

11. DÖNÜŞTÜRME

İlgilendiğimiz Y raslantı değişkeni dağılımı bilinen X (Kesikli ya da Sürekli) raslantı değişkeninin bir fonksiyonu olabilir:

$$Y = g(X)$$

Bu durumda, Y raslantı değişkeninin olasılık/olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu bulunabilir.

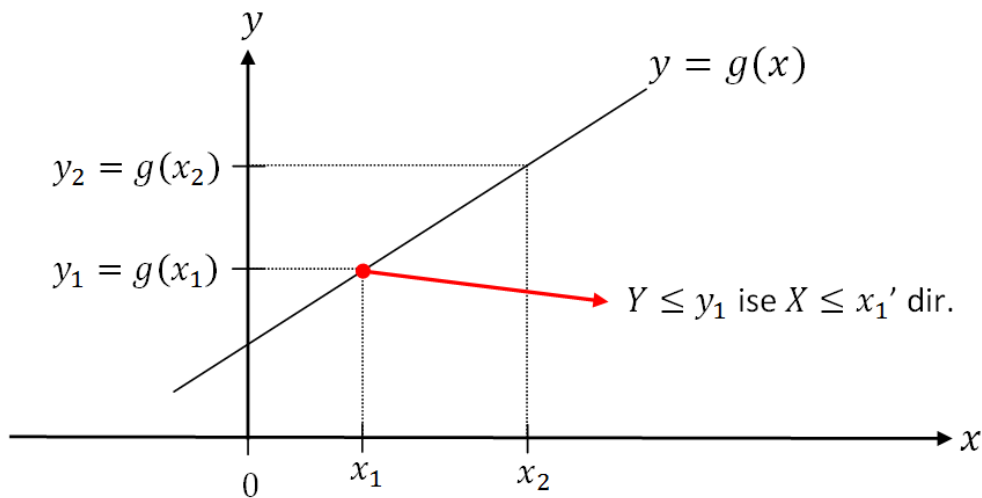
- X , sürekli raslantı değişkeni ise, Y de sürekli raslantı değişkenidir.
- X , kesikli raslantı değişkeni ise, Y de kesikli raslantı değişkenidir.

11.1. SÜREKLİ RASLANTI DEĞİŞKENLERİNDE DÖNÜŞTÜRME

X , sürekli raslantı değişkeni olsun. $Y = g(X)$ olmak üzere, yeni bir Y raslantı değişkeni tanımlanmaktadır. $g(X)$ fonksiyonu, monoton artan ya da monoton azalan bir fonksiyon olabilir:

$Y = g(X)$ $\begin{cases} \rightarrow \text{Monoton Artan: } x_1 < x_2 \text{ için } g(x_1) < g(x_2) \text{ 'dir.} \\ \rightarrow \text{Monoton Azalan: } x_1 < x_2 \text{ için } g(x_1) > g(x_2) \text{ 'dir.} \end{cases}$

a) $g(X)$, monoton artan bir fonksiyon olsun:



$$Y = g(X) \Rightarrow \begin{aligned} y &= g(x) \\ x &= g^{-1}(y) \end{aligned}$$

$g(X)$ ' in monoton artan bir fonksiyon olmasından dolayı $Y \leq y$ ise, $X \leq x'$ tir. Bu durumda, $P(Y \leq y) = P(X \leq x)$ olur.

$$P(Y \leq y) = P(X \leq x)$$

$$F_Y(y) = F_X(x)$$

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

$$F_Y(y) = P(X \leq g^{-1}(y))$$

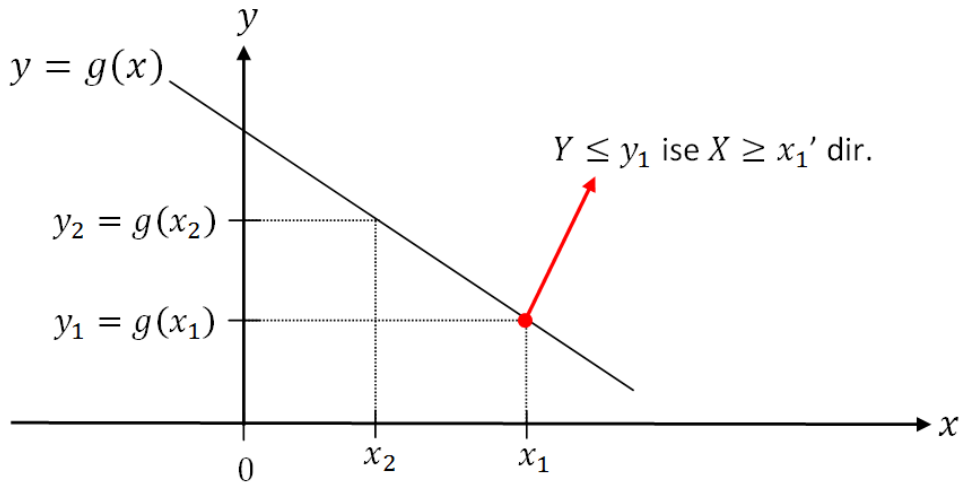
$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$$

Sürekli raslantı değişkenlerinde, dağılım fonksiyonunun raslantı değişkenine göre türevi alındığında olasılık yoğunluk fonksiyonuna geçilmektedir:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y)) \underbrace{\frac{d}{dy} g^{-1}(y)}_{\text{Bu türev daima pozitifdir.}}$$

Not: $y = g(x)$ monoton artan ise, $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) > 0$ dir.

b) $g(X)$, monoton azalan bir fonksiyon olsun:



$g(X)$ ' in monoton azalan bir fonksiyon olmasından dolayı $Y \leq y$ ise, $X \geq x'$ tir. Bu durumda, $P(Y \leq y) = P(X \geq x)$ olur.

$$P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

$$F_Y(y) = P(X \geq g^{-1}(y))$$

$$F_Y(y) = 1 - P(X < g^{-1}(y))$$

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

Sürekli raslantı değişkenlerinde, dağılım fonksiyonunun raslantı değişkenine göre türevi alındığında olasılık yoğunluk fonksiyonuna geçilmektedir:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} [1 - F_X(g^{-1}(y))] \\ &= -\frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = -f_X(g^{-1}(y)) \underbrace{\frac{d}{dy} g^{-1}(y)}_{\text{Bu türev daima negatiftir.}} \end{aligned}$$

Not: $y = g(x)$ monoton azalan ise, $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) < 0$ 'dır.

$g(X)$ ' in monoton artan ya da monoton azalan olması durumları için genel formül aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Örnek: X sürekli raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3+x}{10}, \quad 1 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

Buna göre, $Y = 2X + 5$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} Y = 2X + 5 &\Rightarrow y = 2x + 5 \\ x &= \frac{y-5}{2} = g^{-1}(y) \end{aligned}$$

Y raslantı değişkeninin R_Y değer kümesini bulalım:

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow 7 \leq 2x + 5 \leq 11 \Rightarrow 7 \leq y \leq 11$$

Birinci yol: Genel formülden yararlanarak $f_Y(y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde edelim:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = f_X\left(\frac{y-5}{2}\right) \left| \frac{d}{dy} \left(\frac{y-5}{2}\right) \right| \\ &= \left(\frac{3 + \frac{y-5}{2}}{10} \right) \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{y+1}{40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{y+1}{40} , \quad 7 \leq x \leq 11 \text{ ise} \\ &= 0 , \quad \text{diğer } y \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

Sağlama: $\int_{R_Y} f_Y(y) dy = \int_7^{11} \left(\frac{y+1}{40}\right) dy = 1$ olmalıdır.

Y' nin dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = \int_7^y f_Y(t) dt = \int_7^y \frac{t+1}{40} dt \\ &= \frac{1}{40} \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_7^y = \frac{1}{40} \left(\frac{y^2}{2} + y - \frac{7^2}{2} - 7 \right) = \frac{y^2 + 2y - 63}{80} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{y^2 + 2y - 63}{80} , \quad 7 \leq y \leq 11 \\ &= 0 , \quad y < 7 \\ &= 1 , \quad y \geq 11 \end{aligned}$$

Sağlama: $F_Y(11) = 1$ olmalıdır.

İkinci yol: Dağılım fonksiyonu yöntemini kullanabiliriz.

$$F_Y(y) = \overbrace{P(Y \leq y)}^{Y=2X+5 \text{ (monoton artan)}} = P(2X + 5 \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-5}{2}\right) = F_X\left(\frac{y-5}{2}\right)$$

Bu durumda, X raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonunu bulalım.

$$F_X(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \left(\frac{3+t}{10}\right) dt = \left(\frac{3t}{10} + \frac{t^2}{20}\right)\Big|_1^x = \frac{x^2 + 6x - 7}{20}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{x^2 + 6x - 7}{20} , & 1 \leq x \leq 3 \\ &= 0 , & x < 1 \\ &= 1 , & x \geq 3 \end{aligned}$$

Y' nin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= F_X\left(\frac{y-5}{2}\right) = \frac{\left(\frac{y-5}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{y-5}{2}\right) - 7}{20} \\ &= \frac{(y-5)^2 + 12y - 88}{80} = \frac{y^2 + 2y - 63}{80} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{y^2 + 2y - 63}{80} , & 7 \leq y \leq 11 \\ &= 0 , & y < 7 \\ &= 1 , & y \geq 11 \end{aligned}$$

Y' nin dağılım fonksiyonundan olasılık yoğunluk fonksiyonuna geçiş yapılabilir:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \left[\frac{y^2 + 2y - 63}{80} \right] = \frac{2y + 2}{80} = \frac{y + 1}{40}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{y + 1}{40} , & 7 \leq x \leq 11 \text{ ise} \\ &= 0 , & \text{diğer } y \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

Örnek: X sürekli raslantı değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+3}{56}, \quad 0 \leq x \leq 8 \text{ ise} \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

Buna göre, $Y = -4X - 1$ raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} Y = -4X - 1 &\Rightarrow y = -4x - 1 \\ x &= \frac{y+1}{-4} = g^{-1}(y) \end{aligned}$$

Y raslantı değişkeninin R_Y değer kümesini bulalım:

$$0 \leq x \leq 8 \Rightarrow -32 \leq -4x \leq 0 \Rightarrow -33 \leq -4x - 1 \leq -1 \Rightarrow -33 \leq y \leq -1$$

Birinci yol: Dağılım fonksiyonu yöntemini kullanabiliriz.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \overbrace{P(Y \leq y)}^{Y=-4X-1 \text{ (monoton azalan)}} = P(-4X - 1 \leq y) \\ &= P(-4X \leq 1 + y) = P\left(X \geq \frac{1+y}{-4}\right) \\ &= 1 - P\left(X \leq -\frac{y+1}{4}\right) = 1 - F_X\left(-\frac{y+1}{4}\right) \end{aligned}$$

Bu durumda, X raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonunu bulalım.

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t) dt = \int_0^x \frac{t+3}{56} dt = \frac{1}{56} \left(\frac{t^2}{2} + 3t \right) \Big|_0^x = \frac{x^2 + 6x}{112}$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{x^2 + 6x}{112}, \quad 0 \leq x \leq 8 \\ &= 0, \quad x \leq 0 \\ &= 1, \quad x \geq 8 \end{aligned}$$

Y' nin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= 1 - F_X\left(-\left(\frac{y+1}{4}\right)\right) = 1 - \frac{\left(-\left(\frac{y+1}{4}\right)\right)^2 + 6\left(-\left(\frac{y+1}{4}\right)\right)}{112} \\
 &= 1 - \frac{y^2 + 2y + 1 - 24y - 24}{112 \times 4^2} = \frac{1792 - y^2 + 22y + 23}{1792}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= \frac{-y^2 + 22y + 1815}{1792}, & -33 \leq y \leq -1 \\
 &= 0, & y < -33 \\
 &= 1, & y \geq -1
 \end{aligned}$$

Sağlama: $F_Y(-1) = 1$ olmalıdır.

Y ' nin dağılım fonksiyonundan olasılık yoğunluk fonksiyonuna geçiş yapılabilir:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \left[\frac{-y^2 + 22y + 1815}{1792} \right] = \frac{11 - y}{896}$$

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \frac{11 - y}{896}, & -33 \leq x \leq -1 \text{ ise} \\
 &= 0, & \text{diğer } y \text{ değerleri için}
 \end{aligned}$$

İkinci yol: Genel formülden yararlanarak $f_Y(y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde edelim:

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = f_X\left(\frac{1+y}{-4}\right) \left| \frac{d}{dy} \left(\frac{1+y}{-4}\right) \right| \\
 &= \left(\frac{\frac{1+y}{-4} + 3}{56} \right) \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{11 - y}{896}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \frac{11 - y}{896}, & -33 \leq x \leq -1 \text{ ise} \\
 &= 0, & \text{diğer } y \text{ değerleri için}
 \end{aligned}$$

Y' nin dağılım fonksiyonunu bulalım:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-33}^y f_Y(t) dt = \int_{-33}^y \frac{11-t}{896} dt \\ &= \frac{1}{896} \left(11t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{-33}^y = \frac{1}{896} \left(11t - \frac{y^2}{2} + 33 \times 11 + \frac{33^2}{2} \right) \\ &= \frac{-y^2 + 22y + 1815}{1792} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{-y^2 + 22y + 1815}{1792}, \quad -33 \leq y \leq -1 \\ &= 0, \quad y < -33 \\ &= 1, \quad y \geq -1 \end{aligned}$$

11.2. KESİKLİ RASLANTI DEĞİŞKENLERİNDE DÖNÜŞTÜRME

X, kesikli raslantı değişkeni olsun. X' in aldığı $\forall x_i \in R_X$ için, Y' nin aldığı değer $y_i = g(x_i)$ ' dir. Yani, her x değeri için, $g(x)$ tek bir değer almaktadır. Bu durumda, Y raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu, $p_Y(y) = p_X(x)$ ' tir. Burada, $x = g^{-1}(y)$ olarak yazıldığında,

$$p_Y(y) = p_X(x) = p_X(g^{-1}(y))$$

$$p_Y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X = g^{-1}(y)) = p_X(g^{-1}(y))$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(X) \leq y) \end{aligned} \text{ olasılığından yola çıkılarak bulunur.}$$

Örnek: X kesikli raslantı değişkeni için olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{x}{15}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ &= 0, \quad \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

$Y = 4X + 1$ raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} Y = 4X + 1 &\Rightarrow y = 4x + 1 \\ x &= \frac{y-1}{4} = g^{-1}(y) \end{aligned}$$

Y raslantı değişkeninin R_Y değer kümesini bulalım:

| x | $y = 4x + 1$ |
|-----|--------------|
| 1 | 5 |
| 2 | 9 |
| 3 | 13 |
| 4 | 17 |
| 5 | 21 |

$$R_Y = \{5, 9, 13, 17, 21\}$$

Birinci yol:

$$p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) = p_X\left(\frac{y-1}{4}\right) = \frac{\frac{y-1}{4}}{15} = \frac{y-1}{60}$$

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{y-1}{60}, \quad y = 5, 9, 13, 17, 21 \\ &= 0, \quad \text{diğer } y \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

İkinci yol:

X raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{x(x+1)}{30}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ &= 0, \quad x < 1 \\ &= 1, \quad x \geq 5 \end{aligned}$$

Y raslantı değişkeninin dağılım fonksiyonunu bulunuz:

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)) = F_X\left(\frac{y-1}{4}\right) = \frac{\left(\frac{y-1}{4}\right)\left(\frac{y-1}{4} + 1\right)}{30} = \frac{y^2 + 2y - 3}{480}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{y^2 + 2y - 3}{480}, & y = 5, 9, 13, 17, 21 \\ &= 0, & x < 5 \\ &= 1, & x \geq 21 \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{4}{60}, & 5 \leq y < 9 \\ &= \frac{12}{60}, & 9 \leq y < 13 \\ &= \frac{24}{60}, & 13 \leq y < 17 \\ &= \frac{40}{60}, & 17 \leq y < 21 \\ &= 1, & y \geq 21 \\ &= 0, & y < 5 \end{aligned}$$

Örnek: X kesikli raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{6}, & x = -3, -2, -1, 1, 2, 3 \\ &= 0, & \text{diğer } x \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

Buna göre, $Y = X^2$ raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} Y = X^2 &\Rightarrow y = x^2 \\ &x = \pm\sqrt{y} \end{aligned}$$

Y raslantı değişkeninin R_Y değer kümesini bulalım:

| x | $y = x^2$ |
|-----|-----------|
| -3 | 9 |
| -2 | 4 |
| -1 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |

$R_Y = \{1,4,9\}$ olarak elde edilir.

$$p_Y(y) = p_X(-\sqrt{y}) + p_X(+\sqrt{y})$$

$$p_Y(1) = p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p_Y(4) = p_X(-2) + p_X(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p_Y(9) = p_X(-3) + p_X(+3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Y' nin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{1}{3}, \quad x = 1,4,9 \\ &= 0, \quad \text{diğer } y \text{ değerleri için} \end{aligned}$$

Y' nin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{1}{3}, \quad 1 \leq y < 4 \\ &= \frac{2}{3}, \quad 4 \leq y < 9 \\ &= 1, \quad y \geq 9 \\ &= 0, \quad y < 1 \end{aligned}$$

Aşağıda bazı olasılıklar hesaplanmıştır:

$$P(2 < Y \leq 7) = p_Y(4) = \frac{1}{3}$$

$$P(1 < Y \leq 9) = p_Y(4) + p_Y(9) = \frac{2}{3}$$

$$P(4 < Y < 12) = p_Y(9) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y \geq 9) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y \geq 2) = p_Y(4) + p_Y(9) = \frac{2}{3}$$

$$P(Y > 0) = 1$$