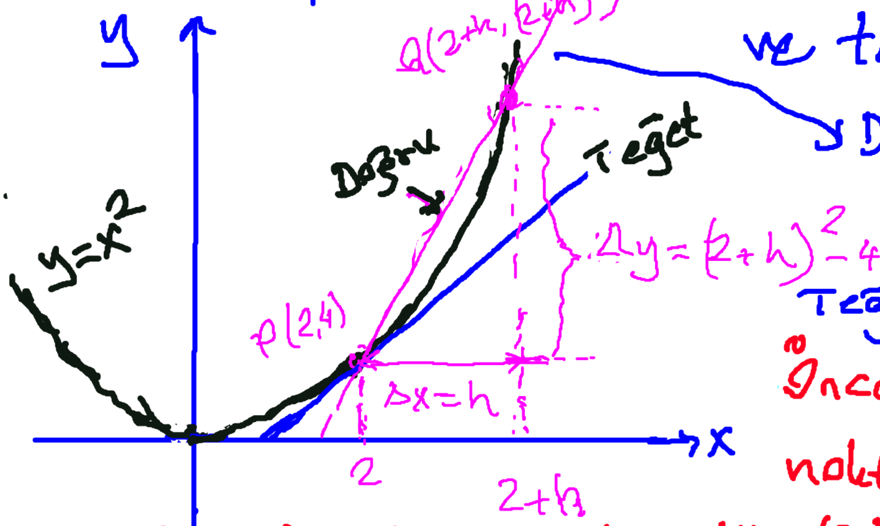
3. BÖLÜM: TÜREV.

3.1. Teğetler ve Türev:

1. Örnek (Bir parabolün teğet doğrusu)

$y = x^2$ parabolünün bir $P(2,4)$ noktasındaki eğimini ve teğetini bulalım.

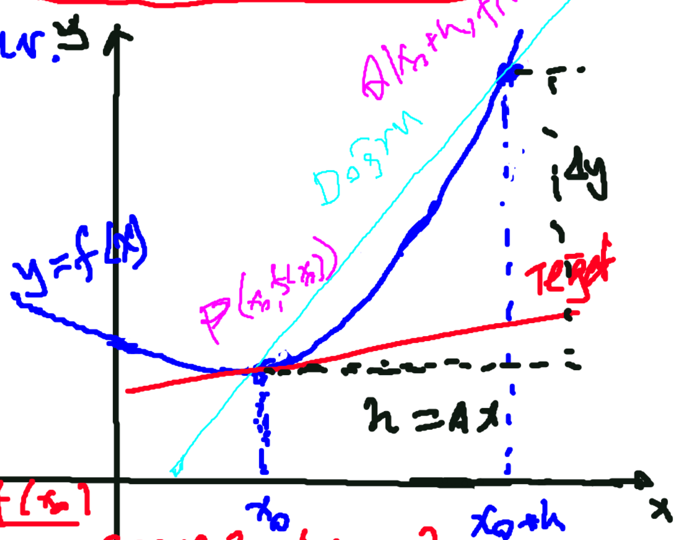


Doğrunun eğimi $= \dfrac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
$= h + 4$ dir.

Teğetin eğimi $= 4$ dür.

Önce $P(2,4)$ ve $Q(2+h,(2+h)^2)$ noktalarından geçen doğruyu düşünürsek, eğimi $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4+h$ olur.

Sonra eğri üzerindeki Q noktası P ye yaklaştırılırsa h da $(\Delta x = 2+h-2)$ sıfıra yaklaşır, yani $4+h$ da 4'e yaklaşır ki bu doğrunun eğiminin 4'e yaklaşması demektir. Böylece $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h\to 0} (4+h) = 4$ olur. Biz de bu 4'ü parabolün P noktasındaki eğimi olarak alacağız. O halde $y = x^2$ parabolünün $P(2,4)$ noktasından geçen teğetinin eğimi 4 olmak üzere teğet doğrusunun denklemi $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$ den $y = 4 + 4(x-2) = 4x - 4$ olur.



Tanım. (Eğim ve Teğet Doğrusu)

Burada $\Delta x = x_0 + h - x_0 = h$ ve $\Delta f = \Delta y = f(x_0+h) - f(x_0)$ olmak üzere

(i) $y = f(x)$ eğrisinin $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki eğimi

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

sayısıdır (varsa).

ve bu eğrinin $P(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen teğet doğrusunun denklemi de eğimi bu m (varsa) olan ve $P(x_0, f(x_0))$ noktasından geçen doğru olan

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0) \equiv y - f(x_0) = m(x - x_0)}$$ dır.

Örnek 2: $y = f(x) = mx + b$ doğrusunun herhangi bir $(x_0, mx_0 + b)$ noktasındaki eğiminin m olduğunu ve bir teğet doğrusuna sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x_0) = mx_0 + b$ ve $f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b \Rightarrow$

$$\text{Eğim} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{mx_0} + mh + \cancel{b} - \cancel{mx_0} - \cancel{b}}{h} = m \text{ dir.}$$

O halde eğrinin $P(x_0, f(x_0))$ nokt. dan geçen teğet doğrusu

$y - y_0 = m(x - x_0)$ dan $y = mx_0 + b + m(x - x_0) = mx + b$ dir.

Örnek 3: (a) $y = f(x) = \frac{1}{x}$ eğrisinin $x = a \neq 0$ noktasındaki eğimi

b) Hangi noktadaki eğimi $-1/4$'e eşittir?

(c) $(a, 1/a)$ noktasında $a \neq 0$ değiştikçe eğri nasıl bir değişim gösterir?

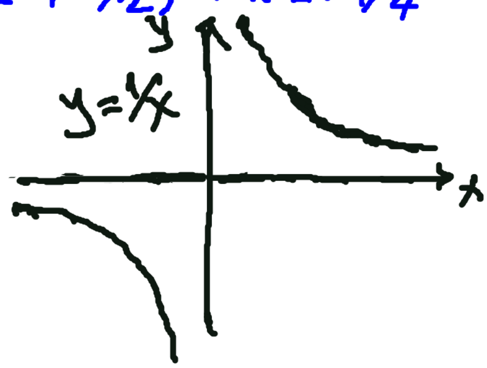
Çözüm: (a) $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a} - \cancel{a} - \cancel{h}}{\cancel{h} \cdot a(a+h)}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -1/a^2$ olur.

b) Bir $a \neq 0$ noktasındaki eğim $-\frac{1}{a^2}$ old. dan

$-1/a^2 = -1/4 \Rightarrow a = \mp 2$ ve $\begin{cases} (2, 1/2) \rightarrow m = -1/4 \\ (-2, -1/2) \rightarrow m = -1/4 \end{cases}$ dır.

c) $m = -1/a^2$ ($a \neq 0$ için $a^2 > 0$) old. dan eğim negatif olacaktır, dolayısıyla bu eğri her yerde azalandır.



Değişim Oranı olarak Türev:

$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ifadesine, h değişimine göre f nin x_0 daki fark oranı diyeceğiz. Eğer $h\to 0$ için fark oranı bir limit değerine sahip ise bu limit değerine f nin x_0 daki türevi diyeceğiz.

Örnek 1: $f(t)=16t^2$ ise f nin herhangi bir t noktasındaki türevi $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{16(t+h)^2-16t^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{16t^2}+32th+16h^2-\cancel{16t^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}(32t+16h)}{\cancel{h}}=32t$ dir.

Örnek 2: Aşağıda verilen eğrilerin belirtilen noktaların daki teğet doğru denklemlerini bulunuz.

a) $y=2\sqrt{x}$; $(1,2)$, b) $y=(x-1)^2+1$; $(1,1)$

c) $y=\dfrac{x}{x-2}$; $(3,3)$, d) $y=t^3+3t$; $(1,4)$, e) $y=\sqrt{x+1}$; $(8,3)$

Çözüm: c) $m=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{3+h}{3+h-2}-3}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3+h-3(1+h)}{h\cdot(1+h)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot(1+h)}=-2$ m

teğet denk: $y=3-2(x-3)=-2x+9$ dır.

2) a) $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin 1/x & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ eğrisinin grafiği $(0,0)$ noktasında bir teğete sahip olur mu?, yanıtınızı açıklayınız.

b) Aynı soru $g(x)=\begin{cases} x\cdot\sin 1/x & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ için?

Çözüm: $m=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin 1/x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin 1/x=0$

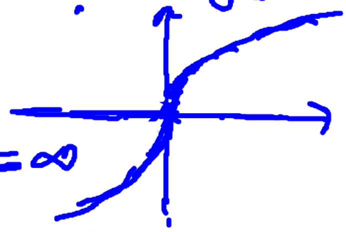
old. dan f nin grafiğinin $(0,0)$ daki teğeti
$y-0=0\cdot(x-0)\Rightarrow y=0$ dır.

b) $m = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot \sin 1/x - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sin 1/x$ yok

$\Rightarrow$ Bu eğrinin $(0,0)$ da bir teğet doğrusu olamaz

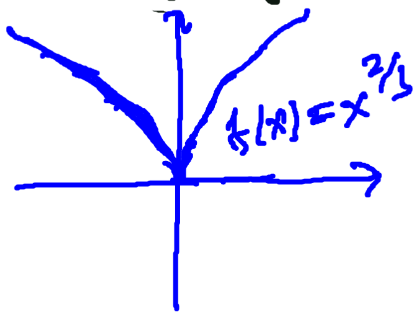
<u>Not</u>: Eğer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \mp\infty$ oluyorsa f nin $x=x_0$ da bir dikey asimtotu vardır denir

<u>Örnek 1</u>: $f(x)=x^{1/3}$ eğrisinin $x=0$ da bir dikey (düşey) asimtotunun olduğunu gösteriniz.



$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^{1/3}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^{2/3}} = \infty$

2) $f(x)=x^{2/3}$ eğrisinin $x=0$ da bir dikey teğeti var mı?



$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^{2/3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^{1/3}}$

$= \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h^{1/3}} = \infty \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1}{h^{1/3}} = -\infty \end{cases}$ yok $\Rightarrow$ dikey asimtotu da yoktur.

3) a) $f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$; $(0,0)$, (b) $g(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x\geq 0 \end{cases}$; $(0,1)$

ödev. eğrilerinin belirtilen noktalarda birer dikey teğeti var mı?

3.2 <u>Türev</u>: $y=f(x)$ fonksiyonu için eğer

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{z\to x} \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $(\Delta y = f(z)-f(x)$ ve $\Delta x = x+h-x)$

limit değerleri var ve $\in \mathbb{R}$ ise f'ye x-değişkenine türevlenebilirdir denir ve f nin bu x noktasındaki türevi $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = y' = D_x y = D_x f(x) = \dfrac{df}{dx}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ değerine eşittir.

1. Örnek: $y=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ $(x\neq 1)$ için $f'(x)=?$ (varsa)

Çözüm: $f'(x) \overset{\text{varsa}}{=} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{x+h}{x+h-1}-\frac{x}{x-1}}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac1h\cdot\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{(x-1)(x+h-1)} = \lim_{h\to0}\frac1h\cdot\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x}+\cancel{xh}-h-\cancel{x^2}-\cancel{xh}+\cancel{x}}{(x-1)(x+h-1)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{\cancel{h}}\,\frac{-\cancel{h}}{(x-1)(x+h-1)} = -\frac{1}{(x-1)^2} \text{ dir.}$$

② $y=f(x)=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$ için $f'(x)=?$ (varsa)

Çözüm (i) $x=0$ için $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\infty$

yani $f'(0)$ yoktur.

(ii) $x>0$ için $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=[0/0]$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ bulunur,}$$

ki buradan $x>0$ için $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ olmuş olur.

Burada, örneğin $x_0=4$ için $f'(4)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{4}}=1/4$

$x_1=5$ için $f'(5)=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ dir.

1. Tanım: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonk. verilsin.

1) Eğer $y=f(x)$ fonksiyonu her bir $x\in(a,b)$ (iç-nokta) noktasında türevlenebilirse, f ye (a,b) açık aralığında türevlenebilirdir denir;

2) Eğer $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ var ve $\in\mathbb{R}$ ise f nin $x=a$ uç noktasında sağ-türevi vardır denir ve $f'(a^+)$ ile,

3) Eğer $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(b)-f(b-h)}{h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(b-h)-f(b)}{-h}$ var ve $\in\mathbb{R}$ ise f nin $x=b$ uç noktasında sol türevi vardır denir ve $f'(b^-)$ ile gös.

Örnekler: ① $y=f(x)=|x|$ in $\mathbb{R}$ deki türevi var mı?

$=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ old.dan

$x \neq 0$ için $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h|-|x|}{h}$

$= \begin{cases} x>0 & \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1 \\ x<0 & \lim_{h\to 0} \frac{-x-h+x}{h} = -1 \end{cases}$ dir. $\underline{x=0}$ için $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ yoktur.

Dolayısıyla $f'(x) = \begin{cases} +1 & , x>0 \\ \text{yok} & , x=0 \\ -1 & , x<0 \end{cases}$ dır.

2) $y = f(x) = \sqrt{x}$ in $[0,\infty)$ daki türevi var mı?

Çözüm: Bir önceki sayfada verildi; $f'(0^+)$ yok, ve her $x>0$ için $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ idi.

Teorem: (Türev $\not\Leftarrow\Rightarrow$ süreklilik). Bir $y=f(x)$ fonksiyonu bir $x=a$ nokt. da türevlenebilirse, f $x=a$ da süreklidir.

Kanıt: $\underline{x \neq a}$ için $f(x)-f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} \cdot (x-a)$ olduğundan

$\lim_{x\to a} [f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a}(x-a) \overset{f \text{ a da türevli}}{=\!=}$

$f'(a) \cdot 0 = 0$ dır, yani $\lim_{x\to a} (f(x)-f(a))$

$= \lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ olur ki

bu f, $x=a$ da sürekli olur demektir.

Alıştırmalar: 1) $y = f(x) = 4-x^2 \Rightarrow f'(-3), f'(0) = ?$

Türev $\Rightarrow$ sürekli

$\not\Leftarrow$ sürekli $\Rightarrow$ türevli

$y = g(x) = \frac{1-x}{2x} \Rightarrow g'(-1), g'(\sqrt{2}) = ?$

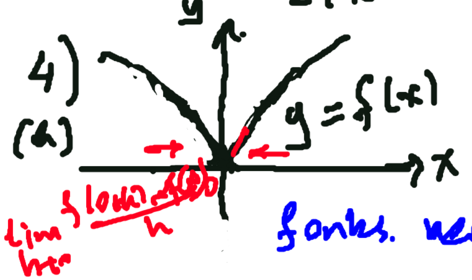
2) $z = \frac{1}{\sqrt{3w-2}} \Rightarrow \frac{dz}{dw} = ?$ $\left(3.w-2>0 \Rightarrow w > 2/3 \right)$

3) Aşağıdaki eğrilerin, verilen noktalardaki teğet doğruları ?

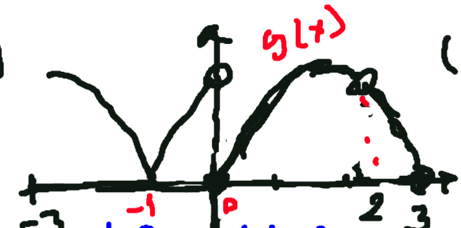
a) $h(x) = \frac{1}{2+x}$; $x_0 = 2$, b) $g(x) = 1+\sqrt{4-x}$, $(3,2)$ $m = g'(x_0)$ $(m = f'(x_0))$

4)

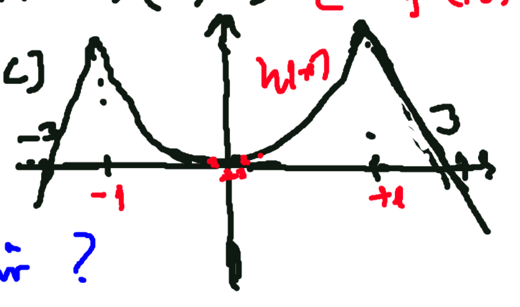
(a)



(b)



(c)



fonks. nerelerde türevli değildir ?

3.3. Türev Alma Kuralları (Polinom, üstel fonk, çarpım, bölüm).

1) $y=f(x)=c$ sabit fonksiyonu için $\frac{df}{dx}=y'=0$ dır.

Çünkü $y'=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$ dır.

2) $\forall n\in\mathbb{Z}^+$ için $\frac{d}{dx}(x^n)=n.x^{n-1}$ dir.

($y=f(x)=x^n$ ise $y'=\lim\limits_{z\to x}\frac{f(x)-f(z)}{x-z}=\lim\limits_{z\to x}\frac{x^n-z^n}{x-z}$

$$=\lim_{z\to x}\frac{\cancel{(x-z)}\left(x^{n-1}+x^{n-2}z+x^{n-3}z^2+\dots+x\cdot z^{n-2}+z^{n-1}\right)}{\cancel{(x-z)}}=n.x^{n-1} \text{ dir})$$

3) $k\in\mathbb{R}$ için $y=g(x)=k.f(x)\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dg}{dx}=k.\frac{df}{dx}$ dır.

$$\left(\frac{dg}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(kf)(x+h)-(kf)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}=k.\frac{df}{dx} \text{ dir}\right)$$

4) Eğer f ve g fonks. türevlenebilirse $f\mp g$ de türevlenebilir ve $\frac{d}{dx}(f\mp g)=\frac{df}{dx}\mp\frac{dg}{dx}$ dir.

$$\left(\frac{d}{dx}(f+g)(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}\right.$$

$$\left.=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx} \text{ dır}\right)$$

5) $a\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x.\ln a$ dır.

$$\left(\frac{d}{dx}(a^x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\overset{?}{=}\ln a \text{ old. göreceğiz}\right)$$

Özel olarak $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x.\underbrace{\ln e}_{=1}=e^x$ dir.

6) f ve g fonks. türevlenebilirse $f.g$ de türevlenebilirdir ve $(f.g)'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$ dir.

$$(f.g)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(f.g)(x+h)-(f.g)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-g(x+h)f(x)+g(x+h)f(x)-f(x).g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x).\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x).g(x)+f(x).g'(x) \text{ dir.}$$

7) f ve g fonks. türevli ve $g(x) \neq 0$ ise $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ de türevlidir ve $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,.\,g'(x)}{(g(x))^2}$ dir. (Kanıt: Ödev)

8) $\forall r \in \mathbb{Q}$ için $\dfrac{d}{dx}(x^r) = r\,.\,x^{r-1}$ dir. (2 de gösterilecek).

İkinci ve Yüksek Mertebeden Türevler:

- $y = f(x) \longrightarrow y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx}$ dir
- $y'' = f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right)$
- $y''' = f'''(x) = \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d^3f}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2f}{dx^2}\right)$

$\vdots$

- $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d^nf}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)$ - - - dir.

Örnekler: ① $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5$ dir.

② $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ nin (varsa) yatay teğetini bulunuz.

Not: Yatay teğetler, $\dfrac{dy}{dx} = 0$ lardır. nokt.

Dolayısıyla $y' = \dfrac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow$ $x_0 = 0 \to (0,2)$, $x_1 = -1 \to (-1,1)$, $x_2 = 1 \to (1,1)$.

$y_0 = 2,\ y_1 = 1,\ y_2 = 1$ dir.

$\frac{1}{x} = x^{-1} \to \left(\frac{1}{x}\right)' = -1\,.\,x^{-2}$

3) $y = \dfrac{1}{x}(x^2 + e^x) \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2}(x^2 + e^x) + \dfrac{1}{x}(2x + e^x)$

4) $y = (x^2+1)\,.\,(x^3+3) \Rightarrow y' = \ ?$

5) $y = g(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dg}{dt} = \dfrac{2t\,(t^2+1) - 2t\,(t^2-1)}{(t^2+1)^2} = \ldots$

6) $y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 6x - 6 \Rightarrow$

$y''' = 6 \Rightarrow y^{IV} = 0 = y^{(5)} = \cdots = y^{(n)}$ dir.

Alıştırmalar: $y = (x + 1/x)(x - \frac{1}{x} + 1) \Rightarrow y' = ?$

$y = \dfrac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x} \Rightarrow y' = ?$, $y = \dfrac{x^3 + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 4} \Rightarrow y' = ?$

$y = \left(\dfrac{a^3+3}{12a}\right).\left(\dfrac{a^4-1}{a^3}\right) \Rightarrow y' = ?$

$y = \sqrt[n]{g(x)^m}$

$y = [g(x)]^{m/n}$

$y' = \frac{m}{n}\,.\,[g(x)]^{\frac{m}{n}-1}\,.\,g'(x)$