FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT 121 Matematik I

Ders Sorumluları: Prof. Dr. Rıza Ertürk
Dr. Öğr. Üyesi Eylem Öztürk

Kaynak Kitaplar: 1) Thomas Kalkülüs
2) Adams Kalkülüs

Konular: 1) Önbilgiler
2) Fonksiyon, Fonksiyon Türleri
3) Limit - Süreklilik
4) Türev ve Türev Alma Kuralları
5) Türevin Uygulamaları.

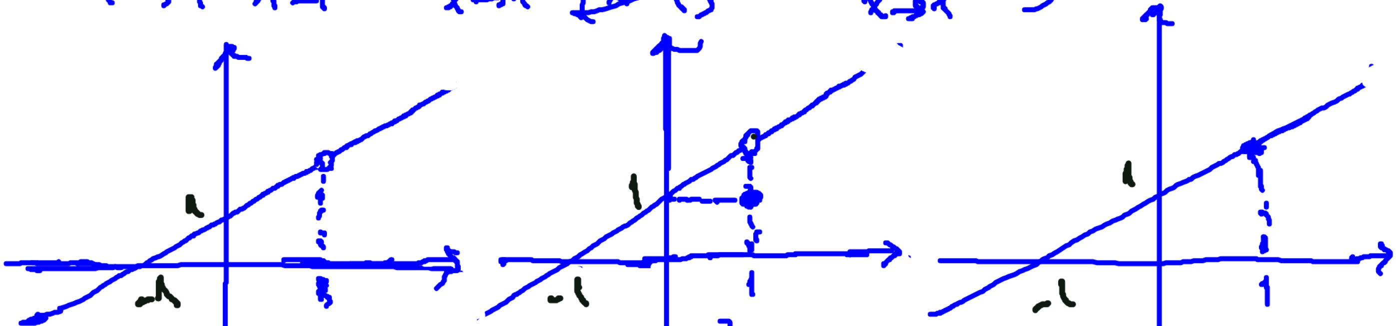
LİMİT VE SÜREKLİLİK:

Bir $y=f(x)$ fonksiyonu, bir x_0 noktasını bulun duran bir (a,b) açık aralığında, ($x_0\in(a,b)$ veya $x_0\notin(a,b)$) tanımlı olsun. Eğer her bir $x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$ için $f(x)$ de bir $A\in\mathbb{R}$ sayısına yaklaşıyorsa $f(x)$ in x_0 da limit değeri A dır denir ve bu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ ile gösterilir.

Şimdi $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dir.

Eğer $x\neq 1$ ise $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=x+1$ olur, ve limit durumunda $x\neq 1$ old. dan

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2 \text{ dir.}$$



$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$ $\qquad h(x)=x+1$

olarak düşünülürse $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1} h(x)=2$ olur, ancak fonksiyonlar farklıdır.

Şimdi $\underset{f(x)=4}{\lim\limits_{x\to 2}(4)=4}$, $\lim\limits_{x\to 3}(4)\overset{}{=}4$, $\overset{f(x)=x}{\lim\limits_{x\to 3} x}=3=f(3)$, $\lim\limits_{x\to 2}(5x-4)=6$

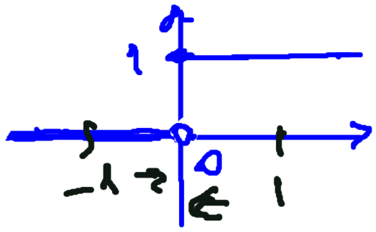
ve $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+4}{x+5}=-2/3$, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x-1}{2x+1}=-\dfrac{3}{-1}=3$ dir

ki bu örneklerdeki limit noktaları fonksiyonların tanımlı oldukları noktalardır ve $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$ tanım değerlerine eşittir.

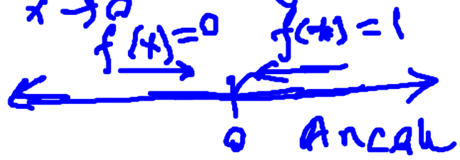
2) (a) $y=f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$, b) $y=g(x)=\begin{cases}1/x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sin 1/x, & x>0\end{cases}$ fonksiyonlarının istenen noktalardaki limit değerlerini varsa bulunuz.

a)

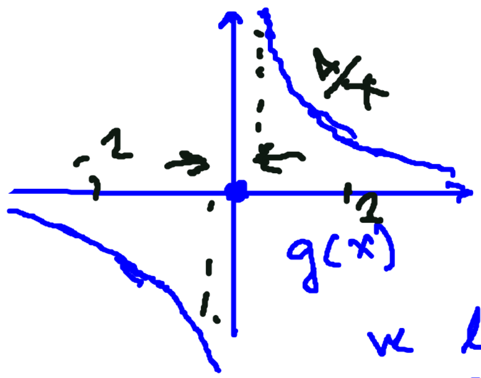


$\lim_{x\to 0} f(x)$ yoktur, $\lim_{x\to -1} = 0$, $\lim_{x\to 1} f(x)=1$



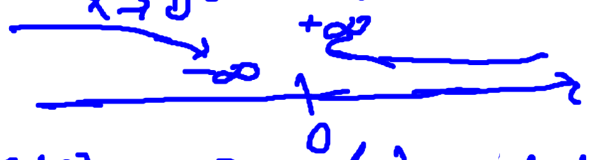
Ancak $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$ ve $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+1$ dir.

b)



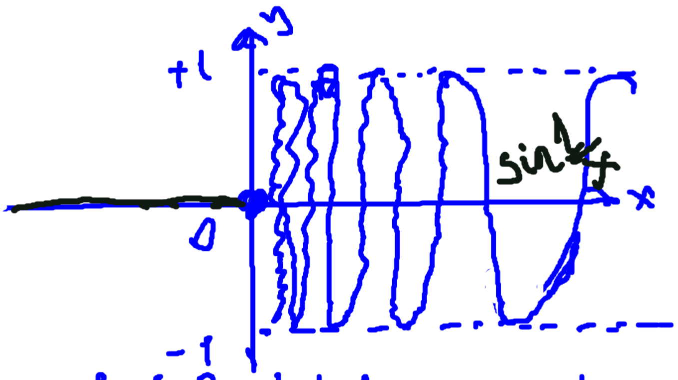
$\lim_{x\to -2} g(x) = -1/2$, $\lim_{x\to 2} g(x)=1/2$ dir.

ancak $\lim_{x\to 0} g(x)$ yoktur. Çünkü



ve $\lim_{x\to 0^-} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ dir.

c)



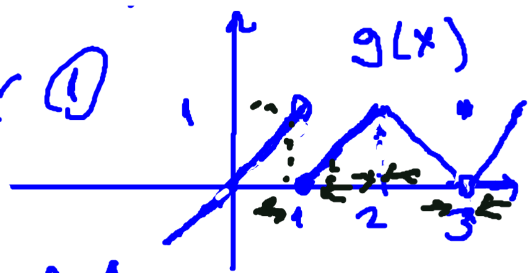
$\lim_{x\to -\pi/2} h(x)=0$ (tanımlı)

$\lim_{x\to 2/\pi} h(x)=\lim_{x\to 2/\pi}\sin(1/x)=1$,

ancak $\lim_{x\to 0^+} h(x)$ yok

çünkü $h(x)$, 0 ın komşuluğunda salınım yapıyor.

Örnekler (1)

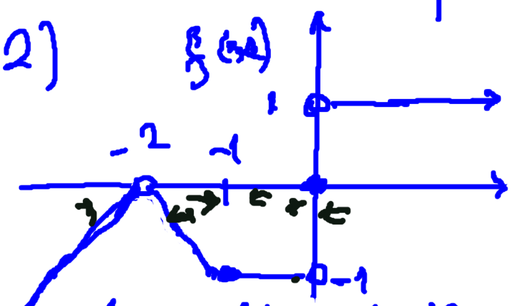


$\lim_{x\to 1} g(x)$ yok $\lim_{x\to 1^-} g(x)=1$, $\lim_{x\to 1^+} g(x)=0$

$\lim_{x\to 2} g(x)=1$

$\lim_{x\to 3} g(x)=0\neq g(3)=1$

2)



$\lim_{t\to -2} f(t)=0$

$\lim_{t\to -1} f(t)=-1$

ve $\lim_{t\to 0} f(t)$ yoktur.

$\lim_{t\to 0^-} f(t)=-1$

$\lim_{t\to 0^+} f(t)=1$ dir.

3) a) $\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} = \overset{\text{belirsiz}}{[0/0]} = \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{\cancel{(x-\sqrt{2})}(x+\sqrt{2})}{\cancel{(x-\sqrt{2})}} = 2\sqrt{2}.$

b) $\lim_{x\to -6} \frac{x+6}{x^2+4x-12} = [0/0] = \lim_{x\to -6} \frac{\cancel{x+6}}{\cancel{(x+6)}.(x-2)} = -1/8$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3} = [0/0] = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}(x-1)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-1} = 2$

d) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{|x|-1} \overset{[0/0]}{=} \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{-x-1} = \lim_{x\to -1} -(x-1) = 2$

	-1		0	
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$		$+x$

(e) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{2-|x|} = [0/0] = \lim_{x\to -2} \frac{(x+1)(x+2)}{2+x} = -1$

Belirsizlikler $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty-\infty\right)$

4) a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} =$

b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{(x+1)^2} = [0/0] = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}\overbrace{(x^2-2x-3)}^{(x-3)\cancel{(x+1)}}}{\cancel{(x+1)^2}} = \lim_{x\to -1}(x-3) = -4$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = [0/0] = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x}-1)\left((\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{x.\left((\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\ldots} = \frac{1}{3}$

$(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

d) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4} = [0/0]$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = [0/0] = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\sin^2 x}}{x.\sin x.(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(1+\cos x)} \overset{?}{=} 1/2$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3-3\cos x} = [0/0] = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(1+\cos x)}{3(1-\cos^2 x)} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x}.(1+\cos x) = 4/3$

0

2.2 Limit Alma Kuralları : $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$

ise

1) $\lim_{x\to a} (f(x) \mp g(x)) = A \mp B$, 2) $\lim_{x\to a} (m.f(x)) = m.A$

3) $\lim_{x\to a} (f(x).g(x)) = A.B$, 4) $B\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = A/B$

4) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{r/s} = A^{r/s}$ ($s\neq 0$ ve r ile s ortak çarpanları olmayan iki tamsayı).

Örnekler 1) $\lim_{x \to a} (x^3 + 4x^2 - 3) = a^3 + 4a^2 - 3$

2) $\lim_{x \to a} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \dfrac{a^4 + a^2 - 1}{a^2 + 5}$, 3) $\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{13}$ dür. $= 4(-2)$

Teorem 1) Eğer $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ ise

$\lim_{x \to c} p(x) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$ dır.

2) Eğer $p(x)$ ve $Q(x)$ polinom fonksiyonlar ve $Q(a) \neq 0$ ise $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{Q(x)} = \dfrac{p(a)}{Q(a)}$ dır.

Örnek: 1) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \dfrac{0}{6} = 0$

2) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} \overset{\{0/0\}}{=} \lim_{x \to 1} \dfrac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x} = 3$

3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} \overset{\{0/0\}}{=} \lim_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x^2+100} - 10) \cdot (\sqrt{x^2+100} + 10)}{x^2 (\sqrt{x^2+100} + 10)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2 (\dots}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} = \dfrac{1}{20}$ olur..

Teorem (1) Sandwich (sıkıştırma) Teoremi: Her bir $x \in (a, b)$ ($x_0 \in (a,b)$ veya $x_0 \notin (a,b)$ olabilir) için $0 \leq g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ oluyor ve $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$ olur.

2) Yukarıdaki özellikteki bir x_0 ve her bir $x \in (a,b)$ için $f(x) \leq g(x)$ olmak üzere $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ve $\lim_{x \to x_0} g(x)$ var ise

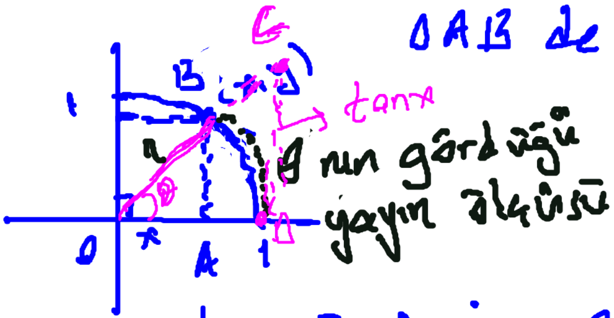
$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$ sağlanır.

Örnekler: 1) Her $x \neq 0$ için $\underbrace{\left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right)}_{= g(x)} \leq u(x) \leq \underbrace{\left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right)}_{h(x)} \Rightarrow \lim_{x \to 0} u(x) = ?$

$\lim_{x \to 0} \left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right) = 1$ ve $\lim_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right) = 1$ old. dan Sandwich Teor.

dan $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$ bulunur.

2) $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$ olduğunu Sand. Teor. kullanarak göst.



$\overset{\triangle}{OAB}$ de $\sin\theta \le \theta$ dır $\Rightarrow \forall\, \theta$ için

$-|\theta| \le \sin\theta \le |\theta|$ olup

$\lim_{\theta\to 0}(-|\theta|) = \lim_{\theta\to 0}(|\theta|) = 0$

olacağı için Sandv. Teorden $\lim_{\theta\to 0}(\sin\theta) = 0$ dır.

3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

$\overset{\triangle}{OAB}$ ve $\overset{\triangle}{ODE}$ üçgenlerinde θ açısı yerine x alınırsa

$\sin x \le x \le \tan x$ eşitsizliği vardır. $\Rightarrow 1 \le \dfrac{x}{\sin x} \le \dfrac{\tan x}{\sin x}$

$\Rightarrow 1 \le \dfrac{x}{\sin x} \le \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x \le \dfrac{\sin x}{x} \le 1$ olup

$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0}(1) = 1$ olacaktır. $\xRightarrow{\text{Sandv. Teor.}} \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ bulunur.

<u>Not</u>: $\xrightarrow{\quad\rightarrow\quad x_0 \quad\leftarrow\quad}$ olmak üzere

$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ vardır} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ ve } \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ var ve eşittirler.} \\ \text{Öyleyse } \lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ dır} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ dır.} \end{array}}$

<u>Örnekler</u>: 1) $\lim_{x\to -2} g(x) = 4$, $\lim_{x\to -2} k(x) = 2$ ve $\lim_{x\to -2} h(x) = -3 \Rightarrow$

$\lim_{x\to -2} \dfrac{(-4g(x) + 5.k(x))}{h(x)} = \dfrac{-4.\lim_{x\to -2} g(x) + 5.\lim_{x\to -2} k(x)}{\lim_{x\to -2} h(x)} = \dfrac{-6}{-3} = 2$

2) $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - 5}{x-2} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x) = ?$

$= \dfrac{\lim_{x\to 4} f(x) - 5}{\lim (x-2)} = 1 \Rightarrow \dfrac{\lim_{x\to 4} f(x) - 5}{2} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x) = 7$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)$'i bulunuz.

Tek başına $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)-5}{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}$ tanımsız

olacağından ve limit değeri var olup $=3$ olduğu için

$f(x)-5$ fonksiyonu $(x-2)$ ye tam bölünmelidir,

yani

$$\begin{array}{r|l} f(x)-5 & x-2 \\ \hline & k(x) \\ \overline{\quad 0 \quad} & \end{array}$$

dan $f(x)-5=(x-2)k(x)$ dir. Böylece de

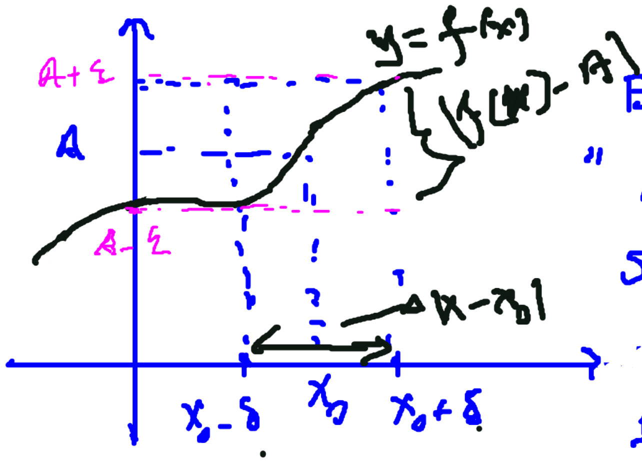
$$\lim_{x\to 2} f(x)-5=\lim_{x\to 2}(x-2)k(x)=0.\lim_{x\to 2}k(x)=0$$

olacağı için $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$ bulunur.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=?\ ,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=?$

Ödev.

2.3. Limitin $\varepsilon-\delta$ lı tanımı: $x_0\in(a,b)$ ve $y=f(x)$ fonk. (a,b) nin tümünde veya x_0 dışındaki tüm (a,b) de tanımlı olmak üzere $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ olsun.



Eğer verilen her bir $\varepsilon>0$ sayısı için "$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$" sağlanacak şekilde en az bir $\delta=\delta(x_0,\varepsilon)\in\mathbb{R}^+$ sayısı varsa f nin x_0 da limiti var ve A dır denir. Yani

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \text{ dır} \Leftrightarrow \text{Verilen her } \varepsilon\in\mathbb{R}^+ \text{ için} \\ \quad\quad "0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon" \\ \text{o.ş. bir } \delta\in\mathbb{R}^+ \text{ vardır.}\end{array}}$$

Örnekler: ① $\lim\limits_{x\to 1}(5x-3)=2$ old. gösteriniz.

Bir $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ sayısı verilsin ve $0<|x-1|<\delta$ kabul edelim. Bu durumda $|f(x)-2|=|5x-3-2|=|5x-5|$ $=5|x-1|<5\cdot\delta\le\varepsilon \iff \delta\le \varepsilon/5$ istenen pozitif sayıdır. Gerçekten de $0<|x-1|<\varepsilon/5$ ise
$|f(x)-2|=|5x-3-2|=|5x-5|=5|x-1|<5\cdot\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon$ gerektirmesi sağlanır, ki $\lim\limits_{x\to 1}(5x-3)=2$ olur.

2) a) $\lim\limits_{x\to x_0}(x)=x_0$ ve (b) $\lim\limits_{x\to x_0}(a)=a$ old. göst.

a) $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ verilsin ve $0<|x-x_0|<\delta$ olsun. O zaman
$|f(x)-x_0|=|x-x_0|<\delta\le\varepsilon$ dan, $\delta\le\varepsilon$ isteneni verir.

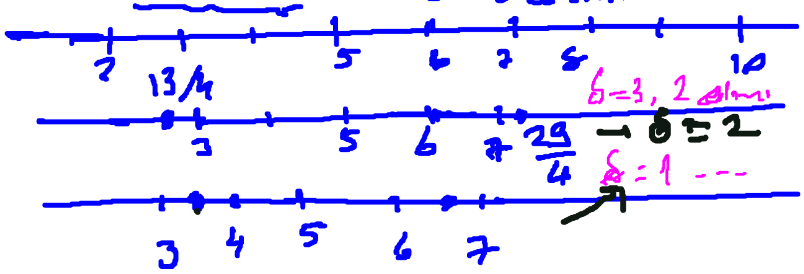
b) $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ var ve $0<|x-x_0|<\delta$ ise $|f(x)-a|=|a-a|=0$ $<\varepsilon$ (her durumda) sağlanır. Yani $\delta\in\mathbb{R}^+$ istenildiği gibi seçilebilir.

3) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x-1}=2$ olduğunu gösteriniz.
$\varepsilon>0$ verilsin. $\delta\in\mathbb{R}^+$ yi bulmak için
$|f(x)-2|=|\sqrt{x-1}-2|<\varepsilon \iff -\varepsilon<\sqrt{x-1}-2<\varepsilon \iff$
$2-\varepsilon<\sqrt{x-1}<2+\varepsilon \iff (2-\varepsilon)^2+1<\underbrace{x}_{3}<(2+\varepsilon)^2+1$ olup, $\delta=3$ alınır

$\varepsilon=1 \Rightarrow 2<x<10,\ x\neq 5$

$\varepsilon=1/2 \Rightarrow \frac{13}{4}<x<\frac{29}{4},\ x\neq 5$

$\varepsilon=1/4 \Rightarrow \frac{65}{16}<x<\frac{97}{16},\ x=5$



Böylece, $0<|x-5|<3 \Rightarrow |\sqrt{x-1}-2<1$.

$0<|x-5|<2 \Rightarrow |\sqrt{x-1}-2<1/2$

$0<|x-5|<1 \Rightarrow |\sqrt{x-1}-2|<1/4$ ... dür.