Olasılık teorisi, belirsizliğin matematiksel olarak modellenmesi ile ilgilenir. Evrende gerçekleşen olayların rasgele bir değişken veya rasgele değişkenlerin fonksiyonları olduğunu düşünürsek, bu değişken ve fonksiyonların bilinmesi/tanımlanabilmesi halinde belirsizlikler ortadan kalkar. Tabiki bu değişkenin ve fonksiyonların kesin olarak bilinmesi pratikte mümkün değildir. Bunun için, rasgele değişkenlerin temsil ettikleri veri setinin konumu, değişkenliği ve sahip olduğu dağılımın şekli karakterize edilmek istenir. Bunun için birçok ölçü kullanılır. Örneğin, konum için, beklenen değer $E(X) = \mu \in \mathbf{R}$; değişkenlik için varyans, $V(X) = \sigma^2 \geq 0$; dağılımın şekli için, çarpıklık katsayısı $E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3$ ve basıklık katsayısı $E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4$ kullanılır. Veri setlerinin temsil ettikleri olasılık dağılımlarının karakteristiklerinin belirlenmesini sağlayan bu ve benzeri ölçümlerin hesaplanmasında momentler kullanılır. Bu nedenle, moment kavramı istatistikte önemli bir yere sahiptir.

MOMENTLER

Raslantı değişkeninin sıfırdan veya beklenen değerinden (μ) veya belli bir sabit değerden sapmalarının değişik kuvvetlerinin beklenen değerine **Moment** adı verilir.

c, bir gerçel sayı ve k pozitif bir tamsayı olsun:

- $E\Big(X^k\Big)$' ya X raslantı değişkeninin sıfır noktasına göre k. dereceden momenti (veya k. dereceden merkezsel olmayan momenti) denir.

$$E\Big(X^k\Big) = \mu_k^{'} = \begin{cases} \sum\limits_{R_X} x^k p(x) & X\text{: Kesikli r.d. ise,} \\ \int_{R_X} x^k f(x)dx & X\text{: Sürekli r.d. ise.} \end{cases}$$

Bir raslantı değişkeninin beklenen değeri, 1. dereceden merkezsel olmayan momenttir:

$$E\Big(X\Big) = \mu = \mu_1^{'}$$

- $E\Big((X-\mu)^k\Big)$' ya X raslantı değişkeninin ortalamaya göre k. dereceden momenti (veya k. dereceden merkezsel momenti) denir.

$$E\Big((X-\mu)^k\Big) = \mu_k = \begin{cases} \sum\limits_{R_X} (x-\mu)^k p(x) & X\text{: Kesikli r.d. ise,} \\ \int_{R_X} (x-\mu)^k f(x)dx & X\text{: Sürekli r.d. ise.} \end{cases}$$

k' nın farklı değerleri için merkezsel momentleri inceleyelim:

$k=0$ ise, $\mu_0 = E\Big((X-\mu)^0\Big) = 1$

$k=1$ ise, $\mu_1 = E\Big((X-\mu)^1\Big) = E\Big(X\Big) - \mu = \mu - \mu = 0$

$k=2$ ise, $\mu_2 = E\Big((X-\mu)^2\Big) = V\Big(X\Big) = \sigma^2 = E\Big(X^2\Big) - \Big[E\Big(X\Big)\Big]^2 = \mu_2^{'} - \Big[\mu_1^{'}\Big]^2$

$k = 3$ ise, $\mu_3 = E\Big((X-\mu)^3\Big) = E\Big(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3\Big) = \mu_3^{'} - 3\mu_2^{'}\mu + 2\mu^3$

$k = 4$ ise, $\mu_4 = E\Big((X-\mu)^4\Big) = E(X^4 - 4X^3\mu + 6X^2\mu^2 - 4X\mu^3 + \mu^4) = \mu_4^{'} - 4\mu_3^{'}\mu + 6\mu_2^{'}\mu^2 - 3\mu^4$

Çarpıklık ve basıklık katsayıları aşağıdaki gibi momentlerden elde edilir:

$$ÇK = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{E\Big((X-\mu)^3\Big)}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$BK = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4 = \frac{E\Big((X-\mu)^4\Big)}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

- $E\Big((X-c)^k\Big)$' ya X raslantı değişkeninin c sabitine göre k. dereceden momenti denir.

$$E\Big((X-c)^k\Big) = \begin{cases} \sum\limits_{R_X} (x-c)^k p(x) & X\text{: Kesikli r.d. ise,} \\ \int_{R_X} (x-c)^k f(x)dx & X\text{: Sürekli r.d. ise.} \end{cases}$$

Yukarıda tanımlanan momentlerin var olabilmesi için, formüldeki toplam ve integralin tanımlı olması gerekmektedir. Momentlerin bulunmasında bir takım fonksiyonlar kullanılır. Bunlar:

1) Moment Çıkaran (Üreten/Yaratan) Fonksiyon
2) Karakteristik (Ayırtkan) Fonksiyon
3) Kümülant Çıkaran (Üreten/Yaratan) Fonksiyon
4) Olasılık Çıkaran (Üreten/Yaratan) Fonksiyon
5) Laplace Fonksiyon

MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON

Bir X kesikli/sürekli raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$M_{\mathbf{x}}(t) = E(e^{tX}) \;\;,\;\; t \in \mathbf{R}$$

Burada, t; moment çıkaran fonksiyonun parametresidir. Bazı Özellikleri:

- $M_{\mathbf{x}}(t)$, t gerçel sayısının sürekli bir fonksiyonudur.
- Her dağılım bir moment çıkaran fonksiyona sahip değildir. Fakat, $t = 0$ noktasında moment çıkaran fonksiyon her zaman tanımlıdır ve $M_{\mathbf{x}}(0) = 1$' dir.

$$M_{\mathbf{x}}(0) = E(e^{0\,.\,X}) = E(e^0) = E(1) = 1$$

ya da

$$M_{\mathbf{x}}(0) = \begin{cases} \sum\limits_{R_X} e^{0\,.\,X} p(x) = \sum\limits_{R_X} p(x) = 1 & X\text{: Kesikli r.d. ise,} \\ \int_{R_X} e^{0\,.\,X} f(x)dx = \int_{R_X} f(x)dx = 1 & X\text{: Sürekli r.d. ise.} \end{cases}$$

- X raslantı değişkeninin k. dereceden merkezsel olmayan momenti:

$$E(X^k) = \frac{d^k M_{\mathbf{X}}(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0} = M_{\mathbf{X}}^{(k)}(0)$$

- $E(X) = \mu$ olmak üzere, X raslantı değişkeninin k. dereceden merkezsel momenti:

$$E\Big((X-\mu)^k\Big) = \frac{d^k M_{\mathbf{X}-\mu}(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0} = M_{\mathbf{X}-\mu}^{(k)}(0)$$

- X raslantı değişkeninin c sabitine göre k. dereceden momenti:

$$E\Big((X-c)^k\Big) = \frac{d^k M_{\mathbf{X-c}}(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0} = M_{\mathbf{X-c}}^{(k)}(0)$$

- e^{tX}' in Maclaurin açılımını kullanarak X raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{X}}(t) &= E(e^{tX}) \\ &= E\left(1 + \frac{tX}{1!} + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \ldots + \frac{(tX)^k}{k!} + \ldots\right) \\ &= 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!}E(X^2) + \frac{t^3}{3!}E(X^3) + \ldots + \frac{t^k}{k!}E(X^k) + \ldots \end{aligned}$$

- X raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_{\mathbf{X}}(t)$ olsun. a ve b sabit değerler olmak üzere,

  [i] $Y = aX + b$ raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{Y}}(t) &= E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(aX+b)}\right) = E\left(e^{atX}e^{tb}\right) \\ &= e^{tb}E\left(e^{atX}\right) = e^{tb}M_{\mathbf{X}}(at)\ ,\ at \in \mathbf{R}' \text{ dir.} \end{aligned}$$

  [ii] $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ standard raslantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{Z}}(t) &= E\left(e^{tZ}\right) = E\left(e^{t\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}\right) = E\left(e^{\left(\frac{t}{\sigma}\right)X}\ e^{-\frac{t\mu}{\sigma}}\right) \\ &= e^{-\frac{t\mu}{\sigma}}E\left(e^{\left(\frac{t}{\sigma}\right)X}\right) = e^{-\frac{t\mu}{\sigma}}M_{\mathbf{X}}\left(\frac{t}{\sigma}\right)\ ,\ \left(\frac{t}{\sigma}\right) \in \mathbf{R}' \text{ dir.} \end{aligned}$$

- Moment çıkaran fonksiyon tektir. $\forall t$ için $M_{\mathbf{X}}(t) = M_{\mathbf{Y}}(t)$ ise, $\forall x$ için $F_{\mathbf{X}}(x) = F_{\mathbf{Y}}(x)$' dir. Diğer bir değişle, X ve Y raslantı değişkenleri aynı dağılıma sahiptir.

KARAKTERİSTİK FONKSİYON

Ön Bilgi:
a ve b birer gerçel sayı ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $z = a + ib$ şeklinde ifade edilen z sayısına karmaşık (kompleks) sayı denir. Karmaşık sayılar kümesi, $\mathbb{C}$ ile gösterilir:

$$\mathbb{C} = \Big\{ z : z = a + ib \;\; ; a, b \in \mathbf{R} \;\text{ ve }\; i = \sqrt{-1} \Big\}$$

- $z = a + ib$ karmaşık sayısında, a' ya karmaşık sayının gerçel (reel) kısmı ve b' ye karmaşık sayının sanal kısmı denir.
- $z = a + ib$ karmaşık sayısının eşleniği, $\bar{z} = a - ib$' dir.
- Karmaşık düzlemde, bir karmaşık sayıya karşılık gelen noktanın başlangıç noktasına (orijine) olan uzaklığına bu sayının mutlak değeri denir ve $|z|$ ile gösterilir: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bir X kesikli/sürekli raslantı değişkeninin karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{itX}) = E\Big(cos(tX) + isin(tX)\Big) \;\; , \;\; i = \sqrt{-1} \;\text{ ve }\; t \in \mathbf{R}$$

Bazı Özellikleri:

- Karakteristik fonksiyon, t' nin sürekli bir fonksiyonudur.
- $cos(tX)$ ve $sin(tX)$, tüm gerçel t değerleri ve tüm gerçel X raslantı değişkenleri için sınırlı olduklarından, $E(e^{itX})$ beklenen değeri her zaman mevcuttur. Bu nedenle, her olasılık dağılımın bir karakteristik fonksiyonu vardır.
- Her bir karakteristik fonksiyon için tek bir olasılık dağılımı vardır.
- $\varphi_{\mathbf{X}}(0) = 1$ 'dir.
- $t \in \mathbf{R}$ olmak üzere, $|\varphi_{\mathbf{X}}(t)| \leq 1$ 'dir.
  e^{itx} karmaşık sayısının mutlak değeri, $\mid e^{itX} \mid = \sqrt{cos^2(tX) + sin^2(tX)} = 1$' dir.
  $p(x) \geq 0$, $f(x) \geq 0$ ve $\mid e^{itX} \mid = 1$ olduğundan,
  $$\mid \varphi_{\mathbf{X}}(t) \mid = \begin{cases} \mid \sum\limits_{R_X} e^{itX} p(x) \mid \leq \sum\limits_{R_X} \mid e^{itX} \mid p(x) = 1 & X\text{: Kesikli r.d. ise} \\ \mid \int_{R_X} e^{itX} f(x)dx \mid \leq \int_{R_X} \mid e^{itX} \mid f(x)dx = 1 & X\text{: Sürekli r.d. ise} \end{cases}$$
  olarak bulunur.
- $\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \varphi_{\mathbf{Y}}(t) \iff F_{\mathbf{X}}(x) = F_{\mathbf{Y}}(x)$'dir.
- X raslantı değişkeninin k. dereceden merkezsel olmayan momenti:
  $$E(X^k) = \frac{1}{i^k} \left[\left. \frac{d^k \varphi_{\mathbf{X}}(t)}{dt^k} \right|_{t=0} \right] = \frac{1}{i^k} \Big[\varphi_{\mathbf{X}}^{(k)}(0) \Big]$$

- $E(X) = \mu$ olmak üzere, X raslantı değişkeninin k. dereceden merkezsel momenti:

$$E\Big((X-\mu)^k\Big) = \frac{1}{i^k}\left[\frac{d^k\varphi_{\mathbf{X}-\mu}(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0}\right] = \frac{1}{i^k}\left[\varphi^{(k)}_{\mathbf{X}-\mu}(0)\right]$$

- X raslantı değişkeninin c sabitine göre k. dereceden momenti:

$$E\Big((X-c)^k\Big) = \frac{1}{i^k}\left[\frac{d^k\varphi_{\mathbf{X}-\mathbf{c}}(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0}\right] = \frac{1}{i^k}\left[\varphi^{(k)}_{\mathbf{X}-\mathbf{c}}(0)\right]$$

- X raslantı değişkeninin karakteristik fonksiyonu $\varphi_{\mathbf{X}}(t)$ olsun. a ve b sabit değerler olmak üzere,

  [i] $Y = aX + b$ raslantı değişkeninin karakteristik fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{Y}}(t) &= E\left(e^{itY}\right) = E\left(e^{it(aX+b)}\right) = E\left(e^{itaX}e^{itb}\right) \\ &= e^{itb}E\left(e^{itaX}\right) = e^{itb}\varphi_{\mathbf{X}}(at)\ ,\ at \in \mathbf{R}' \text{ dir.}\end{aligned}$$

  [ii] $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ standard raslantı değişkeninin karakteristik fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{Z}}(t) &= E\left(e^{itZ}\right) = E\left(e^{it\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}\right) = E\left(e^{i\left(\frac{t}{\sigma}\right)X}\ e^{-\frac{it\mu}{\sigma}}\right) \\ &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}}E\left(e^{i\left(\frac{t}{\sigma}\right)X}\right) = e^{-\frac{it\mu}{\sigma}}\varphi_{\mathbf{X}}\left(\frac{t}{\sigma}\right)\ ,\ \left(\frac{t}{\sigma}\right) \in \mathbf{R}' \text{ dir.}\end{aligned}$$

- Bir X raslantı değişkenine ilişkin karakteristik fonksiyon kullanılarak, bu raslantı değişkeninin olasılık (veya olasılık yoğunluk) fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

  – X kesikli bir raslantı değişkeni olsun. Buna göre, X'in olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$p_{\mathbf{X}}(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\varphi_{\mathbf{X}}(t)dt$$

  – X sürekli bir raslantı değişkeni olsun. Buna göre, X'in olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\Big(\frac{1-e^{-ith}}{ith}\Big)e^{itx}\varphi_{\mathbf{X}}(t)dt$$

  veya $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_{\mathbf{X}}(t)|dt < +\infty$ ise,

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_{\mathbf{X}}(t)dt$$

KÜMÜLANT ÇIKARAN FONKSİYON

X kesikli/sürekli raslantı değişkeninin $M_{\mathbf{X}}(t)$ moment çıkaran fonksiyonu var olsun. Bu raslantı değişkeninin kümülant çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$K_{\mathbf{X}}(t) = \ln\Big[M_{\mathbf{X}}(t)\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{K}_n \frac{t^n}{n!}$$

Ayrıca, X kesikli/sürekli raslantı değişkeninin karakteristik fonksiyonu kullanılarakta kümülant çıkaran fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$K_{\mathbf{X}}(t) = \ln\Big[\varphi_{\mathbf{X}}(t)\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{K}_n \frac{(it)^n}{n!}$$

Bazı Özellikleri:

- $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \ldots$ değerleri X raslantı değişkeninin kümülantları olarak adlandırılır. Bu kümülant değerler kümülant çıkaran fonksiyonu yardımıyla elde edilir. Kümülant çıkaran fonksiyon,
  - Moment çıkaran fonksiyon yardımıyla elde edilmiş ise, kümülant değerler

    $$\mathcal{K}_n = \left.\frac{d^n K_{\mathbf{X}}(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = K_{\mathbf{X}}^{(n)}(0)$$

  - Karakteristik fonksiyon kullanılarak bulunmuş ise, kümülant değerler

    $$\mathcal{K}_n = \frac{1}{i^n}\left[\left.\frac{d^n K_{\mathbf{X}}(t)}{dt^n}\right|_{t=0}\right] = \frac{1}{i^n}\Big[K_{\mathbf{X}}^{(n)}(0)\Big]$$

  olarak elde edilir.

- X raslantı değişkeninin birinci kümülantı beklenen değeri, ikinci kümülantı varyansı (2. dereceden merkezsel moment) ve üçüncü kümülantı 3. dereceden merkezsel momenti vermektedir:

  $$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= E(X) = \mu \\ \mathcal{K}_2 &= E\Big[(X-\mu)^2\Big] = V(X) \\ \mathcal{K}_3 &= E\Big[(X-\mu)^3\Big] \end{aligned}$$

  Ancak, daha yüksek dereceden kümülantlar ne merkezsel olmayan ne de merkezsel momentlere karşılık gelir. Bu kümülantlar, momentlerin daha karmaşık polinom fonksiyonlarıdır.

OLASILIK ÇIKARAN FONKSİYON

X kesikli raslantı değişkeni, negatif olamayan tamsayı değerlerini alsın $\big(X \in \{0,1,2,3,\ldots\}\big)$. Bu raslantı değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$g_{\mathbf{X}}(s) = E(s^X) = p_{\mathbf{X}}(0) + s p_{\mathbf{X}}(1) + s^2 p_{\mathbf{X}}(2) + s^3 p_{\mathbf{X}}(3) + \ldots \quad , \quad |s| \leq 1$$

Bazı Özellikleri:

- $g_{\mathbf{X}}(0) = p_{\mathbf{X}}(0)$ 'dır.
- X raslantı değişkeninin $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ değerini alması olasılığı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$p_{\mathbf{X}}(k) = \frac{1}{k!}\left[\left.\frac{d^k g_{\mathbf{X}}(s)}{ds^k}\right|_{s=0}\right] = \frac{1}{k!}\left[g_{\mathbf{X}}^{(k)}(0)\right]$$

- X raslantı değişkeninin k. faktöriyel (çarpımsal) momenti aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_{[k]} = E\Big[X(X-1)(X-2)(X-3)\ldots(X-(k-1))\Big] \quad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

  $\mu_{[k]}$ değeri, olasılık çıkaran fonksiyon yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mu_{[k]} = \left.\frac{d^k g_{\mathbf{X}}(s)}{ds^k}\right|_{s=1} = g_{\mathbf{X}}^{(k)}(1)$$

  X raslantı değişkeninin beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu_{[1]} \\ V(X) &= \mu_{[2]} + \mu_{[1]} - \left(\mu_{[1]}\right)^2 \end{aligned}$$

- X kesikli raslantı değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu $g_{\mathbf{X}}(s)$ olsun. a ve b sabit değerler olmak üzere,

  [i] $Y = aX + b$ raslantı değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{Y}}(s) &= E\left(s^Y\right) = E\left(s^{(aX+b)}\right) = E\left(s^{aX}\, s^b\right) \\ &= s^b E\left(s^{aX}\right) = s^b g_{\mathbf{X}}(s^a) \ , \ |s^a| \le 1' \text{ dir.} \end{aligned}$$

  [ii] $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ standard raslantı değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{Z}}(t) &= E\left(s^Z\right) = E\left(s^{\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}\right) = E\left(\left(s^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}\right)^X \ s^{-\frac{\mu}{\sigma}}\right) \\ &= s^{-\frac{\mu}{\sigma}} E\left(\left(s^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}\right)^X\right) = s^{-\frac{\mu}{\sigma}} g_{\mathbf{X}}\left(s^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}\right) \ , \ \left|s^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}\right| \le 1' \text{ dir.} \end{aligned}$$

LAPLACE FONKSİYONU

X sürekli raslantı değişkeni, pozitif değerler alsın $(X > 0)$. Bu raslantı değişkeninin Laplace fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$F_{\mathbf{X}}(s) = E(e^{-sX}) \quad , \quad s \ge 0$$

Bazı Özellikleri:

- $F_{\mathbf{X}}(0) = 1$' dir.
- X raslantı değişkeninin k. dereceden merkezsel olmayan momenti:

$$E(X^k) = \frac{1}{(-1)^k}\left[\left.\frac{d^k F_{\mathbf{X}}(s)}{ds^k}\right|_{s=0}\right] = \frac{1}{(-1)^k}\left[F_{\mathbf{X}}^{(k)}(0)\right]$$

- $E(X) = \mu$ olmak üzere, X raslantı değişkeninin k. dereceden merkezsel momenti:

$$E\Big((X-\mu)^k\Big) = \frac{1}{(-1)^k}\left[\left.\frac{d^k F_{\mathbf{X}-\mu}(s)}{ds^k}\right|_{s=0}\right] = \frac{1}{(-1)^k}\left[F_{\mathbf{X}-\mu}^{(k)}(0)\right]$$

- X raslantı değişkeninin c sabitine göre k. dereceden momenti:

$$E\Big((X-c)^k\Big) = \frac{1}{(-1)^k}\left[\left.\frac{d^k F_{\mathbf{X}-\mathbf{c}}(s)}{ds^k}\right|_{s=0}\right] = \frac{1}{(-1)^k}\left[F_{\mathbf{X}-\mathbf{c}}^{(k)}(0)\right]$$

- X sürekli raslantı değişkeninin Laplace fonksiyonu $F_{\mathbf{X}}(s)$ olsun. a ve b sabit değerler olmak üzere,

  [i] $Y = aX + b$ raslantı değişkeninin Laplace fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{Y}}(s) &= E\left(e^{-sY}\right) = E\left(e^{-s(aX+b)}\right) = E\left(e^{-asX}e^{-sb}\right) \\ &= e^{-sb}E\left(e^{-asX}\right) = e^{-sb}F_{\mathbf{X}}(as)\ \ ,\ \ as \geq 0\,' \text{ dır.} \end{aligned}$$

  [ii] $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ standard raslantı değişkeninin Laplace fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{Z}}(s) &= E\left(e^{-sZ}\right) = E\left(e^{-s\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}\right) = E\left(e^{-\left(\frac{s}{\sigma}\right)X}\ e^{\frac{s\mu}{\sigma}}\right) \\ &= e^{\frac{s\mu}{\sigma}}E\left(e^{-\left(\frac{s}{\sigma}\right)X}\right) = e^{\frac{s\mu}{\sigma}}F_{\mathbf{X}}\left(\frac{s}{\sigma}\right)\ \ ,\ \ \left(\frac{s}{\sigma}\right) \geq 0\,' \text{ dır.} \end{aligned}$$

FONKSİYONLARIN BİRBİRLERİNE DÖNÜŞÜMLERİ

$$M_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{tx}) \xrightarrow{t = it} \varphi_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{itx})$$

$$M_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{tx}) \xrightarrow{t = \ln s \text{ (veya } e^t = s)} g_{\mathbf{X}}(s) = E(s^x)$$

$$M_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{tx}) \xrightarrow{t = -s} F_{\mathbf{X}}(s) = E(e^{-sx})$$

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{itx}) \xrightarrow{it = t} M_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{tx})$$

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{itx}) \xrightarrow{it = \ln s \text{ (veya } e^{it} = s)} g_{\mathbf{X}}(s) = E(s^x)$$

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{itx}) \xrightarrow{it = -s} F_{\mathbf{X}}(s) = E(e^{-sx})$$

$$g_{\mathbf{X}}(s) = E(s^x) \xrightarrow{s = e^t} M_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{tx})$$

$$g_{\mathbf{X}}(s) = E(s^x) \xrightarrow{s = e^{it}} \varphi_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{itx})$$

$$F_{\mathbf{X}}(s) = E(e^{-sx}) \xrightarrow{s = -t} M_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{tx})$$

$$F_{\mathbf{X}}(s) = E(e^{-sx}) \xrightarrow{s = -it} \varphi_{\mathbf{X}}(t) = E(e^{itx})$$