 3 \mid X \leq 5) &= \int_{3}^{5} f(x \mid X \leq 5)dx &&= \int_{3}^{5} \frac{2(x+3)}{55}dx \\
&= \frac{2}{55}\left(\frac{x^2}{2} + 3x\bigg|_{3}^{5}\right) &&= \frac{2}{55}\left(\frac{25}{2} + 15 - \frac{9}{2} - 9\right) \\
&= \frac{2}{55}\left(\frac{25 + 30 - 9 - 18}{2}\right) &&= \frac{28}{55}
\end{aligned}
$$

$$
P(X > 6 \mid X \leq 5) = 0
$$

$$
P(X \leq 7 \mid X \leq 5) = 1
$$

$$
P(X < 0 \mid X \leq 5) = 0
$$

Örnek: X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{8} \quad , \quad 0 \leq x \leq 4 \; ise \\
&= 0 \quad , \quad diğer \; x \; değerleri \; için
\end{aligned}
$$

Buna göre; $F(\,k \mid X \leq 2\,) = \frac{1}{2}$ eşitliğini sağlayan k sabitini bulunuz.

$$F(\,k \mid X \leq 2\,) = P(\,X \leq k \mid X \leq 2\,) = \frac{P(X \leq k \cap X \leq 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{\overbrace{P(X \leq k)}^{x \leq 2\ olmalıdır.}}{P(X \leq 2)} = 0.5$$

$$\frac{P(X \leq k)}{P(X \leq 2)} = \frac{\int_0^k \frac{x}{8}dx}{\int_0^2 \frac{x}{8}dx} = \frac{\left.\frac{x^2}{16}\right|_0^k}{\left.\frac{x^2}{16}\right|_0^2} = \frac{\frac{k^2}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{k^2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow k^2 = 2 \begin{matrix} \nearrow k = +\sqrt{2} \\ \searrow k \neq -\sqrt{2} \end{matrix} \Rightarrow \mathrm{k} = \sqrt{2}$$

Örnek: X sürekli raslantı değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} F(\,x \mid X > 0\,) &= \frac{x^2 + 8x}{a} &&, \quad 0 \leq x \leq 3\ ise \\ &= 0 &&, \quad x < 0 \\ &= 1 &&, \quad x \geq 3 \end{aligned}$$

a) a sabitini bulunuz.

$F(\,3 \mid X > 0\,) = 1$ olmalıdır.

$$F(\,3 \mid X > 0\,) = \frac{3^2 + 8 \times 3}{a} = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{a} = 9 + 24 = 33$$

b) $f(\,x \mid X > 0\,)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

$$f(\,x \mid X > 0\,) = \frac{d}{dx}F(\,x \mid X > 0\,) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 8x}{33}\right) = \frac{2x + 8}{33}$$

$$\begin{aligned} f(\,x \mid X > 0\,) &= \frac{2x + 8}{33} &&, \quad 0 \leq x \leq 3 \\ &= 0 &&, \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

c) $E\left(\frac{2}{3}X \mid X > 0\right)$ koşullu beklenen değerini bulunuz.

$$
\begin{aligned}
E(X \mid X>0) &= \int_0^3 x f(x \mid X>0)\,dx &&= \int_0^3 x\left(\frac{2x+8}{33}\right)dx \\
&= \frac{1}{33}\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\Big|_0^3\right) &&= \frac{1}{33}(18+36)=\frac{54}{33}
\end{aligned}
$$

$$E\left(\frac{2}{3}X \mid X>0\right)=\frac{2}{3}E(X \mid X>0)=\frac{2}{3}\times\frac{54}{33}=\frac{108}{99}$$

d) $V\left(\frac{4}{3}X+2 \mid X>0\right)$ koşullu varyansı hesaplayınız.

$$V\left(\frac{4}{3}X+2 \mid X>0\right)=\frac{16}{9}V(X \mid X>0)$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2 \mid X>0) &= \int_0^3 x^2 f(x \mid X>0)\,dx &&= \int_0^3 x^2\left(\frac{2x+8}{33}\right)dx \\
&= \frac{1}{33}\left(\frac{2x^4}{4}+\frac{8x^3}{3}\Big|_0^3\right) &&= \frac{1}{33}\left(\frac{3^4}{2}+8\times 9\right) \\
&= \frac{1}{33}\left(\frac{81}{2}+72\right) &&= \frac{225}{66}
\end{aligned}
$$

$$V(X \mid X>0)=E(X^2 \mid X>0)-[E(X \mid X>0)]^2=\frac{225}{66}-\left(\frac{54}{33}\right)^2=0.7314$$

$$V\left(\frac{4}{3}X+2 \mid X>0\right)=\frac{16}{9}\times 0.7314=1.3$$

Örnek: X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{x}{30} \quad &&, \quad x=1,2,3 \\
&= \frac{1+2x}{60} \quad &&, \quad x=4,5,6,7 \\
&= 0 \quad &&, \quad diğer\ x\ değerleri\ için
\end{aligned}
$$

a) $p(x \mid X\le 5)$ koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.

$$p(x \mid X \le 5) = \frac{p(x)}{P(X \le 5)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\frac{x}{30}}{P(X \le 5)} = \dfrac{\frac{x}{30}}{\frac{1+2+3}{30} + \frac{9}{60} + \frac{11}{60}} = \dfrac{\frac{x}{30}}{\frac{16}{30}} = \dfrac{x}{16} & , \quad x = 1,2,3 \\ \dfrac{\frac{1+2x}{60}}{P(X \le 5)} = \dfrac{\frac{1+2x}{60}}{\frac{16}{30}} = \dfrac{1+2x}{32} & , \quad x = 4,5 \\ 0 & , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{cases}$$

b) $F(x \mid X \le 5)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

X raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$F(x) = \sum_{t=1}^{x} \frac{t}{30} = \frac{1}{30}\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) = \frac{x(x+1)}{60} \qquad , \quad x = 1,2,3$$

$$= \sum_{x=1}^{3} \frac{x}{30} + \sum_{t=4}^{x} \frac{1+2t}{60} = \frac{1+2+3}{30} + \sum_{t=4-3}^{x-3} \frac{1+2(t+3)}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{30} + \sum_{t=1}^{x-3} \frac{7+2t}{60} = \frac{6}{30} + \frac{7(x-3)}{60} + \frac{2}{60} \times \left(\frac{(x-3)(x-2)}{2}\right) = \frac{x^2+2x-3}{60} \qquad , \quad x = 4,5,6,7$$

$$= 0 \qquad , \quad x < 1$$

$$= 1 \qquad , \quad x \ge 7$$

$$F(x \mid X \le 5) = \frac{P(X \le x \cap X \le 5)}{P(X \le 5)} = \frac{\overbrace{P(X \le x)}^{x \le 5}}{P(X \le 5)} = \frac{F(x)}{F(5)} \qquad , \quad x \le 5$$

$$= \frac{\overbrace{0}^{x<1}}{P(X \le 5)} = \frac{0}{P(X \le 5)} = 0 \qquad , \quad x < 1$$

$$= \frac{\overbrace{P(X \le 5)}^{x \ge 5}}{P(X \le 5)} = 1 \qquad , \quad x \ge 5$$

$$F(\,x \mid X \leq 5\,) = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{F(5)} = \dfrac{\frac{x(x+1)}{60}}{\frac{32}{60}} = \dfrac{x(x+1)}{32} & , \quad x = 1,2,3 \\[2ex] \dfrac{F(x)}{F(5)} = \dfrac{\frac{x^2+2x-3}{60}}{\frac{32}{60}} = \dfrac{x^2+2x-3}{32} & , \quad x = 4,5 \\[2ex] 0 & , \quad x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

Sağlama: $F(\,5 \mid X \leq 5\,) = 1$

2. yol: $F(x \mid X \leq 5)$ koşullu dağılım fonksiyonu, $p(x \mid X \leq 5)$ koşullu olasılık fonksiyonu yardımıyla bulunabilir:

$$\begin{aligned} F(x \mid X \leq 5) &= \sum_{t=1}^{x} p(\,t \mid X \leq 5\,) = \sum_{t=1}^{x} \frac{t}{16} = \frac{1}{16}\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) = \frac{x(x+1)}{32} && , \quad x = 1,2,3 \\ &= \sum_{x=1}^{3} \frac{x}{16} + \sum_{t=4}^{x} \frac{1+2t}{32} = \frac{1+2+3}{16} + \sum_{t=4-3}^{x-3} \frac{1+2(t+3)}{32} \\ &\Rightarrow \frac{6}{16} + \sum_{t=1}^{x-3} \frac{7+2t}{32} = \frac{6}{16} + \frac{7(x-3)}{32} + \frac{(x-3)(x-2)}{32} = \frac{x^2+2x-3}{32} && , \quad x = 4,5 \\ &= 0 && , \quad x < 1 \\ &= 1 && , \quad x \geq 5 \end{aligned}$$

c) $E(X \mid X \leq 5)$ koşullu beklenen değeri hesaplayınız.

$$\begin{aligned} E(X \mid X \leq 5) &= \sum_{x=1}^{3} x\, p(\,x \mid X \leq 5\,) + \sum_{x=4}^{5} x\, p(\,x \mid X \leq 5\,) \\ &= \sum_{x=1}^{3} x\left(\frac{x}{16}\right) + \sum_{x=4}^{5} x\left(\frac{1+2x}{32}\right) \\ &= \frac{1^2+2^2+3^2}{16} + \frac{1}{32}(4+32+5+50) = \frac{119}{32} \end{aligned}$$

d) $V(X \mid X \leq 5)$ koşullu varyansı hesaplayınız.

$$\begin{aligned} E(X^2 \mid X \leq 5) &= \sum_{x=1}^{3} x^2\, p(\,x \mid X \leq 5\,) + \sum_{x=4}^{5} x^2\, p(\,x \mid X \leq 5\,) \\ &= \sum_{x=1}^{3} x^2\left(\frac{x}{16}\right) + \sum_{x=4}^{5} x^2\left(\frac{1+2x}{32}\right) \\ &= \frac{1^3+2^3+3^3}{16} + \frac{1}{32}(16+128+25+250) = \frac{491}{32} \end{aligned}$$

$$V(X \mid X \leq 5) = E(X^2 \mid X \leq 5) - [E(X \mid X \leq 5)]^2 = \frac{491}{32} - \left(\frac{119}{32}\right)^2 = 1.514$$

e) Aşağıda bazı olasılıklar hesaplanmıştır:

1.yol:

$$P(2 < X \leq 4 \mid X \leq 5) = F(4 \mid X \leq 5) - F(2 \mid X \leq 5) = \frac{4^2 + 8 - 3}{32} - \frac{2 \times 3}{32} = \frac{15}{32}$$

2.Yol:

$$P(2 < X \leq 4 \mid X \leq 5) = p(3 \mid X \leq 5) + p(4 \mid X \leq 5) = \frac{3}{16} + \frac{1 + 8}{32} = \frac{15}{32}$$

$$\begin{aligned} P(X > 2 \mid X \leq 5) &= 1 - P(X \leq 2 \mid X \leq 5) \\ &= 1 - F(2 \mid X \leq 5) \\ &= 1 - \left(\frac{2 \times 3}{32}\right) = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} \end{aligned}$$

1.yol:

$$P(X > 4 \mid X \leq 5) = 1 - F(4 \mid X \leq 5) = 1 - \frac{4^2 + 8 - 3}{32} = \frac{11}{32}$$

2.yol:

$$P(X > 4 \mid X \leq 5) = p(5 \mid X \leq 5) = \frac{11}{32}$$

$$P(X < 6 \mid X \leq 5) = 1$$

$$P(X < -1 \mid X \leq 5) = 0$$

$$P(X > 0 \mid X \leq 5) = 1$$

Örnek: X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5} \quad , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ &= \frac{1 + 6x}{5} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ &= 0 \quad , \quad diğer\ x\ değerleri\ için \end{aligned}$$

a) $f(\,x \mid X \geq -0.5\,)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Öncelikle, X sürekli raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-1}^{x} \frac{1}{5}dt = \left(\frac{t}{5}\Big|_{-1}^{x}\right) = \frac{x+1}{5} && , \quad -1 \leq x \leq 0 \\
&= \int_{-1}^{0} \frac{1}{5}dx + \int_{0}^{x} \left(\frac{1+6t}{5}\right)dt = \left(\frac{x}{5}\Big|_{-1}^{0}\right) + \left(\frac{t}{5} + \frac{6t^2}{10}\Big|_{0}^{x}\right) && \\
&\quad \Longrightarrow = \frac{1}{5} + \frac{x}{5} + \frac{6x^2}{10} = \frac{3x^2+x+1}{5} && , \quad 0 \leq x \leq 1 \\
&= 0 && , \quad x \leq -1 \\
&= 1 && , \quad x \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\,x \mid X \geq -0.5\,) &= \frac{f(x)}{P(X \geq -0.5)} = \frac{f(x)}{1 - F(-0.5)} = \frac{f(x)}{1 - \frac{(-0.5)+1}{5}} = \frac{f(x)}{\frac{9}{10}} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{2}{9} & , \quad -0.5 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{\frac{1+6x}{5}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{2(1+6x)}{9} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \textit{diğer } x \textit{ değerleri için} \end{cases} =
\end{aligned}
$$

Sağlama: $\int_{-0.5}^{0} \left(\frac{2}{9}\right) dx + \int_{0}^{1} \frac{2(1+6x)}{9} dx = 1$ olmalıdır.

b) $F(\,x \mid X \geq -0.5\,)$ koşullu dağılım fonksiyonunu bulunuz.

$$
\begin{aligned}
F(\,x \mid X \geq -0.5\,) &= \frac{P(X \leq x \cap X \geq -0.5)}{P(X \geq -0.5)} = \frac{\overbrace{P(-0.5 \leq X \leq x)}^{-0.5 \leq x \leq 0}}{1 - F(-0.5)} = \frac{F(x) - F(-0.5)}{1 - F(-0.5)} = \frac{F(x) - \frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} \\
&= \frac{\overbrace{P(\emptyset)}^{x \leq -0.5}}{P(X \geq -0.5)} = \frac{0}{P(X \geq -0.5)} = 0 \\
&= \frac{\overbrace{P(X \geq -0.5)}^{x \geq 1}}{P(X \geq -0.5)} = 1
\end{aligned}
$$

$$F(x \mid X \geq -0.5) = \begin{cases} \dfrac{\frac{x+1}{5} - \frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{2x+1}{9} & , \quad -0.5 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{\frac{3x^2+x+1}{5} - \frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{6x^2+2x+1}{9} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad x \leq -\dfrac{1}{2} \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Sağlama: $F(1 \mid X \geq -0.5) = 1$ olmalıdır.

2. yol: $F(x \mid X \geq -0.5)$ koşullu dağılım fonksiyonu, $f(x \mid X \geq -0.5)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla bulunabilir:

$$F(x \mid X \geq -0.5) = \int_{-0.5}^{x} \frac{2}{9} dt = \frac{2t}{9}\bigg|_{-0.5}^{x} = \frac{2}{9}(x+0.5) = \frac{2x+1}{9} \quad , \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0$$

$$= \overbrace{\int_{-0.5}^{0} \frac{2}{9} dx}^{F(0 \mid X \geq -0.5)} + \int_{0}^{x} \frac{2}{9}(1+6t)dt$$

$$\Rightarrow = \frac{2 \times 0 + 1}{9} + \frac{2}{9}\left(t + \frac{6t^2}{2}\bigg|_{0}^{x}\right)$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{9} + \frac{2x+6x^2}{9} = \frac{6x^2+2x+1}{9} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$0 \quad , \quad x \leq -0.5$$

$$1 \quad , \quad x \geq 1$$

Sağlama: $F(1 \mid X \geq -0.5) = 1$ olmalıdır.

c) $E(X \mid X \geq -0.5)$ koşullu beklenen değeri hesaplayınız.

$$E(X \mid X \geq -0.5) = \int_{-0.5}^{0} x\left(\frac{2}{9}\right)dx + \int_{0}^{1} x\left(\frac{2(1+6x)}{9}\right)dx$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_{-0.5}^{0}\right) + \frac{2}{9}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{6x^3}{3}\bigg|_{0}^{1}\right)$$

$$= -\frac{2}{72} + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{-2+40}{72} = \frac{38}{72}$$

d) $V(X \mid X \geq -0.5)$ koşullu varyansı hesaplayınız.

$$\begin{aligned} E(X^2 \mid X \geq -0.5) &= \int_{-0.5}^{0} x^2\left(\frac{2}{9}\right)dx + \int_{0}^{1} x^2\left(\frac{2(1+6x)}{9}\right)dx \\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_{-0.5}^{0}\right) + \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{6x^4}{4}\bigg|_{0}^{1}\right) \\ &= -\frac{2}{9\times 24} + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3} + \frac{6}{4}\right) = \frac{86}{216} \end{aligned}$$

$$V\left(X \mid X \geq -\frac{1}{2}\right) = E(X^2 \mid X \geq -0.5) - [E(X \mid X \geq -0.5)]^2 = \frac{86}{216} - \left(\frac{38}{72}\right)^2 \cong 0.12$$

e) Aşağıda bazı olasılıklar hesaplanmıştır:

$$P(X < -0.2 \mid X \geq -0.5) = F(-0.2 \mid X \geq -0.5\,) = \frac{2\left(-\frac{1}{5}\right)+1}{9} = \frac{1}{15}$$

$$P(X > 0 \mid X \geq -0.5) = 1 - P(X \leq 0 \mid X \geq -0.5) = 1 - F(0 \mid X \geq -0.5) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\begin{aligned} P(-0.2 \leq X < 0.2 \mid X \geq -0.5) &= F(0.2 \mid X \geq -0.5) - F(-0.2 \mid X \geq -0.5) \\ &= \frac{6\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{5}\right)+1}{9} - \frac{2\left(-\frac{1}{5}\right)+1}{9} \\ &= \frac{26}{9\times 25} = \frac{26}{225} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > 0.7 \mid X \geq -0.5) &= 1 - P(X \leq 0.7 \mid X \geq -0.5) \\ &= 1 - F(0.7 \mid X \geq -0.5) \\ &= 1 - \frac{6(0.7)^2 + 2(0.7) + 1}{9} \\ &= \frac{9 - 6\frac{49}{100} - \frac{14}{10} - 1}{9} = \frac{800 - 294 - 140}{900} = \frac{366}{900} = \frac{61}{150} \end{aligned}$$

$$P(X < -0.8 \mid X \geq -0.5) = 0$$

$$P(X < -1 \mid X \geq -0.5) = 0$$

$$P(X > -0.7 \mid X \geq -0.5) = 1$$