Süreklilik: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonk. verilsin.

a) Aralığın bir $x_0\in(a,b)$ iç noktasındaki süreklilik;

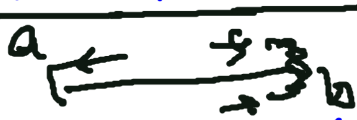
Eğer $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ var ve $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ $\Longleftrightarrow$

Verilen her bir $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ için "$0\le|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$"

gerektirmesini sağlayacak şekilde bir $\delta=\delta(x_0,\varepsilon)\in\mathbb{R}^+$

sayısı varsa f'ye x_0 iç noktasında süreklidir denir.

b) Uç-noktalarda süreklilik



Eğer; $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ ise f'ye a alt-uç noktasında,

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ ise f'ye b üst-uç noktasında

süreklidir denir.

Sürekliliği Test etmek:

$y=f(x)$ fonksiyonu bir $x_0\in\mathbb{R}$ noktasında süreklidir

$\Longleftrightarrow$ (i) $f(x_0)$ var $\equiv f$ x_0 da tanımlıdır

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ vardır, (iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ dır

Örnekler 1) $y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$ fonks $D_f=[-2,2]$ de

süreklidir; çünkü bir $x_0\in(-2,2)$ iç noktası için

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-x_0^2}\in\mathbb{R}$ dir

ve $\lim\limits_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}\in\mathbb{R}^+$ ve $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}\in\mathbb{R}^+$ dır.

2) $y=f(x)=[\![x]\!]$ tam değer fonksiyonu $D_f=\mathbb{R}$

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ de sürekli, ancak $\mathbb{Z}$ de süreksizdir. Çünkü

bir $n\in\mathbb{Z}$ için  $n< n+h<n+1$ $\quad n-1<n-h<n$

$\lim\limits_{x\to n^+}[\![x]\!]=\lim\limits_{h\to 0^+}[\![n+h]\!]=n$ ve $\lim\limits_{x\to n^-}[\![x]\!]=\lim\limits_{h\to 0^+}[\![n-h]\!]=n-1$

dir

f parçalı sürekli olur. $\quad\lim\limits_{x\to n^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to n^-}f(x)$ limit yok

Tanım: Eğer bir $y=f(x)$ fonksiyonu bir $[a,b]$ aralığının her bir noktasında sürekli ise f ye bu aralık üzerinde süreklidir, ve bu küme S_f ile göst.

Teorem: Eğer f ve g fonksiyonları bir x_0 noktasında sürekli iseler

1) $f \mp g$, 2) $f \cdot g$, 3) Her $k \in \mathbb{R}$ sabiti için $k \cdot f$, 4) $g(x_0) \neq 0$ için f/g, 5) $f^{r/s}$ $(r,s \in \mathbb{Z})$ [fonksiyonu x_0 noktasını bulunduran bir (a,b) açık aralık aralığında tanımlı olmak koşuluyla]

fonksiyonları x_0 da sürekli olur. } Kanıtları ilgilenenler için ödev

Kanıt: (2) $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ verilsin.

(i) f x_0 da sürekli old. dan $\exists \delta_1 > 0$; $0 < |x-x_0| < \delta_1 \Rightarrow$

$$|f(x)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(1+|g(x_0)|)},$$

(ii) g, x_0 da sürekli old. dan $\exists \delta_2 > 0$; $0 < |x-x_0| < \delta_2 \Rightarrow$

$$|g(x)-g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|},$$

(iii) $\varepsilon = 1$ için g, x_0 da sürekli old. dan $\exists \delta_3 > 0$;

$$0 < |x-x_0| < \delta_3 \Rightarrow \big||g(x)|-|g(x_0)|\big| \leq |g(x)-g(x_0)| < 1$$

$$\Rightarrow |g(x)|-|g(x_0)| < 1 \Rightarrow |g(x)| < 1+|g(x_0)| \text{ dır.}$$

Burada, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ seçilir ve $0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow$

$$|f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| = |f(x) \cdot g(x) - \underbrace{f(x_0) \cdot g(x)} + \underbrace{f(x_0) \cdot g(x)} - f(x_0) \cdot g(x_0)|$$

$$= |(f(x)-f(x_0)) \cdot g(x) + f(x_0)(g(x)-g(x_0))|$$

$$\leq |f(x)-f(x_0)| \cdot |g(x)| + |f(x_0)|\,|g(x)-g(x_0)|$$

$$\leq |f(x)-f(x_0)|(1+|g(x_0)|) + |f(x_0)| \cdot |g(x)-g(x_0)|$$

$$\leq \cancel{(1+|g(x_0)|)} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{(1+|g(x_0)|)}} + \cancel{|f(x_0)|} \frac{\varepsilon}{2\cancel{|f(x_0)|}} = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olur.

Örnekler : 1) $a_n \neq 0$ ol. üz. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom fonk. her $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir, yani $D_f = S_f = \mathbb{R}$ dir.

2) $p(x)$ ve $q(x)$ polinom fonk ve $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ ise f fonk. $S_f = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\} = D_f$ de süreklidir.

3) $f(x) = |x|$ mutlak değer fonk için $S_f = D_f = \mathbb{R}$ dir.

4) $S_{\sin} = S_{\cos} = \mathbb{R}$, ... ?

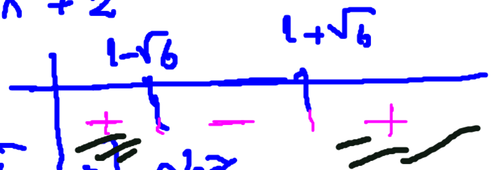
Teorem : [Bileşke fonksiyonların sürekliliği]

Eğer bir f fonks. bir x_0 noktasında sürekli ve bir g fonk $f(x_0)$ noktasında sürekli ise $g\circ f$ fonk. da x_0 noktasında süreklidir. $\cdot\; g(f(x_0)) = (g\circ f)(x_0)$

Örnekler: Aşağıdaki fonksiyonların süreklilik kümelerini bulunuz : a) $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$, b) $y = g(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1+x^4}$

c) $y = h(x) = \left|\dfrac{x-2}{x^2-2}\right|$, d) $y = k(x) = \dfrac{x \cdot \sin x}{x^2+2}$

Çözüm : $\cdot\; x^2 - 2x - 5 = 0 \iff x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{6}$ ve



old. dan $D_f = S_f = (-\infty, 1-\sqrt{6}] \cup [1+\sqrt{6}, \infty)$ dır.

$\cdot\; D_g = S_g = \mathbb{R}$

$\cdot\; D_h = S_h = \mathbb{R} \setminus \{\mp\sqrt{2}\}$

$D_k = S_k = \mathbb{R}$ dır.

Teorem : Eğer bir g fonk. bir b noktasında sürekli ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ ise $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right) = g(b)$ dir.

Örnek : 1) $\lim\limits_{x \to 1} \sin^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1-x^2}\right) = ?$ $\quad \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1-x^2} \overset{?}{=} 1/2$ ve

$\sin^{-1}x = \arcsin x$ fonk $1/2$ de sürekli old. dan

$\lim\limits_{x \to 1} \sin^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1-x^2}\right) = \sin^{-1}\left(\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1-x^2}\right) = \sin^{-1}(1/2) = \pi/6$ dır.

2) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x+1} \cdot e^{\tan x} = ?$ $\quad \lim_{x \to 0} (x+1) = 1$ ve $y = \sqrt{x}$ fonks. $b = 1$ de sürekli old. dan

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \to 0} (x+1)} = \sqrt{1} = 1$$

ve $\lim_{x \to 0} \tan x = 0$ ve $y = e^x$ fonks. 0 da sürekli old. dan

$$\lim_{x \to 0} e^{\tan x} = e^{\lim_{x \to 0} \tan x} = e^0 = 1 \text{ dır. Böylece}$$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x+1} \cdot e^{\tan x} = \lim_{x \to 0} \sqrt{x+1} \cdot \lim_{x \to 0} e^{\tan x} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ dir.}$$

Bir fonksiyonun sürekli genişlemesi.

Bir $y = f(x)$ fonksiyonu için $\lim_{x \to x_0} f(x)$ var ve $= A$ olsun, ancak $y = f(x)$ bu x_0 noktasında tanımlı değil (yani $y = f(x)$, x_0 da sürekli değil) ise

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ A, & x = x_0 \end{cases}$$ biçiminde tanımlı g'ye f nin bir sürekli genişlemesi denir.

Örnek: 1) $y = f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ fonk. $x = 0$ da sürekli değil. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = S_f$

Ancak, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olduğundan;

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$ fonksiyonu f nin bir sürekli genişlemesidir,

ve burada $S_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $S_g = \mathbb{R}$ olur.

f, 0 da kaldırılabilir süreksizlik noktasına sahiptir.

2) $y = f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ fonk için $S_f = D_f = \mathbb{R} \setminus \{\mp 2\}$ dır

ve $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \dfrac{5}{4}$ dır ve

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \begin{cases} \lim_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = +\infty \\ \lim_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = -\infty \end{cases} \text{ yok}$$

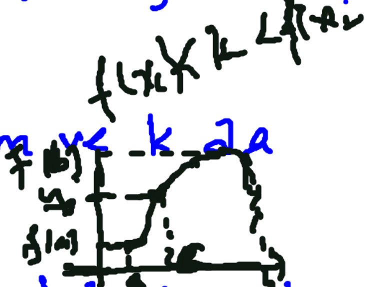
$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 2 \\ 5/4, & x = 2 \end{cases}$$ f nin $x_0 = 2$ deki sürekli genişlemesidir.

2, f nin kaldırılabilir süreksizlik nok.

Süreklilikle ilgili bazı teoremler :

1) **Bolzano Teoremi** : f fonk. $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a)$ ile $f(b)$ ters işaretli ise $f(c)=0$ o.ş. bir $c\in(a,b)$ noktası vardır. (Bu koşuldaki her f nin bir kökü vardır.)

2) **Ara-Değer Teoremi**: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonk. sürekli olsun. $[a,b]$ de $x_1<x_2$ ve $f(x_1)\neq f(x_2)$ o.ş. herhangi iki x_1,x_2 noktaları verildiğinde f fonk. (x_1,x_2) aralığında $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır.



Kanıt: $f(x_1)<f(x_2)$ olduğunu kabul edelim ve k da $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki bir sayı olsun.

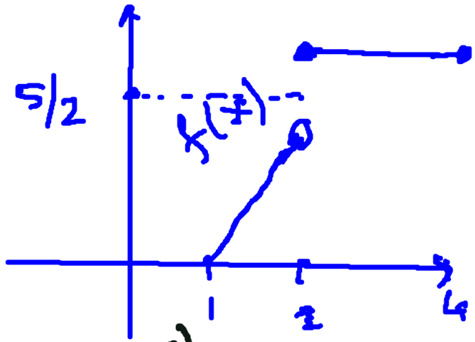
$g:[x_1,x_2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-k$ biçiminde tanımlanan g fonk. süreklidir ve $g(x_1)=f(x_1)-k<0$,

$g(x_2)=f(x_2)-k>0$ dır $\xRightarrow{\text{Bolz. Teor.}}$ $\exists c\in(x_1,x_2)$; $g(c)=0$

$\Rightarrow \exists c\in(x_1,x_2)$; " $g(c)=f(c)-k=0 \Rightarrow f(c)=k$ olur.

3) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli $\Rightarrow f$, $[a,b]$ de sınırlıdır.

Örnek : 1 $f(x)=\begin{cases}2x-2, & 1\le x<2\\ 3, & 2\le x\le 4\end{cases}$ fonk. $f(1)$ ve $f(4)$ arasındaki her değeri alır mı?



$0=f(1)<5/2<f(4)=3$ dır

$\exists x_0\in(1,4)$; $f(x_0)=5/2$ dır.

$[1,2]$ aralığında f sürekli olmadığından böyle bir x_0 olmak zorunda değil

2)

fonksiyonlarının sürekli ve süreksizlik noktalarını bulunuz

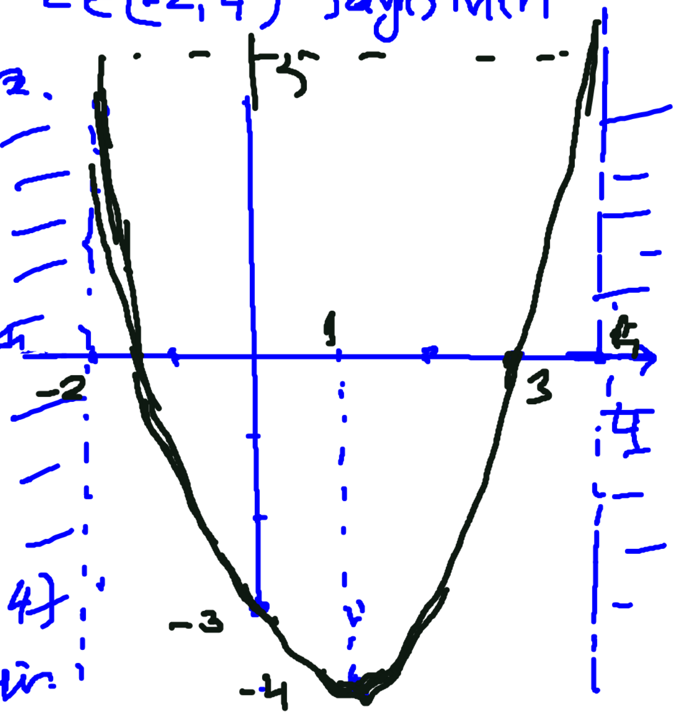
4) Ekstremum Değer Teoremi:

Bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise her $x\in[a,b]$ için

$$f(x_{min}) = m \le f(x) \le M = f(x_{max})$$

olacak şekilde $x_{min}, x_{max}\in[a,b]$ noktaları vardır. Buradaki x_{min} noktasına f nin $[a,b]$ deki minimum noktası, m'ye f nin $[a,b]$ deki minimum (en küçük) değeri, x_{max}'e f nin $[a,b]$ deki maksimum noktası ve M'ye de f nin $[a,b]$ deki maksimum (en büyük) değeri denir.

<u>Örnek</u>: $f:[-2,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$ için m, x_{min}, M ve x_{max} nokta ve değerlerini (varsa) bulunuz. Ayrıca $f(c)=2$ biçiminde $c\in(-2,4)$ sayısının olup olmadığını, varsa bulunuz.



<u>Çözüm</u>: $[-2,4]$ kapalı ve sınırlı ve f, $[-2,4]$ de sürekli olduğundan Ekst. Değ. Teo. den bu aranan nokta ve değerler vardır. Grafikten

$$f(1)=-4 \le f(x) \le 5 = f(-2)=f(4)$$

dir. Öyleyse $x_{min}=1$, $x_{max}=-2$ (veya 4) $\in[-2,4]$ ve de $m=-4$, $M=5$ dir.

Ayrıca f fonk. Ara-Değer Teo. nin koşullarını sağladığı için $f(c)=2$ o.ş. bir $c\in(-2,4)$ vardır. Bu da,

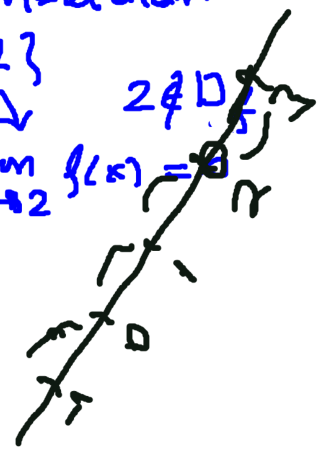
$$f(c)=c^2-2c-3=2 \Rightarrow c^2-2c-5=0 \Rightarrow$$

$$c_{1,2}=1\mp\sqrt{5}\in(-2,4)$$ olur, ki istenendir.

3) $f(x)\begin{cases} x^2-1 & ; -1\leq x<0 \\ 2x & ; 0<x<1 \\ 1 & ; x=1 \\ -2x+4 & ; 1<x<2 \\ 0 & ; 2<x<3 \end{cases}$

Süreksizlik noktaları $=\{0,1,2\}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2 \neq f(1)$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\nexists$ $2\notin D_f$



4) Aşağıdakilerin süreklilik kümeleri?

a) $f(x)=|x-1|+\sin x \longrightarrow S_f=\mathbb{R}$

b) $g(x)=\dfrac{1}{|x|+1}-\dfrac{x^2}{2} \longrightarrow S_g=\mathbb{R}$

c) $h(x)=\dfrac{x\cdot\tan x}{x^2+1} \longrightarrow S_h=\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi/2 \mid k\in\mathbb{Z}\}$ $=S_{\tan}$

d) $k(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x} \longrightarrow S_k=\mathbb{R}$.

e) $\ell(x)=\dfrac{x+2}{\cos x} \longrightarrow S_\ell=\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi/2 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

f) $m(x)=(2x-1)^{1/3} \longrightarrow S_m=\mathbb{R}$ dir.

5) Aşağıdaki fonksiyonların tanımsız oldukları noktalarda sürekli olacak şekilde yeniden tanımlayınız.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3},\ x\neq 3$, b) $g(t)=\dfrac{t^2+3t-10}{t-2},\ t\neq 2$

c) $h(z)=\dfrac{z^2-16}{z^2-3z-4},\ z\neq 4,\ z\neq -1$

Çözüm: (c) $\lim\limits_{z\to 4}\dfrac{z^2-16}{z^2-3z-4}=[0/0]=\lim\limits_{z\to 4}\dfrac{\cancel{(z-4)}(z+4)}{\cancel{(z-4)}(z+1)}=\dfrac{8}{5}$

$\Rightarrow H(z)=\begin{cases} h(z), & z\neq 4 \\ 8/5, & z=4 \end{cases}$ olur. $\left(\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{z^2-16}{z^2-3z-4}\overset{?}{=}\mp\infty\right)$

6) a) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<3 \\ 2ax & x\geq 3 \end{cases}$, b) $g(x)=\begin{cases} x & , x<-2 \\ bx^2 & x\geq -2 \end{cases}$

fonksiyonları her $x\in\mathbb{R}$ noktasında sürekli $\Rightarrow a,b=?$

Çözüm: (a)

x^2-1 $2ax$

$(-\infty,3)$ da sürekli 3 $(3,\infty)$ da sürekli

$x=3$ deki süreklilik için

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$

den $\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-1)=\lim\limits_{x\to 3^+}(2ax)=6a \Rightarrow 6a=8 \Rightarrow a=\dfrac{4}{3}$

$b\to$ ödev(?)

7) (a) $x^3-15x+1=0$ denkleminin, $[-4,4]$ aralığında en az bir çözümünün olduğunu göst.

(b) $f(x)=x^3-8x+10$ ise $f(c)=\pi$ ve $f(c)=-\sqrt{3}$ eşitliklerini sağlayan c sayılarının var olduğ. göst.

(c) $f(x)=x^3-3x-1$ in en az bir kökünün old. göst.

Çözüm: (a) $f(x)=x^3-15x+1$ fonks. $[-4,4]$ de sürekli ve $f(-4)=-64+60+1<0$ ve $f(-3)=-27+45+1>0$ old. dan ve f, $[-4,-3]$ de sürekli $\xRightarrow{\text{Ara-Değer Teor.}} \exists c\in(-4,-3);$

$$f(c)=0 \Rightarrow c^3-15c+1=0 \text{ dır}$$

b) $f(x)$ sürekli ve $f(x)=\pi$ den $g(x)=f(x)-\pi$ de $\mathbb{R}$ de süreklidir ve de $g(-4)=-64+32+10-\pi<0$

old. dan, Ara-Değer teor. den; $g(-3)=-27+24+10-\pi>0$

$$\exists x_0\in[-4,-3]\ ;\ g(x_0)=0 \Rightarrow$$

$$\exists x_0\in(-4,-3)\ ;\ x_0^3-8x_0+10-\pi=0 \Rightarrow x^3-8x_0+10=\pi.$$

c) ödev. $\exists x_0\in\mathbb{R}\ ;\ f(x_0)\overset{?}{=}0$

8) $f(x)=\sin x$ in tüm $\mathbb{R}$ de sürekli olduğunu gösteriniz.

Bir $a\in\mathbb{R}$ alalım, $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ verilsin. ($\lim\limits_{x\to a}\sin x\overset{?}{=}\sin a$)

Her $x\in\mathbb{R}$ için $|\sin x|\le|x|$ ve $|\cos x|\le 1$ old. dan

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |\sin x-\sin a|=\left|2\cdot\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right|$$

$$=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\le 2\cdot\frac{|x-a|}{2}\cdot 1=|x-a|$$

$<\delta\le\varepsilon$ (yani $\delta\le\varepsilon$ seçilerek istenen elde edilir)

Not: f ve g fonks. için $S_{f\mp g}=S_f\cap S_g=S_{f\cdot g}$, $S_{k\cdot f}=k\,S_f$ ($k\in\mathbb{R}$ sabit) ve $S_{f/g}=S_f\cap S_g\setminus\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)=0\}$ dir.